
Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Facoltà di Ingegneria



Francesco de Benedictis

Algoritmi per la verifica
non lineare di edifici in c.a.:
analisi comparativa e
confronti normativi

Tesi di Dottorato

XIX Ciclo

Dottorato di Ricerca in Ingegneria delle Costruzioni

I. INDICE

1	INTRODUZIONE	4
2	CALCOLO DEGLI INTEGRALI RELATIVI AL LEGAME COSTITUTIVO DEL CALCESTRUZZO	6
2.1	Riferimenti normativi	6
2.2	Formulazione secante del problema della presso-flessione deviata	12
2.3	Calcolo degli integrali relativi al tratto parabolico del legame costitutivo	16
2.3.1	La formula ricorsiva di integrazione	16
2.3.2	Calcolo automatico delle caratteristiche geometriche della sezione	21
2.3.3	Calcolo automatico delle caratteristiche secanti della sezione	25
2.4	Calcolo degli integrali relativi al tratto costante del legame costitutivo	39
3	ABACHI DI VERIFICA E PROGETTO	85
3.1	Introduzione	85
3.2	Costruzione	85
3.3	Descrizione degli input del programma utilizzato	91
3.4	Descrizione dell'output ed adimensionalizzazione	95
3.5	Abachi di Verifica	98
3.5.1	Costruzione	98
3.5.2	Descrizione ed utilizzo	99
3.6	Abachi di progetto	101
3.6.1	Costruzione	101
3.6.2	Descrizione ed utilizzo	102
4	IMPLEMENTAZIONE DI UN POST-PROCESSORE DEL PROGRAMMA DI ANALISI STRUTTURALE ETABS	105
4.1	Travi: Petabs_Travi_SLU	106
4.2	Pilastrini: Petabs_Pil_SLU	108
4.3	Controlli sui limiti normativi	111
5	INVILUPPI DELLA RISPOSTA SISMICA DI MODELLI STRUTTURALI LINEARI	114

5.1	Introduzione.....	114
5.2	Alcuni metodi approssimati di verifica	116
5.2.1	Inviluppo rettangolare	116
5.3	Inviluppo dei vettori di risposta sismica.....	117
5.3.1	Nozioni preliminari	118
5.3.2	Inviluppo ellittico	124
5.3.3	Iper-inviluppo	132
5.3.4	Contributo delle forze statiche	134
5.4	Analisi comparativa delle procedure di ricombinazione dei segni delle azioni sismiche	135
6	ANALISI COMPARATIVA DELLE PROCEDURE DI CALCOLO E VERIFICA SISMICA DI EDIFICI IN C.A.	138
6.1	Premessa.....	138
6.1.1	Normativa di riferimento.....	139
6.1.2	Modelli di calcolo adottati.....	140
6.1.3	Modellazione FEM e verifiche.....	142
6.2	Descrizione delle strutture esaminate.....	146
6.2.1	Edificio Strategico.....	146
6.2.2	Edificio Civile	149
6.2.3	Materiali	151
6.2.4	Analisi dei Carichi.....	155
6.3	Analisi statiche equivalenti	157
6.3.1	Calcolo e verifiche modelli S1 (DM '96 – T.A.)	157
6.3.2	Calcolo e verifiche modelli S2 (DM '96 – T.A. – angolo sismo var.) 174	
6.3.3	Calcolo e verifiche modelli S3 (DM '96 – S.L.U.)	185
6.3.4	Calcolo e verifiche modelli S4 (DM '96 – S.L.U. – angolo sismo var.) 199	
6.3.5	Calcolo e verifiche modelli S5 (OPCM 3274 – Classe B).....	205
6.3.6	Calcolo e verifiche modelli S6 (OPCM 3274 – Classe A).....	223

6.4	Analisi dinamiche modali.....	232
6.4.1	Calcolo e verifiche modelli D1 (DM '96 – T.A.).....	232
6.4.2	Calcolo e verifiche modelli D2 (DM '96 – T.A. – angolo sismo var.) 246	
6.4.3	Calcolo e verifiche modelli D3 (DM '96 – S.L.U.)	253
6.4.4	Calcolo e verifiche modelli D4 (DM '96– S.L.U. – angolo sismo var.) 263	
6.4.5	Calcolo e verifiche modelli D5 (OPCM 3274 – Classe_B)	267
6.5	Confronti	279
6.5.1	Confronti in termini di tagli alla base.....	279
6.5.2	Confronti in termini di verifiche di resistenza.....	281
6.5.3	Confronti in termini di armature totali	302
6.5.4	Confronti in termini di verifiche di deformabilità.....	308
6.5.5	Conclusioni.....	311
	BIBLIOGRAFIA.....	313
	APPENDICE	317

1 INTRODUZIONE

Negli ultimi anni il settore delle costruzioni è stato caratterizzato dall'emanazione di norme tecniche basate su impostazioni metodologiche, spesso contrastanti, e con cadenze temporali estremamente accelerate, da necessitare continui aggiornamenti o profonde revisioni. Ciò ha provocato un notevole disorientamento nel mondo professionale e ha prodotto, a dispetto dei pur nobili principi informatori, una generalizzata riduzione del grado di sicurezza del processo realizzativo di nuove strutture. Si è assistito, infatti, ad un ricorso sempre più fideistico e totale a *software* di calcolo strutturale di cui non si conoscono realmente le procedure di calcolo adottate e pertanto non si è più in grado di controllare i risultati. Ciò avviene sia per la novità dei metodi di calcolo introdotti, spesso di natura non lineare, sia per la impossibilità di eseguire controlli almeno qualitativi sulla base delle conoscenze ed esperienze maturate nel corso degli anni.

Per tali motivi, scopo del presente lavoro è quello di mettere a punto efficaci strumenti di verifica delle strutture in c.a. e di eseguire delle analisi comparative delle procedure di calcolo e verifica di edifici in c.a. in zona sismica secondo le normative di “vecchia” concezione, costituite dai DD.MM. del 1996 [1], [2], [3] e dalle relative Circolari esplicative [4], e quelle di “nuova” concezione, costituite dal DM 14 Settembre 2005 “Norme Tecniche per le Costruzioni” [5] e dalle Ordinanze PCM 3274/03 e 3431/05 [6] [7].

L'attività di studio svolta può essere riassunta nei seguenti punti:

- Miglioramento dell'algoritmo di tipo secante proposto in [11] per la verifica allo stato limite ultimo di sezioni in c.a. soggette a presso-flessione deviata, allo scopo di implementare un programma di calcolo automatico per la verifica di sezioni poligonali di forma qualsiasi.
- Redazione, con l'ausilio del programma implementato, di abachi per il progetto e la verifica di sezioni rettangolari in c.a..
- Implementazione del codice in Visual Basic di un programma in grado di post-processare i risultati di un programma di analisi strutturale agli elementi

finiti di tipo commerciale (Etabs), per eseguire in automatico il predimensionamento delle armature e le verifiche strutturali.

- Studio del problema della combinazione dei segni delle sollecitazioni sismiche di calcolo derivanti da un'analisi dinamica modale e codifica di un programma basato sul metodo dell'”iper-involuppo” di Menun e Der Kiureghian [16], [17].
- Analisi comparativa delle procedure di calcolo e verifica di edifici in c.a. secondo le differenti normative coesistenti in questo periodo nel nostro Paese.

In particolare, con le analisi comparative si intende indagare tre aspetti:

1. il grado di sicurezza delle strutture esistenti, in particolare quelle ordinarie ad uso residenziale, per capire se ed in quale misura esse risultino non verificate nei confronti delle nuove normative;
2. l'influenza determinata, con riferimento ad una prefissata normativa, dal tipo di approccio adottato, se alle tensioni ammissibili o allo stato limite ultimo;
3. il grado di affidabilità dell'analisi statica rispetto a quella modale, poiché la prima costituisce lo strumento di analisi cui il mondo tecnico-professionale è più avvezzo e mediante il quale è stato progettato il patrimonio edilizio negli ultimi trent'anni, mentre la seconda rappresenta lo strumento di analisi diventato “di fatto” obbligatorio.

Evidentemente, il primo punto è di particolare interesse per costruzioni più recenti, ossia quelle ultimate o in fase di ultimazione nel periodo precedente l'entrata in vigore delle nuove norme, per le sue implicazioni sociali ed economiche. Per quanto riguarda il terzo punto, si intende valutare se l'applicazione delle forze statiche equivalenti lungo direzioni planimetricamente distinte da quelle “x” e “y” lungo cui esse vengono fatte convenzionalmente agire nelle applicazioni correnti possa condurre ad un grado di affidabilità dell'analisi analogo a quello che si consegue con l'analisi modale condotta con la regola 100% - 30%.

2 CALCOLO DEGLI INTEGRALI RELATIVI AL LEGAME COSTITUTIVO DEL CALCESTRUZZO

2.1 Riferimenti normativi

Le verifiche agli stati limite codificate dalla normativa tecnica previgente in Italia (D.M. 9\1\96) si basano, come noto, su di un criterio “semi-probabilistico”, che considera il carattere aleatorio delle azioni esterne e delle caratteristiche dei materiali.

Punto di partenza di tale metodo è la definizione degli "stati limite", ossia di tutte quelle situazioni a partire dalle quali la costruzione, o una delle sue parti, non assolve più il compito cui era destinata. In particolare, si distingue fra:

- "stati limite di esercizio", il cui superamento comporta la fuoriuscita di servizio di elementi della costruzione, senza compromettere l'incolumità pubblica;
- "stati limite ultimi", il cui superamento comporta invece la rovina immediata della struttura.

Scopo delle verifiche di sicurezza è, quindi, quello di mantenere la probabilità di raggiungimento dello stato limite in esame al di sotto di un certo valore prestabilito; si dovrà cioè controllare che gli effetti provocati dalle azioni agenti sulla struttura siano contenute entro determinati valori limite. Dette S le sollecitazioni indotte dalle azioni considerate ed R la resistenza offerta dalla struttura, dovrà cioè verificarsi

$$S \leq R$$

Data la mancanza di dati statistici si rinuncia a calcolare la probabilità di raggiungimento di un certo stato limite e si adotta una soluzione appunto “semi-probabilistica”, introducendo delle grandezze significative dal punto di vista probabilistico: i “valori caratteristici” e i “valori di calcolo”.

Per quanto riguarda i materiali, il metodo "semi-probabilistico" mira a tenere conto del reale comportamento del materiale c.a., e in particolare del calcestruzzo.

Tale modellazione, innovativa rispetto al metodo alle tensioni ammissibili, riguarda solo le verifiche a presso\tenso flessione e non interviene nelle verifiche a taglio o a torsione, per le quali (come per il metodo alle tensioni ammissibili) si fa riferimento al metodo del traliccio resistente di Ritter-Morsch e il calcestruzzo è rappresentato, nelle bielle compresse, esclusivamente con la sua resistenza di calcolo.

Nonostante le ipotesi base della trattazione siano sostanzialmente le stesse del metodo alle tensioni ammissibili, la soluzione del problema, particolarmente con riferimento allo stato limite ultimo, è perseguibile con relativa facilità solo nel caso di sezioni di forma semplice e ricorrendo a determinate ipotesi semplificative. Molto più complessa si rivela qualora si abbia a che fare con sezioni di forma generica, ovvero si voglia giungere ad un risultato “esatto”.

Si riportano nel seguito le prescrizioni della normativa italiana vigente, come si legge nel D.M.LL.PP. 09-01-96.

Il metodo "semi-probabilistico" prevede, tanto per le azioni che per le resistenze, l'introduzione dei cosiddetti "valori caratteristici". Essi sono: per le resistenze dei materiali, i frattili di ordine 0.05 delle rispettive distribuzioni statistiche (ovvero quei valori per i quali la probabilità di non essere raggiunti del 5%) e vengono indicati con f_k ; per le azioni, i frattili di ordine 0.95 ovvero di ordine 0.05 a seconda che i valori rilevanti ai fini della sicurezza siano quelli più elevati ovvero quelli più bassi.

Indicata con f_k la resistenza caratteristica del materiale vale la relazione

$$f_k = f_m - Ks$$

dove f_m è la resistenza media del materiale; s è lo scarto quadratico medio; K è un coefficiente che dipende dalla probabilità prefissata e che, per il valore prima indicato, risulta pari a 1.64.

Analogamente, per le azioni caratteristiche F_k

$$F_k = F_m - K's$$

Data però la mancanza di sufficienti dati statistici, i valori caratteristici delle azioni vengono generalmente assunti pari ai valori indicati dalle normative specifiche.

I valori caratteristici devono essere poi trasformati in "valori di calcolo" mediante l'adozione di opportuni coefficienti. In particolare, per le azioni

$$F^* = \gamma_f F_k$$

essendo i coefficienti γ_f forniti in funzione del tipo di azione e dello stato limite considerato. Tutte le azioni agenti devono essere cumulate secondo condizioni di carico tali da risultare più sfavorevoli ai fini delle singole verifiche, tenendo però conto della ridotta possibilità che tutte le azioni intervengano simultaneamente con i valori massimi.

Per le resistenze dei materiali, i valori di calcolo vengono valutati come

$$f_d = \frac{f_k}{\gamma_m}$$

Equazione 2-1

dove γ_m è un coefficiente tabellato in funzione del materiale e dello stato limite considerato.

Oltre il valore delle resistenze di calcolo, è però necessario conoscere anche le leggi costitutive di acciaio e calcestruzzo.

Di questi, il primo è isoresistente e presenta elevati valori delle sollecitazioni a rottura tanto a compressione quanto a trazione. Il suo modulo di elasticità (E_f) può ritenersi, nell'intervallo di comportamento elastico, ed al variare della qualità del materiale, costante e pari a $E_f = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

Nel campo elastico inoltre, il legame tensioni – deformazioni è di tipo lineare. La normativa assume, sia a trazione che a compressione, come diagramma, $\sigma(\epsilon)$ per l'acciaio quello elastico-perfettamente plastico, costituito dalla retta di Hooke fino al raggiungimento della resistenza di calcolo f_{yd} e da un tratto orizzontale con ordinata pari proprio a f_{yd} sia a trazione che a compressione. Il valore della resistenza di calcolo f_{yd} viene calcolata mediante l'Equazione 2-1 nella quale f_k rappresenta la tensione caratteristica di snervamento dell'acciaio. Il coefficiente γ_m viene posto pari a 1.15 nel caso di stato limite ultimo, e a 1.10 nel caso di stato limite di esercizio.

Se con ε_{fs}^- e con ε_{fs}^+ si indicano i valori in corrispondenza dei quali, seguendo la retta di Hooke, si attingono valori delle tensione pari ad $-f_{yd}$ e f_{yd} , rispettivamente. In Figura 2-1 si riporta il diagramma dell'acciaio.

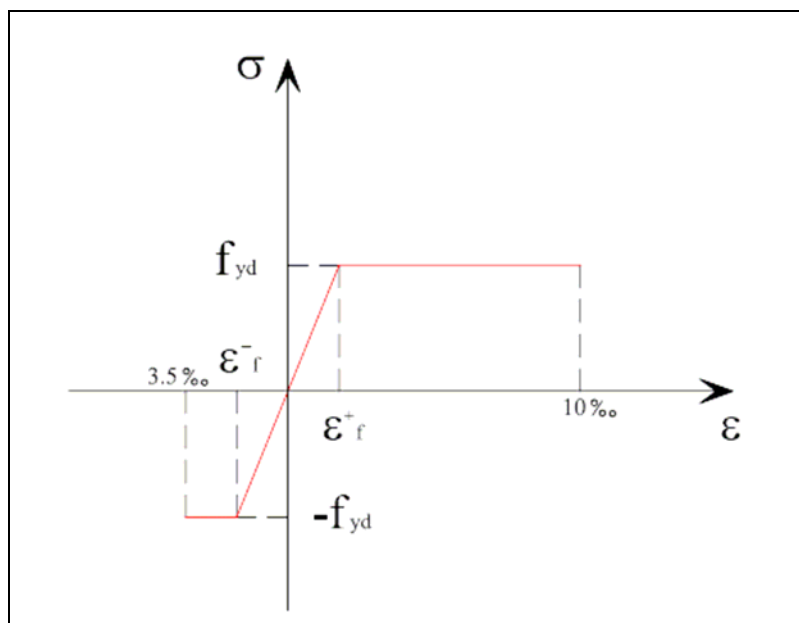


Figura 2-1

Quindi, in definitiva il legame σ - ε per l'acciaio è fornito da

$$\begin{aligned} \sigma_f &= -f_{yd} & \varepsilon < \varepsilon_{fs}^- \\ \sigma_f &= E_f \varepsilon & \varepsilon_{fs}^- \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{fs}^+ \\ \sigma_f &= f_{yd} & \varepsilon > \varepsilon_{fs}^+ \end{aligned}$$

Equazione 2-2

Di contro, il calcestruzzo, risultante dall'aggregazione di materiali diversi, è per sua stessa natura materiale non omogeneo; in particolare esso presenta una buona resistenza a compressione mentre è caratterizzato da valori delle sollecitazioni di rottura a trazione talmente bassi che, nella pratica, si preferisce trascurare l'eventuale parte tesa della sezione.

Il diagramma σ - ε , per quel che riguarda le deformazioni di compressione, risulta sensibilmente parabolico fino ad un valore della ε mediamente pari al 2‰. Il valore del modulo di elasticità varia anch'esso in funzione della deformazione ε e risulta costante solo nel brevissimo tratto iniziale in cui si può parlare di proporzionalità tra sforzi e deformazioni; tale valore iniziale, detto “modulo di elasticità nell'origine”, è quello che viene comunemente usato nel calcolo lineare del cemento armato e verrà in seguito indicato con il simbolo E_0 .

Sulla base di quanto detto, si assume un diagramma (σ, ε) identicamente nullo nel campo delle deformazioni negative; nel campo delle ε positive, si adotta un diagramma parabola-rettangolo, definito da un arco di parabola di secondo grado, il cui vertice ha ascissa $\varepsilon_0 = 2\text{‰}$ e ordinata pari al valore σ_{oc} della tensione di rottura di calcolo, e da un segmento di retta parallelo all'asse delle deformazioni e tangente alla parabola nel vertice. In Figura 2-2 si riporta il diagramma del c.a.

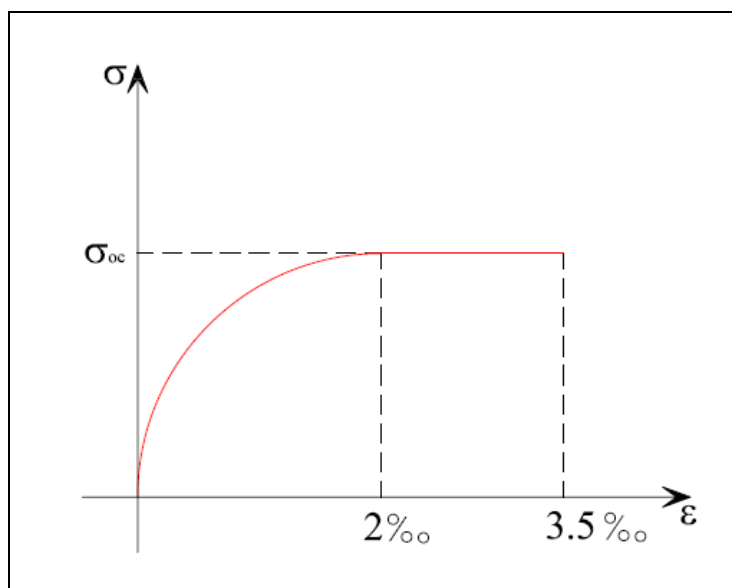


Figura 2-2

Quindi, in definitiva il legame σ - ε per il c.a. è fornito da

$$\sigma_c = 0 \qquad \varepsilon < 0$$

$$\sigma_c = \sigma_c = \sigma_{oc} \quad \varepsilon < 3.5 \text{ ‰}$$

$$1000 \sigma_{oc} \varepsilon \text{ (1-250 ‰)} \quad 0 \leq \varepsilon \leq 2\text{‰}$$

Equazione 2-3

Qualche considerazione circa la tensione di rottura di calcolo σ_{oc} . Il suo valore può essere determinato moltiplicando la resistenza di calcolo cilindrica f_{cd} per un opportuno coefficiente riduttivo k pari a 0.85, che tenga conto della riduzione di resistenza a compressione conseguente alle modalità applicazione del carico (ad esempio, carico applicato in permanenza). A sua volta il valore f_{cd} può derivarsi dal valore f_{ck} della resistenza caratteristica cilindrica, grazie alla Equazione 2-1. Si ha quindi

$$\sigma_{oc} = 0.85 f_{cd} = 0.85 \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 0.85 \frac{0.83 R_{ck}}{\gamma_c}$$

Nella precedente relazione il coefficiente 0.83 consente di calcolare il valore della resistenza caratteristica cilindrica f_{ck} a partire dalla resistenza caratteristica cubica R_{ck} , in funzione della quale viene classificato comunemente il calcestruzzo. Il coefficiente γ_c viene assunto pari a 1.6 nel caso di stato limite ultimo e a 1.0 nel caso di stato limite di esercizio.

A base della trattazione, la normativa vigente assume ancora le seguenti ipotesi:

1. conservazione delle sezioni piane;
2. deformazione massima del calcestruzzo compresso pari al 3.5‰ ; nel caso di flessione semplice e composta con asse neutro reale, e variabile dal valore predetto a 2 ‰ quando l'asse neutro, esterno alla sezione, tende all'infinito;
3. deformazione massima dell'armatura tesa pari al 10 ‰ .

2.2 Formulazione secante del problema della pressoflessione deviata

Considerata la sezione retta di una trave, sia N lo sforzo normale e $\mathbf{M}=\{M_x, M_y\}$ il vettore delle componenti del momento flettente. Indicando con $\mathbf{r}(P)$ il vettore posizione del generico punto P della sezione, la condizione di equilibrio è fornita dalla seguente espressione:

$$\begin{cases} N = \int_A \sigma(\varepsilon) dA \\ \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \end{pmatrix} = \int_A \boldsymbol{\rho} \times \sigma(\varepsilon) \mathbf{k} dA \end{cases}$$

Sistema 2-1

dove $\boldsymbol{\rho} = \{\mathbf{r} \ 0\}$, A denota il dominio della sezione, \mathbf{k} è il versore dell'asse z , ortogonale alla sezione, e $\sigma(\varepsilon)$ è la tensione agente nel punto P .

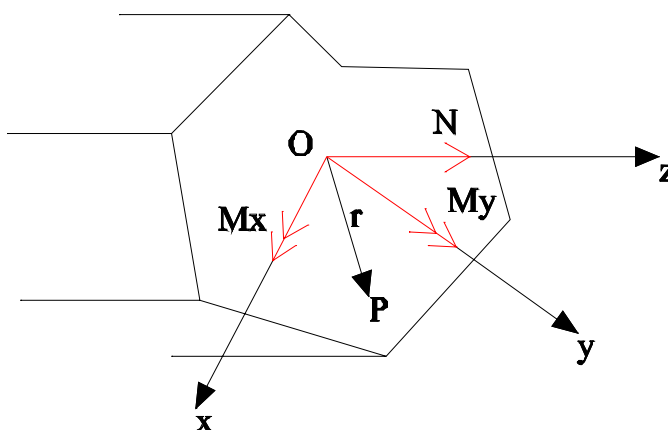


Figura 2-3

La seconda delle relazioni precedenti può scriversi in modo equivalente:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{M} = \int_A \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{p} dA$$

Equazione 2-4

sicché, osservando che solo le prime due componenti delle quantità vettoriali sono diverse da zero, possiamo scrivere in modo equivalente:

$$\mathbf{M}^\perp = \begin{pmatrix} -M_y \\ M_x \end{pmatrix} = \int_A \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{r} dA$$

Equazione 2-5

Adottando un approccio secante il legame costitutivo non lineare viene espresso nella forma:

$$\sigma(\mathbf{r}) = \tilde{E}^s[\varepsilon(\mathbf{r})] \varepsilon(\mathbf{r}) = E^s(\mathbf{r}) \varepsilon(\mathbf{r})$$

Equazione 2-6

in cui la funzione E^s associa ad ogni punto \mathbf{r} un modulo di Young fittizio definito in modo tale da lasciare costante il valore della tensione nel punto.

Nell'ipotesi di conservazione delle sezioni piane si può assumere per il campo di dilatazione una distribuzione lineare del tipo:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \mathbf{g} \bullet \mathbf{r}$$

Equazione 2-7

con \mathbf{g} gradiente del campo e ε_0 dilatazione della fibra passante per l'origine del sistema di riferimento. Pertanto, la condizione di equilibrio del Sistema 2-1 diventa:

$$\begin{cases} N = \left(\int_A E^s(\mathbf{r}) \mathbf{r} dA \right) \mathbf{g} + \left(\int_A E^s(\mathbf{r}) dA \right) \varepsilon_0 \\ \mathbf{M}^\perp = \left(\int_A E^s(\mathbf{r}) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) dA \right) \mathbf{g} + \left(\int_A E^s(\mathbf{r}) \mathbf{r} dA \right) \varepsilon_0 \end{cases}$$

Sistema 2-2

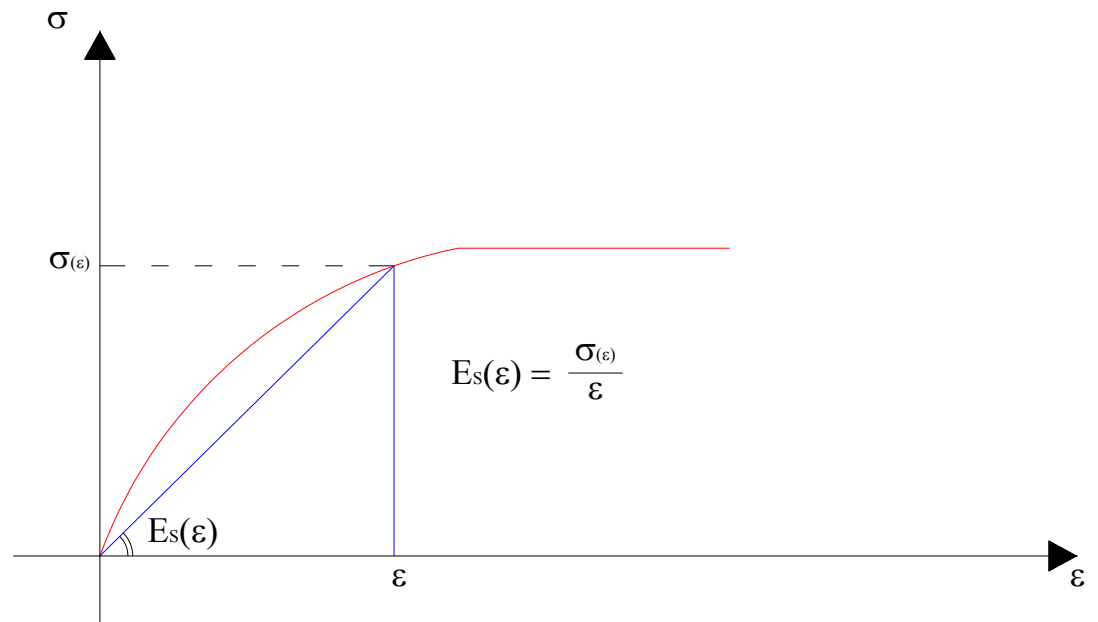


Figura 2-4

Le grandezze elastiche, che compaiono nel Sistema 2-2 diventano così grandezze elastiche secanti e la condizione di equilibrio viene scritta, in notazione matriciale, in funzione della matrice di rigidezza elastica secante della sezione \mathbf{K}_s :

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}_s [\mathbf{u}] \mathbf{u}$$

Equazione 2-8

Il vettore \mathbf{f} è esso stesso incognito; infatti, nello spirito della verifica allo stato limite ultimo, si cercano i valori ultimi \mathbf{f}_u delle sollecitazioni. Le componenti del vettore \mathbf{f}_u sono tali da garantire l'equilibrio della sezione sotto la condizione che almeno uno dei due materiali abbia raggiunto le dilatazioni ultime prescritte dalle normative vigenti.

In definitiva il problema da risolvere si formalizza come segue:

$$\mathbf{f}_u(\lambda) = \mathbf{K}_s [\mathbf{u}] \mathbf{u}$$

Equazione 2-9

in cui λ è uno scalare incognito, attraverso cui vengono amplificate le sollecitazioni \mathbf{f} inizialmente agenti sulla sezione ossia quelle ottenute dal calcolo del modello strutturale.

In base a tale approccio, non è necessario costruire il dominio limite della sezione verificando che il vettore \mathbf{f} sia al suo interno, ma è sufficiente verificare che sia $\lambda > 1$ con una sensibile riduzione dei tempi di calcolo.

Poiché la sollecitazione agente ha tre componenti e non è noto *a priori* in quale modo esse varieranno, il coefficiente di amplificazione ultimo dei carichi viene determinato come minimo tra quelli per i quali si attinge la condizione di crisi aumentando una sola componente, due componenti lasciando la terza costante oppure amplificando omoteticamente tutte e tre le componenti. In definitiva occorre eseguire sette diverse verifiche, una per ciascuna condizione di carico, verificando che il coefficiente amplificativo dei carichi sia sempre maggiore di uno.

In un lavoro precedente [11] la funzione non lineare $\sigma(\varepsilon)$ è stata approssimata con una di tipo polinomiale; in tal modo gli integrali che compaiono nel Sistema 2-2 possono essere calcolati riconducendo gli integrali di area ad integrali estesi alla frontiera ed eseguendo per essi un'integrazione numerica. Nel caso specifico del diagramma parabola–rettangolo fornito dalla normativa vigente nel lavoro citato si consegue un'ottima approssimazione con un polinomio di quinto grado.

Per migliorare l'efficienza numerica della procedura, nel presente lavoro, sono state sviluppate ulteriori formule che consentono di valutare, in maniera analitica ed in funzione delle sole coordinate dei vertici della sezione, le componenti della matrice di rigidezza elastica \mathbf{K}_s relativamente ai singoli tratti del legame costitutivo del calcestruzzo: il tratto parabolico è gestito con formule relative ad un arbitrario legame costitutivo espresso in forma polinomiale mentre il tratto costante è gestito con ulteriori formule, specificatamente sviluppate; inoltre, per eseguire anche le verifiche di sezioni miste acciaio-clc, tale approccio si può estendere anche agli

integrali relativi ai tratti costanti del legame costitutivo dell'acciaio, mentre il tratto inclinato può essere gestito con una retta di coefficiente E_f .

2.3 Calcolo degli integrali relativi al tratto parabolico del legame costitutivo

Nel campo di dilatazioni compreso tra 0 e 2‰ il legame costitutivo è fornito dalla seconda Equazione 2-3:

$$\sigma_c = 1000 \sigma_{oc} \varepsilon (1 - 250 \varepsilon)$$

e pertanto, in base all'Equazione 2-6, risulta:

$$\tilde{E}^s(\varepsilon) = (1000 - 2,5 \cdot 10^5 \varepsilon) \sigma_{oc}$$

Equazione 2-10

Nel paragrafo seguente si mostra come sia possibile valutare in modo esatto gli integrali che compaiono nel Sistema 2-2 in funzione delle sole coordinate dei vertici del sottodominio in cui è assegnato il tratto parabolico del legame costitutivo. Per maggiore generalità la funzione \tilde{E}^s è denotata con f .

2.3.1 La formula ricorsiva di integrazione

Sia V^d uno spazio vettoriale di dimensione finita d e sia $\Omega \subset V^d$ un dominio compatto generalmente regolare di frontiera $\partial\Omega$. Sia ancora ε una funzione scalare lineare definita in Ω ed f una funzione reale di variabile reale di classe $C^1(\Re)$. Vale la formula:

$$\int_{\Omega} f(\varepsilon[\mathbf{r}]) \otimes [\mathbf{r}, m] d\Omega = \frac{1}{m+d} \left[\int_{\partial\Omega} f(\varepsilon[\mathbf{r}]) \otimes [\mathbf{r}, m] (\mathbf{r} \bullet \mathbf{n}) ds - \int_{\Omega} d_{\mathbf{r}} f(\varepsilon[\mathbf{r}]) \otimes [\mathbf{r}, m+1] d\Omega \right]$$

Equazione 2-11

Poiché risulta:

$$d_{\mathbf{r}} f(\varepsilon[\mathbf{r}]) = \text{grad} f(\varepsilon[\mathbf{r}]) = \frac{df}{d\varepsilon} \text{grad} \varepsilon = \frac{df}{d\varepsilon} \mathbf{g}$$

Equazione 2-12

avendo posto $\text{grad} \varepsilon = \mathbf{g}$, la Equazione 2-11 si può scrivere anche:

$$\int_{\Omega} f(\varepsilon[\mathbf{r}]) \otimes [\mathbf{r}, m] d\Omega = \frac{1}{m+d} \left[\int_{\partial\Omega} f(\varepsilon[\mathbf{r}]) \otimes [\mathbf{r}, m] (\mathbf{r} \bullet \mathbf{n}) ds - \int_{\Omega} \frac{df}{d\varepsilon} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g}) \otimes [\mathbf{r}, m] d\Omega \right]$$

Equazione 2-13

Dimostriamo la formula per m=2.

Per il teorema della divergenza, si ha:

$$\int_{\Omega} \text{div} f(\varepsilon[\mathbf{r}]) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} f(\varepsilon[\mathbf{r}]) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \mathbf{n} ds$$

Equazione 2-14

Esprimendo il primo membro della Equazione 2-14 in termini di componenti,

$$\left[\int_{\Omega} \text{div} f(\varepsilon[\mathbf{r}]) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) d\Omega \right]_{ij} = \int_{\Omega} (f(\varepsilon[\mathbf{r}]) \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}_k)_{/k} d\Omega$$

Equazione 2-15

dove il simbolo $()_{/k}$ indica la derivazione del termine tra parentesi rispetto all'indice k. Applicando la regola di derivazione del prodotto di funzioni:

$$\left[\int_{\Omega} \text{div} f(\varepsilon[\mathbf{r}]) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) d\Omega \right]_{ij} = \int_{\Omega} \left[(f(\varepsilon[\mathbf{r}]))_{/k} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}_k + f(\varepsilon[\mathbf{r}]) (\mathbf{r}_i)_{/k} \mathbf{r}_j \mathbf{r}_k + \right. \\ \left. + f(\varepsilon[\mathbf{r}]) \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_j)_{/k} \mathbf{r}_k + f(\varepsilon[\mathbf{r}]) \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j (\mathbf{r}_k)_{/k} \right] d\Omega$$

Equazione 2-16

Detto δ_{ik} il simbolo di Kronecker, si osserva che risulta:

$$\mathbf{r}_{i/k} = \delta_{ik}; \quad \mathbf{r}_{k/k} = d$$

e quindi l'Equazione 2-16 può scriversi:

$$\left[\int_{\Omega} \text{div} f(\varepsilon[\mathbf{r}]) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) d\Omega \right]_{ij} = \left[\int_{\Omega} \text{grad} f(\varepsilon[\mathbf{r}]) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) d\Omega \right]_{ij} + (d+2) \left[\int_{\Omega} f(\varepsilon[\mathbf{r}]) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) d\Omega \right]_{ij}$$

Equazione 2-17

Confrontando l'Equazione 2-14 e l'Equazione 2-17, si ha:

$$\int_{\Omega} f(\varepsilon[\mathbf{r}]) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) d\Omega = \frac{1}{d+2} \left[\int_{\partial\Omega} f(\varepsilon[\mathbf{r}]) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} \text{grad} f(\varepsilon[\mathbf{r}]) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) d\Omega \right]$$

Equazione 2-18

ossia:

$$\int_{\Omega} f(\varepsilon[\mathbf{r}]) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) d\Omega = \frac{1}{d+2} \left[\int_{\partial\Omega} f(\varepsilon[\mathbf{r}]) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) (\mathbf{r} \bullet \mathbf{n}) ds - \int_{\Omega} \frac{df}{d\varepsilon} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g}) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) d\Omega \right]$$

Equazione 2-19

cioè proprio l'Equazione 2-13 per $m=2$.

Per $m>2$, la dimostrazione è analoga.

Si noti che, al secondo membro dell'Equazione 2-13 compare ancora un integrale di superficie. Se la funzione $\frac{df}{d\varepsilon}$ è di classe $C^1(\mathfrak{R})$, ossia se la funzione f è di classe $C^2(\mathfrak{R})$, tale integrale può essere risolto applicando nuovamente la stessa Equazione 2-11. Si ha:

$$\int_{\Omega} \frac{df}{d\varepsilon} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g}) \otimes [\mathbf{r}, m] d\Omega = \frac{1}{m+d} \left[\int_{\partial\Omega} \frac{df}{d\varepsilon} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g}) \otimes [\mathbf{r}, m] (\mathbf{r} \bullet \mathbf{n}) ds + \int_{\Omega} d_{\mathbf{r}} \left[\frac{df}{d\varepsilon} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g}) \right] \otimes [\mathbf{r}, m+1] d\Omega \right]$$

Equazione 2-20

Poiché si verifica:

$$d_r \left[\frac{df}{d\varepsilon} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g}) \right] = \frac{d^2 f}{d\varepsilon^2} \mathbf{g} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g}) + \frac{df}{d\varepsilon} \mathbf{g}$$

Equazione 2-21

sostituendo nell'Equazione 2-20, si ottiene:

$$\int_{\Omega} \frac{df}{d\varepsilon} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g}) \otimes [\mathbf{r}, m] d\Omega = \frac{1}{m+d} \left[\int_{\partial\Omega} \frac{df}{d\varepsilon} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g}) \otimes [\mathbf{r}, m] (\mathbf{r} \bullet \mathbf{n}) ds + \int_{\Omega} \frac{d^2 f}{d\varepsilon^2} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g})^2 \otimes [\mathbf{r}, m] d\Omega - \int_{\Omega} \frac{df}{d\varepsilon} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g}) \otimes [\mathbf{r}, m] d\Omega \right]$$

Equazione 2-22

e quindi:

$$\int_{\Omega} \frac{df}{d\varepsilon} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g}) \otimes [\mathbf{r}, m] d\Omega = \frac{1}{m+d+1} \left[\int_{\partial\Omega} \frac{df}{d\varepsilon} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g}) \otimes [\mathbf{r}, m] (\mathbf{r} \bullet \mathbf{n}) ds + \int_{\Omega} \frac{d^2 f}{d\varepsilon^2} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g})^2 \otimes [\mathbf{r}, m] d\Omega \right]$$

Equazione 2-23

Se la funzione $\frac{d^2 f}{d\varepsilon^2}$ è di classe $C^1(\mathfrak{R})$, cioè se la funzione f è di classe $C^3(\mathfrak{R})$,

l'integrale di superficie che compare nell'Equazione 2-19 può essere risolto applicando nuovamente l'Equazione 2-11. Con passaggi analoghi a quelli già svolti, si ottiene:

$$\int_{\Omega} \frac{d^2 f}{d\varepsilon^2} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g})^2 \otimes [\mathbf{r}, m] d\Omega = \frac{1}{m+d+2} \left[\int_{\partial\Omega} \frac{d^2 f}{d\varepsilon^2} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g})^2 \otimes [\mathbf{r}, m] (\mathbf{r} \bullet \mathbf{n}) ds + \right. \\ \left. - \int_{\Omega} \frac{d^3 f}{d\varepsilon^3} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g})^3 \otimes [\mathbf{r}, m] d\Omega \right]$$

Equazione 2-24

In generale se f è di classe $C^n(\mathfrak{R})$, si ottiene la formula ricorsiva:

$$\int_{\Omega} \frac{d^n f}{d\varepsilon^n} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g})^n \otimes [\mathbf{r}, m] d\Omega = \frac{1}{m+d+n} \left[\int_{\partial\Omega} \frac{d^n f}{d\varepsilon^n} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g})^n \otimes [\mathbf{r}, m] (\mathbf{r} \bullet \mathbf{n}) ds + \right. \\ \left. - \int_{\Omega} \frac{d^{n+1} f}{d\varepsilon^{n+1}} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g})^{n+1} \otimes [\mathbf{r}, m] d\Omega \right]$$

Equazione 2-25

Nel caso particolare che la funzione f sia polinomiale di classe $C^k(\mathfrak{R})$, con $k \geq 1$, la formula precedente si scrive in forma più conveniente come segue:

$$\int_{\Omega} \frac{d^{k-1} f}{d\varepsilon^{k-1}} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g})^{k-1} \otimes [\mathbf{r}, m] d\Omega = \frac{1}{m+d+k-1} \left[\int_{\partial\Omega} \frac{d^{k-1} f}{d\varepsilon^{k-1}} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g})^{k-1} \otimes [\mathbf{r}, m] (\mathbf{r} \bullet \mathbf{n}) ds + \right. \\ \left. - \int_{\Omega} \frac{d^k f}{d\varepsilon^k} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g})^k \otimes [\mathbf{r}, m] d\Omega \right]$$

Equazione 2-26

E' facile verificare che per $k=1$ l'Equazione 2-26 si specializza nell'Equazione 2-13 purchè si ponga $\frac{d^0 f}{d\varepsilon^0} = f$.

2.3.2 Calcolo automatico delle caratteristiche geometriche della sezione

Si consideri un dominio Ω del piano; la sua frontiera $\delta\Omega$ sia di tipo poligonale, definita da k vertici numerati consecutivamente percorrendo la frontiera in verso orario. Si vuole mostrare che gli integrali Sistema 2-2 sono esprimibili come sommatoria di quantità dipendenti dalle sole coordinate dei vertici della sezione assegnata.

Sia s_i l'ascissa curvilinea relativa al generico lato i della sezione, avente origine nel vertice i di $\delta\Omega$. Detta l_i la lunghezza del lato i , si introduca un sistema di riferimento adimensionale

$$\lambda_i = \frac{s_i}{l_i}$$

Siano \mathbf{r}_i e \mathbf{r}_{i+1} i raggi vettore che individuano la posizione rispetto all'origine del sistema di riferimento $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ assegnato, dei vertici i e $i+1$, estremi del lato i . Il generico punto del lato sarà dunque individuato dal vettore:

$$\mathbf{r}(\lambda_i) = \mathbf{r}_i + \lambda_i (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1$$

Detto \mathbf{d}_i il versore del lato i -esimo:

$$\mathbf{d}_i = \frac{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i}{l_i}$$

Equazione 2-27

il versore \mathbf{n}_i normale a tale lato, orientato verso l'esterno del dominio in accordo con il teorema della divergenza, è dato da:

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{k} \times \mathbf{d}_i = \mathbf{k} \times \frac{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i}{l_i}$$

Equazione 2-28

essendo \mathbf{k} il versore dell'asse ortogonale al riferimento $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, orientato in modo tale che la terna $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ sia levogira.

E' utile il seguente risultato:

$$\mathbf{r}_i \bullet \mathbf{n}_i = \frac{\mathbf{r}_i \bullet \mathbf{r}_{i+1}^\perp}{l_i}$$

Equazione 2-29

dove \mathbf{r}_{i+1} è il vettore ortogonale a \mathbf{r}_{i+1}^\perp , ottenuto come:

$$\mathbf{r}_{i+1}^\perp = \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{i+1}$$

Equazione 2-30

Le componenti di \mathbf{r}_{i+1}^\perp sono:

$$\mathbf{r}_{i+1}^\perp = \begin{bmatrix} -y_{i+1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}$$

L'Equazione 2-29 si deduce facilmente in funzione dell'Equazione 2-28.
Risulta infatti:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i \bullet \mathbf{n}_i &= \mathbf{r}_i \bullet \left(\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i}{l_i} \right) = \mathbf{r}_i \bullet \left(\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{r}_{i+1}}{l_i} - \mathbf{k} \times \frac{\mathbf{r}_i}{l_i} \right) = \\ &= \mathbf{r}_i \bullet \left(\frac{\mathbf{r}_{i+1}^\perp}{l_i} - \frac{\mathbf{r}_i^\perp}{l_i} \right) = \mathbf{r}_i \bullet \frac{\mathbf{r}_{i+1}^\perp}{l_i} - \mathbf{r}_i \bullet \frac{\mathbf{r}_i^\perp}{l_i} = \frac{\mathbf{r}_i \bullet \mathbf{r}_{i+1}^\perp}{l_i} \end{aligned}$$

Equazione 2-31

essendo $\mathbf{r}_i \bullet \mathbf{r}_i^\perp = 0$.

Stante l'Equazione 2-29, si può dedurre ancora la seguente relazione:

$$\mathbf{r}(\lambda_i) \bullet \mathbf{n}_i = \mathbf{r}_i \bullet \mathbf{n}_i$$

Equazione 2-32

Infatti, si ha:

$$\mathbf{r}(\lambda_i) \bullet \mathbf{n}_i = [\mathbf{r}_i + \lambda_i (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)] \bullet \mathbf{n}_i = \mathbf{r}_i \bullet \mathbf{n}_i + \lambda_i (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \bullet \mathbf{n}_i = \mathbf{r}_i \bullet \mathbf{n}_i$$

che è proprio l'Equazione 2-32. Il prodotto scalare $(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \bullet \mathbf{n}_i$ risulta nullo essendo \mathbf{n}_i il versore ortogonale al lato i di estremi i e $i+1$.

Quindi, risultando:

$$\int_0^1 (1 - \lambda_i)^2 d\lambda_i = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 \lambda_i^2 d\lambda_i = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 \lambda_i (1 - \lambda_i) d\lambda_i = \frac{1}{6}$$

si ha che:

$$\begin{aligned} A_C &= \frac{1}{2} \int_{\delta A} \mathbf{r} \bullet \mathbf{n} ds = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \int_0^{l_i} \mathbf{r}(s_i) \bullet \mathbf{n}_i ds_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \int_0^1 [\mathbf{r}(\lambda_i) \bullet \mathbf{n}_i] l_i d\lambda_i = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \int_0^1 [\mathbf{r}_i \bullet \mathbf{n}_i] l_i d\lambda_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (\mathbf{r}_i \bullet \mathbf{n}_i) l_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (\mathbf{r}_i \bullet \mathbf{r}_{i+1}^\perp) \end{aligned}$$

Equazione 2-33

$$\begin{aligned} S_C &= \frac{1}{3} \int_{\delta A} \mathbf{r} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{n}) ds = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^k \int_0^{l_i} \mathbf{r}(s_i) [\mathbf{r}(s_i) \bullet \mathbf{n}_i] ds_i = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^k \int_0^1 \mathbf{r}(\lambda_i) [\mathbf{r}(\lambda_i) \bullet \mathbf{n}_i] l_i d\lambda_i = \\ &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^k \int_0^1 [\mathbf{r}_i + \lambda_i (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)] (\mathbf{r}_i \bullet \mathbf{n}_i) l_i d\lambda_i = \\ &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^k (\mathbf{r}_i \bullet \mathbf{r}_{i+1}^\perp) \left[\int_0^1 \mathbf{r}_i d\lambda_i + \int_0^1 \lambda_i (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) d\lambda_i \right] = \\ &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^k (\mathbf{r}_i \bullet \mathbf{r}_{i+1}^\perp) \left[\mathbf{r}_i + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \right] = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^k (\mathbf{r}_i \bullet \mathbf{r}_{i+1}^\perp) \frac{1}{2} (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{i+1}) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^k (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp) (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{i+1})$$

Equazione 2-34

$$\begin{aligned} I_C &= \frac{1}{4} \int_{\delta A} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{n}) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) d\mathbf{s} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k \int_0^{l_i} [\mathbf{r}(s_i) \cdot \mathbf{n}_i] [\mathbf{r}(s_i) \otimes \mathbf{r}(s_i)] d\mathbf{s}_i = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k \int_0^1 [\mathbf{r}(\lambda_i) \cdot \mathbf{n}_i] [\mathbf{r}(\lambda_i) \otimes \mathbf{r}(\lambda_i)] l_i d\lambda_i = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k \int_0^1 (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_i) [\mathbf{r}_i + \lambda_i (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)] \otimes [\mathbf{r}_i + \lambda_i (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)] l_i d\lambda_i = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp) \int_0^1 [(1-\lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1}] \otimes [(1-\lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1}] d\lambda_i = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp) \left[(\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) \int_0^1 (1-\lambda_i)^2 d\lambda_i + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1} + \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i) \int_0^1 \lambda_i (1-\lambda_i) d\lambda_i + (\mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i+1}) \int_0^1 \lambda_i^2 d\lambda_i \right] = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp) \left[\frac{1}{3} (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) + \frac{1}{6} (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1} + \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i) + \frac{1}{3} (\mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i+1}) \right] = \\ &= \frac{1}{12} \sum_{i=1}^k (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp) \left[\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i + \frac{1}{3} (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1} + \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i) + (\mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i+1}) \right] \end{aligned}$$

Equazione 2-35

2.3.3 Calcolo automatico delle caratteristiche secanti della sezione

Si vuole ricavare un'espressione in forma chiusa dei seguenti integrali:

$$\begin{aligned}A_{sc} &= \int_{A_c} \tilde{E}^s(\varepsilon) dA \\ \mathbf{S}_{sc} &= \int_{A_c} \tilde{E}^s(\varepsilon) \mathbf{r} dA \\ \mathbf{I}_{sc} &= \int_{A_c} \tilde{E}^s(\varepsilon) \otimes [\mathbf{r}, 2] dA\end{aligned}$$

Equazione 2-36

che esprimono, rispettivamente, l'area, il momento statico ed il tensore d'inerzia della distribuzione dei moduli secanti.

In particolare, analogamente a quanto mostrato nel paragrafo precedente per il calcolo delle caratteristiche geometriche della sezione, gli integrali precedenti possono essere calcolati in modo esatto mediante somme di quantità dipendenti dalle sole coordinate dei vertici della sezione.

Per illustrare la derivazione di tale risultato, osserviamo preliminarmente che ciascuno degli integrali può essere posto nella formula generale:

$$\int_{\Omega} f(\varepsilon) \otimes [\mathbf{r}, m] d\Omega$$

Equazione 2-37

ponendo $f(\varepsilon) = E_{sc}(\varepsilon)$ ed $m = 0$, $m = 1$ o $m = 2$ rispettivamente.

In virtù di quanto precisato in precedenza, la funzione $f(\varepsilon)$ è una generica funzione polinomiale della variabile ε .

In seguito faremo riferimento alla funzione polinomiale:

$$f_p(\varepsilon) = a_0 + a_1\varepsilon + \dots + a_p\varepsilon^p$$

Equazione 2-38

in cui $a_i, i = \{0, \dots, p\}$ sono coefficienti reali. Assumeremo che sia $p > 1$ in quanto il caso $p = 0$ e $p = 1$ sono banali.

Utilizzando ricorsivamente l'Equazione 2-26 è allora possibile esprimere la Equazione 2-37 mediante soli integrali di linea. A tal scopo si scrivano in sequenza le espressioni che risultano dall'Equazione 2-26 in cui k varia da 1 a p . E' immediato notare che l'integrale al primo membro di ciascuna espressione coincide con quello al secondo membro dell'espressione precedente.

A titolo di esempio si consideri il caso $p = 3$ e si indichi con f_3 la corrispondente funzione polinomiale. Risulta in tal caso:

$$\int_{\Omega} f_3(\varepsilon[\mathbf{r}]) \otimes [\mathbf{r}, m] d\Omega = \frac{1}{m+d} \left[\int_{\partial\Omega} f_3(\varepsilon) \otimes [\mathbf{r}, m] (\mathbf{r} \bullet \mathbf{n}) ds - \int_{\Omega} \frac{df_3}{d\varepsilon} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g}) \otimes [\mathbf{r}, m] d\Omega \right]$$

Equazione 2-39

$$\int_{\Omega} \frac{df_3}{d\varepsilon} \otimes [\mathbf{r}, m] d\Omega = \frac{1}{m+d+1} \left[\int_{\partial\Omega} \frac{df_3}{d\varepsilon} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g}) \otimes [\mathbf{r}, m] (\mathbf{r} \bullet \mathbf{n}) ds - \int_{\Omega} \frac{d^2 f_3}{d\varepsilon^2} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g})^2 \otimes [\mathbf{r}, m] d\Omega \right]$$

Equazione 2-40

$$\int_{\Omega} \frac{d^2 f_3}{d\varepsilon^2} \otimes [\mathbf{r}, m] d\Omega = \frac{1}{m+d+2} \left[\int_{\partial\Omega} \frac{d^2 f_3}{d\varepsilon^2} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g})^2 \otimes [\mathbf{r}, m] (\mathbf{r} \bullet \mathbf{n}) ds - \int_{\Omega} \frac{d^3 f_3}{d\varepsilon^3} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{g})^3 \otimes [\mathbf{r}, m] d\Omega \right]$$

Equazione 2-41

Si osservi in particolare che l'ultimo integrale è facilmente esprimibile mediante integrali al contorno poiché $\frac{d^3 f_3}{d\varepsilon^3}$ è costante per ipotesi e \mathbf{g} è una quantità assegnata. Risulta pertanto:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{g})^3 \otimes [\mathbf{r}, \mathbf{m}] d\Omega &= \left[\int_{\Omega} \otimes [\mathbf{r}, \mathbf{m}+3] d\Omega \right] \otimes [\mathbf{g}, 3] = \\ &= \frac{1}{d+m+3} \left[\int_{\partial\Omega} [\mathbf{r}, \mathbf{m}+3] (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) ds \right] \otimes [\mathbf{g}, 3] = \\ &= \frac{1}{d+m+3} \left[\int_{\partial\Omega} \otimes (\mathbf{r} \cdot \mathbf{g})^3 \otimes [\mathbf{r}, \mathbf{m}] (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) ds \right]\end{aligned}$$

Equazione 2-42

A partire dall'Equazione 2-42 si sostituisca a ritroso ciascuna relazione in quella immediatamente precedente fino all'Equazione 2-39. Si ottiene allora:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} f_3(\varepsilon[\mathbf{r}]) \otimes [\mathbf{r}, \mathbf{m}] d\Omega &= \frac{1}{d+m} \left[\int_{\partial\Omega} f(\varepsilon) \otimes [\mathbf{r}, \mathbf{m}] (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) ds + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(d+m)(d+m+1)} \left[\int_{\partial\Omega} \frac{df_3}{d\varepsilon} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{g}) \otimes [\mathbf{r}, \mathbf{m}] (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) ds + \right. \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(d+m)(d+m+1)(d+m+2)} \int_{\partial\Omega} \frac{d^2 f_3}{d\varepsilon^2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{g})^2 \otimes [\mathbf{r}, \mathbf{m}] (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) ds \right] + \\ &\quad \left. + \frac{1}{(d+m)(d+m+1)(d+m+2)(d+m+3)} \int_{\partial\Omega} \frac{d^2 f_3}{d\varepsilon^2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{g})^3 \otimes [\mathbf{r}, \mathbf{m}] (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) ds \right]\end{aligned}$$

Equazione 2-43

ovvero in forma più compatta:

$$\int_{\Omega} f_3(\varepsilon[\mathbf{r}]) \otimes [\mathbf{r}, \mathbf{m}] d\Omega = \sum_{j=0}^3 \left(\prod_{i=0}^j \frac{1}{d+m+i} \right) \int_{\partial\Omega} \frac{d^j f_3}{d\varepsilon^j} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{g})^j \otimes [\mathbf{r}, \mathbf{m}] (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) ds$$

Equazione 2-44

poiché risulta:

$$\prod_{i=0}^j \frac{1}{(d+m+i)} = \frac{(d+m-1)!}{(d+m+j)!}$$

Equazione 2-45

dove $(\cdot)!$ indica il fattoriale del corrispondente argomento, si ottiene infine:

$$\int_{\Omega} f_p(\varepsilon) \otimes [\mathbf{r}, \mathbf{m}] d\Omega = \sum_{j=0}^p (-1)^j w_j \int_{\partial\Omega} \frac{d^j f_p}{d\varepsilon^j} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{g})^j \otimes [\mathbf{r}, \mathbf{m}] (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) ds$$

Equazione 2-46

dove il coefficiente w_j è fornito da:

$$w_j = \frac{(d+m-1)!}{(d+m+j)!}$$

Equazione 2-47

L'Equazione 2-46 è il punto di partenza per ricavare un'espressione della Equazione 2-37 in funzione delle sole coordinate dei vertici della sezione, che possa generalizzare l'Equazione 2-33, l'Equazione 2-34 e l'Equazione 2-35 già utilizzate per il calcolo delle caratteristiche geometriche di una sezione piana.

A tal scopo è necessario ricavare la formula esplicita che lega la derivata $\frac{d^j f_p}{d\varepsilon^j}$ alla quantità $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{g})$. Ancora una volta, per fissare le idee si farà riferimento al caso di una funzione polinomiale f_3 di terzo grado. Risulta quindi:

$$f_3(\varepsilon) = a_0 + a_1 \varepsilon + a_1 \varepsilon^2 + a_3 \varepsilon^3 = a_0 + a_1(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) + a_2(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)^2 + a_3(\mathbf{g} + \varepsilon_0)^3$$

Equazione 2-48

Utilizzando la formula di Newton si ha allora:

$$f_3(\varepsilon) = a_0 + a_1 \left[\binom{1}{0} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})^2 + \binom{1}{1} \varepsilon_0 \right] + a_2 \left[\binom{2}{0} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})^2 + \binom{2}{1} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) \varepsilon_0 + \binom{2}{2} \varepsilon_0^2 \right] +$$

$$+ a_3 \left[\binom{3}{0} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})^3 + \binom{3}{1} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})^2 \varepsilon_0 + \binom{3}{2} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) \varepsilon_0^2 + \binom{3}{3} \varepsilon_0^3 \right]$$

Equazione 2-49

dove:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

denota il coefficiente binomiale di indice n e base k, con $\binom{0}{0} = 1$.

Raggruppando i termini omologhi relativi a ciascuna delle potenze della quantità $(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})$ si ha:

$$f_3(\varepsilon) = a_0 \binom{0}{0} + a_1 \binom{1}{1} \varepsilon_0 + a_2 \binom{2}{2} \varepsilon_0^2 + a_3 \binom{3}{3} \varepsilon_0^3 +$$

$$+ \left[a_1 \binom{1}{0} + a_2 \binom{2}{1} \varepsilon_0 + a_3 \binom{3}{2} \varepsilon_0^2 \right] (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) + \left[a_2 \binom{2}{0} + a_3 \binom{3}{1} \varepsilon_0 \right] (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})^2 + \left[a_3 \binom{3}{0} \varepsilon_0 \right] (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})^3$$

Equazione 2-50

Osservando che la k-esima riga ($k = 0, \dots, 3$) della precedente espressione è anche pari a:

$$\sum_{i=0}^{3-k} \binom{i+k}{i} a_{i+k} \varepsilon_0^i$$

Equazione 2-51

L'Equazione 2-50 si può anche scrivere:

$$f_3(\varepsilon) = \sum_{k=0}^3 \left[\sum_{i=0}^{3-k} \binom{i+k}{i} a_{i+k} \varepsilon_0^i \right] (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})^k = \sum_{k=0}^3 b_k^{(0)} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})^k$$

Equazione 2-52

avendo posto:

$$b_k^{(0)} = \sum_{i=0}^{p-k} \binom{i+k}{i} a_{i+k} \varepsilon_0^i$$

Equazione 2-53

Più in generale risulta:

$$f_p(\varepsilon) = \sum_{k=0}^p \left[\sum_{i=0}^{p-k} \binom{i+k}{i} a_{i+k} \varepsilon_0^i \right] (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})^k = \sum_{k=0}^p b_k^{(0)} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})^k$$

Equazione 2-54

Per calcolare la $\frac{df_p^j}{d\varepsilon^j}$ si osservi che si può anche scrivere:

$$f_p(\varepsilon) = \sum_{k=0}^p b_k^{(0)} (\varepsilon - \varepsilon_0)^k$$

Equazione 2-55

sicché:

$$\begin{aligned} \frac{df_p^j}{d\varepsilon^j} &= \sum_{k=j}^p k(k-1)\dots(k-j+1) b_k^{(0)} (\varepsilon - \varepsilon_0)^{k-j} = \\ &= \sum_{k=j}^p \frac{k!}{(k-j)!} b_k^{(0)} (\varepsilon - \varepsilon_0)^{k-j} = \sum_{k=j}^p b_k^{(j)} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})^{k-j} \end{aligned}$$

Equazione 2-56

dove si è posto:

$$b_k^{(j)} = \frac{k!}{(k-j)!} \quad b_k^{(0)} = \frac{k!}{(k-j)!} \sum_{i=0}^{p-k} \binom{i+k}{i} a_{i+k} \varepsilon_0^i$$

Equazione 2-57

con:

$$\binom{i+k}{i} = \frac{(i+k)!}{i!k!}$$

Sostituendo l'Equazione 2-56 nell'Equazione 2-46 si ha:

$$\int_{\Omega} f_p(\varepsilon) \otimes [\mathbf{r}, m] d\Omega = \sum_{j=0}^p (-1)^j w_j \int_{\partial\Omega} \sum_{k=j}^p b_k^{(j)} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{g})^k \otimes [\mathbf{r}, m] (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) ds$$

Equazione 2-58

L'espressione precedente può essere ulteriormente semplificata raggruppando i termini aventi uguale esponente della quantità $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{g})$. Per fissare le idee si fa riferimento ancora una volta al caso di una funzione polinomiale di grado 3.

L'applicazione dell'Equazione 2-58 consente allora di scrivere:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f_3(\varepsilon) \otimes [\mathbf{r}, m] d\Omega = \\ & (-1)^0 w_0 \int_{\partial\Omega} [b_0^{(0)} + b_1^{(0)}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) + b_2^{(0)}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})^2 + b_3^{(0)}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})^3] \otimes [\mathbf{r}, m] (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) ds + \\ & + (-1)^1 w_1 \int_{\partial\Omega} [b_1^{(1)}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) + b_2^{(1)}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})^2 + b_3^{(1)}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})^3] \otimes [\mathbf{r}, m] (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) ds + \\ & + (-1)^2 w_2 \int_{\partial\Omega} [b_2^{(2)}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})^2 + b_3^{(2)}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})^3] \otimes [\mathbf{r}, m] (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) ds + \\ & + (-1)^3 w_3 \int_{\partial\Omega} [b_3^{(3)}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})^3] \otimes [\mathbf{r}, m] (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) ds \end{aligned}$$

Equazione 2-59

Un'ispezione diretta della formula precedente fornisce allora la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_p(\varepsilon) \otimes [r, m] d\Omega &= \sum_{q=0}^p A_q \int_{\partial\Omega} (r \cdot g) \otimes [r, m] (r \cdot n) ds = \\ &= \sum_{q=0}^p A_q \left[\int_{\partial\Omega} \otimes [r, m + q] (r \cdot n) ds \right] \{ \otimes [g, q] \} \end{aligned}$$

Equazione 2-60

in cui il coefficiente A_q è fornito dall'espressione:

$$A_q = \sum_{j=0}^q (-1)^j w_q b_q^{(j)}$$

Equazione 2-61

Nel caso di domini con frontiere poligonali l'integrale a destra dell'equazione precedente si riduce alla somma di un numero finito di termini scritti in funzione dei vettori posizione che definiscono i vertici del dominio poligonale.

Allo scopo di valutare l'integrale:

$$\int_{\partial\Omega} (r \cdot g)^q \otimes [r, m] (r \cdot n) ds = \left[\int_{\partial\Omega} \otimes [r, m + q] (r \cdot n) ds \right] \{ \otimes [g, q] \}$$

Equazione 2-62

dobbiamo generalizzare la notazione introdotta nell'Equazione 2-35.

A tal fine indichiamo con D_h l'insieme dei tensori di ordine h ottenuti dalla combinazione con ripetizione degli elementi dell'insieme $\{r_i, r_{i+1}\}$ sulle h posizioni del prodotto tensoriale:

$$(\cdot) \otimes (\cdot) \otimes (\cdot) \otimes (\cdot) \otimes \dots h \text{ volte}$$

Equazione 2-63

assumendo per convenzione $D_0 = \{1\}$. La cardinalità dell'insieme D_h è 2^h poiché tale risulta essere il numero di permutazioni con ripetizione di due differenti oggetti presi h alla volta.

E' da sottolineare che due elementi di D_h possono differire sia per il numero di volte che il vettore \mathbf{r}_i , o \mathbf{r}_{i+1} , appare nella stringa (5.38), sia per la disposizione di tale vettore. Ad esempio gli elementi dell'insieme D_3 :

$$\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1} \quad \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i+1}$$

sono differenti l'uno dall'altro, come anche:

$$\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i \quad \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i$$

Il k -esimo elemento dell'insieme D_h sarà indicato con $\mathbf{R}_h^{(k)}$. Per individuare univocamente gli elementi dell'insieme D_h è necessario introdurre una relazione d'ordine. Questa può essere determinata assumendo che $\mathbf{R}_h^{(i)}$ preceda $\mathbf{R}_h^{(k)}$, $j \neq k$, se $\mathbf{R}_h^{(i)}$ contiene il vettore \mathbf{r}_i un numero di volte non inferiore a $\mathbf{R}_h^{(k)}$ ed il più a sinistra possibile nell'Equazione 2-63.

Ad esempio, l'ordinamento dell'insieme D_3 che risulta dall'applicazione di tale criterio è:

$$D_3 = \{R_3^{(1)}, R_3^{(2)}, \dots, R_3^{(8)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1}, \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i, \\ \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i+1}, \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1}, \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i+1} \end{array} \right\}$$

Equazione 2-64

E' facile riconoscere che gli elementi dell'insieme ordinato D_h possono essere ulteriormente raggruppati in classi purché si adotti la seguente definizione.

Due elementi dell'insieme D_h appartengono alla stessa classe se contengono il vettore \mathbf{r}_i , indipendentemente dalla posizione, lo stesso numero di volte.

Ciascuna classe può essere identificata da un numero d'ordine progressivamente crescente con il decrescere del numero di volte in cui \mathbf{r}_i appare

nell'Equazione 2-63. L'ordine della classe cui il generico elemento $\mathbf{R}_h^{(k)}$ appartiene si indica con $cl(\mathbf{R}_h^{(k)})$.

Per fissare le idee ci si riferisca di nuovo all'insieme D_3 ; l'elemento $\mathbf{R}_3^{(1)}$ apparterrà alla prima classe, gli elementi $\mathbf{R}_3^{(2)}$, $\mathbf{R}_3^{(3)}$ ed $\mathbf{R}_3^{(4)}$ alla seconda classe e così via. Pertanto $cl(\mathbf{R}_3^{(1)})=1$, $cl(\mathbf{R}_3^{(2)})=cl(\mathbf{R}_3^{(3)})=cl(\mathbf{R}_3^{(4)})=2$.

Ovviamente il numero di classi relativo all'insieme D_h è $h + 1$. Per la sua utilità nei successivi passaggi riportiamo il seguente risultato. Il numero di elementi della j -sima classe dell'insieme D_h è fornito dal coefficiente binomiale $\binom{h}{j-1}$ cosicché il numero complessivo S_c^h degli elementi appartenenti alle prime c classi dell'insieme D_h è fornito da:

$$S_c^h = \sum_{u=0}^{c-1} \binom{h}{u}$$

Equazione 2-65

Possiamo ora tornare alla risoluzione dell'integrale presente nell'Equazione 2-62. Esplicitando il tensore al secondo membro secondo lo schema seguito per calcolare l'integrale relativo al tensore d'inerzia, si ha, in virtù dell'Equazione 2-35:

$$\left[\int_{\partial\Omega} \otimes [\mathbf{r}, m+q] (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) ds \right] \left\{ \otimes [\mathbf{g}, q] \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp \left\{ \sum_{j=1}^{2m} \left[\sum_{e=1}^{2q} \left(\int_0^1 (1-\lambda)^a \lambda^b d\lambda \right) \mathbf{R}_m^{(j)} \otimes \mathbf{R}_q^{(e)} \right] \right\} \left\{ \otimes [\mathbf{g}, q] \right\}$$

Equazione 2-66

$$(a+b) = (m+q)$$

in cui a e b sono due interi non negativi pari al numero di volte in cui \mathbf{r}_i ed \mathbf{r}_{i+1} , rispettivamente, appaiono in totale negli elementi $\mathbf{R}_m^{(j)}$ e $\mathbf{R}_q^{(e)}$. Quindi il coefficiente

numerico che moltiplica il prodotto $\mathbf{R}_m^{(j)} \otimes \mathbf{R}_q^{(e)}$ cambia in dipendenza dell'ordine della classe a cui entrambi gli elementi appartengono.

Precisamente, ricordando il criterio che è stato adottato per ordinare gli elementi dell'insieme D_h , si deduce che per ogni elemento $\mathbf{R}_m^{(j)}$ a e b diminuiscono ed aumentano di uno rispettivamente quando $\mathbf{R}_q^{(e)}$ cambia di classe. Si dimostrerà nel seguito che questa osservazione è fondamentale per ottenere un'espressione compatta equivalente all'Equazione 2-62.

Si sottolinea che il prodotto tensoriale che appare nell'Equazione 2-66 non è stato sviluppato allo scopo di enfatizzare il differente ruolo giocato dai due fattori $\mathbf{R}_m^{(j)}$ e $\mathbf{R}_q^{(e)}$. Infatti il primo contribuisce al generico elemento del tensore di ordine m che appare alla sinistra dell'Equazione 2-62, mentre il secondo si contrae con il tensore $\otimes[\mathbf{g}, q]$ di ordine q . Quindi l'ordine in cui i vettori \mathbf{r}_i ed \mathbf{r}_{i+1} appaiono negli elementi dell'insieme D_h è irrilevante, in modo che la contrazione degli elementi $\mathbf{R}_q^{(e)}$ che appartengono alla stessa classe dà origine a:

$$\binom{q}{cl(\mathbf{R}_q^{(e)})-1} [\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{g}]^{q-cl(\mathbf{R}_q^{(e)})+1} [\mathbf{r}_{i+1} \cdot \mathbf{g}]^{cl(\mathbf{R}_q^{(e)})-1}$$

Equazione 2-67

poiché $\binom{q}{cl(\mathbf{R}_q^{(e)})-1}$ è il numero degli elementi del gruppo D_q appartenenti alla classe corrispondente a $\mathbf{R}_q^{(e)}$. Conseguentemente i 2^q addendi della sommatoria in e nell'Equazione 2-66 si riducono a $q + 1$ elementi, tanti quante sono le classi dell'insieme D_q .

Per semplificare la notazione si porrà $k = cl(\mathbf{R}_q^{(e)})-1$, in modo che l'Equazione 2-66 diventa:

$$\left[\int_{\mathcal{A}\Omega} \otimes[\mathbf{r}, m+q](\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) ds \right] \{ \otimes[\mathbf{g}, q] \} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp \left\{ \sum_{j=1}^{2m} \left[\mathbf{R}_m^{(j)} \sum_{k=0}^q \left(\int_0^1 (1-\lambda)^a \lambda^b d\lambda \right) \binom{q}{k} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{g})^{q-k} (\mathbf{r}_{i+1} \cdot \mathbf{g})^k \right] \right\}$$

Equazione 2-68

$$(a + b) = (m + q)$$

Per quanto concerne il valore dell'integrale che appare nella precedente equazione, è immediato mostrare che:

$$\int_0^1 (1-\lambda)^a \lambda^b d\lambda = \frac{1}{(a+b+1)} \binom{a+b}{b}^{-1} = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}$$

Equazione 2-69

o equivalentemente, poiché $(a + b) = (m + q)$

$$\int_0^1 (1-\lambda)^a \lambda^b d\lambda = \frac{1}{(m+q+1)} \binom{m+q}{b}^{-1}$$

Equazione 2-70

Si supponga ora, per un dato valore della somma $m + q$, di scrivere la sequenza dei valori assunti dall'integrale dell'Equazione 2-69 quando b varia tra 0 ed $m + q$:

$$\frac{1}{m+q+1} \left[\binom{m+q}{0}^{-1}, \binom{m+q}{1}^{-1}, \dots, \binom{m+q}{m+q}^{-1} \right]$$

Equazione 2-71

Si vuole dimostrare che i valori degli integrali che appaiono nell'Equazione 2-68, sono forniti da $q + 1$ valori consecutivi della successione estratta dalla Equazione 2-71, in cui il primo elemento della successione dipende dalla classe cui $\mathbf{R}_m^{(i)}$ appartiene.

A tal fine si ricorda che a e b rappresentano il numero di volte che \mathbf{r}_i ed \mathbf{r}_{i+1} appaiono negli elementi $\mathbf{R}_m^{(i)}$ e $\mathbf{R}_q^{(e)}$ dell'Equazione 2-68, o equivalentemente nell'elemento $\mathbf{R}_m^{(i)}$ e nel generico elemento della sommatoria su k nell'Equazione 2-68.

Poiché il primo elemento dell'insieme D_m è quello che contiene il vettore \mathbf{r}_i proprio m volte, il valore dell'integrale corrispondente a $\mathbf{R}_m^{(1)}$ e al primo addendo ($k = 0$) della sommatoria su k nell'Equazione 2-68, sarà il primo dell'Equazione 2-71; infatti in questo caso risulta essere $a = m + q$ e $b = 0$.

Mantenendo fisso $\mathbf{R}_m^{(1)}$ gli elementi della sommatoria su k nell'Equazione 2-68 che corrispondono a valori di k variabili da 1 a q , determineranno valori di a decrescenti progressivamente da $m + q - 1$ a m e valori di b progressivamente crescenti da 1 a q .

I corrispondenti valori degli integrali saranno quindi forniti da q successivi elementi dell'Equazione 2-71 a partire dal secondo.

Lo stesso ragionamento ovviamente si applica agli elementi $\mathbf{R}_m^{(j)}$ ($j > 1$) se si tiene in giusta considerazione il fatto che la corrispondente classe si modifica. Infatti con riferimento agli elementi $\mathbf{R}_m^{(j)}$ tali che $cl(\mathbf{R}_m^{(j)}) = 2$, i valori di a e b che corrispondono ai primi elementi della sommatoria su k nell'Equazione 2-68 saranno $m + q - 1$ e 1 rispettivamente. Quindi il valore dell'integrale descritto dall'Equazione 2-70 sarà fornito dal secondo elemento dell'Equazione 2-71.

Si deduce quindi che i valori degli integrali associati agli elementi $\mathbf{R}_m^{(j)}$ che appartengono alla seconda classe saranno forniti da $q + 1$ successivi elementi della Equazione 2-71 a partire dalla seconda.

Si può concludere che il valore dell'integrale associato a $\mathbf{R}_m^{(j)}$ e con il k -esimo elemento della sommatoria su k nell'Equazione 2-68 è fornito da:

$$\frac{1}{m + q + 1} \binom{m + q}{k + cl(\mathbf{R}_m^{(j)}) - 1}$$

Equazione 2-72

In virtù delle precedenti considerazioni l'Equazione 2-68 diviene infine:

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{g})^q \otimes [\mathbf{r}, m] (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) ds =$$

$$= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp \left\{ \sum_{j=1}^{2^m} \mathbf{R}_m^{(j)} \left[\sum_{k=0}^q \frac{\binom{q}{k} [\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{g}]^{q-k} [\mathbf{r}_{i+1} \cdot \mathbf{g}]^k}{(m+q+1) \binom{m+q}{k + cl(\mathbf{R}_m^{(j)}) - 1}} \right] \right\}$$

Equazione 2-73

In virtù dell'Equazione 2-65 il valore $cl(\mathbf{R}_m^{(j)})$ è dato da:

$$\begin{aligned} cl(\mathbf{R}_m^{(j)}) &= 1 & \text{se } j &= 1 \\ cl(\mathbf{R}_m^{(j)}) &= cl(\mathbf{R}_m^{(j-1)}) & \text{se } j > 1 \text{ e } j \leq S_{cl(\mathbf{R}_m^{(j-1)})}^m \\ cl(\mathbf{R}_m^{(j)}) &= cl(\mathbf{R}_m^{(j-1)}) + 1 & \text{se } j > 1 \text{ e } j > S_{cl(\mathbf{R}_m^{(j-1)})}^m \end{aligned}$$

Equazione 2-74

Notiamo che, per $q = 0$, l'Equazione 2-73 si particolarizza nella sommatoria in i , che appare nell'Equazione 2-33, Equazione 2-34 ed Equazione 2-35 per $m = 0$, $m = 1$ e $m = 2$ rispettivamente.

2.4 Calcolo degli integrali relativi al tratto costante del legame costitutivo

$$\text{Calcolo dell'integrale} \int_{\Omega} \frac{dA}{\varepsilon(\mathbf{r})} = \int_{\Omega} \frac{dA}{(\mathbf{g} \bullet \mathbf{r} + \varepsilon_0)}$$

Si prende in esame solo il caso non banale $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$ e si suppone inoltre che in tutto il dominio Ω risulti $\varepsilon(\mathbf{r}) > 0$.

Si osserva che:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{div}[\mathbf{g} \ln(\mathbf{g} \bullet \mathbf{r} + \varepsilon_0)] dA &= \int_{\Omega} [g_i \ln(g_k x_k + \varepsilon_0)]_{,i} dA = \int_{\Omega} g_i \frac{1}{(g_k x_k + \varepsilon_0)} (g_k x_k)_{,i} dA = \\ &= \int_{\Omega} \frac{g_i}{(\mathbf{g} \bullet \mathbf{r} + \varepsilon_0)} (g_k x_k)_{,i} dA = \int_{\Omega} \frac{g_i g_i}{(\mathbf{g} \bullet \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA = \int_{\Omega} \frac{(\mathbf{g} \bullet \mathbf{g})}{(\mathbf{g} \bullet \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA = (\mathbf{g} \bullet \mathbf{g}) \int_{\Omega} \frac{dA}{(\mathbf{g} \bullet \mathbf{r} + \varepsilon_0)} \end{aligned}$$

Equazione 2-75

e che la funzione \ln è ben definita risultando, per ipotesi,

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 + \mathbf{g} \bullet \mathbf{r} > 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega$$

Equazione 2-76

quindi:

$$\int_{\Omega} \text{div}[\mathbf{g} \ln(\mathbf{g} \bullet \mathbf{r} + \varepsilon_0)] dA = (\mathbf{g} \bullet \mathbf{g}) \int_{\Omega} \frac{dA}{(\mathbf{g} \bullet \mathbf{r} + \varepsilon_0)}$$

Equazione 2-77

Sfruttando il teorema della divergenza si può trasformare il termine a primo membro, infatti si ha:

$$\int_{\Omega} \text{div}[\mathbf{g} \ln(\mathbf{g} \bullet \mathbf{r} + \varepsilon_0)] dA = \int_{Fr(\Omega)} (\mathbf{g} \bullet \mathbf{n}) \ln(\mathbf{g} \bullet \mathbf{r} + \varepsilon_0) ds$$

Equazione 2-78

Per cui:

$$\boxed{\int_{\Omega} \frac{dA}{(\mathbf{g} \bullet \mathbf{r} + \varepsilon_0)} = \frac{1}{(\mathbf{g} \bullet \mathbf{g})} \int_{Fr(\Omega)} (\mathbf{g} \bullet \mathbf{n}) \ln(\mathbf{g} \bullet \mathbf{r} + \varepsilon_0) ds}$$

Equazione 2-79

e per sezioni polinomiali:

$$\int_{\Omega} \frac{dA}{(\mathbf{g} \bullet \mathbf{r} + \varepsilon_0)} = \frac{1}{(\mathbf{g} \bullet \mathbf{g})} \sum_{i=1}^n (\mathbf{g} \bullet \mathbf{n}_i) \int_{Fr(\Omega_i)} \ln[\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i$$

Equazione 2-80

$$\text{A questo punto si calcola: } \left[\int_{Fr(\Omega_i)} \ln[\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i \right]$$

$$\text{posto: } \frac{s_i}{l_i} = \lambda_i \quad ds_i = l_i d\lambda_i$$

e ricordando l'equazione parametrica della retta r :

$$\hat{\mathbf{r}}(\lambda_i) = (1 - \lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1} \quad \text{con} \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Equazione 2-81

si ha:

$$\begin{aligned} \int_{Fr(\Omega_i)} \ln[\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i &= \int_0^1 \ln[\mathbf{g} \bullet \hat{\mathbf{r}}(\lambda_i) + \varepsilon_0] l_i d\lambda_i = \\ &= \int_0^1 \ln\left\{ \mathbf{g} \bullet [(1 - \lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1}] + \varepsilon_0 \right\} l_i d\lambda_i = l_i \int_0^1 \ln[\mathbf{g} \bullet (\mathbf{r}_i - \lambda_i \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1}) + \varepsilon_0] d\lambda_i = \\ &= l_i \int_0^1 \ln[\lambda_i \mathbf{g} \bullet (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) + (\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}_i + \varepsilon_0)] d\lambda_i = l_i \int_0^1 \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \end{aligned}$$

Equazione 2-82

essendo ε_i la deformazione nel vertice i-mo e

$$\alpha_i = \mathbf{g} \bullet (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) = \mathbf{g} \bullet \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{g} \bullet \mathbf{r}_i + \varepsilon_0 - \varepsilon_0 = (\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}_{i+1} + \varepsilon_0) - (\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}_i + \varepsilon_0) = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$$

Equazione 2-83

Si calcola, quindi: $\left[\int_0^1 \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right]$

Caso $\alpha_i = 0$:

$$\int_0^1 \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i = \int_0^1 \ln \varepsilon_i d\lambda_i = \ln \varepsilon_i$$

Equazione 2-84

Caso $\alpha_i \neq 0$:

$$\text{posto: } t_i = \alpha_i \lambda_i + \varepsilon_i \quad \Rightarrow \quad d\lambda_i = \frac{dt_i}{\alpha_i} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_i = 0 & \rightarrow & t_i = \varepsilon_i \\ \lambda_i = 1 & \rightarrow & t_i = \varepsilon_{i+1} \end{cases}$$

si ha:

$$\int_0^1 \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} \ln t_i \frac{dt_i}{\alpha_i} = \frac{1}{\alpha_i} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} \ln t_i dt_i$$

Equazione 2-85

ricordando che: $\int \ln x dx = x \ln x - x$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_i} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} \ln t_i dt_i &= \frac{1}{\alpha_i} [t_i \ln t_i - t_i]_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} = \frac{1}{(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)} [\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i + \varepsilon_i] = \\ &= \frac{\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i} - 1 \end{aligned}$$

Equazione 2-86

ossia^[1]:

$\left[\int_0^1 \ln(\alpha_i \lambda_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right] = \begin{cases} \ln \varepsilon_i & \alpha_i = 0 \\ \frac{\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{\alpha_i} - 1 & \alpha_i \neq 0 \end{cases}$	$\alpha_i = 0$ $\alpha_i \neq 0$
<p>con $\alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$</p>	

Equazione 2-87

^[1] In appendice A.1 si dimostra che per $[\alpha_i \rightarrow 0]$ le due formule coincidono

Ritornando all'integrale di partenza e ricordando che:

$$\mathbf{n}_i = \frac{(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)}{l_i} \times \mathbf{k} = \frac{(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)^\perp}{l_i}$$

Equazione 2-88

$$\begin{aligned} \text{si ha: } \int_{\Omega} \frac{dA}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} &= \frac{1}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})} \sum_{i=1}^n (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_i) \int_{Fr(\Omega_i)} \ln[\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i = \\ &= \frac{1}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})} \sum_{i=1}^n (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_i) l_i \int_0^1 \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i = \frac{1}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})} \sum_{i=1}^n [\mathbf{g} \cdot (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)^\perp] \int_0^1 \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \end{aligned}$$

Equazione 2-89

In definitiva per una sezione poligonale, risulta:

$\int_{\Omega} \frac{dA}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} =$ $= \begin{cases} \frac{1}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})} \sum_{i=1}^n [\mathbf{g} \cdot (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)^\perp] \ln \varepsilon_i & \alpha_i = 0 \\ \frac{1}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})} \sum_{i=1}^n [\mathbf{g} \cdot (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)^\perp] \left[\frac{\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{\alpha_i} - 1 \right] & \alpha_i \neq 0 \end{cases}$ <p>con $\alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$</p>	$\alpha_i = 0$ $\alpha_i \neq 0$
---	---

Equazione 2-90

Calcolo dell'integrale $\left[\int_{\Omega} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA \right]$

Si osserva che:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{div}[(\mathbf{r} \otimes \mathbf{g}) \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)] dA &= \int_{\Omega} [x_i g_j \ln(g_k x_k + \varepsilon_0)]_{/j} dA = \\ &= \int_{\Omega} \left[x_{i/j} g_j \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) + \frac{x_i g_j}{g_k x_k + \varepsilon_0} (g_k x_k)_{/j} \right] dA = \\ &= \int_{\Omega} \left[g_i \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) + \frac{x_i g_j}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} g_k x_{k/j} \right] dA \end{aligned}$$

Equazione 2-91

Utilizzando il simbolo di Kronecker $x_{k/j} = \delta_{kj}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[g_i \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) + \frac{x_i g_j}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} g_k x_{k/j} \right] dA &= \int_{\Omega} \left[g_i \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) + \frac{x_i g_j}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} g_k \delta_{kj} \right] dA = \\ &= \int_{\Omega} \left[g_i \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) + \frac{x_i g_j}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} g_j \right] dA = \mathbf{g} \int_{\Omega} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) dA + (\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA \end{aligned}$$

quindi:

$$\boxed{\int_{\Omega} \text{div}[(\mathbf{r} \otimes \mathbf{g}) \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)] dA = \mathbf{g} \int_{\Omega} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) dA + (\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA}$$

Equazione 2-92

Si osserva inoltre che:

$$\int_{\Omega} \text{div} [\mathbf{r} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)] dA = \int_{\Omega} [x_i \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)]_{/i} dA = \int_{\Omega} \left[x_{i/i} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) + \frac{x_i g_k x_{k/i}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} \right] dA$$

Equazione 2-93

$x_{i/i} = d = 2$ $d = \text{dimensione dello spazio}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[x_{i/i} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) + \frac{x_i g_k x_{k/i}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} \right] dA &= \int_{\Omega} \left[d \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) + \frac{x_i g_i}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} \right] dA = \\ &= \int_{\Omega} \left[2 \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{g}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} \right] dA = 2 \int_{\Omega} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) dA + \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{g}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA \end{aligned}$$

Equazione 2-94

quindi:

$$\int_{\Omega} \text{div} [\mathbf{r} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)] dA = 2 \int_{\Omega} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) dA + \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{g}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA$$

Equazione 2-95

Si può riscrivere l'Equazione 2-92 e l'Equazione 2-95 eliminando la divergenza a primo membro; per l'Equazione 2-92, si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{div} [(\mathbf{r} \otimes \mathbf{g}) \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)] dA &= \int_{Fr(\Omega)} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) ds = \\ &= \int_{Fr(\Omega)} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{r} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) ds \end{aligned}$$

Equazione 2-96

avendo utilizzato la proprietà del prodotto tensoriale: $(\mathbf{r} \otimes \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{r}$

quindi:

$$\int_{Fr(\Omega)} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{r} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) ds = \mathbf{g} \int_{\Omega} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) dA + (\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA$$

Equazione 2-97

mentre per l'Equazione 2-95 si ha:

$$\int_{\Omega} \text{div}[\mathbf{r} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)] dA = \int_{Fr(\Omega)} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) ds$$

Equazione 2-98

quindi:

$$\int_{Fr(\Omega)} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) ds = 2 \int_{\Omega} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) dA + \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{g}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA$$

Equazione 2-99

Moltiplicando scalarmente l'Equazione 2-97 per $\mathbf{g} \cdot$ e l'Equazione 2-99 per $(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})$, si ricava:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} \cdot \int_{Fr(\Omega)} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{r} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) ds &= \\ &= (\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) \int_{\Omega} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) dA + (\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{g}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA \end{aligned}$$

Equazione 2-100

$$\begin{aligned} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) \int_{Fr(\Omega)} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) ds &= \\ &= 2(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) \int_{\Omega} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) dA + (\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{g}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA \end{aligned}$$

Equazione 2-101

a questo punto sottraendo l'Equazione 2-100 all'Equazione 2-101, si ottiene:

$$\begin{aligned} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) \int_{Fr(\Omega)} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) ds - \mathbf{g} \cdot \int_{Fr(\Omega)} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{r} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) ds &= \\ &= 2(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) \int_{\Omega} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) dA + (\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{g}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA \\ &\quad - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) \int_{\Omega} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) dA - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{g}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA \end{aligned}$$

Equazione 2-102

si ricava:

$$\int_{Fr(\Omega)} \left\{ [(r \cdot n)(g \cdot g) - (g \cdot n)(r \cdot g)] \ln(g \cdot r + \varepsilon_0) \right\} ds = (g \cdot g) \int_{\Omega} \ln(g \cdot r + \varepsilon_0) dA$$

Equazione 2-103

da cui si può ricavare l'espressione dell'integrale:

$$\left[\int_{\Omega} \ln(g \cdot r + \varepsilon_0) dA \right] = \frac{1}{(g \cdot g)} \int_{Fr(\Omega)} \left\{ [(r \cdot n)(g \cdot g) - (g \cdot n)(r \cdot g)] \ln(g \cdot r + \varepsilon_0) \right\} ds$$

Equazione 2-104

A questo punto partendo dall'Equazione 2-97, possiamo ricavare l'integrale

$$\left[\int_{\Omega} \frac{r}{(g \cdot r + \varepsilon_0)} dA \right], \text{ infatti:}$$

$$\int_{\Omega} \frac{r}{(g \cdot r + \varepsilon_0)} dA = \frac{1}{(g \cdot g)} \int_{Fr(\Omega)} (g \cdot n) r \ln(g \cdot r + \varepsilon_0) ds - \frac{g}{(g \cdot g)} \int_{\Omega} \ln(g \cdot r + \varepsilon_0) dA =$$

Equazione 2-105

in cui sostituendo l'espressione di $\left[\int_{\Omega} \ln(g \cdot r + \varepsilon_0) dA \right]$ ricavata, si ha:

$$\boxed{\int_{\Omega} \frac{r}{(g \cdot r + \varepsilon_0)} dA = \frac{1}{(g \cdot g)} \int_{Fr(\Omega)} (g \cdot n) r \ln(g \cdot r + \varepsilon_0) ds + \frac{g}{(g \cdot g)^2} \int_{Fr(\Omega)} \left\{ [(r \cdot n)(g \cdot g) - (g \cdot n)(r \cdot g)] \ln(g \cdot r + \varepsilon_0) \right\} ds}$$

Equazione 2-106

Nel caso di sezioni poligonali:

$$\int_{\Omega} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA = \frac{1}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})} \sum_{i=1}^n (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_i) \int_{Fr(\Omega_i)} \mathbf{r}(s_i) \ln [\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i +$$

$$- \frac{\mathbf{g}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})^2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_i) \int_{Fr(\Omega_i)} \ln [\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i +$$

$$+ \frac{\mathbf{g}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})^2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_i) \left\{ \mathbf{g} \cdot \int_{Fr(\Omega_i)} \mathbf{r}(s_i) \ln [\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i \right\}$$

Equazione 2-107

L'integrale $\left[\int_{Fr(\Omega_i)} \ln [\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i \right]$ è stato già calcolato e vale:

$$\left[\int_{Fr(\Omega_i)} \ln [\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i \right] = \begin{cases} l_i \ln \varepsilon_i & \alpha_i = 0 \\ l_i \left(\frac{\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{\alpha_i} - 1 \right) & \alpha_i \neq 0 \end{cases} \quad (\text{B1})$$

con $\alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$

Resta da calcolare: $\left[\int_{Fr(\Omega_i)} \mathbf{r}(s_i) \ln [\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i \right]$

posto: $\frac{s_i}{l_i} = \lambda_i \quad ds_i = l_i d\lambda_i$

e ricordando che l'equazione parametrica della retta r è:

$$\hat{\mathbf{r}}(\lambda_i) = (1 - \lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1} \quad \text{con} \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

si ha:

$$\int_{Fr(\Omega_i)} \mathbf{r}(s_i) \ln [\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i = l_i \int_0^1 \hat{\mathbf{r}}(\lambda_i) \ln [\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{r}}(\lambda_i) + \varepsilon_0] d\lambda_i =$$

$$= l_i \int_0^1 [(1 - \lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1}] \ln \left\{ \mathbf{g} \cdot [(1 - \lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1}] + \varepsilon_0 \right\} d\lambda_i =$$

$$= l_i \int_0^1 (\mathbf{r}_i - \lambda_i \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1}) \ln [\mathbf{g} \cdot (\mathbf{r}_i - \lambda_i \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1}) + \varepsilon_0] d\lambda_i =$$

$$\begin{aligned}
&= l_i \int_0^1 \left[\mathbf{r}_i + \lambda_i (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \right] \ln \left[\lambda_i \mathbf{g} \bullet (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) + \mathbf{g} \bullet \mathbf{r}_i + \varepsilon_0 \right] d\lambda_i \\
&= l_i \int_0^1 \left[\mathbf{r}_i + \lambda_i (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \right] \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i
\end{aligned}$$

Equazione 2-108

con $\alpha_i = \mathbf{g} \bullet (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$

$$\begin{aligned}
&l_i \int_0^1 \left[\mathbf{r}_i + \lambda_i (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \right] \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i = \\
&= l_i \int_0^1 \left\{ \mathbf{r}_i \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) + \left[\lambda_i (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \right] \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) \right\} d\lambda_i
\end{aligned}$$

Equazione 2-109

e cioè in definitiva:

$\int_{Fr(\Omega_i)} \mathbf{r}(s_i) \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i = l_i \left[\mathbf{r}_i \int_0^1 \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i + (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \int_0^1 \lambda_i \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right]$
<p>con $\alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$</p>

Equazione 2-110

L'integrale $\left[\int_0^1 \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda \right]$ è stato già calcolato e vale:

$\left[\int_0^1 \ln (\alpha_i \lambda_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right] = \begin{cases} \ln \varepsilon_i & \alpha_i = 0 \\ \frac{\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{\alpha_i} - 1 & \alpha_i \neq 0 \end{cases}$	(B2)
<p>con $\alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$</p>	

Occorre calcolare $\left[\int_0^1 \lambda_i \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right]$

Caso $\alpha_i = 0$:

$$\int_0^1 \lambda_i \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i = \int_0^1 \lambda_i \ln \varepsilon_i d\lambda_i = \ln \varepsilon_i \int_0^1 \lambda_i d\lambda_i = \left[\frac{\lambda_i^2}{2} \right]_0^1 \ln \varepsilon_i = \frac{1}{2} \ln \varepsilon_i$$

Equazione 2-111

Caso $\alpha_i \neq 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \lambda_i \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i &= \\ &= \int_0^1 \frac{\alpha_i}{\alpha_i} \lambda_i \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i = \int_0^1 \frac{\alpha_i \lambda_i + \varepsilon_i - \varepsilon_i}{\alpha_i} \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i = \\ &= \int_0^1 \frac{(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) - \varepsilon_i}{\alpha_i} \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i = \end{aligned}$$

Equazione 2-112

e cioè:

$$\boxed{\int_0^1 \lambda_i \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i = \frac{1}{\alpha_i} \left[\int_0^1 (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i - \varepsilon_i \int_0^1 \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right]} \quad (\text{B1 bis})$$

con $\alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$

L'integrale $\left[\int_0^1 \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right]$ è stato già calcolato, cfr. formula (B2), resta

da calcolare: $\left[\int_0^1 (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right]$ per $\alpha_i \neq 0$

$$\text{posto} \quad t_i = \alpha_i \lambda_i + \varepsilon_i \quad \Rightarrow \quad d\lambda_i = \frac{dt_i}{\alpha_i} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_i = 0 & \rightarrow & t_i = \varepsilon_i \\ \lambda_i = 1 & \rightarrow & t_i = \varepsilon_{i+1} \end{cases}$$

$$\text{si ha:} \quad \int_0^1 (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} t \ln t \frac{dt}{\alpha_i} = \frac{1}{\alpha_i} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} t \ln t dt$$

ricordando che: $\int x \ln x dx = x^2 \left(\frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4} \right)$

si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_i} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} t \ln t dt &= \frac{1}{\alpha_i} \left[t^2 \left(\frac{1}{2} \ln t - \frac{1}{4} \right) \right]_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} = \frac{\varepsilon_{i+1}^2}{\alpha_i} \left(\frac{1}{2} \ln \varepsilon_{i+1} - \frac{1}{4} \right) - \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i} \left(\frac{1}{2} \ln \varepsilon_i - \frac{1}{4} \right) = \\ &= \frac{\varepsilon_{i+1}^2}{2\alpha_i} \ln \varepsilon_{i+1} - \frac{\varepsilon_{i+1}^2}{4\alpha_i} - \frac{\varepsilon_i^2}{2\alpha_i} \ln \varepsilon_i + \frac{\varepsilon_i^2}{4\alpha_i} = \frac{1}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1}^2 \left(\ln \varepsilon_{i+1} - \frac{1}{2} \right) - \varepsilon_i^2 \left(\ln \varepsilon_i - \frac{1}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

Equazione 2-113

quindi:

$$\boxed{\int_0^1 (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i = \frac{1}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1}^2 \left(\ln \varepsilon_{i+1} - \frac{1}{2} \right) - \varepsilon_i^2 \left(\ln \varepsilon_i - \frac{1}{2} \right) \right]}$$

con $\alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \neq 0$

Equazione 2-114

Ritornando all'integrale $\left[\int_0^1 \lambda_i \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right]$, che appare nella (B1 bis) si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \lambda_i \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i &= \frac{1}{\alpha_i} \left[\int_0^1 (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i - \varepsilon_i \int_0^1 \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right] = \\ &= \frac{1}{\alpha_i} \left\{ \frac{1}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1}^2 \left(\ln \varepsilon_{i+1} - \frac{1}{2} \right) - \varepsilon_i^2 \left(\ln \varepsilon_i - \frac{1}{2} \right) \right] - \varepsilon_i \left[\frac{\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{\alpha_i} - 1 \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2\alpha_i^2} \left[\varepsilon_{i+1}^2 \left(\ln \varepsilon_{i+1} - \frac{1}{2} \right) - \varepsilon_i^2 \left(\ln \varepsilon_i - \frac{1}{2} \right) \right] - \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i^2} (\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i) + \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} = \\ &= \frac{1}{2\alpha_i^2} \left(\varepsilon_{i+1}^2 \ln \varepsilon_{i+1} - \frac{\varepsilon_{i+1}^2}{2} - \varepsilon_i^2 \ln \varepsilon_i + \frac{\varepsilon_i^2}{2} \right) - \frac{\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}}{\alpha_i^2} \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i^2} \ln \varepsilon_i + \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\varepsilon_{i+1}^2}{2\alpha_i^2} \ln \varepsilon_{i+1} - \frac{\varepsilon_{i+1}^2}{4\alpha_i^2} - \frac{\varepsilon_i^2}{2\alpha_i^2} \ln \varepsilon_i + \frac{\varepsilon_i^2}{4\alpha_i^2} - \frac{\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}}{\alpha_i^2} \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i^2} \ln \varepsilon_i + \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} = \\
&= \ln \varepsilon_{i+1} \left(\frac{\varepsilon_{i+1}^2 - 2\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}}{2\alpha_i^2} \right) + \ln \varepsilon_i \left(\frac{2\varepsilon_i^2 - \varepsilon_i^2}{2\alpha_i^2} \right) - \frac{\varepsilon_{i+1}^2 - \varepsilon_i^2 - 4\alpha_i \varepsilon_i}{4\alpha_i^2} = \\
&= \varepsilon_{i+1} \left(\frac{\varepsilon_{i+1} - 2\varepsilon_i}{2\alpha_i^2} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \left(\frac{\varepsilon_i^2}{2\alpha_i^2} \right) \ln \varepsilon_i - \frac{(\varepsilon_{i+1} + \varepsilon_i)(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i) - 4(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)\varepsilon_i}{4\alpha_i^2} = \\
&= \varepsilon_{i+1} \left(\frac{\varepsilon_{i+1} - 2\varepsilon_i}{2\alpha_i^2} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \left(\frac{\varepsilon_i^2}{2\alpha_i^2} \right) \ln \varepsilon_i - \frac{(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)[(\varepsilon_{i+1} + \varepsilon_i) - 4\varepsilon_i]}{4\alpha_i^2} = \\
&= \varepsilon_{i+1} \left(\frac{\varepsilon_{i+1} - 2\varepsilon_i}{2\alpha_i^2} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \left(\frac{\varepsilon_i^2}{2\alpha_i^2} \right) \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{4\alpha_i} = \\
&= \frac{1}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1} \left(\frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i - \varepsilon_i}{\alpha_i} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{2} \right] = \\
&= \frac{1}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1} \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{2} \right]
\end{aligned}$$

Equazione 2-115

quindi^[2]:

^[2] In appendice A.2 si dimostra che per $[\alpha_i \rightarrow 0]$ le due formule coincidono

$$\left[\int_0^1 \lambda_i \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right] = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \varepsilon_i & \alpha_i = 0 \\ \frac{1}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1} \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{2} \right] & \alpha_i \neq 0 \end{cases}$$

con $\alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$

Equazione 2-116

Ritornando adesso all'integrale: $\left[\int_{Fr(\Omega_i)} \mathbf{r}(s_i) \ln[\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i \right]$, si ha:

Caso $\alpha_i = 0$:

$$\begin{aligned} \int_{Fr(\Omega_i)} \mathbf{r}(s_i) \ln[\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i &= l_i \left[\mathbf{r}_i \int_0^1 \ln \varepsilon_i d\lambda_i + (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \int_0^1 \lambda_i \ln \varepsilon_i d\lambda_i \right] = \\ &= l_i \left[\mathbf{r}_i \ln \varepsilon_i + (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \frac{1}{2} \ln \varepsilon_i \right] = l_i \ln \varepsilon_i \left(\mathbf{r}_i + \frac{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i}{2} \right) = \frac{1}{2} l_i \ln \varepsilon_i (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{i+1}) \end{aligned}$$

Equazione 2-117

Caso $\alpha_i \neq 0$:

$$\begin{aligned} \int_{Fr(\Omega_i)} \mathbf{r}(s_i) \ln[\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i &= l_i \left[\mathbf{r}_i \int_0^1 \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i + (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \int_0^1 \lambda_i \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right] = \\ &= l_i \left\{ \mathbf{r}_i \left(\frac{\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{\alpha_i} - 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1} \left(\frac{\varepsilon_{i+1} - 2\varepsilon_i}{\alpha_i} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{2} \right] \right\} = \\ &= l_i \left\{ \mathbf{r}_i \left(\frac{\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{\alpha_i} - 1 - \frac{\varepsilon_{i+1}^2 - 2\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}}{2\alpha_i^2} \ln \varepsilon_{i+1} - \frac{\varepsilon_i^2}{2\alpha_i^2} \ln \varepsilon_i + \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{4\alpha_i} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathbf{r}_{i+1}}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1} \left(\frac{\varepsilon_{i+1} - 2\varepsilon_i}{\alpha_i} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{2} \right] \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= l_i \left\{ \frac{\mathbf{r}_i}{4\alpha_i^2} \left(\frac{(\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i) 4\alpha_i - 4\alpha_i^2 - 2(\varepsilon_{i+1}^2 - 2\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}) \ln \varepsilon_{i+1} - 2\varepsilon_i^2 \ln \varepsilon_i + (\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i) \alpha_i}{4\alpha_i^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mathbf{r}_{i+1}}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1} \left(\frac{\varepsilon_{i+1} - 2\varepsilon_i}{\alpha_i} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{2} \right] \right\} = \\
&= l_i \left\{ \frac{\mathbf{r}_i}{4\alpha_i^2} \left(\frac{(4\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - 4\varepsilon_i \ln \varepsilon_i)(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i) - 4(\varepsilon_{i+1}^2 + \varepsilon_i^2 - 2\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}) +}{(-2\varepsilon_{i+1}^2 + 4\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}) \ln \varepsilon_{i+1} - 2\varepsilon_i^2 \ln \varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}^2 - \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} + 3\varepsilon_i^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mathbf{r}_{i+1}}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1} \left(\frac{\varepsilon_{i+1} - 2\varepsilon_i}{\alpha_i} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{2} \right] \right\} = \\
&= l_i \left\{ \frac{\mathbf{r}_i}{4\alpha_i^2} \left(\frac{4\varepsilon_{i+1}^2 \ln \varepsilon_{i+1} - 4\varepsilon_{i+1} \varepsilon_i \ln \varepsilon_i - 4\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} + 4\varepsilon_i^2 \ln \varepsilon_i - 4\varepsilon_{i+1}^2 - 4\varepsilon_i^2 + 8\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} +}{(-2\varepsilon_{i+1}^2 + 4\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}) \ln \varepsilon_{i+1} - 2\varepsilon_i^2 \ln \varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}^2 - \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} + 3\varepsilon_i^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mathbf{r}_{i+1}}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1} \left(\frac{\varepsilon_{i+1} - 2\varepsilon_i}{\alpha_i} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{2} \right] \right\} = \\
&= l_i \left\{ \frac{\mathbf{r}_i}{4\alpha_i^2} \left[\frac{(-2\varepsilon_{i+1}^2 + 4\varepsilon_i^2) \ln \varepsilon_{i+1} +}{(4\varepsilon_i^2 - 4\varepsilon_{i+1} \varepsilon_i - 2\varepsilon_i^2) \ln \varepsilon_i - 3\varepsilon_{i+1}^2 - \varepsilon_i^2 + 4\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mathbf{r}_{i+1}}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1} \left(\frac{\varepsilon_{i+1} - 2\varepsilon_i}{\alpha_i} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{2} \right] \right\} = \\
&= l_i \left\{ \frac{\mathbf{r}_i}{4\alpha_i^2} \left[\frac{(2\varepsilon_i^2 - 4\varepsilon_{i+1} \varepsilon_i) \ln \varepsilon_i + 2\varepsilon_{i+1}^2 \ln \varepsilon_{i+1} +}{-3\varepsilon_{i+1}^2 - \varepsilon_i^2 + 4\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mathbf{r}_{i+1}}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1} \left(\frac{\varepsilon_{i+1} - 2\varepsilon_i}{\alpha_i} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{2} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Equazione 2-118

quindi:

$$\left[\int_{Fr(\Omega_i)} \mathbf{r}(s_i) \ln [\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i \right] = \begin{cases} \frac{(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{i+1})}{2} l_i \ln \varepsilon_i & \alpha_i = 0 \\ l_i \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\mathbf{r}_i}{4\alpha_i^2} \left[(2\varepsilon_i^2 - 4\varepsilon_{i+1}\varepsilon_i) \ln \varepsilon_i + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\varepsilon_{i+1}^2 \ln \varepsilon_{i+1} + \right. \right. \\ & \left. \left. - 3\varepsilon_{i+1}^2 - \varepsilon_i^2 + 4\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\mathbf{r}_{i+1}}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1} \left(\frac{\varepsilon_{i+1} - 2\varepsilon_i}{\alpha_i} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{2} \right] \right\} & \alpha_i \neq 0 \end{aligned} \right.
\end{cases}$$

con $\alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$

Equazione 2-119

A questo punto si può calcolare l'integrale di partenza $\left[\int_{\Omega} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA \right]$.

Per una sezione poligonale si ha:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA = & \frac{1}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})} \sum_{i=1}^n (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_i) \int_{Fr(\Omega_i)} \mathbf{r}(s_i) \ln [\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i + \\
& - \frac{\mathbf{g}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})} \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_i) \int_{Fr(\Omega_i)} \ln [\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i + \\
& + \frac{\mathbf{g}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})^2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_i) \left\{ \mathbf{g} \cdot \int_{Fr(\Omega_i)} \mathbf{r}(s_i) \ln [\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i \right\}
\end{aligned}$$

Equazione 2-120

Caso $\alpha_i = 0$:

$$\int_{\Omega} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA = \frac{1}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})} \sum_{i=1}^n (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_i) \left[\frac{(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{i+1})}{2} l_i \ln \varepsilon_i \right] +$$

$$- \frac{\mathbf{g}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})} \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_i) (l_i \ln \varepsilon_i) +$$

$$+ \frac{\mathbf{g}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})^2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_i) \left\{ \mathbf{g} \cdot \left[\frac{(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{i+1})}{2} l_i \ln \varepsilon_i \right] \right\}$$

Equazione 2-121

Caso $\alpha_i \neq 0$:

$$\int_{\Omega} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA = \frac{1}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})} \sum_{i=1}^n (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_i) l_i \left\{ \frac{\mathbf{r}_i}{4\alpha_i^2} \left[(2\varepsilon_i^2 - 4\varepsilon_{i+1}\varepsilon_i) \ln \varepsilon_i + 2\varepsilon_{i+1}^2 \ln \varepsilon_{i+1} + \right. \right. \\ \left. \left. - 3\varepsilon_{i+1}^2 - \varepsilon_i^2 + 4\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\mathbf{r}_{i+1}}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1} \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{2} \right] \right\} +$$

$$- \frac{\mathbf{g}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})} \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_i) l_i \left(\frac{\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i} - 1 \right) +$$

$$+ \frac{\mathbf{g}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})^2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_i) \left\{ \mathbf{g} \cdot l_i \left\{ \frac{\mathbf{r}_i}{4\alpha_i^2} \left[(2\varepsilon_i^2 - 4\varepsilon_{i+1}\varepsilon_i) \ln \varepsilon_i + 2\varepsilon_{i+1}^2 \ln \varepsilon_{i+1} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. - 3\varepsilon_{i+1}^2 - \varepsilon_i^2 + 4\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \right] + \right. \\ \left. \left. + \frac{\mathbf{r}_{i+1}}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1} \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{2} \right] \right\} \right\}$$

Equazione 2-122

ricordando che: $\mathbf{n}_i = \frac{(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)}{l_i} \times \mathbf{k} = \frac{(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)^\perp}{l_i}$

si ha:

Caso $\alpha_i = 0$

$$\int_{\Omega} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA = \frac{1}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})} \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{g} \cdot (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)^{\perp} \right] \left[\frac{(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{i+1})}{2} \ln \varepsilon_i \right] - \frac{\mathbf{g}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})} \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)^{\perp} \right] \ln \varepsilon_i +$$

$$+ \frac{\mathbf{g}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})^2} \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{g} \cdot (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)^{\perp} \right] \left\{ \mathbf{g} \cdot \left[\frac{(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{i+1})}{2} \ln \varepsilon_i \right] \right\}$$

Caso $\alpha_i \neq 0$

$$\int_{\Omega} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA = \frac{1}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})} \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{g} \cdot (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)^{\perp} \right] \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\mathbf{r}_i}{4\alpha_i^2} \left[(2\varepsilon_i^2 - 4\varepsilon_{i+1}\varepsilon_i) \ln \varepsilon_i + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\varepsilon_{i+1}^2 \ln \varepsilon_{i+1} + \right. \right. \\ & \left. \left. - 3\varepsilon_{i+1}^2 - \varepsilon_i^2 + 4\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\mathbf{r}_{i+1}}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1} \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{2} \right] \right] \end{aligned} \right\} +$$

$$- \frac{\mathbf{g}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})} \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)^{\perp} \right] \left(\frac{\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i} - 1 \right) +$$

$$+ \frac{\mathbf{g}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})^2} \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{g} \cdot (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)^{\perp} \right] \left\{ \mathbf{g} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\mathbf{r}_i}{4\alpha_i^2} \left[(2\varepsilon_i^2 - 4\varepsilon_{i+1}\varepsilon_i) \ln \varepsilon_i + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\varepsilon_{i+1}^2 \ln \varepsilon_{i+1} + \right. \right. \\ & \left. \left. - 3\varepsilon_{i+1}^2 - \varepsilon_i^2 + 4\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\mathbf{r}_{i+1}}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1} \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{2} \right] \right] \end{aligned} \right\} \right\}$$

con $\alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$

Equazione 2-123

$$\text{Calcolo dell'integrale } \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{\varepsilon(\mathbf{r})} dA = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA$$

Si osserva che:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{div}[(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{g}) \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)] dA &= \int_{\Omega} \left\{ x_i x_j g_k \left[\ln(g_p x_p + \varepsilon_0) \right] \right\}_{/k} dA = \\ &= \int_{\Omega} \left[x_{i/k} x_j g_k \ln(g_p x_p + \varepsilon_0) + x_i x_{j/k} g_k \ln(g_p x_p + \varepsilon_0) + \frac{x_i x_j g_k}{(g_p x_p + \varepsilon_0)} g_p x_{p/k} \right] dA = \\ &= \int_{\Omega} \left[\delta_{ik} x_j g_k \ln(g_p x_p + \varepsilon_0) + x_i \delta_{jk} g_k \ln(g_p x_p + \varepsilon_0) + \frac{x_i x_j g_k}{(g_p x_p + \varepsilon_0)} g_p \delta_{pk} \right] dA = \\ &= \int_{\Omega} \left[g_i x_j \ln(g_p x_p + \varepsilon_0) + x_i g_j \ln(g_p x_p + \varepsilon_0) + \frac{x_i x_j g_k g_k}{(g_p x_p + \varepsilon_0)} \right] dA = \\ &= \int_{\Omega} [(\mathbf{g} \otimes \mathbf{r}) + (\mathbf{r} \otimes \mathbf{g})] \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) dA + (\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) \int_{\Omega} \frac{(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA \end{aligned}$$

quindi:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{div}[(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{g}) \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)] dA &= \int_{\Omega} [(\mathbf{g} \otimes \mathbf{r}) + (\mathbf{r} \otimes \mathbf{g})] \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) dA + \\ &+ (\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) \int_{\Omega} \frac{(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA \end{aligned}$$

Equazione 2-124

sviluppando la divergenza a primo membro:

$$\int_{\Omega} \text{div}[(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{g}) \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)] dA = \int_{Fr(\Omega)} [(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)] ds$$

Equazione 2-125

si ha:

$$\boxed{\int_{Fr(\Omega)} [(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)] ds = \int_{\Omega} [(\mathbf{g} \otimes \mathbf{r}) + (\mathbf{r} \otimes \mathbf{g})] \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) dA + (\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) \int_{\Omega} \frac{(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA}$$

Equazione 2-126

Per poter calcolare l'ultimo integrale in funzione di soli integrali di contorno

occorre calcolare $\left[\int_{\Omega} \mathbf{r} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) dA \right]$.

A tal fine si considera:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) dA &= \int_{\Omega} \left[x_i x_j \ln(g_k x_k + \varepsilon_0) \right]_{/j} dA = \\ &= \int_{\Omega} \left[\delta_{ij} x_j \ln(g_k x_k + \varepsilon_0) + x_i \delta_{jj} \ln(g_k x_k + \varepsilon_0) + \frac{x_i x_j}{(g_k x_k + \varepsilon_0)} g_k \delta_{kj} \right] dA = \\ &= \int_{\Omega} \left[x_i \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) + d x_i \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) + \frac{(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} g_j \right] dA \end{aligned}$$

Equazione 2-127

sviluppando la divergenza a primo membro:

$$\int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) dA = \int_{Fr(\Omega)} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{r} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) ds$$

Equazione 2-128

si ha:

$$\int_{Fr(\Omega)} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{r} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) ds = \int_{\Omega} \left[\mathbf{r} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) + 2 \mathbf{r} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) + \frac{(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \mathbf{g}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} \right] dA$$

cioè:

$$\int_{Fr(\Omega)} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{r} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) ds = 3 \int_{\Omega} \mathbf{r} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) dA + \int_{\Omega} \frac{(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \mathbf{g}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA$$

Equazione 2-129

Moltiplichiamo scalarmente l'Equazione 2-126 per \mathbf{g} e l'Equazione 2-129 per $(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})$,

si ha:

$$\left\{ \int_{Fr(\Omega)} [(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)] ds \right\} \mathbf{g} =$$

$$= \left\{ \int_{\Omega} [(\mathbf{g} \otimes \mathbf{r}) + (\mathbf{r} \otimes \mathbf{g})] \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) dA + (\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) \int_{\Omega} \frac{(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA \right\} \mathbf{g}$$

Equazione 2-130

$$(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) \int_{Fr(\Omega)} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{r} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) ds = 3(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) \int_{\Omega} \mathbf{r} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) dA + (\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) \int_{\Omega} \frac{(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \mathbf{g}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA$$

Equazione 2-131

Utilizzando l'Equazione 2-131 si ricava:

$$\int_{Fr(\Omega)} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) \mathbf{r} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) ds - \int_{Fr(\Omega)} [(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \mathbf{g} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)] ds =$$

$$= 3(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) \int_{\Omega} \mathbf{r} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) dA - \int_{\Omega} (\mathbf{g} \otimes \mathbf{r}) \mathbf{g} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) dA - \int_{\Omega} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{g}) \mathbf{g} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) dA$$

quindi:

$$\begin{aligned} \int_{Fr(\Omega)} \left[(r \cdot n)(g \cdot g) - (g \cdot n)(r \cdot g) \right] r \ln(g \cdot r + \varepsilon_0) ds = \\ = 2(g \cdot g) \int_{\Omega} r \ln(g \cdot r + \varepsilon_0) dA - g \int_{\Omega} (g \cdot r) \ln(g \cdot r + \varepsilon_0) dA \end{aligned}$$

Equazione 2-132

Occorre adesso calcolare $\left[\int_{\Omega} (g \cdot r) \ln(g \cdot r + c) dA \right]$

A tale scopo si moltiplica scalarmente l'Equazione 2-132 per $\bullet g$, si ha:

$$\begin{aligned} \int_{Fr(\Omega)} \left[(r \cdot n)(g \cdot g) - (g \cdot n)(r \cdot g) \right] (r \cdot g) \ln(g \cdot r + \varepsilon_0) ds = \\ = 2(g \cdot g) \int_{\Omega} (r \cdot g) \ln(g \cdot r + \varepsilon_0) dA - (g \cdot g) \int_{\Omega} (g \cdot r) \ln(g \cdot r + \varepsilon_0) dA \end{aligned}$$

Equazione 2-133

da cui:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (r \cdot g) \ln(g \cdot r + \varepsilon_0) dA = \\ = \frac{1}{(g \cdot g)} \int_{Fr(\Omega)} \left[(r \cdot n)(g \cdot g) - (g \cdot n)(r \cdot g) \right] (r \cdot g) \ln(g \cdot r + \varepsilon_0) ds \end{aligned}$$

Equazione 2-134

Partendo dall'Equazione 2-132

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} r \ln(g \cdot r + \varepsilon_0) dA = \frac{1}{2(g \cdot g)} \int_{Fr(\Omega)} \left[(r \cdot n)(g \cdot g) - (g \cdot n)(r \cdot g) \right] r \ln(g \cdot r + \varepsilon_0) ds + \\ + \frac{g}{2(g \cdot g)} \int_{\Omega} (g \cdot r) \ln(g \cdot r + \varepsilon_0) dA \end{aligned}$$

Equazione 2-135

in cui sostituendo il valore dell'integrale $\left[\int_{\Omega} (r \cdot g) \ln(g \cdot r + c) dA \right]$ trovato:

$$\int_{\Omega} \mathbf{r} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) dA = \frac{1}{2(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})} \int_{Fr(\Omega)} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{g})] \mathbf{r} \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) ds +$$

$$+ \frac{\mathbf{g}}{2(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})^2} \int_{Fr(\Omega)} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{g})] (\mathbf{r} \cdot \mathbf{g}) \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) ds$$

Equazione 2-136

Partendo dall'Equazione 2-126

$$\int_{Fr(\Omega)} [(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)] ds = \int_{\Omega} [(\mathbf{g} \otimes \mathbf{r}) + (\mathbf{r} \otimes \mathbf{g}) \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)] dA +$$

$$+ (\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) \int_{\Omega} \frac{(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA$$

Equazione 2-137

si ricava:

$$\int_{\Omega} \frac{(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA = \frac{1}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})} \int_{Fr(\Omega)} [(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)] ds +$$

$$- \frac{1}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})} \int_{\Omega} [(\mathbf{g} \otimes \mathbf{r}) + (\mathbf{r} \otimes \mathbf{g}) \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)] dA$$

Equazione 2-138

$$\int_{\Omega} \frac{(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA = \frac{1}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})} \int_{Fr(\Omega)} [(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0)] ds +$$

$$- \frac{1}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})} \int_{\Omega} (\mathbf{g} \otimes \mathbf{r}) \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) dA$$

$$- \frac{1}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})} \int_{\Omega} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{g}) \ln(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_0) dA$$

Equazione 2-139

cioè

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{(r \otimes r)}{(g \bullet r + \varepsilon_0)} dA &= \frac{1}{(g \bullet g)} \int_{Fr(\Omega)} [(g \bullet n)(r \otimes r) \ln(g \bullet r + \varepsilon_0)] ds + \\ &\quad - \frac{g \otimes}{(g \bullet g)} \left[\int_{\Omega} r \ln(g \bullet r + \varepsilon_0) dA \right] \\ &\quad - \frac{1}{(g \bullet g)} \left[\int_{\Omega} r \ln(g \bullet r + \varepsilon_0) dA \right] \otimes g \end{aligned}$$

Equazione 2-140

A questo punto sostituendo il valore di $\left[\int_{\Omega} r \ln(g \bullet r + \varepsilon_0) dA \right]$ ricavato nell'Equazione

2-136, si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{(r \otimes r)}{(g \bullet r + \varepsilon_0)} dA &= \frac{1}{(g \bullet g)} \int_{Fr(\Omega)} [(g \bullet n)(r \otimes r) \ln(g \bullet r + \varepsilon_0)] ds + \\ &\quad - \frac{g \otimes}{(g \bullet g)} \left[\frac{1}{2(g \bullet g)} \int_{Fr(\Omega)} [(r \bullet n)(g \bullet g) - (g \bullet n)(r \bullet g)] r \ln(g \bullet r + \varepsilon_0) ds + \right. \\ &\quad \left. + \frac{g}{2(g \bullet g)^2} \int_{Fr(\Omega)} [(r \bullet n)(g \bullet g) - (g \bullet n)(r \bullet g)] (r \bullet g) \ln(g \bullet r + \varepsilon_0) ds \right] \\ &\quad - \frac{1}{(g \bullet g)} \left[\frac{1}{2(g \bullet g)} \int_{Fr(\Omega)} [(r \bullet n)(g \bullet g) - (g \bullet n)(r \bullet g)] r \ln(g \bullet r + \varepsilon_0) ds + \right. \\ &\quad \left. + \frac{g}{2(g \bullet g)^2} \int_{Fr(\Omega)} [(r \bullet n)(g \bullet g) - (g \bullet n)(r \bullet g)] (r \bullet g) \ln(g \bullet r + \varepsilon_0) ds \right] \otimes g \end{aligned}$$

Equazione 2-141

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{(r \otimes r)}{(g \cdot r + \varepsilon_0)} dA &= \frac{1}{(g \cdot g)} \int_{Fr(\Omega)} [(g \cdot n)(r \otimes r) \ln(g \cdot r + \varepsilon_0)] ds + \\
&- \frac{1}{2(g \cdot g)^2} \int_{Fr(\Omega)} [(r \cdot n)(g \cdot g) - (g \cdot n)(r \cdot g)](g \otimes r) \ln(g \cdot r + \varepsilon_0) ds + \\
&- \frac{(g \otimes g)}{2(g \cdot g)^3} \int_{Fr(\Omega)} [(r \cdot n)(g \cdot g) - (g \cdot n)(r \cdot g)](r \cdot g) \ln(g \cdot r + \varepsilon_0) ds + \\
&- \frac{1}{2(g \cdot g)^2} \int_{Fr(\Omega)} [(r \cdot n)(g \cdot g) - (g \cdot n)(r \cdot g)](r \otimes g) \ln(g \cdot r + \varepsilon_0) ds + \\
&- \frac{(g \otimes g)}{2(g \cdot g)^3} \int_{Fr(\Omega)} [(r \cdot n)(g \cdot g) - (g \cdot n)(r \cdot g)](r \cdot g) \ln(g \cdot r + \varepsilon_0) ds
\end{aligned}$$

Equazione 2-142

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{(r \otimes r)}{(g \cdot r + \varepsilon_0)} dA &= \frac{1}{(g \cdot g)} \int_{Fr(\Omega)} [(g \cdot n)(r \otimes r) \ln(g \cdot r + \varepsilon_0)] ds + \\
&- \frac{1}{2(g \cdot g)^2} \int_{Fr(\Omega)} \left[\begin{array}{l} (r \cdot n)(g \cdot g) + [(g \otimes r) + \\ -(g \cdot n)(r \cdot g)] \end{array} \right] \ln(g \cdot r + \varepsilon_0) ds + \\
&- \frac{(g \otimes g)}{(g \cdot g)^3} \int_{Fr(\Omega)} [(r \cdot n)(g \cdot g) - (g \cdot n)(r \cdot g)](r \cdot g) \ln(g \cdot r + \varepsilon_0) ds
\end{aligned}$$

Equazione 2-143

Nel caso di sezioni poligonali si ha:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{(r \otimes r)}{(g \cdot r + \varepsilon_0)} dA &= \frac{1}{(g \cdot g)} \sum_{i=1}^n (g \cdot n_i) \int_{Fr_i(\Omega)} \{ [r(s_i) \otimes r(s_i)] \ln [g \cdot r(s_i) + \varepsilon_0] \} ds_i + \\
&- \frac{1}{2(g \cdot g)^2} \sum_{i=1}^n (r_i \cdot n_i) \int_{Fr_i(\Omega)} \{ [g \otimes r(s_i)] + [r(s_i) \otimes g] \} \ln [g \cdot r(s_i) + \varepsilon_0] ds_i + \\
&+ \frac{1}{2(g \cdot g)^2} \sum_{i=1}^n (g \cdot n_i) \int_{Fr_i(\Omega)} [r(s_i) \cdot g] [(g \otimes r(s_i)) + (r(s_i) \otimes g)] \ln [g \cdot r(s_i) + \varepsilon_0] ds_i + \\
&- \frac{(g \otimes g)}{(g \cdot g)^2} \sum_{i=1}^n (r_i \cdot n_i) \int_{Fr_i(\Omega)} [r(s_i) \cdot g] \ln [g \cdot r(s_i) + \varepsilon_0] ds_i + \\
&+ \frac{(g \otimes g)}{(g \cdot g)^3} \sum_{i=1}^n (g \cdot n_i) \int_{Fr_i(\Omega)} [r(s_i) \cdot g]^2 \ln [g \cdot r(s_i) + \varepsilon_0] ds_i
\end{aligned}$$

Equazione 2-144

Quindi:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})}{(\mathbf{g} \bullet \mathbf{r} + \varepsilon_0)} dA &= \frac{1}{(\mathbf{g} \bullet \mathbf{g})} \sum_{i=1}^n (\mathbf{g} \bullet \mathbf{n}_i) \int_{Fr_i(\Omega)} \left\{ [\mathbf{r}(s_i) \otimes \mathbf{r}(s_i)] \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] \right\} ds_i + \\
&- \frac{1}{2(\mathbf{g} \bullet \mathbf{g})} \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \bullet \mathbf{n}_i) \left\{ \mathbf{g} \otimes \int_{Fr_i(\Omega)} \mathbf{r}(s_i) \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i \right\} + \\
&- \frac{1}{2(\mathbf{g} \bullet \mathbf{g})} \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \bullet \mathbf{n}_i) \left\{ \int_{Fr_i(\Omega)} \mathbf{r}(s_i) \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i \right\} \otimes \mathbf{g} + \\
&+ \frac{1}{2(\mathbf{g} \bullet \mathbf{g})^2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{g} \bullet \mathbf{n}_i) \mathbf{g} \otimes \left\{ \int_{Fr_i(\Omega)} \mathbf{r}(s_i) [\mathbf{r}(s_i) \bullet \mathbf{g}] \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i \right\} + \\
&+ \frac{1}{2(\mathbf{g} \bullet \mathbf{g})^2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{g} \bullet \mathbf{n}_i) \left\{ \int_{Fr_i(\Omega)} \mathbf{r}(s_i) [\mathbf{r}(s_i) \bullet \mathbf{g}] \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i \right\} \otimes \mathbf{g} + \\
&- \frac{(\mathbf{g} \otimes \mathbf{g})}{(\mathbf{g} \bullet \mathbf{g})^2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \bullet \mathbf{n}_i) \int_{Fr_i(\Omega)} [\mathbf{r}(s_i) \bullet \mathbf{g}] \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i + \\
&+ \frac{(\mathbf{g} \otimes \mathbf{g})}{(\mathbf{g} \bullet \mathbf{g})^3} \sum_{i=1}^n (\mathbf{g} \bullet \mathbf{n}_i) \int_{Fr_i(\Omega)} [\mathbf{r}(s_i) \bullet \mathbf{g}]^2 \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i
\end{aligned}$$

Equazione 2-145

l'integrale $\left[\int_{Fr_i(\Omega)} \mathbf{r}(s_i) \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i \right]$ è stato già calcolato e vale:

$$\left[\int_{Fr(\Omega_i)} \mathbf{r}(s_i) \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i \right] = \begin{cases} \frac{(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{i+1})}{2} l_i \ln \varepsilon_i & \alpha_i = 0 \\ \left\{ \frac{\mathbf{r}_i}{4\alpha_i^2} \left[\begin{aligned} &(2\varepsilon_i^2 - 4\varepsilon_{i+1}\varepsilon_i) \ln \varepsilon_i + \\ &+ 2\varepsilon_{i+1}^2 \ln \varepsilon_{i+1} + \\ &- 3\varepsilon_{i+1}^2 - \varepsilon_i^2 + 4\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \end{aligned} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\mathbf{r}_{i+1}}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1} \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{2} \right] \right\} & \alpha_i \neq 0 \end{cases}$$

con $\alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$

Equazione 2-146

restano da calcolare:

$$\int_{Fr_i(\Omega)} \left\{ [\mathbf{r}(s_i) \otimes \mathbf{r}(s_i)] \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] \right\} ds_i$$

Equazione 2-147

$$\int_{Fr_i(\Omega)} \mathbf{r}(s_i) [\mathbf{r}(s_i) \bullet \mathbf{g}] \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i$$

Equazione 2-148

$$\int_{Fr_i(\Omega)} [\mathbf{r}(s_i) \bullet \mathbf{g}] \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i$$

Equazione 2-149

$$\int_{Fr_i(\Omega)} [\mathbf{r}(s_i) \bullet \mathbf{g}]^2 \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i$$

Equazione 2-150

Calcolo dell'integrale $\left[\int_{Fr_i(\Omega)} [\mathbf{r}(s_i) \otimes \mathbf{r}(s_i)] \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i \right]$

Posto: $\frac{s_i}{l_i} = \lambda_i \quad ds_i = l_i d\lambda_i$

Si ricorda l'equazione parametrica della retta r :

$$\hat{\mathbf{r}}(\lambda_i) = (1 - \lambda_i)\mathbf{r}_i + \lambda_i\mathbf{r}_{i+1} \quad \text{con} \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Si ha:

$$\begin{aligned} & \int_{F_{r_i}(\Omega)} [\mathbf{r}(s_i) \otimes \mathbf{r}(s_i)] \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i = \\ & = l_i \int_0^1 \left\{ [(1 - \lambda_i)\mathbf{r}_i + \lambda_i\mathbf{r}_{i+1}] \otimes [(1 - \lambda_i)\mathbf{r}_i + \lambda_i\mathbf{r}_{i+1}] \right\} \ln \left\{ \mathbf{g} \bullet [(1 - \lambda_i)\mathbf{r}_i + \lambda_i\mathbf{r}_{i+1}] + \varepsilon_0 \right\} d\lambda_i = \\ & = l_i \int_0^1 [(\mathbf{r}_i - \lambda_i\mathbf{r}_i + \lambda_i\mathbf{r}_{i+1}) \otimes (\mathbf{r}_i - \lambda_i\mathbf{r}_i + \lambda_i\mathbf{r}_{i+1})] \ln [\mathbf{g} \bullet (\mathbf{r}_i - \lambda_i\mathbf{r}_i + \lambda_i\mathbf{r}_{i+1}) + \varepsilon_0] d\lambda_i = \\ & = l_i \int_0^1 \left[\begin{aligned} & (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) - (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i)\lambda_i + (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1})\lambda_i + \\ & - (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i)\lambda_i + (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i)\lambda_i^2 - (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1})\lambda_i^2 + \\ & + (\mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i)\lambda_i - (\mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i)\lambda_i^2 + (\mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i+1})\lambda_i^2 \end{aligned} \right] \ln [\lambda_i \mathbf{g} \bullet (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) + (\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}_i + \varepsilon_0)] d\lambda_i = \\ & = l_i \int_0^1 \left[\begin{aligned} & (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) - (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i)\lambda_i + (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1})\lambda_i + \\ & - (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i)\lambda_i + (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i)\lambda_i^2 - (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1})\lambda_i^2 + \\ & + (\mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i)\lambda_i - (\mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i)\lambda_i^2 + (\mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i+1})\lambda_i^2 \end{aligned} \right] \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \\ & = l_i \int_0^1 \left\{ \begin{aligned} & (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) + \\ & + [\mathbf{r}_i \otimes (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) + (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \otimes \mathbf{r}_i] \lambda_i \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) + \\ & + [(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \otimes (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)] \lambda_i^2 \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) \end{aligned} \right\} d\lambda_i \end{aligned}$$

Equazione 2-151

Gli integrali: $\left[\int_0^1 \ln(\alpha_i \lambda_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right]$ e $\left[\int_0^1 \lambda_i \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right]$ sono già stati calcolati e

valgono rispettivamente:

$\left[\int_0^1 \ln(\alpha_i \lambda_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right] = \begin{cases} \ln \varepsilon_i & \alpha_i = 0 \\ \frac{\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{\alpha_i} - 1 & \alpha_i \neq 0 \end{cases}$	$\alpha_i = 0$ $\alpha_i \neq 0$
$\left[\int_0^1 \lambda_i \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right] = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \varepsilon_i & \alpha_i = 0 \\ \frac{1}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1} \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{2} \right] & \alpha_i \neq 0 \end{cases}$	$\alpha_i = 0$ $\alpha_i \neq 0$
con $\alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$	

Equazione 2-152

resta da calcolare $\left[\int_0^1 \lambda_i^2 \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right]$

caso $\alpha_i = 0$:

$$\int_0^1 \lambda_i^2 \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i = \ln \varepsilon_i \int_0^1 \lambda_i^2 d\lambda_i = \ln \varepsilon_i \left[\frac{\lambda_i^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\ln \varepsilon_i}{3}$$

Equazione 2-153

caso $\alpha_i \neq 0$:

Posto $t_i = \alpha_i \lambda_i + \varepsilon_i \quad \Rightarrow \quad d\lambda_i = \frac{dt_i}{\alpha_i} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_i = 0 & \rightarrow t_i = \varepsilon_i \\ \lambda_i = 1 & \rightarrow t_i = \varepsilon_{i+1} \end{cases}$

Si ha: $\lambda_i^2 = \frac{(t_i - \varepsilon_i)^2}{\alpha_i^2}$

Sostituendo:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \lambda_i^2 \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i &= \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} \frac{(t_i - \varepsilon_i)^2}{\alpha_i^2} \ln t_i \frac{dt_i}{\alpha_i} = \frac{1}{\alpha_i^3} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} (t_i^2 - 2\varepsilon_i t_i + \varepsilon_i^2) \ln t_i dt_i = \\ &= \frac{1}{\alpha_i^3} \left[\int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} t_i^2 \ln t_i dt_i - 2\varepsilon_i \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} t_i \ln t_i dt_i + \varepsilon_i^2 \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} \ln t_i dt_i \right] \end{aligned}$$

Equazione 2-154

Ricordando che: $\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \left[\ln x - \frac{1}{(n+1)} \right]$

Si ha: $\int \ln t dt = t(\ln t - 1)$

$$\int t \ln t dt = \frac{t^2}{2} \left(\ln t - \frac{1}{2} \right)$$

$$\int t^2 \ln t dt = \frac{t^3}{3} \left(\ln t - \frac{1}{3} \right)$$

Quindi:

$$\int_0^1 \lambda_i^2 \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i = \frac{1}{\alpha_i^3} \left[\int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} t^2 \ln t dt - 2\varepsilon_i \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} t \ln t dt + \varepsilon_i^2 \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} \ln t dt \right] =$$

$$= \frac{1}{\alpha_i^3} \left\{ \left[\frac{t^3}{3} \left(\ln t - \frac{1}{3} \right) \right]_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} - 2\varepsilon_i \left[\frac{t^2}{2} \left(\ln t - \frac{1}{2} \right) \right]_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} + \left[\varepsilon_i^2 \left[t(\ln t - 1) \right]_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_i^3} \left\{ \frac{\varepsilon_{i+1}^3}{3} \left(\ln \varepsilon_{i+1} - \frac{1}{3} \right) - \frac{\varepsilon_i^3}{3} \left(\ln \varepsilon_i - \frac{1}{3} \right) + \right. \\ \left. - 2\varepsilon_i \left\{ \frac{\varepsilon_{i+1}^2}{2} \left(\ln \varepsilon_{i+1} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\varepsilon_i^2}{2} \left(\ln \varepsilon_i - \frac{1}{2} \right) \right\} + \left[\varepsilon_i^2 \left[\varepsilon_{i+1} (\ln \varepsilon_{i+1} - 1) - \varepsilon_i (\ln \varepsilon_i - 1) \right] \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_i^3} \left[\frac{\varepsilon_{i+1}^3}{3} \ln \varepsilon_{i+1} - \frac{\varepsilon_{i+1}^3}{9} - \frac{\varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_i + \frac{\varepsilon_i^3}{9} - \varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2 \left(\ln \varepsilon_{i+1} - \frac{1}{2} \right) + \right. \\ \left. + \varepsilon_i^3 \left(\ln \varepsilon_i - \frac{1}{2} \right) + \varepsilon_i^2 \varepsilon_{i+1} (\ln \varepsilon_{i+1} - 1) - \varepsilon_i^3 (\ln \varepsilon_i - 1) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha_i^3} \left(\frac{\varepsilon_{i+1}^3}{3} \ln \varepsilon_{i+1} - \frac{\varepsilon_{i+1}^3}{9} - \frac{\varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_i + \frac{\varepsilon_i^3}{9} - \varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2 \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2}{2} + \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon_i^3 \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_i^3}{2} + \varepsilon_i^2 \varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i^2 \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i^3 \ln \varepsilon_i + \varepsilon_i^3 \right) = \\
&= \frac{1}{\alpha_i^3} \left[\left(\frac{\varepsilon_{i+1}^3}{3} - \varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2 + \varepsilon_i^2 \varepsilon_{i+1} \right) \ln \varepsilon_{i+1} - \frac{\varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_i + \right. \\
&\quad \left. \frac{11}{18} \varepsilon_i^3 - \frac{\varepsilon_{i+1}^3}{9} + \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \left(\frac{\varepsilon_{i+1}}{2} - \varepsilon_i \right) \right] = \\
&= \frac{1}{\alpha_i^3} \left[\left(\frac{\varepsilon_{i+1}^3 - 3\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2 + 3\varepsilon_i^2 \varepsilon_{i+1} + \varepsilon_i^3 - \varepsilon_i^3}{3} \right) \ln \varepsilon_{i+1} - \frac{\varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_i + \right. \\
&\quad \left. \frac{11}{18} \varepsilon_i^3 - \frac{\varepsilon_{i+1}^3}{9} + \frac{\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2}{2} - \varepsilon_i^2 \varepsilon_{i+1} \right] = \\
&= \frac{1}{\alpha_i^3} \left[\left[\frac{(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)^3 + \varepsilon_i^3}{3} \right] \ln \varepsilon_{i+1} - \frac{\varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_i + \right. \\
&\quad \left. \frac{11\varepsilon_i^3 - 2\varepsilon_{i+1}^3 + 9\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2 - 18\varepsilon_i^2 \varepsilon_{i+1}}{18} \right] = \\
&= \frac{1}{\alpha_i^3} \left(\frac{\alpha_i^3 + \varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_{i+1} - \frac{\varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_i + \right. \\
&\quad \left. + \frac{-2\varepsilon_{i+1}^3 + 2\varepsilon_i^3 + 6\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2 - 6\varepsilon_i^2 \varepsilon_{i+1} + 3\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2 + 3\varepsilon_i^3 - 6\varepsilon_i^2 \varepsilon_{i+1} - 6\varepsilon_i^2 \varepsilon_{i+1} + 6\varepsilon_i^3}{18} \right) = \\
&= \frac{1}{\alpha_i^3} \left(\frac{\alpha_i^3 + \varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_{i+1} - \frac{\varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_i + \right. \\
&\quad \left. + \frac{-2(\varepsilon_{i+1}^3 - \varepsilon_i^3 - 3\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2 + 3\varepsilon_i^2 \varepsilon_{i+1}) + 3\varepsilon_i (\varepsilon_{i+1}^2 + \varepsilon_i^2 - 2\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}) - 6\varepsilon_i^2 (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)}{18} \right) = \\
&= \frac{1}{\alpha_i^3} \left(\frac{\alpha_i^3 + \varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_{i+1} - \frac{\varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_i - \frac{2\alpha_i^3 - 3\varepsilon_i \alpha_i^2 + 6\varepsilon_i^2 \alpha_i}{18} \right) = \\
&= \frac{1}{\alpha_i^3} \left(\frac{\alpha_i^3 + \varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_{i+1} - \frac{\varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_i \right) - \frac{1}{\alpha_i^2} \left(\frac{2\alpha_i^2 - 3\varepsilon_i \alpha_i + 6\varepsilon_i^2}{18} \right) =
\end{aligned}$$

quindi^[3]:

$$\left[\int_0^1 \lambda_i^2 \ln(\lambda_i \alpha_i + \beta_i) d\lambda_i \right] = \begin{cases} \frac{\ln \varepsilon_i}{3} & \alpha_i = 0 \\ \frac{1}{\alpha_i^2} \left[\frac{1}{\alpha_i} \left(\frac{\alpha_i^3 + \varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_{i+1} - \frac{\varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_i \right) + \right. \\ \left. - \frac{2\alpha_i^2 - 3\varepsilon_i \alpha_i + 6\varepsilon_i^2}{18} \right] & \alpha_i \neq 0 \end{cases}$$

con $\alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$

Equazione 2-155

$$\begin{aligned} & \text{Ritornando all'integrale} \left[\int_{Fr_i(\Omega)} [\mathbf{r}(s_i) \otimes \mathbf{r}(s_i)] \ln[\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i \right], \text{ si ha:} \\ & \int_{Fr_i(\Omega)} [\mathbf{r}(s_i) \otimes \mathbf{r}(s_i)] \ln[\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i = \\ & = l_i \left\{ (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) \int_0^1 \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i + \right. \\ & \quad + [\mathbf{r}_i \otimes (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) + (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \otimes \mathbf{r}_i] \int_0^1 \lambda_i \ln(\lambda_i \alpha_i + \beta_i) d\lambda_i + \\ & \quad \left. + [(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \otimes (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)] \int_0^1 \lambda_i^2 \ln(\lambda_i \alpha_i + \beta_i) d\lambda_i \right\} = \end{aligned}$$

Equazione 2-156

Caso $\alpha_i = 0$:

^[3] In appendice A.3 si dimostra che per $[\alpha_i \rightarrow 0]$ le due formule coincidono

$$\begin{aligned}
& \int_{Fr_i(\Omega)} [\mathbf{r}(s_i) \otimes \mathbf{r}(s_i)] \ln [\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i = \\
& = l_i \left\{ \begin{aligned} & (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) \ln \varepsilon_i + [\mathbf{r}_i \otimes (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) + (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \otimes \mathbf{r}_i] \frac{\ln \varepsilon_i}{2} + \\ & + [(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \otimes (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)] \frac{\ln \varepsilon_i}{3} \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

Equazione 2-157

Caso $\alpha_i \neq 0$:

$$\begin{aligned}
& \int_{Fr_i(\Omega)} [\mathbf{r}(s_i) \otimes \mathbf{r}(s_i)] \ln [\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i = \\
& = l_i \left\{ \begin{aligned} & (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) \left(\frac{\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{\alpha_i} - 1 \right) + \\ & + [(\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1}) - 2(\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) + (\mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i)] \frac{1}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1} \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{2} \right] + \\ & + [\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i - (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1} + \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i) + \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i+1}] \frac{1}{\alpha_i^2} \left[\frac{1}{\alpha_i} \left(\frac{\alpha_i^3 + \varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_{i+1} - \frac{\varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_i \right) + \right. \\ & \quad \left. - \frac{2\alpha_i^2 - 3\varepsilon_i \alpha_i + 6\varepsilon_i^2}{18} \right] \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

Equazione 2-158

quindi:

$$\begin{aligned}
& \int_{Fr_i(\Omega)} [\mathbf{r}(s_i) \otimes \mathbf{r}(s_i)] \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i = \\
& = \begin{cases} l_i \left\{ \left(\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i \right) \ln \varepsilon_i + \left[\mathbf{r}_i \otimes (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) + (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \otimes \mathbf{r}_i \right] \frac{\ln \varepsilon_i}{2} + \right. \\ \left. + \left[(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \otimes (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \right] \frac{\ln \varepsilon_i}{3} \right\} & \alpha_i = 0 \\ \\ l_i \left\{ \left(\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i \right) \left(\frac{\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{\alpha_i} - 1 \right) + \right. \\ + \left[(\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1}) - 2(\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) + (\mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i) \right] \frac{1}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1} \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{2} \right] + \\ \left. + \left[\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i - (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1} + \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i) + \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i+1} \right] \frac{1}{\alpha_i^2} \left[\frac{1}{\alpha_i} \left(\frac{\alpha_i^3 + \varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_{i+1} - \frac{\varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_i \right) + \right. \\ \left. - \frac{2\alpha_i^2 - 3\varepsilon_i \alpha_i + 6\varepsilon_i^2}{18} \right] \right\} & \alpha_i \neq 0 \end{cases} \\
& \text{con} \quad \alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i
\end{aligned}$$

Equazione 2-159

$$\text{Calcolo dell'integrale} \left[\int_{Fr_i(\Omega)} [\mathbf{r}(s_i) \bullet \mathbf{g}] \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i \right]$$

$$\text{posto: } \frac{s_i}{l_i} = \lambda_i \quad ds_i = l_i d\lambda_i$$

e ricordando l'equazione parametrica della retta r :

$$\hat{\mathbf{r}}(\lambda_i) = (1 - \lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1} \quad \text{con} \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\text{si ha: } \int_{Fr_i(\Omega)} [\mathbf{r}(s_i) \bullet \mathbf{g}] \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i =$$

$$= l_i \int_0^1 \left\{ \left[(1 - \lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1} \right] \bullet \mathbf{g} \right\} \ln \left\{ \mathbf{g} \bullet \left[(1 - \lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1} \right] + \varepsilon_0 \right\} d\lambda_i =$$

$$\begin{aligned}
&= l_i \int_0^1 \left[(r_i - \lambda_i r_i + \lambda_i r_{i+1}) \cdot g \right] \ln \left[g \cdot (r_i - \lambda_i r + \lambda_i r_{i+1}) + \varepsilon_0 \right] d\lambda_i = \\
&= l_i \int_0^1 \left[\lambda_i g \cdot (r_{i+1} - r_i) + g \cdot r_i \right] \ln \left\{ \left[\lambda_i g \cdot (r_{i+1} - r_i) \right] + g \cdot r_i + \varepsilon_0 \right\} d\lambda_i = \\
&= l_i \int_0^1 \left[\lambda_i (g \cdot r_{i+1} - g \cdot r_i + \varepsilon_0 - \varepsilon_0) + g \cdot r_i + \varepsilon_0 - \varepsilon_0 \right] \ln \left\{ \left[\lambda_i (g \cdot r_{i+1} - g \cdot r_i + \varepsilon_0 - \varepsilon_0) \right] + g \cdot r_i + \varepsilon_0 \right\} d\lambda_i = \\
&= l_i \int_0^1 \left[\lambda_i (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i) + \varepsilon_i - \varepsilon_0 \right] \ln \left\{ \left[\lambda_i (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i) \right] + \varepsilon_i \right\} d\lambda_i = \\
&= l_i \int_0^1 \left[\lambda_i (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i) + \varepsilon_i - \varepsilon_0 \right] \ln \left\{ \left[\lambda_i (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i) \right] + \varepsilon_i \right\} d\lambda_i = \\
&= l_i \int_0^1 (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i - \varepsilon_0) \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i = l_i \left[\int_0^1 (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i - \varepsilon_0 \int_0^1 \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right]
\end{aligned}$$

quindi:

$$\int_{F_i(\Omega)} [r(s_i) \cdot g] \ln [g \cdot r(s_i) + \varepsilon_0] ds_i = l_i \left[\int_0^1 (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i - \varepsilon_0 \int_0^1 \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right]$$

Equazione 2-160

Gli integrali $\left[\int_0^1 \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right]$ e $\left[\int_0^1 (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right]$, sono già

stati calcolati e valgono rispettivamente:

$$\left[\int_0^1 \ln (\alpha_i \lambda_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right] = \begin{cases} \ln \varepsilon_i & \alpha_i = 0 \\ \frac{\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{\alpha_i} - 1 & \alpha_i \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^1 (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i = \begin{cases} \varepsilon_i \ln \varepsilon_i & \alpha_i = 0 \\ \frac{1}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1}^2 \left(\ln \varepsilon_{i+1} - \frac{1}{2} \right) - \varepsilon_i^2 \left(\ln \varepsilon_i - \frac{1}{2} \right) \right] & \alpha_i \neq 0 \end{cases}$$

con $\alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$

Equazione 2-161

di conseguenza:

Caso $\alpha_i = 0$:

$$\begin{aligned} \int_{Fr_i(\Omega)} [\mathbf{r}(s_i) \bullet \mathbf{g}] \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i &= l_i \left[\int_0^1 (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i - \varepsilon_0 \int_0^1 \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right] = \\ &= l_i (\varepsilon_i \ln \varepsilon_i - \varepsilon_0 \ln \varepsilon_i) = l_i \ln \varepsilon_i (\varepsilon_i - \varepsilon_0) \end{aligned}$$

Equazione 2-162

Caso $\alpha_i \neq 0$:

$$\begin{aligned} \int_{Fr_i(\Omega)} [\mathbf{r}(s_i) \bullet \mathbf{g}] \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i &= l_i \left[\int_0^1 (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i - \varepsilon_0 \int_0^1 \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right] = \\ &= l_i \left\{ \frac{1}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1}^2 \left(\ln \varepsilon_{i+1} - \frac{1}{2} \right) - \varepsilon_i^2 \left(\ln \varepsilon_i - \frac{1}{2} \right) \right] - \varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{\alpha_i} - 1 \right) \right\} = \\ &= l_i \left\{ \frac{1}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1}^2 \left(\ln \varepsilon_{i+1} - \frac{1}{2} \right) - \varepsilon_i^2 \left(\ln \varepsilon_i - \frac{1}{2} \right) \right] - \varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{\alpha_i} - 1 \right) \right\} \end{aligned}$$

Equazione 2-163

Quindi:

$\int_{Fr_i(\Omega)} [\mathbf{r}(s_i) \bullet \mathbf{g}] \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i =$ $= \begin{cases} l_i \ln \varepsilon_i (\varepsilon_i - \varepsilon_0) & \alpha_i = 0 \\ l_i \left\{ \frac{1}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1}^2 \left(\ln \varepsilon_{i+1} - \frac{1}{2} \right) - \varepsilon_i^2 \left(\ln \varepsilon_i - \frac{1}{2} \right) \right] - \varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{\alpha_i} - 1 \right) \right\} & \alpha_i \neq 0 \end{cases}$ <p style="text-align: center;">con $\alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$</p>

Equazione 2-164

Calcolo dell'integrale $\int_{Fr_i(\Omega)} \mathbf{r}(s_i) [\mathbf{r}(s_i) \bullet \mathbf{g}] \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i$

posto: $\frac{s_i}{l_i} = \lambda_i \quad ds_i = l_i d\lambda_i$

e ricordando l'equazione parametrica della retta r :

$$\hat{\mathbf{r}}(\lambda_i) = (1 - \lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1} \quad \text{con} \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

si ha:

$$\begin{aligned} & \int_{F_{r_i}(\Omega)} \mathbf{r}(s_i) [\mathbf{r}(s_i) \cdot \mathbf{g}] \ln [\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i = \\ & = l_i \int_0^1 [(1 - \lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1}] \{ [(1 - \lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1}] \cdot \mathbf{g} \} \ln \{ \mathbf{g} \cdot [(1 - \lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1}] + \varepsilon_0 \} d\lambda_i = \\ & = l_i \int_0^1 [\mathbf{r}_i + \lambda_i (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)] \{ [(1 - \lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1}] \cdot \mathbf{g} \} \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i = \\ & = l_i \left\{ \mathbf{r}_i \int_0^1 \{ [(1 - \lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1}] \cdot \mathbf{g} \} \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right. \\ & \quad \left. + (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \int_0^1 \lambda_i \{ [(1 - \lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1}] \cdot \mathbf{g} \} \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right\} = \end{aligned}$$

Equazione 2-165

L'integrale $\left[\int_0^1 \{ [(1 - \lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1}] \cdot \mathbf{g} \} \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right]$ è stato appena

calcolato e vale:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \{ [(1 - \lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1}] \cdot \mathbf{g} \} \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i = \\ & = \begin{cases} \ln \varepsilon_i (\varepsilon_i - \varepsilon_0) & \alpha_i = 0 \\ \frac{1}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1}^2 \left(\ln \varepsilon_{i+1} - \frac{1}{2} \right) - \varepsilon_i^2 \left(\ln \varepsilon_i - \frac{1}{2} \right) \right] - \varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{\alpha_i} - 1 \right) & \alpha_i \neq 0 \end{cases} \\ & \text{con} \quad \alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \end{aligned}$$

Equazione 2-166

resta da calcolare: $\left[\int_0^1 \lambda_i \{ [(1 - \lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1}] \cdot \mathbf{g} \} \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right]$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \lambda_i \left\{ \left[(1-\lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1} \right] \cdot \mathbf{g} \right\} \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i = \\
& = \int_0^1 \lambda_i \left[\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_i + \lambda_i (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_i) \right] \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i = \\
& = \int_0^1 \lambda_i \left[\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_i + \varepsilon_0 - \varepsilon_i + \lambda_i (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_i) \right] \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i = \\
& = \int_0^1 \lambda_i \left[\lambda_i (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i) + \varepsilon_i - \varepsilon_0 \right] \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i = \\
& = \int_0^1 \lambda_i \left[(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) - \varepsilon_0 \right] \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i = \\
& = \int_0^1 \lambda_i (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i - \varepsilon_0 \int_0^1 \lambda_i \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i =
\end{aligned}$$

Equazione 2-167

L'integrale $\left[\int_0^1 \lambda_i \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right]$ è stato già calcolato e vale:

$ \left[\int_0^1 \lambda_i \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right] = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \varepsilon_i & \alpha_i = 0 \\ \frac{1}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1} \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{2} \right] & \alpha_i \neq 0 \end{cases} $
<p>con $\alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$</p>

Equazione 2-168

resta da calcolare: $\left[\int_0^1 \lambda_i (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right]$

Caso $\alpha_i = 0$:

$$\int_0^1 \lambda_i (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i = \int_0^1 \lambda_i \varepsilon_i \ln \varepsilon_i d\lambda_i = \varepsilon_i \ln \varepsilon_i \int_0^1 \lambda_i d\lambda_i = \varepsilon_i \ln \varepsilon_i \left[\frac{\lambda_i^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \varepsilon_i \ln \varepsilon_i$$

Equazione 2-169

Caso $\alpha_i \neq 0$:

$$\text{Posto} \quad t_i = \alpha_i \lambda_i + \varepsilon_i \quad \Rightarrow \quad d\lambda_i = \frac{dt_i}{\alpha_i} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_i = 0 & \rightarrow t_i = \varepsilon_i \\ \lambda_i = 1 & \rightarrow t_i = \varepsilon_{i+1} \end{cases}$$

$$\text{Si ha:} \quad \lambda_i = \frac{t_i - \varepsilon_i}{\alpha_i}$$

quindi:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \lambda_i (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i &= \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} \frac{t_i - \varepsilon_i}{\alpha_i} t_i \ln t_i \frac{dt_i}{\alpha_i} = \frac{1}{\alpha_i^2} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} (t_i - \varepsilon_i) t_i \ln t_i dt_i = \\ &= \frac{1}{\alpha_i^2} \left[\int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} t_i^2 \ln t_i dt_i - \varepsilon_i \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} t_i \ln t_i dt_i \right] \end{aligned}$$

Equazione 2-170

$$\text{ricordando che:} \quad \int t \ln t dt = \frac{t^2}{2} \left(\ln t - \frac{1}{2} \right) \quad \text{e} \quad \int t^2 \ln t dt = \frac{t^3}{3} \left(\ln t - \frac{1}{3} \right)$$

si ha:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha_i^2} \left[\int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} t_i^2 \ln t_i dt_i - \varepsilon_i \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} t_i \ln t_i dt_i \right] = \frac{1}{\alpha_i^2} \left\{ \left[\frac{t^3}{3} \left(\ln t - \frac{1}{3} \right) \right]_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} - \varepsilon_i \left[\frac{t^2}{2} \left(\ln t - \frac{1}{2} \right) \right]_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} \right\} = \\ &= \frac{1}{\alpha_i^2} \left\{ \left[\frac{\varepsilon_{i+1}^3}{3} \left(\ln \varepsilon_{i+1} - \frac{1}{3} \right) - \frac{\varepsilon_i^3}{3} \left(\ln \varepsilon_i - \frac{1}{3} \right) \right] - \varepsilon_i \left[\frac{\varepsilon_{i+1}^2}{2} \left(\ln \varepsilon_{i+1} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\varepsilon_i^2}{2} \left(\ln \varepsilon_i - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{\alpha_i^2} \left(\frac{\varepsilon_{i+1}^3}{3} \ln \varepsilon_{i+1} - \frac{\varepsilon_{i+1}^3}{9} - \frac{\varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_i + \frac{\varepsilon_i^3}{9} - \frac{\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2}{2} \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2}{4} + \frac{\varepsilon_i^3}{2} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_i^3}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{\alpha_i^2} \left[\left(\frac{\varepsilon_{i+1}^3}{3} - \frac{\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2}{2} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^3}{6} \ln \varepsilon_i - \frac{5}{36} \varepsilon_i^3 - \frac{\varepsilon_{i+1}^3}{9} + \frac{\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2}{4} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\alpha_i^2} \left[\varepsilon_{i+1}^2 \left(\frac{\varepsilon_{i+1}}{3} - \frac{\varepsilon_i}{2} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^3}{6} \ln \varepsilon_i - \frac{5}{36} \varepsilon_i^3 - \varepsilon_{i+1}^2 \left(\frac{\varepsilon_{i+1}}{9} - \frac{\varepsilon_i}{4} \right) \right]$$

Equazione 2-171

quindi^[4]:

$$\left[\int_0^1 \lambda_i (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right] = \begin{cases} \frac{1}{2} \varepsilon_i \ln \varepsilon_i & \alpha_i = 0 \\ \frac{1}{\alpha_i^2} \left[\varepsilon_{i+1}^2 \left(\frac{\varepsilon_{i+1}}{3} - \frac{\varepsilon_i}{2} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^3}{6} \ln \varepsilon_i + \right. \\ \left. - \frac{5}{36} \varepsilon_i^3 - \varepsilon_{i+1}^2 \left(\frac{\varepsilon_{i+1}}{9} - \frac{\varepsilon_i}{4} \right) \right] & \alpha_i \neq 0 \end{cases}$$

con $\alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$

Equazione 2-172

$$\text{Ritornando all'integrale} \left[\int_0^1 \lambda_i \left\{ \left[(1-\lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1} \right] \cdot \mathbf{g} \right\} \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right]$$

$$\int_0^1 \lambda_i \left\{ \left[(1-\lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1} \right] \cdot \mathbf{g} \right\} \ln \left\{ \mathbf{g} \cdot \left[(1-\lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1} \right] + \varepsilon_0 \right\} d\lambda_i =$$

$$= \int_0^1 \lambda_i (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i - \varepsilon_0 \int_0^1 \lambda_i \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i$$

si ha:

Caso $\alpha_i = 0$:

$$\int_0^1 \lambda_i (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i - \varepsilon_0 \int_0^1 \lambda_i \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i =$$

^[4] In appendice A.4 si dimostra che per $[\alpha_i \rightarrow 0]$ le due formule coincidono

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_i \ln \varepsilon_i - \varepsilon_0 \frac{1}{2} \ln \varepsilon_i = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_0}{2} \ln \varepsilon_i$$

Equazione 2-173

Caso $\alpha_i \neq 0$:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \lambda_i (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i - \varepsilon_0 \int_0^1 \lambda_i \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i = \\ & \frac{1}{\alpha_i^2} \left[\varepsilon_{i+1}^2 \left(\frac{\varepsilon_{i+1}}{3} - \frac{\varepsilon_i}{2} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^3}{6} \ln \varepsilon_i - \frac{5}{36} \varepsilon_i^3 - \varepsilon_{i+1}^2 \left(\frac{\varepsilon_{i+1}}{9} - \frac{\varepsilon_i}{4} \right) \right] + \\ & - \varepsilon_0 \frac{1}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1} \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{2} \right] = \\ & \frac{\varepsilon_{i+1}^2}{\alpha_i^2} \left(\frac{\varepsilon_{i+1}}{3} - \frac{\varepsilon_i}{2} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^3}{6\alpha_i^2} \ln \varepsilon_i - \frac{5}{36} \frac{\varepsilon_i^3}{\alpha_i^2} - \frac{\varepsilon_{i+1}^2}{\alpha_i^2} \left(\frac{\varepsilon_{i+1}}{9} - \frac{\varepsilon_i}{4} \right) + \\ & - \frac{\varepsilon_0}{2\alpha_i^2} \varepsilon_{i+1} (\varepsilon_{i+1} - 2\varepsilon_i) \ln \varepsilon_{i+1} - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_i^2}{2\alpha_i^2} \ln \varepsilon_i + \frac{\varepsilon_0}{4\alpha_i} (\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i) = \\ & = \frac{1}{\alpha_i^2} \left[\varepsilon_{i+1} \left(\frac{\varepsilon_{i+1}^2}{3} - \frac{\varepsilon_{i+1}\varepsilon_i}{2} - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{i+1}}{2} + \varepsilon_0 \varepsilon_i \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^2}{2} \left(\frac{\varepsilon_i}{3} - \varepsilon_0 \right) \ln \varepsilon_i + \right. \\ & \left. - \frac{5}{36} \varepsilon_i^3 - \frac{\varepsilon_{i+1}^3}{9} + \frac{\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2}{4} + \frac{\varepsilon_0 \alpha_i}{4} (\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i) \right] \end{aligned}$$

Equazione 2-174

quindi:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \lambda_i \left\{ \left[(1-\lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1} \right] \cdot \mathbf{g} \right\} \ln \left\{ \mathbf{g} \cdot \left[(1-\lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1} \right] + \varepsilon_0 \right\} d\lambda_i = \\
& = \begin{cases} \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_0}{2} \ln \varepsilon_i & \alpha_i = 0 \\ \frac{1}{\alpha_i^2} \left[\varepsilon_{i+1} \left(\frac{\varepsilon_{i+1}^2}{3} - \frac{\varepsilon_{i+1} \varepsilon_i}{2} - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{i+1}}{2} + \varepsilon_0 \varepsilon_i \right) \ln \varepsilon_{i+1} \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon_i^2}{2} \left(\frac{\varepsilon_i}{3} - \varepsilon_0 \right) \ln \varepsilon_i - \frac{5}{36} \varepsilon_i^3 - \frac{\varepsilon_{i+1}^3}{9} + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2}{4} + \frac{\varepsilon_0 \alpha_i}{4} (\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i) \right] & \alpha_i \neq 0 \end{cases} \\
& \text{con } \alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i
\end{aligned}$$

Equazione 2-175

A questo punto possiamo calcolare l'integrale:

$$\begin{aligned}
& \int_{Fr_i(\Omega)} \mathbf{r}(s_i) \left[\mathbf{r}(s_i) \cdot \mathbf{g} \right] \ln \left[\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0 \right] ds_i = \\
& = l_i \left\{ \mathbf{r}_i \int_0^1 \left\{ \left[(1-\lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1} \right] \cdot \mathbf{g} \right\} \ln \left\{ \mathbf{g} \cdot \left[(1-\lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1} \right] + \varepsilon_0 \right\} d\lambda_i \right. \\
& \quad \left. + (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \int_0^1 \lambda_i \left\{ \left[(1-\lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1} \right] \cdot \mathbf{g} \right\} \ln \left\{ \mathbf{g} \cdot \left[(1-\lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1} \right] + \varepsilon_0 \right\} d\lambda_i \right\}
\end{aligned}$$

Equazione 2-176

Caso $\alpha_i = 0$:

$$l_i \left\{ \mathbf{r}_i \int_0^1 \left\{ \left[(1-\lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1} \right] \cdot \mathbf{g} \right\} \ln \left\{ \mathbf{g} \cdot \left[(1-\lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1} \right] + \varepsilon_0 \right\} d\lambda_i \right. \\
\left. + (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \int_0^1 \lambda_i \left\{ \left[(1-\lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1} \right] \cdot \mathbf{g} \right\} \ln \left\{ \mathbf{g} \cdot \left[(1-\lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1} \right] + \varepsilon_0 \right\} d\lambda_i \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= l_i \left[\mathbf{r}_i \ln \varepsilon_i (\varepsilon_i - \varepsilon_0) + (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_0}{2} \ln \varepsilon_i \right] = l_i \ln \varepsilon_i (\varepsilon_i - \varepsilon_0) \left[\mathbf{r}_i + \frac{(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)}{2} \right] = \\
&= l_i \ln \varepsilon_i \frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_0)}{2} (\mathbf{r}_{i+1} + \mathbf{r}_i)
\end{aligned}$$

Equazione 2-177

Caso $\alpha_i \neq 0$:

$$l_i \left\{ \begin{aligned} &\mathbf{r}_i \left\{ \frac{1}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1}^2 \left(\ln \varepsilon_{i+1} - \frac{1}{2} \right) - \varepsilon_i^2 \left(\ln \varepsilon_i - \frac{1}{2} \right) \right] - \varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{\alpha_i} - 1 \right) \right\} \\ &+ (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \frac{1}{\alpha_i^2} \left[\varepsilon_{i+1} \left(\frac{\varepsilon_{i+1}^2}{3} - \frac{\varepsilon_{i+1} \varepsilon_i}{2} - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{i+1}}{2} + \varepsilon_0 \varepsilon_i \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^2}{2} \left(\frac{\varepsilon_i}{3} - \varepsilon_0 \right) \ln \varepsilon_i + \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{36} \varepsilon_i^3 - \frac{\varepsilon_{i+1}^3}{9} + \frac{\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2}{4} + \frac{\varepsilon_0 \alpha_i}{4} (\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i) \right] \end{aligned} \right\}$$

quindi:

$$\boxed{
\begin{aligned}
&\int_{Fr_i(\Omega)} \mathbf{r}(s_i) [\mathbf{r}(s_i) \bullet \mathbf{g}] \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i = \\
&= \begin{cases} l_i \ln \varepsilon_i \frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_0)}{2} (\mathbf{r}_{i+1} + \mathbf{r}_i) & \alpha_i = 0 \\ l_i \left\{ \begin{aligned} &\mathbf{r}_i \left\{ \frac{1}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1}^2 \left(\ln \varepsilon_{i+1} - \frac{1}{2} \right) - \varepsilon_i^2 \left(\ln \varepsilon_i - \frac{1}{2} \right) \right] - \varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{\alpha_i} - 1 \right) \right\} \\ &+ (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \frac{1}{\alpha_i^2} \left[\varepsilon_{i+1} \left(\frac{\varepsilon_{i+1}^2}{3} - \frac{\varepsilon_{i+1} \varepsilon_i}{2} - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{i+1}}{2} + \varepsilon_0 \varepsilon_i \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^2}{2} \left(\frac{\varepsilon_i}{3} - \varepsilon_0 \right) \ln \varepsilon_i + \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{36} \varepsilon_i^3 - \frac{\varepsilon_{i+1}^3}{9} + \frac{\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2}{4} + \frac{\varepsilon_0 \alpha_i}{4} (\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i) \right] \end{aligned} \right\} & \alpha_i \neq 0 \end{cases} \\
&\text{con} \quad \alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i
\end{aligned}
}$$

Equazione 2-178

Calcolo dell'integrale $\int_{Fr_i(\Omega)} [\mathbf{r}(s_i) \bullet \mathbf{g}]^2 \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i$

Posto: $\frac{s_i}{l_i} = \lambda_i \quad ds_i = l_i d\lambda_i$

Ricordando l'equazione parametrica della retta r :

$$\hat{\mathbf{r}}(\lambda_i) = (1 - \lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1} \quad \text{con} \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Si ha:

$$\begin{aligned} & \int_{Fr(\Omega)} [\mathbf{r}(s_i) \bullet \mathbf{g}]^2 \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds_i = \\ &= l_i \int_0^1 \left\{ [(1 - \lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1}] \bullet \mathbf{g} \right\}^2 \ln [\mathbf{g} \bullet [(1 - \lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1}] + \varepsilon_0] d\lambda_i = \\ &= l_i \int_0^1 [(\mathbf{r}_i - \lambda_i \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1}) \bullet \mathbf{g}]^2 \ln [\mathbf{g} \bullet (\mathbf{r}_i - \lambda_i \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1}) + \varepsilon_0] d\lambda_i = \\ &= l_i \int_0^1 \left\{ [\mathbf{r}_i + \lambda_i (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)] \bullet \mathbf{g} + \varepsilon_0 - \varepsilon_0 \right\}^2 \ln \left\{ \mathbf{g} \bullet [\mathbf{r}_i + \lambda_i (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)] + \varepsilon_0 \right\} d\lambda_i = \\ &= l_i \int_0^1 (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i - \varepsilon_0)^2 \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i = \\ &= l_i \int_0^1 \left[(\varepsilon_i - \varepsilon_0)^2 + \lambda_i^2 \alpha_i^2 + 2\lambda_i \alpha_i (\varepsilon_i - \varepsilon_0) \right] \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i = \\ &= l_i \left[(\varepsilon_i - \varepsilon_0)^2 \int_0^1 \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i + 2\alpha_i (\varepsilon_i - \varepsilon_0) \int_0^1 \lambda_i \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i + \right. \\ & \quad \left. + \alpha_i^2 \int_0^1 \lambda_i^2 \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right] \end{aligned}$$

Equazione 2-179

quindi:

$$\begin{aligned} & \int_{Fr(\Omega)} [\mathbf{r}(s_i) \bullet \mathbf{g}]^2 \ln [\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds = \\ &= l_i \left[(\varepsilon_i - \varepsilon_0)^2 \int_0^1 \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i + \right. \\ & \quad \left. + 2\alpha_i (\varepsilon_i - \varepsilon_0) \int_0^1 \lambda_i \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i + \alpha_i^2 \int_0^1 \lambda_i^2 \ln (\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right] \end{aligned}$$

Equazione 2-180

Gli integrali sono già stati calcolati e valgono rispettivamente:

$\left[\int_0^1 \ln(\alpha_i \lambda_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right] = \begin{cases} \ln \varepsilon_i & \alpha_i = 0 \\ \frac{\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{\alpha_i} - 1 & \alpha_i \neq 0 \end{cases}$	$\alpha_i = 0$ $\alpha_i \neq 0$
$\left[\int_0^1 \lambda_i \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right] = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \varepsilon_i & \alpha_i = 0 \\ \frac{1}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1} \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{2} \right] & \alpha_i \neq 0 \end{cases}$	$\alpha_i = 0$ $\alpha_i \neq 0$
$\left[\int_0^1 \lambda_i^2 \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right] = \begin{cases} \frac{\ln \varepsilon_i}{3} & \alpha_i = 0 \\ \frac{1}{\alpha_i^2} \left[\frac{1}{\alpha_i} \left(\frac{\alpha_i^3 + \varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_{i+1} - \frac{\varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_i \right) + \right. \\ \left. - \frac{2\alpha_i^2 - 3\varepsilon_i \alpha_i + 6\varepsilon_i^2}{18} \right] & \alpha_i \neq 0 \end{cases}$	$\alpha_i = 0$ $\alpha_i \neq 0$
con $\alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$	

Equazione 2-181

pertanto:

Caso $\alpha_i = 0$:

$$\begin{aligned}
 l_i \left[(\varepsilon_i - \varepsilon_0)^2 \int_0^1 \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i + 2\alpha_i (\varepsilon_i - \varepsilon_0) \int_0^1 \lambda_i \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i + \alpha_i^2 \int_0^1 \lambda_i^2 \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right] = \\
 = l_i \left[(\varepsilon_i - \varepsilon_0)^2 \ln \varepsilon_i + \alpha_i (\varepsilon_i - \varepsilon_0) \ln \varepsilon_i + \alpha_i^2 \frac{\ln \varepsilon_i}{3} \right] = \\
 = l_i \ln \varepsilon_i \left[(\varepsilon_i - \varepsilon_0)^2 + \alpha_i (\varepsilon_i - \varepsilon_0) + \frac{\alpha_i^2}{3} \right]
 \end{aligned}$$

Equazione 2-182

Caso $\alpha_i \neq 0$:

$$l_i \left[(\varepsilon_i - \varepsilon_0)^2 \int_0^1 \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i + 2\alpha_i (\varepsilon_i - \varepsilon_0) \int_0^1 \lambda_i \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i + \alpha_i^2 \int_0^1 \lambda_i^2 \ln(\lambda_i \alpha_i + \varepsilon_i) d\lambda_i \right] =$$

$$l_i \left[(\varepsilon_i - \varepsilon_0)^2 \left(\frac{\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{\alpha_i} - 1 \right) + \right.$$

$$\left. + (\varepsilon_i - \varepsilon_0) \left[\varepsilon_{i+1} \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{2} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\alpha_i} \left(\frac{\alpha_i^3 + \varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_{i+1} - \frac{\varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_i \right) - \frac{2\alpha_i^2 - 3\varepsilon_i \alpha_i + 6\varepsilon_i^2}{18} \right]$$

Equazione 2-183

Schematizzando:

$\int_{Fr(\Omega)} [\mathbf{r}(s_i) \bullet \mathbf{g}]^2 \ln[\mathbf{g} \bullet \mathbf{r}(s_i) + \varepsilon_0] ds$	$\alpha_i = 0$
$= \left\{ \begin{aligned} & l_i \ln \varepsilon_i \left[(\varepsilon_i - \varepsilon_0)^2 + \alpha_i (\varepsilon_i - \varepsilon_0) + \frac{\alpha_i^2}{3} \right] \\ & l_i \left\{ (\varepsilon_i - \varepsilon_0)^2 \left(\frac{\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{\alpha_i} - 1 \right) + \right. \\ & \quad + (\varepsilon_i - \varepsilon_0) \left[\varepsilon_{i+1} \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{2} \right] + \\ & \quad \left. + \frac{1}{\alpha_i} \left(\frac{\alpha_i^3 + \varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_{i+1} - \frac{\varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_i \right) - \frac{2\alpha_i^2 - 3\varepsilon_i \alpha_i + 6\varepsilon_i^2}{18} \right\} \end{aligned} \right.$	$\alpha_i \neq 0$
<p>con $\alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$</p>	

3 ABACHI DI VERIFICA E PROGETTO

3.1 Introduzione

Il lavoro presentato in questo capitolo ha un duplice obiettivo. Da un lato si è inteso procedere ad una campagna sistematica di prove numeriche dell'algoritmo di calcolo di sezioni in c.a. soggette a pressoflessione deviata descritto, nel Cap. 2, applicandolo ad una serie di sezioni rettangolari BxH, con B espressa in cm variabile nell'insieme [30; 40; 50] e H nell'insieme [30; 40; 50; 60; 70; 80; 90; 100; 110; 120; 130; 140; 150; 160]. Per ciascuna delle sezioni esaminate si sono considerati percentuali di armatura complessiva pari a 1%, 2%, 3% e 4% in modo da rispettare le prescrizioni normative [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7].

Inoltre si è inteso fornire ai progettisti strutturali uno strumento di calcolo, agile ed affidabile, che evitasse l'impiego di un elaboratore elettronico, consentendo loro di avere, in tempi comunque rapidissimi, risposte esaurienti sul progetto delle armature e sulla verifica di sezioni in c.a. rettangolari soggette a pressoflessione deviata. Per tale motivo si è deciso di diagrammare i risultati ottenuti dalle numerose elaborazioni eseguite in abachi di progetto e di verifica.

3.2 Costruzione

Ciascuna curva di ogni abaco rappresenta una porzione del dominio limite a cui si riferisce, in funzione di geometria, materiali ed armatura.

Per la costruzione è necessario innanzitutto scegliere i materiali da utilizzare: per il calcestruzzo si sceglie quello con resistenza caratteristica cubica R_{ck} pari a 30 Mpa, mentre per l'acciaio si utilizza il tipo FeB44k con tensione caratteristica di snervamento $f_{yk} = 430$ MPa; tale scelta è dettata esclusivamente considerando i tipi di materiale più comunemente utilizzati dai progettisti.

Altro dato che viene stabilito a priori è il valore del copriferro, inteso come distanza del baricentro del ferro dal lembo estremo della sezione: esso è sempre pari a 4 cm, in modo da rispettare il limite minimo di 2 cm indicato dalla normativa per il copriferro effettivo, inteso come distanza del lembo estremo del ferro dal lembo più esterno della sezione.

Per quanto riguarda la geometria, si considerano le 30 sezioni di pilastri indicate in Tabella 3-1

Tabella 3-1

B (cm)	H (cm)	B (cm)	H (cm)	B (cm)	H (cm)
30	30	40	60	50	70
30	40	40	70	50	80
30	50	40	80	50	90
30	60	40	90	50	100
30	70	40	100	50	110
30	80	40	110	50	120
30	90	40	120	50	130
30	100	40	130	50	140
40	40	50	50	50	150
40	50	50	60	50	160

In rispetto ai limiti sulle percentuali d'armatura longitudinale (5.5.3.2 O.P.C.M. 3274), per ogni geometria sono stati presi in considerazione rapporti geometrici d'armatura ρ_s pari all'1%, 2%, 3% e 4% dell'area di calcestruzzo A_c . I ferri d'armatura inoltre sono stati disposti nella sezione considerando ove possibile, in relazione ai limiti sugli interassi tra le barre, le cinque diverse disposizioni indicate in Tabella 3-2

Tabella 3-2

ρ_{sx} (%)	0,000	0,125	0,250	0,375	0,500
ρ_{sy} (%)	0,500	0,375	0,250	0,125	0,000

Poiché il programma utilizzato richiede l'indicazione di un numero intero di barre d'armatura con i relativi diametri da disporre nei vertici e lungo i lati, si sono calcolati i diametri non commerciali da inserire in ciascuna sezione per ottenere le percentuali di armatura intere prefissate. Ciò consente di avere degli abachi di utilizzo più generale.

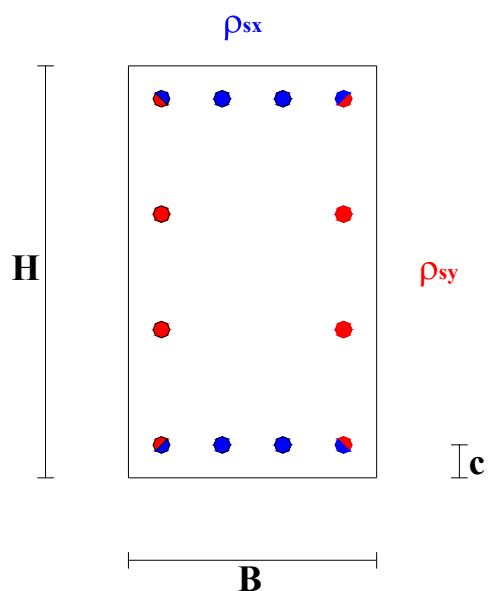


Figura 3-1

Fissata la geometria della sezione, tramite valori di B e H rispettosi dei limiti indicati dalla normativa ($B / H \geq 0,3$), e il rapporto geometrico d'armatura ρ_s , pari al rapporto tra l'area di ferro A_s e l'area di calcestruzzo $A_c = BH$, si determina l'area totale di ferro da disporre nella sezione:

$$A_s = \rho_s A_c = \rho_s BH$$

A questo punto si sceglie, in modo arbitrario, il diametro dei ferri di vertice ϕ_v e successivamente la disposizione dei ferri di lato: tenendo conto che la normativa impone un interasse massimo tra le barre longitudinali pari a 25 cm, non si considerano le disposizioni che prevedono percentuali d'armatura nulle sui lati di lunghezza maggiore di 30 cm. In Tabella 3-3 si riportano gli schemi considerati.

Tabella 3-3

B (cm)	H (cm)	ρ_{sx}	ρ_{sy}	ρ_{sx}	ρ_{sy}	ρ_{sx}	ρ_{sy}	ρ_{sx}	ρ_{sy}	ρ_{sx}	ρ_{sy}
		0,000 (%)	0,500 (%)	0,125 (%)	0,375 (%)	0,250 (%)	0,250 (%)	0,375 (%)	0,125 (%)	0,500 (%)	0,000 (%)
30	30	SI		SI		SI		SI		SI	
30	40	SI		SI		SI		SI		NO	
30	50	SI		SI		SI		SI		NO	
30	60	SI		SI		SI		SI		NO	
30	70	SI		SI		SI		SI		NO	
30	80	SI		SI		SI		SI		NO	
30	90	SI		SI		SI		SI		NO	
30	100	SI		SI		SI		SI		NO	
40	40	NO		SI		SI		SI		NO	
40	50	NO		SI		SI		SI		NO	
40	60	NO		SI		SI		SI		NO	
40	70	NO		SI		SI		SI		NO	
40	80	NO		SI		SI		SI		NO	
40	90	NO		SI		SI		SI		NO	
40	100	NO		SI		SI		SI		NO	
40	110	NO		SI		SI		SI		NO	
40	120	NO		SI		SI		SI		NO	
40	130	NO		SI		SI		SI		NO	
50	50	NO		SI		SI		SI		NO	
50	60	NO		SI		SI		SI		NO	
50	70	NO		SI		SI		SI		NO	
50	80	NO		SI		SI		SI		NO	
50	90	NO		SI		SI		SI		NO	
50	100	NO		SI		SI		SI		NO	
50	110	NO		SI		SI		SI		NO	
50	120	NO		SI		SI		SI		NO	
50	130	NO		SI		SI		SI		NO	
50	140	NO		SI		SI		SI		NO	
50	150	NO		SI		SI		SI		NO	
50	160	NO		SI		SI		SI		NO	

In funzione della disposizione adottata per i ferri d'armatura si determina l'area di ferro su ciascun lato della sezione:

$$A_{sx} = \rho_{sx} A_s; A_{sy} = \rho_{sy} A_s \Rightarrow A_s = 2 \cdot (A_{sx} + A_{sy})$$

Si fissa a questo punto il numero di barre d'armatura longitudinale da disporre su ogni lato, tale da rispettare i limiti sugli interassi, che non devono risultare minori di 2 cm e maggiori di 25 cm. In funzione del numero di ferri scelto il valore di i_x ed i_y risultano:

$$i_x = \frac{B - (2 \cdot c)}{n_x + 1} \quad i_y = \frac{H - (2 \cdot c)}{n_y + 1}$$

Ciò fatto è possibile determinare dei diametri ϕ_x e ϕ_y che consentono di ottenere la percentuale e la disposizione scelta, pur non essendo diametri commerciali.

L'area di ferro disposta su ogni lato (A_{sx} ed A_{sy}) tiene conto anche dei quattro ferri di vertice ϕ_v disposti nella sezione: l'area di ogni ferro di vertice viene considerata equamente ripartita fra i due lati concorrenti nel vertice considerato e, quindi, dovendo considerare per ogni lato due metà di A_{sv} , ogni lato possiede di per sé un'area di ferro almeno pari all'area di un ferro di vertice A_{sv} .

In formule:

$$A_{sx} = A_{sv} + \left(n_x \cdot \pi \frac{\phi_x^2}{4} \right) \quad A_{sy} = A_{sv} + \left(n_y \cdot \pi \frac{\phi_y^2}{4} \right)$$

I valori di ϕ_x e ϕ_y da assegnare sono dati allora dalle seguenti espressioni:

$$\phi_x = \sqrt{\frac{4 \cdot (A_{sx} - A_{sv})}{\pi \cdot n_x}}; \phi_y = \sqrt{\frac{4 \cdot (A_{sy} - A_{sv})}{\pi \cdot n_y}}$$

In Figura 3-2 è riportato un esempio di una sezione determinata con la procedura suddetta.

Si definiscono pilastri gli elementi soggetti a flessione e sforzo assiale quando questo supera il valore:																																													
N = 0,05 A_c R_{ck} χ = 810,00 kN																																													
<table><tr><th colspan="4">Materiali</th></tr><tr><th>R_{ck}</th><th>f_{cd}</th><th>f_{yk}</th><th>f_{yd}</th></tr><tr><td>(MPa)</td><td>(MPa)</td><td>(MPa)</td><td>(MPa)</td></tr><tr><td>30</td><td>13,23</td><td>430</td><td>373,91</td></tr></table>						Materiali				R _{ck}	f _{cd}	f _{yk}	f _{yd}	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	30	13,23	430	373,91																								
Materiali																																													
R _{ck}	f _{cd}	f _{yk}	f _{yd}																																										
(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)																																										
30	13,23	430	373,91																																										
<table><tr><th colspan="6">Geometria</th></tr><tr><th>B</th><th>H</th><th>B/H</th><th>c</th><th>i_x</th><th>i_y</th></tr><tr><td>(cm)</td><td>(cm)</td><td>(-)</td><td>(cm)</td><td>(cm)</td><td>(cm)</td></tr><tr><td>40</td><td>90</td><td>0,44</td><td>4</td><td>8,00</td><td>20,50</td></tr></table>						Geometria						B	H	B/H	c	i _x	i _y	(cm)	(cm)	(-)	(cm)	(cm)	(cm)	40	90	0,44	4	8,00	20,50																
Geometria																																													
B	H	B/H	c	i _x	i _y																																								
(cm)	(cm)	(-)	(cm)	(cm)	(cm)																																								
40	90	0,44	4	8,00	20,50																																								
<table><tr><th colspan="4">Armature</th></tr><tr><td colspan="2">A_{s_tot}</td><td>Disp.</td><td>φ_v</td></tr><tr><td>(cm²)</td><td>(%)</td><td>(-)</td><td>(mm)</td></tr><tr><td>108,00</td><td>3,00</td><td>4</td><td>35</td></tr><tr><td colspan="4">ρ_{sx}</td></tr><tr><td>(%)</td><td>(-)</td><td>(mm)</td><td>(cm²)</td></tr><tr><td>0,375</td><td>3</td><td>36,201</td><td>40,50</td></tr><tr><td colspan="4">ρ_{sy}</td></tr><tr><td>(%)</td><td>(-)</td><td>(mm)</td><td>(cm²)</td></tr><tr><td>0,125</td><td>3</td><td>12,831</td><td>13,50</td></tr></table>						Armature				A _{s_tot}		Disp.	φ _v	(cm ²)	(%)	(-)	(mm)	108,00	3,00	4	35	ρ _{sx}				(%)	(-)	(mm)	(cm ²)	0,375	3	36,201	40,50	ρ _{sy}				(%)	(-)	(mm)	(cm ²)	0,125	3	12,831	13,50
Armature																																													
A _{s_tot}		Disp.	φ _v																																										
(cm ²)	(%)	(-)	(mm)																																										
108,00	3,00	4	35																																										
ρ _{sx}																																													
(%)	(-)	(mm)	(cm ²)																																										
0,375	3	36,201	40,50																																										
ρ _{sy}																																													
(%)	(-)	(mm)	(cm ²)																																										
0,125	3	12,831	13,50																																										

Figura 3-2

3.3 Descrizione degli input del programma utilizzato

Il programma implementato determina punti del dominio N , M_x , M_y ed esiste in due diverse versioni, denominate rispettivamente *SLU-tab* e *SLU-Fette*. Nella versione *SLU-tab* vengono costruite le fette per valori di N ottenuti dividendo l'intervallo tra i valori estremi N_{traz} e N_{comp} , automaticamente determinati dal programma, in un certo numero di campi; in *SLU-Fette* invece si possono determinare le coppie $(M_x; M_y)$ per un assegnato valore di N .

Definita la sezione in ogni sua parte, si hanno a disposizione tutti i dati da fornire al programma. Complessivamente è necessario gestire tre file di input: due ("0DomIn.inp" e "SEZ_SC01.INP") sono uguali per entrambe le versioni di *SLU*, mentre il terzo ("0norm.inp") è il file di input della sola versione *SLU-Fette* che permette di impostare lo sforzo normale N .

Nel file "0DomIn.inp" si vanno a stabilire una serie di parametri necessari al programma per il calcolo di ciascun punto di ogni fetta:

- Schema di avanzamento del carico: indica il modo in cui viene amplificato il carico per raggiungere il dominio limite, ossia per giungere alla crisi della sezione;
- Numero di paralleli del dominio: indica il numero di fette, ossia il numero di valori di N , in cui viene diviso il dominio;
- Numero di meridiani del dominio: indica il numero di punti determinati per ogni fetta;
- Tolleranza del test di convergenza: serve a stabilire quando fermare le iterazioni nel calcolo di ogni punto;
- Numero massimo di iterazioni consentite.

Il criterio seguito dal programma *SLU*, ampiamente illustrato in [12], consiste nel determinare il coefficiente λ di amplificazione dei carichi di progetto che provoca l'eventuale crisi della sezione. Si fa allora riferimento a sette diversi schemi di avanzamento del carico:

- 1) vengono amplificate proporzionalmente le tre caratteristiche della sollecitazione N , M_x e M_y ;
- 2) vengono amplificate proporzionalmente M_x e M_y lasciando costante N ;
- 3) vengono amplificate proporzionalmente N e M_y lasciando costante M_x ;
- 4) vengono amplificate proporzionalmente N e M_x lasciando costante M_y ;
- 5) viene amplificato M_y lasciando costante N e M_x ;
- 6) viene amplificato M_x lasciando costante N e M_y ;
- 7) viene amplificato N lasciando costante M_x e M_y .

In Figura 3-3 è riportato il file di input “0DomIn.inp”, uguale per tutte le sezioni considerate: in rosso sono riportati i parametri di input stabiliti, mentre le righe “Linea 4” e “Linea 5” sono ulteriori commenti che è possibile aggiungere.

```
progetto
per pilastri rettangolari in c.a.
soggetti a pressoflessione deviata
Linea 4
Linea 5
Schema di avanzamento del carico
7
Numero di Paralleli del Dominio
12
Numero di Meridiane del Dominio
24
Tolleranza del test di convergenza
1,00E-06
Numero massimo di iterazioni consentite
600
```

Figura 3-3

Nel file “SEZ_SC01.INP” si inseriscono le caratteristiche geometriche e di armatura della sezione: coordinate dei vertici della sezione (in senso orario) con i rispettivi ferri di vertice, numero e diametro dei ferri disposti su ciascun lato della sezione, copriferro e caratteristiche dei materiali utilizzati. In Figura 3-4 è riportato l’esempio di scrittura di tale file con riferimento all’esempio di Figura 3-3.

```

Sezione rettangolare SLU tangente
Sezione                40      x      90
Percentuale armatura longitudinale:                3,00
ρsx =                  0,375
ρsy =                  0,125
1                      Numero di sezioni
1                      La sezione è piena (1) o è un foro (-1)
4                      Numero di vertici della sezione
x(cm)      y(cm)      fi(mm)      Vertici inseriti in senso orario
0          0          35
0          90         35
40         90         35
40         0          35
fi(mm)      N°        Ferri di lato
12,831      3
36,201      3
12,831      3
36,201      3
0            Ferri addizionali
x(cm)      y(cm)      fi(mm)
4            copriferro (cm)
coefficienti polinomio
1,00E+03
-1,24E+10
-1,62E+13
6,27E+15
-6,59E+17
3000        Rck (N/cm2)
2.1E+007    Ef (N/cm2)
43000       fyk (N/cm2)
7           Tipo di soluzione
Linea 6

```

Figura 3-4

Infine è necessario impostare il file di input “0norm.inp”, che consente di ottenere particolari fette del dominio. In esso vanno digitati il numero di fette che si vuole ottenere e i rispettivi valori dello sforzo normale, espressi in [N]. In Figura 3-5 è riportato un esempio di tale file, sempre con riferimento all’esempio di Figura 3-3.

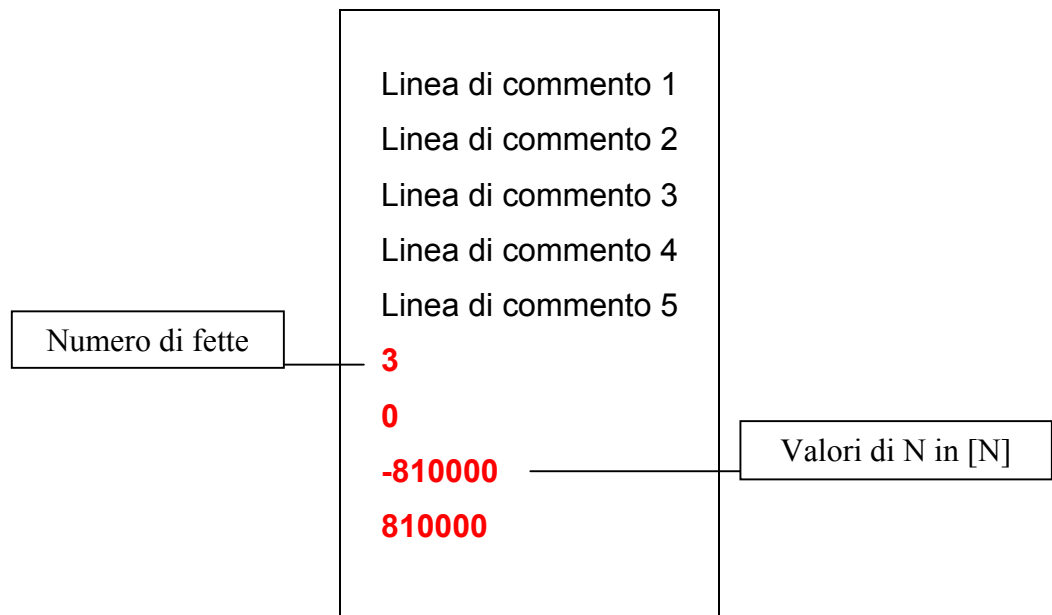


Figura 3-5

3.4 Descrizione dell'output ed adimensionalizzazione

Entrambe le versioni di *SLU* forniscono un file di output chiamato “surf.out”: esso è di tipo numerico e contiene le coppie (M_x ; M_y) corrispondenti ai vari valori di N , tali valori delle caratteristiche sono espressi in [Ncm] e [N]. In Figura 3-6 è riportato un esempio di tale file, con riferimento all'esempio di Figura 3-3 (per brevità si è riportata la sola Fetta 3).

Esaminando l'esempio è facile notare che oltre ai dati della fetta, sono sempre forniti dal programma i valori di N per trazione pura e compressione pura. Inoltre, esaminando le righe in basso, è facile accorgersi di eventuali errori, quali ad esempio la non convergenza di un punto per il raggiungimento del massimo numero di iterazioni, che in questo esempio è pari a 600.

I dati ottenuti per ciascuna fetta del dominio vengono poi convertiti in un file di tipo xls da cui si ottengono, sempre con una procedura automatizzata, le varie fette con i punti del dominio determinati che compongono ogni abaco.

In Figura 3-7 è riportato l'abaco di verifica ottenuto per la sezione dell'esempio di Figura 3-3, considerando come unità di misura [kN] e [m]. Dall'esame di tale abaco appare subito chiara la necessità di adottare un criterio di adimensionalizzazione che generalizzi gli abachi e ne agevoli l'utilizzo senza perdere la caratteristica di immediatezza; infatti, dall'esame visivo degli abachi, espressi con unità di misura come e [N] e [cm] o [kN] e [m] si ottengono spesso grafici di non chiara ed agevole lettura a causa dello schiacciamento che presenta l'intero dominio, visto tridimensionalmente, quando c'è una forte differenza tra i lati B e H o quando la disposizione dei ferri d'armatura è fortemente dissimmetrica. Tale inconveniente è evidente già in una sezione rettangolare come quella analizzata per esempio e risulta ancor più marcato in sezioni che presentano rapporto H/B molto prossimo al limite 0,3 imposto dalla norma.

Limite di trazione		
-4038230	-3,67E-09	4,66E-10
Fetta 3 :		
810000	125452046,66	33614774,59
810000	80331969,97	46379684,49
810000	51963659,63	51963659,63
810000	31842901,98	55153524,08
810000	15298642,40	57095310,71
810000	0,00	57653233,35
810000	-15298642,31	57095310,40
810000	-31842902,09	55153524,27
810000	-51963660,18	51963660,18
810000	-80331969,41	46379684,16
810000	-125452046,57	33614774,57
810000	-191107482,30	0,00
810000	-125452046,73	-33614774,61
810000	-80331969,97	-46379684,49
810000	-51963659,63	-51963659,63
810000	-31842901,98	-55153524,08
810000	-15298642,40	-57095310,71
810000	0,00	-57653233,35
810000	15298642,31	-57095310,40
810000	31842902,09	-55153524,27
810000	51963660,18	-51963660,18
810000	80331969,41	-46379684,16
810000	125452046,57	-33614774,57
810000	191107482,30	0,00
810000	125452046,66	33614774,59
Numero medio di iterazioni nella fetta= 20,833333333333		
Limite di compressione		
7847930	3,67E-09	-4,66E-10
Schema di avanzamento del carico = 7		
Numero dei paralleli del dominio = 3		
Numero dei meridiani del dominio = 24		
Tolleranza nel test di convergenza = 0,000001		
Numero massimo di iterazioni consentite = 600		
N. totale di iterazioni = 1593		
N. medio di iterazioni per punto = 21,527027027027		
N. minimo di iterazioni = 15		
N. massimo di iterazioni = 50		
tempo impiegato: sec 5,88899999999558		

Figura 3-6

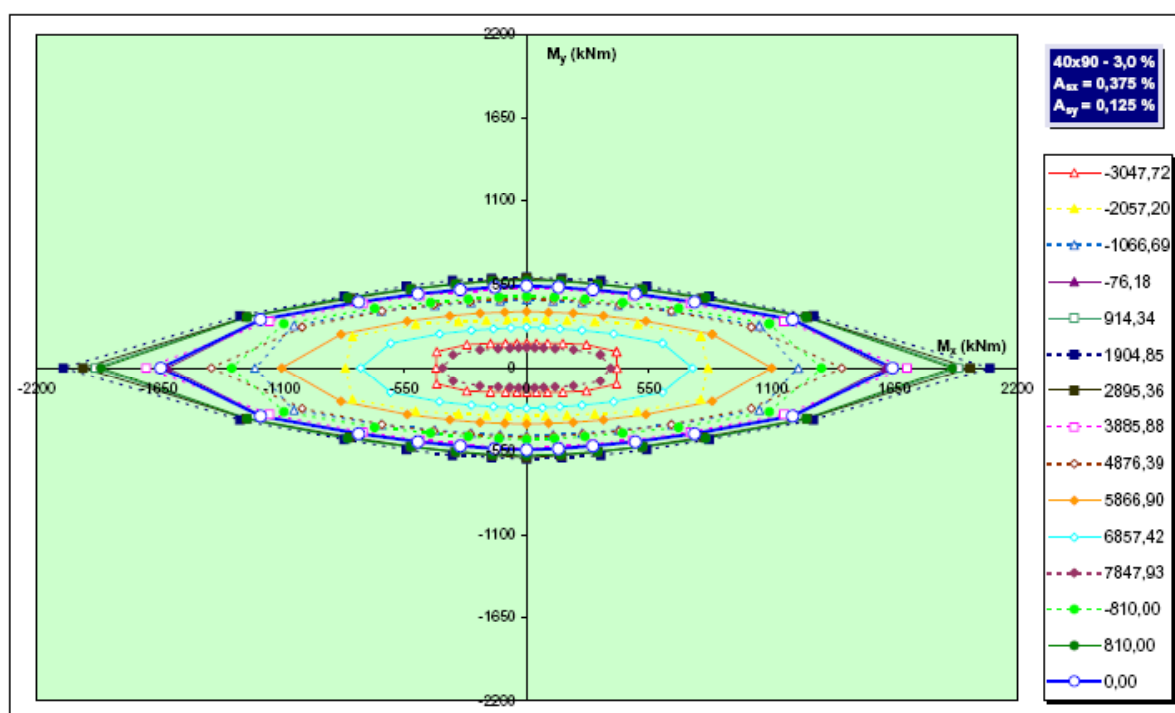


Figura 3-7

Il criterio di adimensionalizzazione utilizzato [15] è qui sintetizzato:

$$\nu = \frac{N}{B \cdot H \cdot f_{cd}}$$

$$\mu_x = \frac{M_x}{B \cdot H^2 \cdot f_{cd}}$$

$$\mu_y = \frac{M_y}{B^2 \cdot H \cdot f_{cd}}$$

dove N è lo sforzo normale assiale, M_x e M_y sono i momenti flettenti lungo x ed y, ossia quelli il cui bivettore ha direzione coincidente rispettivamente con il lato B e con il lato H, e f_{cd} è la resistenza di calcolo del calcestruzzo. Il criterio suddetto è molto semplice: note la sola geometria della sezione e la resistenza di progetto del calcestruzzo è immediato passare dalle caratteristiche della sollecitazione di progetto

N , M_x e M_y a quelle adimensionali v , μ_x e μ_y per verificare se il punto rappresentativo delle sollecitazioni provenienti dall'analisi ricade o meno all'interno del dominio limite. In virtù del criterio di adimensionalizzazione adottato gli abachi possono continuare ad essere utilizzati anche quando si considerano diversi tipi di cls.

3.5 Abachi di Verifica

Gli abachi di verifica sono costituiti da fette del dominio limite tridimensionale tagliato in corrispondenza di certi valori dello sforzo normale adimensionalizzato v . Per una data geometria della sezione, percentuale di armatura e disposizione dei ferri lungo i quattro lati, nell'abaco sono riportate fette rappresentative del comportamento della sezione per vari valori dello sforzo normale.

3.5.1 Costruzione

Ogni abaco contiene dodici fette fornite automaticamente dalla versione *SLU-tab* del programma, e altre tre costruite con la versione *SLU-Fette* che permette di impostare il valore dello sforzo normale N per il quale si vuole ottenere la fetta del dominio, per valori dello sforzo normale nullo e pari a:

$$N = \pm(0,005 \cdot A_c \cdot R_{ck} \cdot \chi)$$

Tale valore dello sforzo normale, contenuto nella Circolare del 10/04/97 [4], rappresenta un valore minimo convenzionale dello sforzo normale, che deve essere applicato ad un elemento strutturale lineare per poterlo considerare come un pilastro.

3.5.2 Descrizione ed utilizzo

Gli abachi vengono catalogati per sezioni. Per ogni sezione ci sono gli abachi relativi ad ognuno dei valori di ρ_s ed alle disposizioni considerate. Poiché si considerano solo sezioni armate simmetricamente basta rappresentare solo un quadrante del piano.

Per eseguire una verifica basta prendere l'abaco relativo alla geometria della sezione in esame e ai valori della percentuale di armatura e della disposizione quanto più vicini possibile a quelli del caso esaminato. A questo punto basta verificare che il punto di coordinate $(\mu_x; \mu_y)$ sia interno alla fetta relativa al valore v dello sforzo normale adimensionalizzato più prossimo a quello che sollecita la sezione.

E' possibile anche dare un'indicazione di massima su come scegliere la curva in funzione del valore di v proveniente dall'analisi: guardando gli abachi è facile accorgersi che, per ciascun valore di ρ_s , $v = 0,400$ è sempre la fetta più ampia di tutto il dominio limite considerato. Quando non si ha a disposizione la curva relativa al valore di v di calcolo, per operare a vantaggio di sicurezza, conviene prendere una curva corrispondente ad un v minore di quello dell'analisi quando quest'ultimo è minore di 0,400 e viceversa quando lo sforzo normale adimensionalizzato proveniente dall'analisi è maggiore di 0,400. In entrambi i casi, infatti, si va a sottostimare la reale ampiezza della fetta di dominio considerata. In sintesi, detto v_a lo sforzo normale adimensionalizzato proveniente dall'analisi, si consiglia di consultare:

- se $v_a < 0,400$ scegliere v immediatamente minore di v_a ;
- se $v_a > 0,400$ scegliere v immediatamente maggiore di v_a .

La ricerca dell'abaco da utilizzare è semplice in quanto ognuno di essi è corredato di una legenda laterale, in cui si riportano i dati della sezione e l'elenco degli sforzi normali adimensionalizzati a cui la sezione è stata sottoposta, distinguibili tramite l'utilizzo di diversi colori e simboli. In Figura 3-8 è riportato un esempio di abaco di verifica con le chiavi di lettura delle leggende.

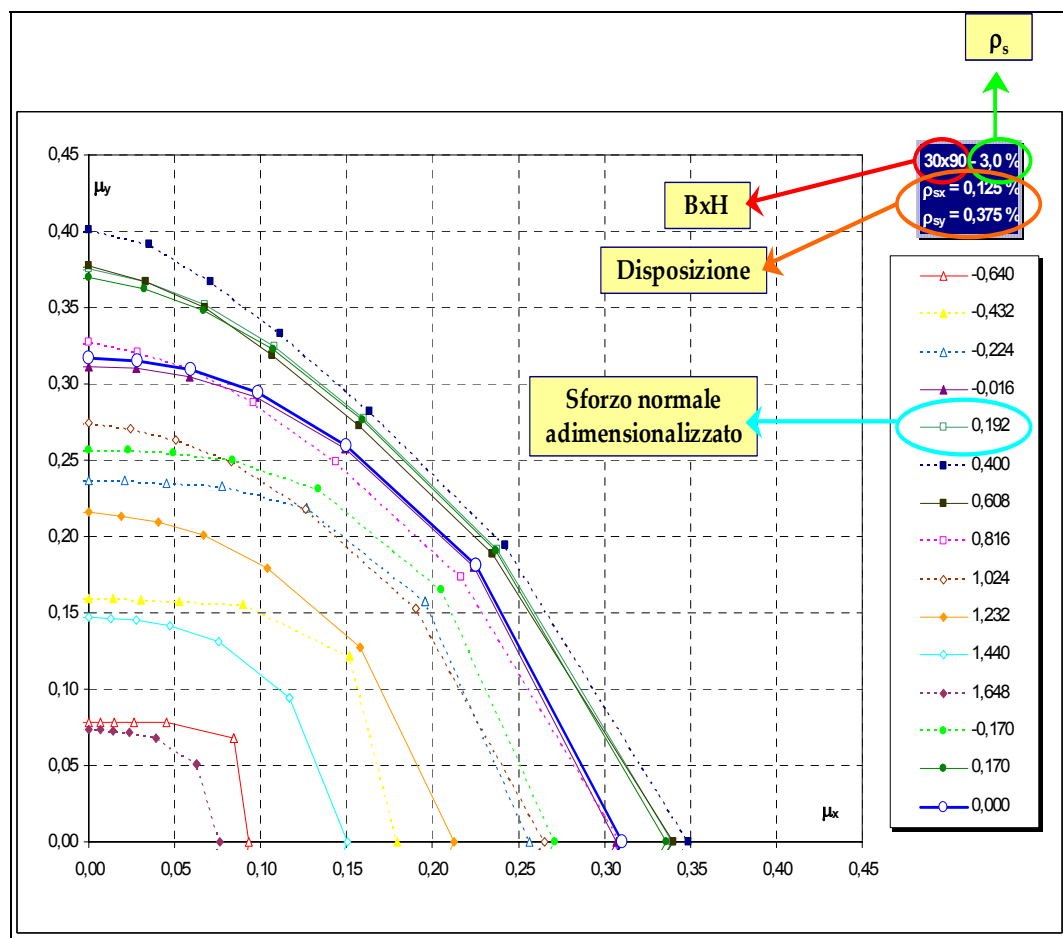


Figura 3-8 - Abaco di Verifica

3.6 Abachi di progetto

Gli abachi di progetto contengono fette di domini diversi che presentano tutte lo stesso valore di v , ossia le curve dell'abaco, per una data sezione $B \times H$, si differenziano per percentuale e disposizione dell'armatura longitudinale.

3.6.1 Costruzione

Per la costruzione degli abachi di progetto si utilizza la versione *SLU-Fette* che permette di impostare il valore dello sforzo normale N per il quale si vuole ottenere la fetta del dominio.

Innanzitutto è necessario determinare i valori dello sforzo normale per trazione e compressione pura, rispettivamente N_{traz} e N_{comp} , per ogni sezione, percentuale e disposizione di armatura longitudinale. Tali limiti, automaticamente forniti dal programma, si ottengono dalle seguenti relazioni:

$$N_{traz} = -(A_s \cdot f_{yd}) = -(B \cdot H \cdot \rho_s \cdot f_{yd})$$

$$N_{comp} = (A_s \cdot f_{yd}) + (0,8 \cdot f_{cd} \cdot A_c) = B \cdot H \cdot [(\rho_s \cdot f_{yd}) + (0,8 \cdot f_{cd})]$$

Tali espressioni evidenziano che, in virtù della tecnica di adimensionalizzazione scelta, i limiti adimensionali risultano indipendenti dalla forma della sezione e funzione solo dei materiali e della percentuale d'armatura secondo le seguenti relazioni:

$$v_{traz} = -\frac{\rho_s \cdot f_{yd}}{f_{cd}}$$
$$v_{comp} = \frac{(\rho_s \cdot f_{yd}) + (0,8 \cdot f_{cd})}{f_{cd}}$$

In Tabella 3-4 sono riportati i limiti adimensionali al variare di ρ_s :

Tabella 3-4

ρ_s (%)	v_{traz} (-)	v_{comp} (-)
1	-0,283	1,083
2	-0,565	1,365
3	-0,848	1,648
4	-1,131	1,931

Noti questi limiti, i valori di N (o v) per cui ottenere le varie fette, e quindi costruire gli abachi, sono stati scelti dividendo in 10 parti l'intervallo tra N_{traz} e N_{comp} (o v_{traz} e v_{comp}) relativi a $\rho_s = 4\%$ ed aggiungendo a questi valori gli altri 6, relativi alle altre tre percentuali d'armatura: in questo modo si sono costruiti, per ogni sezione, 16 diversi abachi di progetto in corrispondenza di 16 diversi valori dello sforzo normale adimensionalizzato.

3.6.2 Descrizione ed utilizzo

In generale in ogni abaco trovano posto un numero di curve variabile tra 3 e 20: tale variabilità è dovuta all'impossibilità di considerare alcune disposizioni d'armatura per talune sezioni, come già detto in precedenza, ed all'impossibilità di costruire, per alcune percentuali d'armatura, fette corrispondenti a sforzi normali superiori, in valore assoluto, ai limiti di trazione e compressione pura. Poiché si considerano solo sezioni armate simmetricamente basta rappresentare solo un quadrante del piano.

Per il progetto delle armature, note la geometria del pilastro e le sollecitazioni di progetto, occorre considerare tra i 16 abachi a disposizione per quella sezione

quello che presenta lo sforzo normale adimensionalizzato più vicino al valore di v proveniente dall'analisi e quindi valutare la percentuale e la disposizione d'armatura corrispondenti ad una delle curve che contengono il punto (μ_x, μ_y) .

E' possibile anche dare un'indicazione di massima su come scegliere l'abaco in funzione del valore di v proveniente dall'analisi: se guardiamo i limiti per trazione e compressione pura, si osserva che il valore medio tra i due, per ciascun valore di ρ_s , è $v = 0,400$, a cui corrisponde sempre la fetta più ampia di tutto il dominio limite considerato. Quando allora non si ha a disposizione l'abaco relativo al valore v di calcolo, per operare a vantaggio di sicurezza, conviene considerare la curva relativa ad un v minore di quello dell'analisi quando quest'ultimo è minore di $0,400$ e viceversa quando lo sforzo normale adimensionalizzato di progetto è maggiore di $0,400$, perché in entrambi i casi si va a sottostimare la reale ampiezza della fetta di dominio considerata. In sintesi, detto v_a lo sforzo normale adimensionalizzato proveniente dall'analisi, è opportuno considerare:

- se $v_a < 0,400$ scegliere v immediatamente minore di v_a ;
- se $v_a > 0,400$ scegliere v immediatamente maggiore di v_a .

Consultare gli abachi è molto semplice. Essi sono catalogati per sezioni. Per ogni sezione si hanno a disposizione 16 diversi abachi per 16 diversi valori dello sforzo normale v . Le curve riportate in ogni abaco sono facilmente distinguibili tramite la legenda laterale, che va letta tenendo conto che ogni curva viene identificata tramite tre diversi numeri, separati da un trattino (-): il primo numero indica il rapporto geometrico d'armatura ρ_s ; il secondo ed il terzo numero indicano ρ_{sx} e ρ_{sy} .

In Figura 3-9 è riportato un esempio di abaco di progetto con le chiavi di lettura delle leggende.

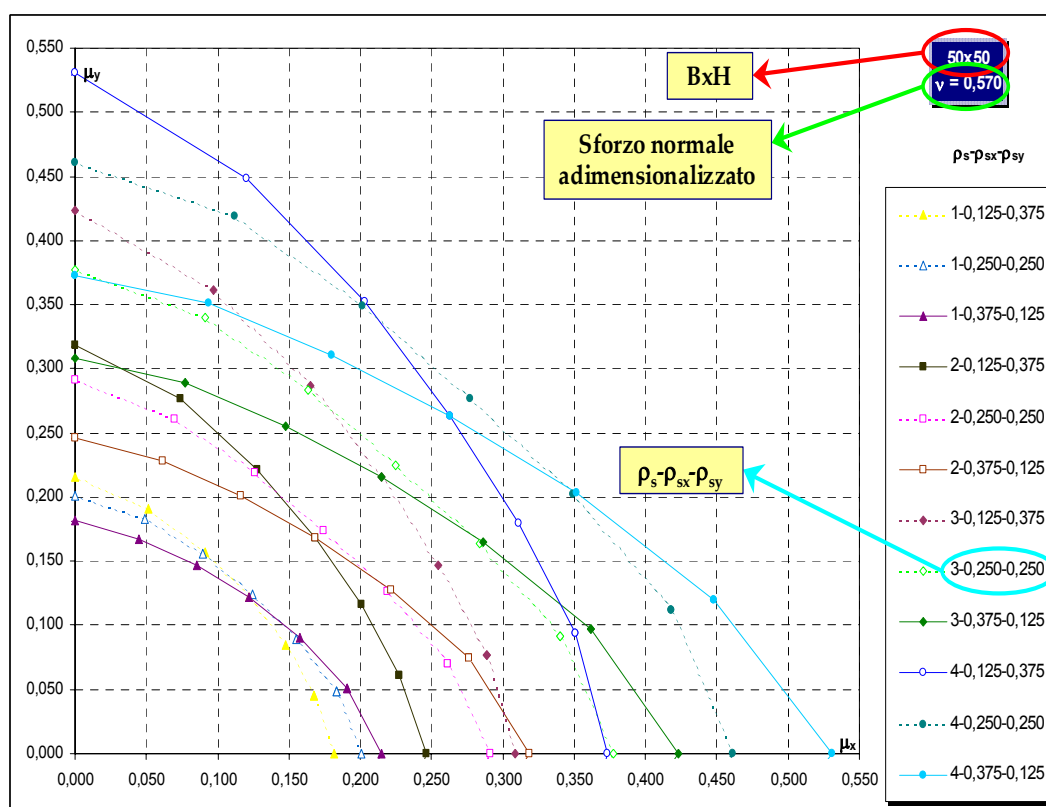


Figura 3-9 - Abaco di Progetto

4 IMPLEMENTAZIONE DI UN POST-PROCESSORE DEL PROGRAMMA DI ANALISI STRUTTURALE ETABS

Gli algoritmi per la verifica a presso-flessione deviata di sezioni in c.a. descritti nel Cap.2 e opportunamente testati durante la fase di redazione degli abachi descritti nel Cap.3, sono stati ulteriormente sviluppati per implementare un programma che funge da post-processore di un programma di analisi strutturale agli elementi finiti di tipo commerciale: *Etabs*.

Il Post-processore consente di eseguire in automatico il predimensionamento delle armature e le verifiche strutturali. L'elevato numero di combinazioni di carico da considerare nelle analisi e, per ciascuna di esse, i vari percorsi di amplificazione dei carichi per la verifica allo SLU [12], rende necessario una verifica automatica delle sezioni attraverso appositi codici di calcolo.

Il programma *Etabs*, prodotto dalla Computers and Structures Inc., Berkeley, California, consente di modellare strutture tridimensionali definendone la geometria, le caratteristiche meccaniche dei materiali, le masse, le azioni sollecitanti di tipo statico e quelle di tipo dinamico mediante spettri di risposta dell'accelerazione; consente, inoltre, di combinare tra loro le varie condizioni di carico. A valle dell'analisi il programma fornisce tutte le caratteristiche della sollecitazione su ciascun elemento strutturale, per ciascuna condizione e combinazione di carico, nonché gli spostamenti dei nodi. Tutti i dati d'*input* e di *output* possono essere esportati in *database*, che diventano i dati d'*input* del post-processore.

4.1 Travi: Petabs_Travi_SLU

Il programma Post-processore acquisisce in input i tabulati estratti da Etabs, l'utente definisce il valore del copriferro, inteso come distanza del baricentro dei ferri dal bordo della sezione, e due valori caratteristici della resistenza dei materiali: la resistenza cubica caratteristica R_{ck} del calcestruzzo e la tensione caratteristica di snervamento dell'acciaio (vd. Figura 4-1).

The screenshot shows the 'PostProcessore ETabs' window with the following sections:

- Dati generali di progetto:**
 - R_{ck} : 250 Kg/cm²
 - f_{yk} : 3750 Kg/cm²
 - Copriferro: 3 cm
- Controlli:**
 - ☒ D.M. '96
 - ☒ C.M. '97 (Zona Sismica)
 - ☒ Ord. 3274 (CD B)
- Selezione sottoinsiemi di travi:**
 - Impalcato: [dropdown]
 - Trave: [dropdown]
- Suggerisci Armature:**
 - armature lati:** ☒ ϕ 24, ☒ ϕ 26, ☒ ϕ 28, ☒ ϕ 30
 - armature vertice:** ϕ 14, [dropdown], [Suggerisci Armature button]
 - staffe:** ϕ 8, [dropdown], N° Braccia: 2

Figura 4-1 PEtabs_Travi_SLU

L'utente, inoltre, può scegliere di effettuare o escludere delle *routine* di controllo geometrico delle armature secondo tre normative: il DM 9\1\96 [1], la Circolare Ministeriale 10\4\97 [4] o la OPCM 3274\03 [6]. Il controllo riguarda il rispetto dei limiti minimo e massimo delle percentuali di armatura longitudinale presenti nella sezione, il rispetto dei copriferri e degli interferri nonché il rispetto del diametro e del passo minimi delle staffe.

La sezione "Suggerisci Armature" consente di definire i diametri delle armature longitudinali, distinte per reggistaffe di vertice e ferri di parete e il diametro ed il passo delle staffe che verranno utilizzate in fase di predimensionamento.

La sezione "Selezione sottoinsiemi di travi" consente di ridurre gli elementi su cui effettuare il predimensionamento e/o la verifica.

Al termine della fase di predimensionamento il programma crea nel *database* un'ulteriore tabella (vd. Tabella 4-1) che contiene i diametri dei ferri reggistaffe, il numero ed il diametro dei ferri inferiori, il numero ed il diametro dei ferri superiori e, infine, il numero ed il diametro dei ferri di parete.

Tabella 4-1 Tabella riassuntiva della geometria delle travi

Story	Beam	Loc	Φ_{Vertice}	N° inf.	$\Phi_{\text{inf.}}$	N° sup.	$\Phi_{\text{sup.}}$	N° parete	Φ_{parete}
PIANO2	B16	0	22	1	22	1	22	1	16
PIANO2	B16	0,525	22	1	22	1	22	1	16
PIANO2	B16	1,05	22	1	22	1	22	1	16
PIANO2	B16	1,575	22	1	22	1	22	1	16
PIANO2	B16	2,1	22	1	22	1	22	1	16
PIANO2	B17	0	22	1	22	1	22	1	16
PIANO2	B17	0,525	22	1	22	1	22	1	16
PIANO2	B17	1,05	22	1	22	1	22	1	16
PIANO2	B17	1,575	22	1	22	1	22	1	16
PIANO2	B17	2,1	22	1	22	1	22	1	16

A questo punto è possibile avviare la procedura di verifica, al termine della quale il postprocessore riassume in una tabella (vd. Figura 4-2) i risultati dell'elaborazione riportando, per ciascuna sezione di ciascun elemento strutturale:

- la combinazione di carico analizzata dal codice Etabs¹;
- i relativi valori delle caratteristiche della sollecitazione di progetto;
- il minimo coefficiente di sicurezza ed il corrispondente schema di amplificazione dei carichi, accompagnato da un pedice che indica se la crisi della sezione è dovuta al raggiungimento delle deformazioni ultime del calcestruzzo o dell'acciaio;
- le caratteristiche della sollecitazione ultime della sezione;
- le deformazioni ultime dei materiali, per avere delle informazioni sintetiche sulla duttilità della sezione;
- l'esito finale della verifica.

A questa tabella ne è collegata un'altra riepilogativa in cui è possibile leggere, per ciascun elemento strutturale:

¹ Per le travi sollecitate prevalentemente a flessione semplice dal momento M3 con N e M2 trascurabili, per ridurre i tempi di elaborazione, conviene effettuare la verifica direttamente su una combinazione di inviluppo anzichè su tutte le combinazioni considerate nell'analisi.

- la combinazione di carico più gravosa con i relativi moltiplicatore critico e percorso di amplificazione dei carichi;
- il numero e il diametro delle barre di armatura, secondo lo schema già descritto;
- l'esito della verifica.

Beam	Loc	Load	N	My	Mx	λ_{fe}	A_{fe}	Nu_{fe}	Myu_{fe}	Mxu_{fe}	ϵ_{cls}	ϵ_{fe}	Stato
B16	0	INVILMAX	0	0	22,462	1,1943	1	0	0	26,82953	2,115E-03	-0,01	Ok
B16	0	INVILMIN	0	0	-36,817	0,7287	1	0	0	-26,82953	2,115E-03	-0,01	-NO-
B16	0,525	INVILMAX	0	0	19,661	1,3645	1	0	0	26,82953	2,115E-03	-0,01	Ok
B16	0,525	INVILMIN	0	0	-25,381	1,0570	1	0	0	-26,82953	2,115E-03	-0,01	Ok
B16	1,05	INVILMAX	0	0	15,900	1,6873	1	0	0	26,82953	2,115E-03	-0,01	Ok
B16	1,05	INVILMIN	0	0	-14,915	1,7987	1	0	0	-26,82953	2,115E-03	-0,01	Ok
B16	1,575	INVILMAX	0	0	11,199	2,3959	1	0	0	26,82953	2,115E-03	-0,01	Ok
B16	1,575	INVILMIN	0	0	-5,4374	4,9341	1	0	0	-26,82953	2,115E-03	-0,01	Ok
B16	2,1	INVILMAX	0	0	5,9354	4,5431	1	0	0	26,82953	2,115E-03	-0,01	Ok
B16	2,1	INVILMIN	0	0	0,66459	10,3697	1	0	0	26,82953	2,115E-03	-0,01	Ok

Sezione non verificata

Story	Beam	Loc	Load	λ_{Min}	A_{Min}	$\Phi_{Vertice}$	$N^{\circ}_{inf.}$	$\Phi_{inf.}$	$N^{\circ}_{sup.}$	$\Phi_{sup.}$	N°_{parete}	Φ_{parete}	Stato
PIANO2	B16	0	INVILMIN	0,7287	1	22	1	22	1	22	1	16	-NO-
PIANO2	B16	0,525	INVILMIN	1,0570	1	22	1	22	1	22	1	16	Ok
PIANO2	B16	1,05	INVILMAX	1,6873	1	22	1	22	1	22	1	16	Ok
PIANO2	B16	1,575	INVILMAX	2,3959	1	22	1	22	1	22	1	16	Ok
PIANO2	B16	2,1	INVILMAX	4,5431	1	22	1	22	1	22	1	16	Ok

Figura 4-2 PEtabs_Travi_SLU - Tabelle di output

4.2 Pilastri: Petabs_Pil_SLU

Il programma Post-processore acquisisce in input i tabulati estratti da Etabs, l'utente definisce il valore del copriferro, inteso come distanza del baricentro dei ferri dal bordo della sezione, e due valori caratteristici della resistenza dei materiali: la resistenza cubica caratteristica R_{ck} del calcestruzzo e la tensione caratteristica di snervamento dell'acciaio (vd. Figura 4-3).

L'utente, inoltre, può scegliere di effettuare o escludere delle *routine* di controllo geometrico delle armature secondo tre normative: il DM 9\1\96 [1], la Circolare Ministeriale 10\4\97 [4] o la OPCM 3274\03 [6]. Il controllo riguarda il rispetto dei limiti minimo e massimo delle percentuali di armatura longitudinale presenti nella sezione, il rispetto dei copriferri e degli interferri nonché il rispetto del diametro e del passo minimi delle staffe.

Figura 4-3 P ETabs_Pil_SLU

La sezione “Suggerisci Armature” consente di definire i diametri delle armature longitudinali, distinte per reggistaffe di vertice e ferri di parete e il diametro ed il passo delle staffe che verranno utilizzate in fase di predimensionamento.

La sezione “Selezione sottoinsiemi di pilastri” consente di ridurre gli elementi su cui effettuare il predimensionamento e/o la verifica.

Al termine della fase di predimensionamento il programma crea nel *database* un'ulteriore tabella (vd. Tabella 4-2) che contiene i diametri dei ferri reggistaffe, il numero ed il diametro dei ferri sui lati x e y. Per i pilastri la descrizione della geometria della sezione è basata sull'assunto che le armature siano simmetriche sia lungo l'asse x che lungo l'asse y.

Tabella 4-2 Tabella riassuntiva della geometria dei pilastri

Story	Column	Loc	AnalysisSect	$\Phi_{Verifica}$	N° x	Φ_x	N° y	Φ_y
PIANO2	C1	0	30X30	22	2	22	2	22
PIANO2	C1	1,465	30X30	22	2	22	2	22
PIANO2	C2	0	30X40	22	2	22	2	22
PIANO2	C2	1,465	30X40	22	2	22	2	22
PIANO2	C3	0	30X30	22	2	22	2	22
PIANO2	C3	1,465	30X30	22	2	22	2	22

A questo punto è possibile avviare la procedura di verifica, al termine della quale il postprocessore riassume in una tabella (vd. Figura 4-4) i risultati dell'elaborazione riportando, per ciascuna sezione di ciascun elemento strutturale:

- la combinazione di carico analizzata dal codice Etabs;
- i relativi valori delle caratteristiche della sollecitazione di progetto;
- il minimo coefficiente di sicurezza ed il corrispondente schema di amplificazione dei carichi, accompagnato da un pedice che indica se la crisi della sezione è dovuta al raggiungimento delle deformazioni ultime del calcestruzzo o dell'acciaio;
- le caratteristiche della sollecitazione ultime della sezione;
- le deformazioni ultime dei materiali, per avere delle informazioni sintetiche sulla duttilità della sezione;
- l'esito finale della verifica.

A questa tabella ne è collegata un'altra riepilogativa in cui è possibile leggere, per ciascun elemento strutturale:

- la combinazione di carico più gravosa con i relativi moltiplicatore critico e percorso di amplificazione dei carichi;
- il numero e il diametro delle barre di armatura, secondo lo schema già descritto;
- l'esito della verifica.

Load	N	Mx	My	λ_{cis}	A_{cis}	Nu _{cis}	Mxu _{cis}	Myu _{cis}	E _{cis}	E _{fe}	Stato
COMB1	-31,15	0,1567	-0,0183	8,040	7	-249,9	0,157	-0,018	0,002113	0,00188	Ok
COMB10	-39,61	0,1232	-0,2115	5,340	7	-249,9	0,123	-0,211	0,002279	0,00170	Ok
COMB11	-6,90	0,0940	0,1926	29,154	1	-201,6	3,209	6,576	0,003600	0,00006	Ok
COMB12	-32,03	0,1567	-0,0183	8,040	7	-249,9	0,157	-0,018	0,002113	0,00188	Ok
COMB13	-22,48	0,1232	-0,2115	5,340	7	-249,9	0,123	-0,211	0,002279	0,00170	Ok
COMB14	-39,61	0,1232	-0,2115	5,340	7	-249,9	0,123	-0,211	0,002279	0,00170	Ok
COMB15	-14,89	0,0940	0,1926	29,154	1	-201,6	3,209	6,576	0,003600	0,00006	Ok
COMB16	-32,23	0,1567	-0,0183	8,040	7	-249,9	0,157	-0,018	0,002113	0,00188	Ok
COMB17	-17,88	0,1232	-0,2115	5,340	7	-249,9	0,123	-0,211	0,002279	0,00170	Ok
COMB18	-36,22	-0,0713	-0,0372	7,100	7	-249,9	-0,071	-0,037	0,002089	0,00190	Ok
COMB19	-10,30	0,2895	0,0182	20,807	1	-214,2	6,002	0,380	0,003321	0,00056	Ok
COMB2	-23,56	0,1205	-0,0152	10,621	7	-249,9	0,121	-0,015	0,002056	0,00154	Ok
COMB20	-27,63	-0,1075	-0,0340	9,054	7	-249,9	-0,108	-0,034	0,002058	0,00154	Ok
COMB3	-26,55	0,1267	-0,0110	9,426	7	-249,9	0,127	-0,011	0,002060	0,00193	Ok
COMB4	-18,96	0,0905	-0,0079	13,188	7	-249,9	0,090	-0,008	0,002020	0,00158	Ok
COMB5	-18,09	0,1602	0,1821	13,411	1	-242,5	2,149	2,442	0,003070	0,00083	Ok
COMB6	-44,21	0,1532	-0,2188	5,686	7	-249,9	0,153	-0,219	0,002301	0,00167	Ok
COMB7	-10,50	0,1240	0,1852	21,660	1	-227,4	2,598	4,013	0,003391	0,00048	Ok
COMB8	-36,62	0,1170	-0,2166	6,858	7	-249,9	0,117	-0,216	0,002278	0,00170	Ok
COMB9	-13,49	0,1302	0,1894	17,425	1	-236,1	2,268	3,300	0,003222	0,00066	Ok

λ_{016} è il minore dei coefficienti di sicurezza calcolato per una data combinazione di carico.
Esso è relativo al percorso di amplificazione A_{016} riportato

Story	Column	LoadMin	λ_{Min}	A_{Min}	FiVertice	FiNum22	FiLato22	FiNum33	FiLato33	Stato
PIANO2	C1	COMB6	5,6858	7	22	2	22	2	22	Ok

Figura 4-4 PEtabs_Pil_SLU: Tabelle di output

4.3 Controlli sui limiti normativi

Le procedure di controllo sui limiti normativi delle armature si effettuano sempre a valle della verifica. Come detto, i controlli riguardano i limiti geometrici imposti dai seguenti documenti legislativi: il DM 9\1\96 [1], la Circolare Ministeriale 10\4\97 [4] o la OPCM 3274\03 [6] con riferimento agli elementi di struttura in classe di duttilità bassa.

Nelle tabelle di *output* viene modificata solo la colonna relativa allo stato della verifica, che resta “NO” nel caso di verifica negativa (se $\lambda < 1$), “Ok” nel caso di verifiche positive (se $\lambda \geq 1$ e i controlli normativi sono tutti soddisfatti); negli altri casi vengono memorizzati uno o più dei codici di errore elencati di seguito.

Per l’armatura longitudinale delle travi possono aversi:

Normativa	Codice	Controllo
D.M. '96:	-D1:	interferro minore dei valori minimi in funzione del diametro delle barre.
	-D2:	percentuale di armatura rispetto all'area di cls $< 0,15\%$.
	-D3:	interferro maggiore del valore massimo pari a 35cm.
C.M. '97:	-C1:	percentuale di armatura al bordo inferiore $< 1,4/f_{yk}$ (f_{yk} [MPa])
	-C2:	percentuale di armatura al bordo inferiore $> 7/f_{yk}$ (f_{yk} [MPa])
	-C3:	percentuale di armatura al bordo superiore $< 1,4/f_{yk}$ (f_{yk} [MPa])
	-C4:	percentuale di armatura al bordo superiore $> 7/f_{yk}$ (f_{yk} [MPa])
	-C5:	area dell'armatura compressa (inferiore) $<$ della metà dell'area dell'armatura tesa (superiore), nelle sezioni distanti dal nodo di estremità fino a 2 volte l'altezza utile della sezione.
	-C6:	idem se l'armatura compressa è quella superiore.
	-C7:	in ciascuna sezione, l'area di armatura superiore $<$ di un quarto dell'armatura superiore massima presente all'estremità della trave.
Ord. 3274 (CD B):	-B1:	percentuale di armatura al bordo inferiore $< 1,4/f_{yk}$ (f_{yk} [MPa])
	-B2:	percentuale di armatura al bordo inferiore $> 7/f_{yk}$ (f_{yk} [MPa])
	-B3:	percentuale di armatura al bordo superiore $< 1,4/f_{yk}$ (f_{yk} [MPa])
	-B4:	percentuale di armatura al bordo superiore $> 7/f_{yk}$

(f_{yk} [MPa])

- B5: area dell'armatura compressa (inferiore) < della metà dell'area dell'armatura tesa (superiore), nelle sezioni distanti dal nodo di estremità fino a 2 volte l'altezza utile della sezione.
- B6: idem se l'armatura compressa è quella superiore.
- B7: in ciascuna sezione, l'area di armatura superiore < di un quarto dell'armatura superiore massima presente all'estremità della trave.

Per l'armatura longitudinale dei pilastri possono aversi:

Normativa	Codice	Controllo
D.M. '96:	-D1:	interferro minore dei valori minimi in funzione del diametro delle barre.
	-D2:	percentuale di armatura rispetto all'area di cls < 0,3 %.
	-D3:	percentuale di armatura rispetto all'area di cls > 6 %.
C.M. '97:	-C1:	percentuale di armatura rispetto all'area di cls < 1 %.
	-C2:	percentuale di armatura rispetto all'area di cls > 4 %.
	-C3:	interferro maggiore del valore massimo pari a 25cm.
Ord. 3274 (CD B):	-B1:	percentuale di armatura rispetto all'area di cls < 1 %.
	-B2:	percentuale di armatura rispetto all'area di cls > 4 %.
	-B3:	interferro maggiore del valore massimo pari a 25cm.

5 INVILUPPI DELLA RISPOSTA SISMICA DI MODELLI STRUTTURALI LINEARI

5.1 Introduzione

Il metodo dello spettro di risposta, usualmente adottato nell'analisi modale di modelli strutturali lineari, fornisce il valore massimo di ciascuna azione, considerata separatamente, ma non è in grado di valutare il massimo della risposta associata alla loro combinazione; peraltro, tale massimo potrebbe non dipendere dal massimo di una o più delle singole azioni di cui si intende valutare l'effetto combinato.

Un ulteriore problema associato all'uso dell'analisi modale basata sul concetto di spettro di risposta è costituito dal fatto che il massimo di ciascuna azione è definito a meno del segno in quanto esso viene valutato combinando i massimi relativi a ciascun modo attraverso una delle ben note tecniche SRSS o CQC [19]. Ciò rappresenta una seria limitazione per le verifiche a presso-flessione di sezioni in c.a. in quanto diverse combinazioni di segno, applicate ai medesimi valori dello sforzo normale e dei momenti flettenti, possono modificare in maniera radicale l'esito della verifica ed i relativi valori dei coefficienti di sicurezza. Nella letteratura tecnica non sono molti i riferimenti sul tema. Il professor E. Wilson, pur proponendo un efficace procedimento applicabile ai materiali isoresistenti [20], conclude che nelle strutture realizzate con materiali eteroresistenti la ricerca dei segni algebrici può conseguirsi solo mediante l'integrazione numerica delle equazioni del moto. Un'ulteriore proposta è quella presentata in [13], in cui per le verifiche di sezioni in c.a. si assegnano ai risultati E_x ed E_y delle due analisi dinamiche modali, i segni del modo principale di vibrazione relativo a ciascuna delle due analisi.

Indipendentemente dal modo con cui vengono calcolati i segni delle caratteristiche della sollecitazione ed eseguite le relative verifiche, resta comunque irrisolto il problema di stabilire quale sia, per il modello strutturale da analizzare, la direzione di ingresso del sisma che massimizza una determinata risposta o minimizzi

il coefficiente di sicurezza relativo ad una assegnata sezione. Poiché occorre considerare i due versi dell'azione sismica per ciascuna direzione, e dovendo applicare le forze sismiche in quattro punti diversi per tener conto delle eventuali eccentricità accidentali, risultano 32 combinazioni di carico. Alternativamente è possibile combinare con una SRSS il 100% delle risposte relative alle due direzioni ortogonali. Pertanto, fissate le direzioni del sisma in relazione al modello strutturale da esaminare, una procedura di verifica di pilastri in c.a. che sia, allo stesso tempo, razionale e rispettosa delle prescrizioni normative richiederebbe non meno di $32 \times 8 = 256$ verifiche per ciascuna sezione, essendo 8 il numero delle possibili combinazioni di segno da attribuire ai valori, associati a ciascuna delle combinazioni sismiche precedentemente descritte, dello sforzo normale e delle due coppie flettenti agenti sulla sezione. In linea di principio il numero 256 definito in precedenza è solo un minorante del numero effettivo di verifiche da eseguire, si ribadisce per una sola sezione dell'intero modello strutturale, in quanto esso si riferisce a due direzioni ortogonali di azione del sisma scelte in modo del tutto convenzionale. Infatti, sebbene la regola del 30% sia stata concepita [21] con il dichiarato intento di affrancare l'analisi di un modello strutturale dalla effettiva direzione di azione del sisma, nulla vieta di considerare coppie di direzioni ortogonali diverse da quelle usualmente assunte coincidenti, in modo del tutto convenzionale, con gli assi del riferimento in pianta del modello. Peraltro, tale necessità è particolarmente sentita per modelli strutturali irregolari e cioè proprio per quelli per i quali l'analisi modale è obbligatoria.

Una brillante soluzione ai problemi illustrati in precedenza è stata fornita in due recenti lavori di Menun e Der Kiureghian [16], [17], in cui si è dimostrato che, per un fissato orientamento degli assi principali lungo i quali le componenti del sisma sono non correlate, le risposte di un modello strutturale lineare sono inviluppate da un ellissoide. Inoltre, nel caso in cui la direzione degli assi principali sia incognita, è stata derivata in [16] l'espressione di un "iper"-inviluppo in grado di contenere l'evoluzione temporale delle risposte sismiche prese in esame qualunque sia la reale direzione di ingresso dell'azione sismica. Pertanto, la verifica può essere condotta

controllando che l'iper-inviluppo sia tutto contenuto nel dominio di capacità della sezione.

5.2 Alcuni metodi approssimati di verifica

5.2.1 Inviluppo rettangolare

La costruzione dell'inviluppo rettangolare consiste nell'assegnare alla terna $N-M2-M3$, costituita dallo sforzo normale e dalle due coppie flettenti, tutte le possibili combinazioni di segno in modo da ottenere otto punti nello spazio, cfr Figura 5-1. Essi sono disposti secondo i vertici di un parallelepipedo il cui centro è il vettore della sollecitazione s_d da carichi statici e le cui facce hanno ordinate pari ai valori massimi e minimi di una assegnata sollecitazione ottenuta con l'analisi modale.

In particolare, il vettore s_d si riferisce ai valori delle caratteristiche agenti sulla sezione in esame derivanti da un'analisi statica associata alla somma dei carichi fissi, agenti per intero, e dell'aliquota dei carichi accidentali prescritta dalle normative sismiche [7]; negli esempi numerici illustrati nel seguito tale aliquota è stata fissata pari al 30%. Viceversa, i valori massimi delle sollecitazioni sono quelli ottenuti da un'analisi modale; tali valori sono positivi poiché essi sono ricavati tramite una CQC, sicché combinando opportunamente i segni di ciascuno di essi e combinandoli con i valori di s_d , si ottengono tutti i vertici del parallelepipedo.

Naturalmente, tali valori si riferiscono ad una prefissata regola di combinazione tra le risposte relative a due direzioni ortogonali, sia essa quella del 30% o la SRSS. In definitiva, si può ritenere che la sollecitazione sismica reale sia contenuta all'interno del parallelepipedo individuato in precedenza sicché, in virtù della convessità del dominio di capacità della sezione, è sufficiente verificare che i vertici del parallelepipedo siano interni al dominio.

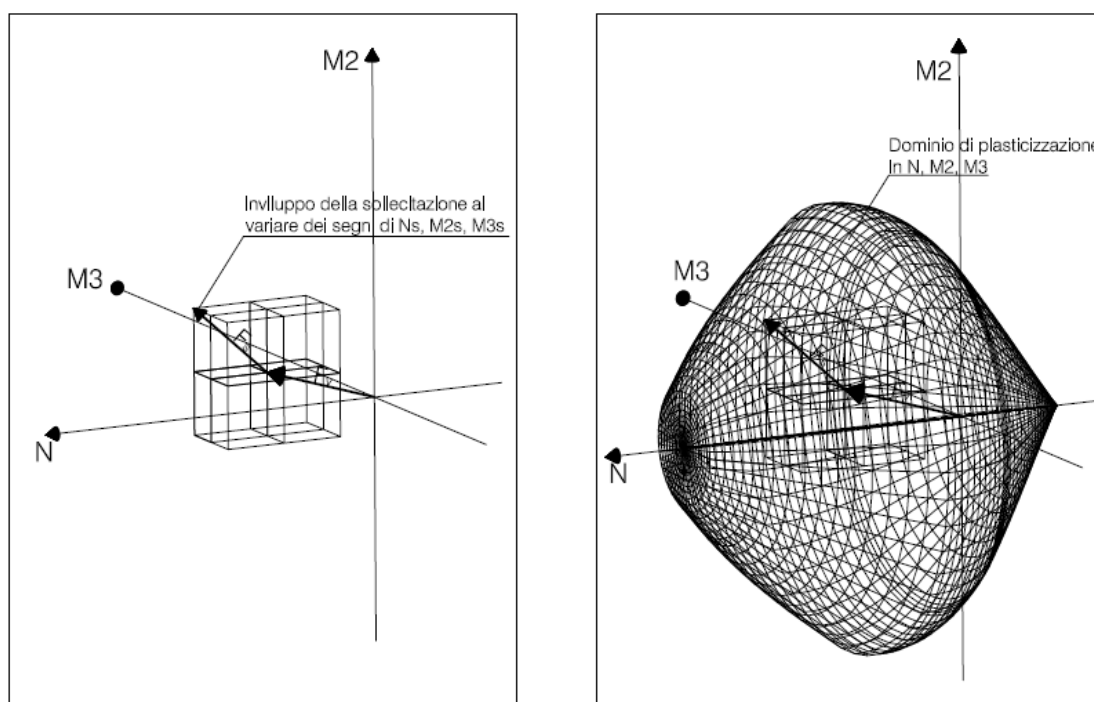


Figura 5-1 Inviluppo Rettangolare

5.3 Inviluppo dei vettori di risposta sismica

Il metodo dello spettro di risposta è comunemente utilizzato nell'analisi modale di modelli strutturali, soggetti ad azione sismica, per stimare il massimo valore di ciascuna risposta, considerata separatamente, ma non è in grado di valutare il massimo della risposta associata alla loro combinazione.

Il metodo dello spettro di risposta può essere agevolmente usato per l'analisi di elementi strutturali che sono controllati dal valore massimo di una singola risposta, ad esempio le travi il cui comportamento dipende, in genere, dal valore massimo del solo momento flettente. Per elementi nei quali bisogna considerare la simultaneità delle azioni, quali i pilastri soggetti a sforzo normale ed a momento flettente, la combinazione critica non coincide con il massimo valore delle singole azioni. In questi casi occorre considerare un inviluppo che contenga l'evoluzione del vettore delle risposte sismiche nel tempo. Tale inviluppo può essere sovrapposto al dominio

di capacità della sezione per determinare la combinazione critica delle caratteristiche. C. Menun e A. Der Kiureghian hanno sviluppato una procedura [16][17], basata sullo spettro di risposta, per ottenere l'involuppo che contiene il vettore dell'azione sismica.

Nel caso in cui le direzioni principali, lungo la quali le componenti del sisma sono non correlate, sono note, l'involuppo ha una forma ellittica. Dato che in generale le direzioni principali dell'azione sismica non sono note in partenza, si è sviluppato un involucpo che tenesse conto dell'incertezza sull'orientazione di queste direzioni. Tale involucpo, detto iper-involuppo, in generale non è di forma ellittica ed è ottenuto dall'unione degli involuppi ellittici, ottenuti, a loro volta, per tutte le orientazioni delle direzioni principali.

5.3.1 Nozioni preliminari

Si consideri una struttura lineare, avente N gradi di libertà, il classico smorzamento strutturale ed n modi significativi con $n \leq N$. Si prenda un vettore di risposta ad m componenti variabili nel tempo $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)]^T$, in cui ogni componente di risposta $x_r(t)$, $r = 1, 2, \dots, m$ è espresso da una funzione lineare degli spostamenti nodali della struttura, $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)]^T$. Quindi si può scrivere:

$$x_r(t) = \mathbf{q}_r^T \mathbf{u}(t)$$

Equazione 5-1

dove gli N vettori \mathbf{q}_r , sono funzione delle tensioni e della geometria indeformata della struttura.

Per descrivere gli m vettori di risposta, si introduce una matrice $N \times m$ $\mathbf{Q} = [q_1, q_2, \dots, q_m]$, così che

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}^T \mathbf{u}(t)$$

Equazione 5-2

Quando la struttura è soggetta ad una sola componente del sisma, gli spostamenti nodali possono essere ottenuti per sovrapposizione degli effetti:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{\Phi}_i \gamma_i s_i(t)$$

Equazione 5-3

dove $\mathbf{\Phi}_i$ è l'i-esima forma modale, γ_i è l'i-esimo coefficiente di partecipazione modale e $s_i(t)$ è lo spostamento di risposta relativo ad un oscillatore semplice che ha la frequenza e lo smorzamento del modo i-esimo. Combinando l'Equazione 5-1 e l'Equazione 5-3, ogni componente può essere espressa come:

$$x_r(t) = \mathbf{q}_r^T \sum_{i=1}^n \mathbf{\Phi}_i \gamma_i s_i(t)$$

Equazione 5-4

Più in generale, quando la struttura è soggetta a tre componenti di traslazione di moto sismico, l'Equazione 5-3 e l'Equazione 5-4 diventano:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^n \mathbf{\Phi}_i \gamma_{ki} s_{ki}(t)$$

Equazione 5-5

$$x_r(t) = \mathbf{q}_r^T \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^n \mathbf{\Phi}_i \gamma_{ki} s_{ki}(t)$$

Equazione 5-6

dove γ_{ki} è il coefficiente di partecipazione modale associato all'*input* in direzione k; e s_{ki} è la risposta del corrispondente oscillatore.

Il valore massimo $X_r = \max[x_r(t)]$ di una singola componente di risposta $x_r(t)$, ottenuto da una singola componente del moto sismico, può essere stimato con

il metodo dello spettro di risposta usando la regola della combinazione modale:

$$X_r^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{q}_r^T \boldsymbol{\Phi}_i \gamma_i) (\mathbf{q}_r^T \boldsymbol{\Phi}_j \gamma_j) \rho_{ij} S_i S_j$$

Equazione 5-7

nella quale $S_i = \max[s_i(t)]$ è l'ordinata massima dello spettro di risposta in spostamento corrispondente al modo i-esimo; ρ_{ij} è il coefficiente di correlazione fra le risposte di due modi i e j. Si deve notare che lo spettro di risposta è attualmente definito come $S_i = \max|s_i(t)|$. Il coefficiente di correlazione modale ρ_{ij} nell'Equazione 5-7 dipende dalla regola di combinazione modale, usata per l'analisi. In questo caso si è utilizzata la regola della combinazione quadratica completa, per la quale ρ_{ij} è funzione delle frequenze e dei coefficienti di smorzamento dei modi i e j. Si deve sottolineare, però, che il metodo dell'involuppo di rottura, proposto da Menun e Der Kiureghian, non dipende dallo specifico coefficiente di correlazione usato. Inoltre, si deve tener presente che lo spettro di risposta ha una base statistica e che il suddetto valore di X_r deve essere interpretato come valore atteso della risposta massima. Inoltre, si osserva una piccola differenza fra il valore stimato di X_r ed il suo valore massimo reale, ottenuto applicando la reale eccitazione sismica.

Per il caso più generale, in cui agiscono contemporaneamente due componenti orizzontali ed una verticale del moto sismico, la risposta massima $X_r = \max[x_r(t)]$ stimata con lo spettro di risposta è:

$$X_r^2 = \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{q}_r^T \boldsymbol{\Phi}_i \gamma_{ki}) (\mathbf{q}_r^T \boldsymbol{\Phi}_j \gamma_{kj}) \rho_{ij} S_{ki} S_{kj}$$

Equazione 5-8

dove $S_{ki} = \max[s_{ki}(t)]$.

Quest'espressione si applica quando le direzioni principali, lungo cui le

componenti del moto sismico non sono correlate², coincidono con gli assi della struttura. Più in generale, quando le direzioni del moto sismico formano un angolo antiorario θ con gli assi della struttura nel piano orizzontale, l'espressione prende la seguente forma:

$$X_r^2 = \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{q}_r^T \Phi_i \gamma_{ki}) (\mathbf{q}_r^T \Phi_j \gamma_{kj}) \rho_{ij} S_{ki} S_{kj} - \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-1)^{k+l} (\mathbf{q}_r^T \Phi_i \gamma_{li}) (\mathbf{q}_r^T \Phi_j \gamma_{lj}) \rho_{ij} S_{ki} S_{kj} \sin^2 \theta$$

$$- \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-1)^k (\mathbf{q}_r^T \Phi_i) (\mathbf{q}_r^T \Phi_j) (\gamma_{1i} \gamma_{2j} + \gamma_{2i} \gamma_{1j}) \rho_{ij} S_{ki} S_{kj} \sin \theta \cos \theta$$

Equazione 5-9

in cui i fattori di partecipazione sono definiti rispetto agli assi della struttura, e le ordinate dello spettro di risposta sono quelle associate alle direzioni principali del moto sismico.

L'espressione per la singola componente del moto sismico si può ottenere come caso particolare dell'Equazione 5-9, ponendo $\theta = 0$ e $S_{2i} = S_{3i} = 0$ per tutti i modi. Per uno specifico valore di θ , $\pm X_r$ può essere interpretato come un inviluppo limite di $x_r(t)$, che evolve nel tempo.

Il valore massimo della singola componente di risposta può essere usato per definire un dominio rettangolare nello spazio ad m dimensioni delle risposte, che inviluppa il vettore delle risposte $\mathbf{x}(t)$. Questo inviluppo, comunque, è ovviamente conservativo poiché le singole risposte massime non si attingono nello stesso istante. Quando θ è noto, l'inviluppo, ottenuto con le formule precedenti, è un ellissoide nello spazio ad m dimensioni delle risposte, inscritto in questo inviluppo

² L'eccitazione sismica può essere sempre scomposta in sei componenti: tre traslazioni ortogonali e tre rotazioni. Nel processo stocastico degli spostamenti del terreno è possibile calcolare tre coefficienti di correlazione: R_{xy} , R_{yz} e R_{xz} , che indicano il legame statistico tra le tre traslazioni del terreno. Dato un terremoto fisso: se si considerano due terne di riferimento (xyz e abc) ruotate in maniera qualsiasi, le tre componenti sismiche cambiano così come i coefficienti di correlazione. E' possibile individuare una terna tale che i coefficienti sono nulli e, quindi, le componenti del moto sismico sono non correlate tra loro.

rettangolare. Per le seguenti deduzioni dell'involuppo ellittico conviene riscrivere la Equazione 5-9 in forma matriciale.

Si definiscono delle matrici diagonali $n \times n$: $\mathbf{S}_k = \text{diag}[S_{ki}]$, $\mathbf{\Gamma}_k = \text{diag}[\gamma_{ki}]$ con $k = 1, 2, 3$; la matrice di correlazione $\mathbf{R} = [\rho_{ij}]$, ed una matrice dei modi di vibrazione $N \times m$ $\mathbf{\Phi} = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n]$. Quindi l'Equazione 5-9 si può riscrivere nella seguente forma:

$$X_r^2 = \mathbf{q}_r^T \mathbf{\Phi} \left[\sum_{k=1}^3 (\mathbf{\Gamma}_k \mathbf{S}_k \mathbf{R} \mathbf{S}_k^T \mathbf{\Gamma}_k^T) - \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 (-1)^{k+l} (\mathbf{\Gamma}_l \mathbf{S}_l \mathbf{R} \mathbf{S}_k^T \mathbf{\Gamma}_l^T) \sin^2 \theta - \sum_{k=1}^2 (-1)^k (\mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{S}_k \mathbf{R} \mathbf{S}_k^T \mathbf{\Gamma}_2^T + \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{S}_k \mathbf{R} \mathbf{S}_k^T \mathbf{\Gamma}_1^T) \sin \theta \cos \theta \right] \mathbf{\Phi}^T \mathbf{q}_r$$

Equazione 5-10

$$X_r^2 = \mathbf{q}_r^T (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 \sin^2 \theta + \mathbf{Z}_3 \sin \theta \cos \theta) \mathbf{q}_r$$

Equazione 5-11

$$X_r^2 = \mathbf{q}_r^T \mathbf{Z} \mathbf{q}_r$$

Equazione 5-12

dove

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{\Phi} \left[\sum_{k=1}^3 (\mathbf{\Gamma}_k \mathbf{S}_k \mathbf{R} \mathbf{S}_k^T \mathbf{\Gamma}_k^T) \right] \mathbf{\Phi}^T$$

Equazione 5-13

$$\mathbf{Z}_2 = \mathbf{\Phi} \left[\sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 (-1)^{k+l} (\mathbf{\Gamma}_l \mathbf{S}_k \mathbf{R} \mathbf{S}_k^T \mathbf{\Gamma}_l^T) \right] \mathbf{\Phi}^T$$

Equazione 5-14

$$\mathbf{Z}_3 = \mathbf{\Phi} \left[\sum_{k=1}^2 (-1)^k (\mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{S}_k \mathbf{R} \mathbf{S}_k^T \mathbf{\Gamma}_2^T + \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{S}_k \mathbf{R} \mathbf{S}_k^T \mathbf{\Gamma}_1^T) \right] \mathbf{\Phi}^T$$

Equazione 5-15

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 \sin^2 \theta + \mathbf{Z}_3 \sin \theta \cos \theta$$

Equazione 5-16

Si può facilmente verificare che \mathbf{Z} è una matrice simmetrica $N \times N$.

Per una data struttura, un dato insieme di spettri di risposta e per direzioni principali note del moto sismico, \mathbf{Z} è nota ed è identica per tutte le quantità di risposta. Inoltre, poiché $X_r^2 > 0$, \mathbf{Z} è una matrice definita positiva.

Nel seguito, si fa uso di termini incrociati per due quantità di risposta $x_r(t)$ e $x_s(t)$, che si definiscono come:

$$X_{rs} = \mathbf{q}_r^T \mathbf{Z} \mathbf{q}_s$$

Equazione 5-17

Raccogliendo l'Equazione 5-18 per tutte le coppie di risposte, si definisce una matrice di risposta $m \times m$.

$$\mathbf{X} = \mathbf{Q}^T \mathbf{Z} \mathbf{Q}$$

Equazione 5-18

Gli elementi della diagonale principale della matrice \mathbf{X} sono i valori massimi elevati al quadrato delle singole quantità di risposta ($X_{rr} = X_r^2$, $r = 1, 2, \dots, m$). Si noti che queste quantità sono esattamente quelle che si sono calcolate con il metodo dello spettro di risposta. Gli elementi fuori diagonale $X_{rs} = \mathbf{q}_r^T \mathbf{Z} \mathbf{q}_s$, $r \neq s$, sono collegati alla covarianza fra le risposte $x_r(t)$ e $x_s(t)$. Il segno algebrico di X_{rs} indica se le risposte $x_r(t)$ e $x_s(t)$ sono correlate positivamente o negativamente. Se $x_r(t)$ e $x_s(t)$ non sono correlate $X_{rs} = 0$; mentre, se $x_r(t)$ è proporzionale $x_s(t)$, le due risposte sono perfettamente correlate e $X_{rs} = |X_r X_s|$. Dato che, in generale, \mathbf{Z} è simmetrica e definita positiva, anche \mathbf{X} è simmetrica e simidefinita positiva. Inoltre,

\mathbf{X} è singolare solo quando in \mathbf{Q} ci sono colonne linearmente dipendenti (quando una o più delle risposte considerate sono funzioni lineari di altre risposte). Nelle seguenti deduzioni si assume che tale dipendenza fra due componenti di risposta non ci sia.

5.3.2 Involuppo ellittico

Si consideri il caso in cui l'orientazione delle direzioni principali della azione sismica θ è nota. Per ottenere un involucro del vettore di risposta, basato sul metodo dello spettro di risposta, si considera una funzione $\mathbf{x}(t)$ del tempo. Si considera la proiezione di $\mathbf{x}(t)$ su un vettore unitario \mathbf{a} in uno spazio ad m dimensioni:

$$x_{\alpha}(t) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}(t)$$

Equazione 5-19

Quando l' r -esimo elemento di \mathbf{a} è preso unitario con tutti gli altri elementi uguali a zero, si ottiene $x_{\alpha}(t) = x_r(t)$. Per un arbitrario vettore unitario \mathbf{a} , $x_{\alpha}(t)$ è combinazione lineare degli elementi del vettore di risposta $\mathbf{x}(t)$ e, perciò, degli spostamenti nodali. Sostituendo l'Equazione 5-2 nell'Equazione 5-19, si ottiene:

$$x_{\alpha}(t) = \mathbf{a}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{u}(t) = \mathbf{q}_{\alpha}^T \mathbf{u}(t)$$

Equazione 5-20

dove $\mathbf{q}_{\alpha}^T = \mathbf{a}^T \mathbf{Q}^T$ è un vettore di N costanti, che sono funzioni delle tensioni, della geometria indeformata della struttura e della specifica direzione \mathbf{a} nello spazio delle risposte. Confrontando l'Equazione 5-1 e l'Equazione 5-20, appare evidente che il metodo dello spettro di risposta può essere usato per stimare $X_{\alpha} = \max[x_{\alpha}(t)]$, valore massimo della proiezione del vettore di risposta lungo la direzione specificata

da α . Da qui, usando l'Equazione 5-12 con $r = s = \alpha$ e l'Equazione 5-18, si può scrivere:

$$X_{\alpha}^2 = \mathbf{q}_{\alpha}^T \mathbf{Z} \mathbf{q}_{\alpha} = \alpha^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Z} \mathbf{Q} \alpha = \alpha^T \mathbf{X} \alpha$$

Equazione 5-21

Si consideri ora il vettore unitario lungo l'asse di risposta in direzione 1 ($\alpha = [1, 0, 0, \dots, 0]^T$). L'Equazione 5-21 restituisce X_1 , che stabilisce il limite $x_1(t) \leq X_1$. Un limite simile $-X_1 \leq x_1(t)$ si ottiene considerando la direzione $\alpha = [-1, 0, 0, \dots, 0]^T$. Questi limiti definiscono due iperpiani, che sono perpendicolari all'asse x_1 e si trovano ad una distanza $\pm X_1$ dall'origine.

In seguito, considerando $\alpha = [0, 1, 0, \dots, 0]^T$ (vettore unitario lungo l'asse di risposta in direzione 2), usando l'Equazione 5-21, si ottengono altri due limiti della seconda quantità di risposta $-X_2 \leq x_2(t) \leq X_2$, che definiscono ancora due iperpiani perpendicolari all'asse x_2 .

Continuando questo processo per i rimanenti assi di riferimento, si ottengono m coppie parallele di iperpiani normali agli assi. L'intersezione dei domini fra ogni coppia di piani paralleli definisce un dominio rettangolare ad m dimensioni, che involupa il vettore della risposta. La Figura 5-2 mostra la rappresentazione di questo dominio rettangolare nello spazio 2D delle risposte x_1 e x_2 . Quest'involuppo rettangolare è quello generalmente usato per la verifica di elementi strutturali.

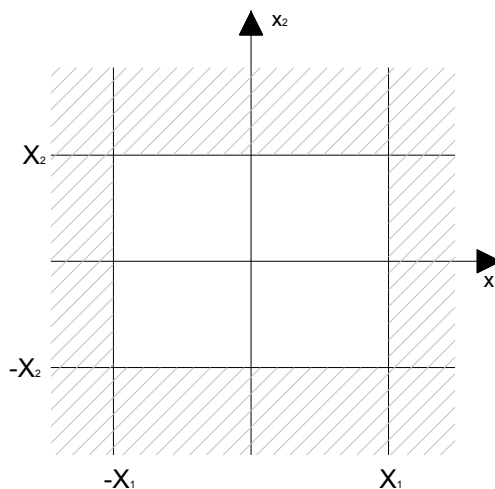


Figura 5-2

Si consideri ora un arbitrario vettore α che non è allineato con nessun asse di risposta. La proiezione del vettore di risposta lungo questa direzione è limitata da $x_\alpha(t) \leq X_\alpha$, con X_α dato dall'Equazione 5-21. Questo limite definisce un iperpiano che è perpendicolare ad α e si trova ad una distanza X_α dall'origine dello spazio di risposta. Sicuramente il vettore di risposta dovrebbe essere contenuto nel simispazio $\alpha^T \mathbf{x} \leq X_\alpha$, limitato da questo iperpiano e dal dominio rettangolare prima definito. Quest'intersezione è mostrata in Figura 5-3 nello spazio 2D delle risposte x_1 e x_2 .

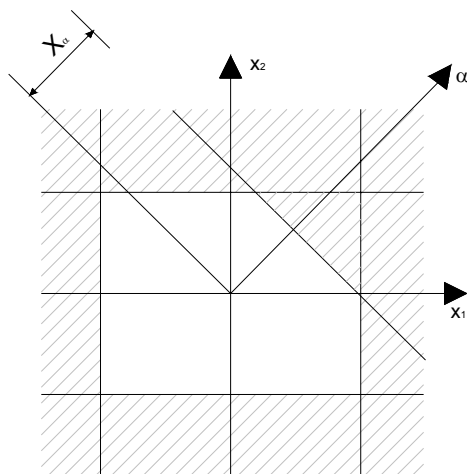


Figura 5-3

Questa procedura può essere ripetuta per altre direzioni α , in modo da costruire gradualmente l'involuppo. La Figura 5-4 mostra l'involuppo risultante nel piano x_1 e x_2 .

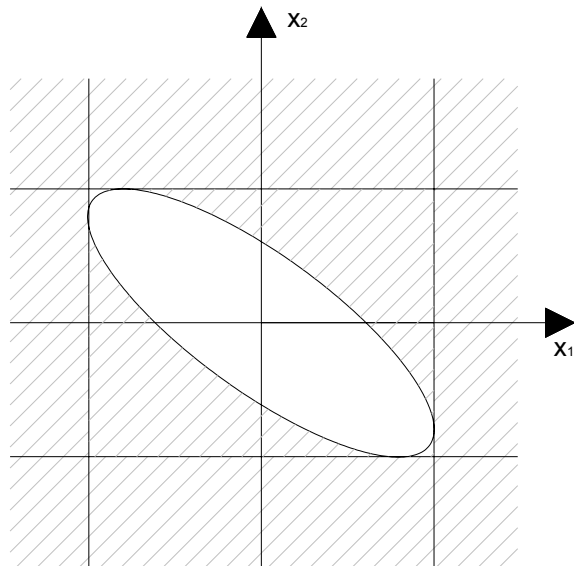


Figura 5-4

Di seguito si dimostra che questo inviluppo è un ellissoide e che è completamente definito dalla matrice di risposta \mathbf{X} .

Si consideri l'iperpiano limite definito dal vettore unitario normale α e dalla distanza X_α dall'origine dello spazio di risposta, ed un vettore unitario β , che forma un angolo acuto γ con α . Si indichi con $r_\beta(\alpha)$ la distanza dall'origine all'iperpiano in direzione β e con R_β la distanza dall'origine all'inviluppo nella stessa direzione. La Figura 5-5 mostra queste distanze nel piano definito dai vettori α e β .

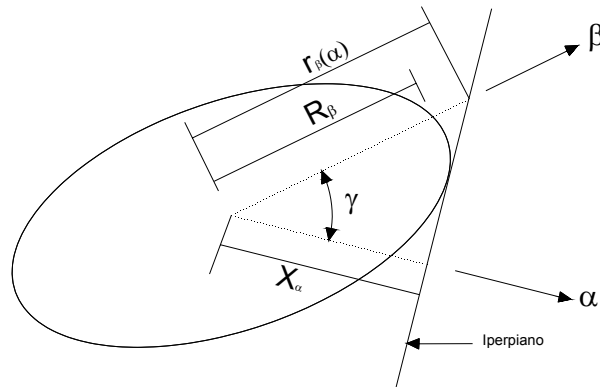


Figura 5-5

Si può quindi scrivere:

$$r_\beta(\alpha) = \frac{X_\alpha}{\cos \gamma} = \frac{(\alpha^T \mathbf{X} \alpha)^{1/2}}{\beta^T \alpha}$$

Equazione 5-22

Per un dato β la distanza dall'inviluppo R_β è il minimo di $r_\beta(\alpha)$ rispetto ad α . Usando questa proprietà, si può scrivere:

$$R_\beta = (\beta^T \mathbf{X}^{-1} \beta)^{1/2}$$

Equazione 5-23

Quest'equazione definisce un ellissoide nel sistema di coordinate polari. Essa può essere utilizzata per determinare la distanza R_β dall'origine dello spazio di risposta all'involuppo nella stessa direzione, in una direzione specificata dal vettore unitario β . Un'espressione più conveniente per sviluppare l'involuppo ellittico è la seguente: si consideri la Figura 5-6 che mostra la direzione α che minimizza $r_\beta(\alpha)$.

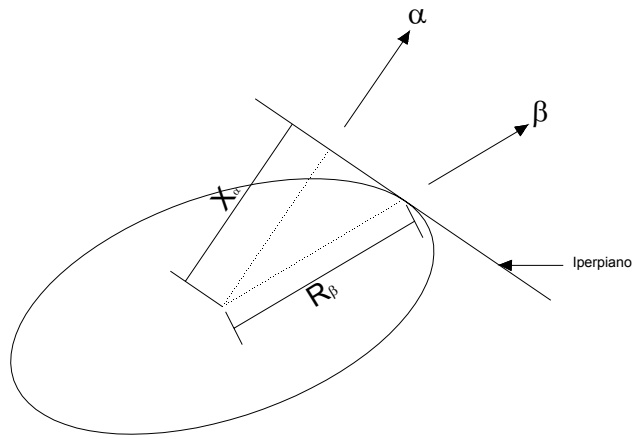


Figura 5-6

Si consideri altresì l'orientazione di α che minimizza $r_\beta(\alpha)$. È chiaro che il punto $\mathbf{x} = R_\beta \beta$, che si trova sull'involuppo, soddisfa la relazione $\alpha^T \mathbf{x} = \mathbf{X} \alpha$. Usando la Equazione 5-23, si ha:

$$\alpha^T \mathbf{x} = (\alpha^T \mathbf{X} \alpha)^{1/2} = \frac{(\alpha^T \mathbf{X} \alpha)}{(\alpha^T \mathbf{X} \alpha)^{1/2}}$$

Equazione 5-24

Poiché α è arbitrario, si ha:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{X} \alpha}{(\alpha^T \mathbf{X} \alpha)^{1/2}}$$

Equazione 5-25

Quest'espressione fornisce la coordinate cartesiane di un punto dell'involuppo corrispondente ad un dato vettore \mathbf{a} . Si noti che l'espressione non richiede l'inversione di \mathbf{X} . Inoltre, il vettore \mathbf{a} non deve avere per forza lunghezza unitaria. Queste proprietà sono utili quando si calcola l'involuppo per applicazioni di progetto.

Si analizzano ora le proprietà della matrice \mathbf{X} , che sono utili per capire la geometria dell'involuppo definito dall'Equazione 5-25. In primo luogo, si riscrive la Equazione 5-25, elevando al quadrato entrambi i membri dell'espressione e moltiplicandoli per $\mathbf{\beta}^T \mathbf{X}^{-1} \mathbf{\beta}$, si ottiene:

$$(\mathbf{R}_\beta \mathbf{\beta})^T \mathbf{X}^{-1} (\mathbf{R}_\beta \mathbf{\beta}) = 1$$

Equazione 5-26

Come prima detto, il punto $\mathbf{x} = \mathbf{R}_\beta \mathbf{\beta}$ si trova sull'involuppo in direzione $\mathbf{\beta}$ dall'origine. Da qui in poi, l'involuppo è definito come luogo dei punti \mathbf{x} nello spazio di risposta che soddisfa la seguente relazione:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{X}^{-1} \mathbf{x} = 1$$

Equazione 5-27

Poiché \mathbf{X} è simmetrica e a valori reali, l'Equazione 5-27 si può scrivere:

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Psi} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Psi}^{-1}$$

Equazione 5-28

dove $\mathbf{\Lambda}$ è una matrice diagonale $m \times m$, i cui elementi $\Lambda_{rr} = \lambda_r^2, r = 1, 2, \dots, m$ sono gli autovalori di \mathbf{X} ; e $\mathbf{\Psi}$ è una matrice ortogonale $m \times m$, la cui r -esima riga contiene gli autovettori associati all'autovalore λ_r^2 . Le colonne di $\mathbf{\Psi}$ formano una base nello spazio di risposta, che può essere adottato come sistema di riferimento dello spazio. Questi assi di riferimento vengono chiamati $x'_r, r = 1, 2, \dots, m$ e si noti che essi sono ruotati rispetto al sistema di riferimento $x_r, r = 1, 2, \dots, m$. I punti \mathbf{x}

nello spazio di risposta possono essere riportati nel sistema di riferimento ruotato attraverso la seguente trasformazione:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{x}$$

Equazione 5-29

Sostituendo l'Equazione 5-28 nell'Equazione 5-27 e facendo uso dell'Equazione 5-29 e dell'identità $\mathbf{\Psi}^{-1} = \mathbf{\Psi}^T$, si ottiene:

$$(\mathbf{x}')^T \mathbf{\Lambda} (\mathbf{x}') = 1$$

Equazione 5-30

L'Equazione 5-30 definisce l'inviluppo in un sistema di riferimento formato dalle colonne di $\mathbf{\Psi}$. Sviluppando l'Equazione 5-30, si vede l'inviluppo è il luogo dei punti nello spazio di risposta che soddisfa la seguente relazione:

$$\frac{(x'_1)^2}{\lambda_1^2} + \frac{(x'_2)^2}{\lambda_2^2} + \dots + \frac{(x'_m)^2}{\lambda_m^2} = 1$$

Equazione 5-31

Dalla precedente equazione risulta chiaro che l'inviluppo è un ellissoide, come si annunciava prima. In più, gli assi principali dell'ellissoide coincidono con il sistema di riferimento definito dalle colonne di $\mathbf{\Psi}$, che sono state identificate come gli autovettori di \mathbf{X} ; da ciò si evince che gli autovettori di \mathbf{X} sono gli assi principali dell'inviluppo. Inoltre, la lunghezza dell'r-esimo semiasse è λ_r , che è la radice quadrata dell'r-esimo autovalore di \mathbf{X} .

5.3.3 Iper-inviluppo

È evidente dall'Equazione 5-16 e dall'Equazione 5-20 che la grandezza e l'orientazione dell'inviluppo ellittico sono funzione dell'orientazione degli assi principali del moto sismico θ . Nelle precedenti deduzioni si è assunto che θ fosse noto. Normalmente, invece, questa informazione non è disponibile in fase di progetto di una struttura. In alcuni casi, è prudente considerare tutti i possibili valori che θ può assumere; cioè, l'inviluppo utilizzato per il progetto dovrebbe contenere tutti gli inviluppi ellittici ottenuti per $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Per una data direzione α nello spazio di risposta e una data orientazione θ degli assi principali del moto sismico, la distanza X_α dell'iperpiano definito da α che limita l'inviluppo ellittico è data dall'Equazione 5-21. Usando l'Equazione 5-16 e le identità trigonometriche $\sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)/2$ e $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$, l'Equazione 5-21 può essere riscritta nel seguente modo:

$$X_\alpha^2 = \alpha^T \mathbf{Q}^T \left[\left(\mathbf{Z}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{Z}_2 \right) - \frac{1}{2} \mathbf{Z}_2 \cos 2\theta + \frac{1}{2} \mathbf{Z}_3 \sin 2\theta \right] \mathbf{Q} \alpha$$

Equazione 5-32

Per un dato valore di α , il valore di θ che massimizza X_α si trova risolvendo la seguente relazione:

$$\frac{dX_\alpha^2}{d\theta^2} = \alpha^T \mathbf{Q}^T [\mathbf{Z}_2 \sin 2\theta + \mathbf{Z}_3 \cos 2\theta] \mathbf{Q} \alpha = 0$$

Equazione 5-33

quindi:

$$\frac{dX_\alpha^2}{d\theta^2} = \alpha^T \mathbf{Q}^T [2\mathbf{Z}_2 \cos 2\theta - 2\mathbf{Z}_3 \sin 2\theta] \mathbf{Q} \alpha < 0$$

Equazione 5-34

Il risultato è:

$$\cos 2\theta = -\frac{\mathbf{a}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Z}_2 \mathbf{Q} \mathbf{a}}{H}$$

Equazione 5-35

$$\sin 2\theta = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Z}_3 \mathbf{Q} \mathbf{a}}{H}$$

Equazione 5-36

dove:

$$H = \left[\left(\mathbf{a}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Z}_2 \mathbf{Q} \mathbf{a} \right)^2 + \left(\mathbf{a}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Z}_3 \mathbf{Q} \mathbf{a} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Equazione 5-37

Sostituendo l'Equazione 5-35 e l'Equazione 5-36 nell'Equazione 5-32, si ottiene:

$$X_{\alpha}^2 = \mathbf{a}^T \mathbf{Q}^T \left[\left(\mathbf{Z}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{Z}_2 \right) - \frac{1}{2} \mathbf{Z}_2 \left(-\frac{\mathbf{a}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Z}_2 \mathbf{Q} \mathbf{a}}{H} \right) + \frac{1}{2} \mathbf{Z}_3 \left(\frac{\mathbf{a}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Z}_3 \mathbf{Q} \mathbf{a}}{H} \right) \right] \mathbf{Q} \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \mathbf{X}_s \mathbf{a}$$

Equazione 5-38

dove:

$$\mathbf{X}_s = \mathbf{Q}^T \left[\left(\mathbf{Z}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{Z}_2 \right) - \frac{1}{2} \mathbf{Z}_2 \left(-\frac{\mathbf{a}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Z}_2 \mathbf{Q} \mathbf{a}}{H} \right) + \frac{1}{2} \mathbf{Z}_3 \left(\frac{\mathbf{a}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Z}_3 \mathbf{Q} \mathbf{a}}{H} \right) \right] \mathbf{Q}$$

Equazione 5-39

L'Equazione 5-38 minimizza la distanza dell'iperpiano tangente all'iper-inviluppo con \mathbf{a} come vettore unitario normale. Quest'espressione è analoga all'Equazione 5-21, ottenuta prima per l'inviluppo ellittico. Comunque, la matrice \mathbf{X}_s dipende da \mathbf{a} , e, in conclusione, l'iper-inviluppo non è un ellissoide. In maniera

simile alla derivazione che ha condotto all'Equazione 5-25, si può dimostrare che il punto \mathbf{x} dell'iper-inviluppo soddisfa la seguente relazione:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{X}_s \boldsymbol{\alpha}}{(\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{X}_s \boldsymbol{\alpha})^{1/2}}$$

Equazione 5-40

Si può utilizzare questa relazione per calcolare i punti dell'iper-inviluppo al variare di $\boldsymbol{\alpha}$. Ognuno di questi punti corrisponde ad un valore di θ che può essere calcolato in termini di $\boldsymbol{\alpha}$, mediante l'Equazione 5-35 oppure l'Equazione 5-36.

5.3.4 Contributo delle forze statiche

Nelle precedenti deduzioni dell'inviluppo ellittico e dell'iper-inviluppo sono state considerate solo le risposte, variabili nel tempo, derivanti dall'eccitazione sismica. In generale, sono presenti anche carichi statici che generano componenti non variabili nel tempo $\mathbf{x}_0 = [x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0m}]^T$ e che agiscono simultaneamente con $\mathbf{x}(t)$. Dato che la struttura è lineare, $\mathbf{x}(t)$ e \mathbf{x}_0 possono essere sommate per produrre un vettore di risposta totale, che varia nel tempo dal punto \mathbf{x}_0 dello spazio di risposta. La grandezza e l'orientazione di due inviluppi non sono affetti dalla presenza di queste risposte statiche. Il centro di ogni inviluppo è semplicemente traslato dell'origine dello spazio di risposta al punto \mathbf{x}_0 . Modificando l'Equazione 5-27 con questa traslazione, si può definire matematicamente l'inviluppo ellittico come il luogo dei punti dello spazio di risposta che soddisfa la seguente relazione:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{X}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 1$$

Equazione 5-41

Comunque, per l'uso con il dominio di capacità riferito alle azioni comunemente analizzate in pratica (momento – sforzo normale, per il progetto delle colonne), è più conveniente utilizzare l'Equazione 5-25 per calcolare l'involuppo che contiene $\mathbf{x}(t)$ e sovrapporlo al dominio di capacità, così che sia centrato su \mathbf{x}_0 . Matematicamente, l'Equazione 5-25 diventa:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{X}\mathbf{a}}{(\mathbf{a}^T \mathbf{X}\mathbf{a})^{1/2}} + \mathbf{x}_0$$

Equazione 5-42

La stessa procedura è applicabile all'iper-involuppo, modificando l'Equazione 5-40 così che:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{X}_s \mathbf{a}}{(\mathbf{a}^T \mathbf{X}_s \mathbf{a})^{1/2}} + \mathbf{x}_0$$

Equazione 5-43

L'adeguatezza della struttura può essere allora determinata comparando questi involuppi di domanda con le curve di capacità.

5.4 Analisi comparativa delle procedure di ricombinazione dei segni delle azioni sismiche

Al fine di eseguire un'analisi comparativa sulle procedure di combinazione dei segni delle sollecitazioni sismiche, calcolate a valle di un'analisi dinamica, sono state implementate delle procedure automatiche che eseguono la ricombinazione secondo le seguenti procedure:

- Iper-inviluppo di Menun e Der Kiureghian: determina il minimo moltiplicatore critico λ valutando la distanza minima tra la superficie limite della sezione e la superficie dell'iper-inviluppo descritto dall'Equazione 5-39. Tale superficie si ottiene per discretizzazione dei punti che soddisfano l'Equazione 5-43.
- Iper-inviluppo di Menun e Der Kiureghian Minimizzato: la determinazione di λ è analoga al caso precedente, ma invece di costruire per punti le due superfici (operazione molto onerosa in termini di tempo), si utilizza un metodo iterativo presentato in [14]. Tale procedura si basa sulla proprietà che la coppia di punti, uno appartenente all'iper-inviluppo e l'altro alla superficie limite, in corrispondenza dei quali si ha la minima o la massima distanza, risultano parallele la normale alla superficie limite e la direzione α associata al vettore individuato dal punto appartenente all'iper-inviluppo (vd. Figura 5-7).
- Inviluppo Rettangolare combinato con SRSS: considera un inviluppo rettangolare, assegnando tutte le possibili combinazioni di segno alle sollecitazioni sismiche, dopo aver combinato gli effetti delle due azioni sismiche applicate lungo le direzioni di riferimento ortogonali con una combinazione SRSS.
- Inviluppo Rettangolare combinato con la regola del 30%: considera un inviluppo rettangolare dopo aver combinato gli effetti delle due azioni sismiche applicate lungo le direzioni di riferimento ortogonali con la regola del 30%.
- Modo Prevalente: attribuisce alle sollecitazioni sismiche i segni delle analoghe sollecitazioni del modo di vibrazione prevalente, successivamente li combina con la regola del 30%.
- Somma Algebrica: attribuisce alle sollecitazioni sismiche i segni della somma algebrica delle sollecitazioni di tutti i modi di vibrazione, successivamente li combina al 30%.

- Inviluppo Rettangolare su combinazione automatica del programma Etabs con la regola SRSS e considerando gli effetti dell'eccentricità accidentale.
- Inviluppo Rettangolare su combinazione automatica del programma Etabs con la regola del 30% e considerando gli effetti dell'eccentricità accidentale.

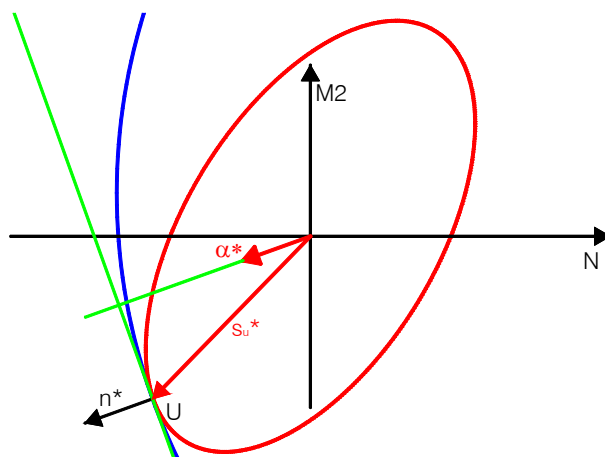


Figura 5-7

Tali procedure di analisi sono state applicate alle analisi comparative riportate nel Capitolo 6 per i due casi pratici considerati. In particolare nel grafico 6-7 e nel grafico 6-19 sono riassunti i risultati delle verifiche a pressoflessione deviata sui pilastri degli edifici analizzati.

6 ANALISI COMPARATIVA DELLE PROCEDURE DI CALCOLO E VERIFICA SISMICA DI EDIFICI IN C.A.

6.1 Premessa

L'analisi comparativa è stata condotta su due strutture in c.a. reali: un edificio per civile abitazione di piccole dimensioni, il cui telaio strutturale è reso irregolare dalla presenza del vano scala decentrato e dalla copertura a falda e un edificio strategico con schema strutturale misto telaio – setti, che può considerarsi irregolare sia in pianta sia in elevazione. La scelta di tali edifici è dettata dalla necessità di indagare gli effetti delle nuove norme su strutture con meccanismi resistenti più complessi di quelli accademici usualmente reperibili in letteratura [13] e sufficientemente rappresentativi del patrimonio edilizio realizzato in c.a..

L'analisi comparativa è stata eseguita considerando, per ciascun edificio, sei modelli di calcolo agli elementi finiti per l'analisi statica e cinque per l'analisi dinamica, distinti in funzione del metodo di verifica e della normativa di riferimento. Il primo di tali modelli è stato analizzato in base ai DD.MM. del 1996 e la relativa armatura è stata proporzionata alle tensioni ammissibili. Gli altri modelli, viceversa, sono stati verificati con armatura nota, alle tensioni ammissibili o allo stato limite ultimo in funzione della normativa adottata, valutando i coefficienti di sicurezza e il numero di sezioni eventualmente non verificate. Successivamente è stato determinato il quantitativo di armatura necessario a riportare i coefficienti di sicurezza delle sezioni entro i limiti normativi, ovvero se ne è determinato l'eventuale decremento nel caso di coefficienti di sicurezza eccessivamente cautelativi. Sono riportati, infine, in forma grafica i risultati dei confronti eseguiti tra i modelli in termini di taglio alla base, di verifica a flessione e taglio nelle travi, di verifica a presso-flessione deviata e taglio nei pilastri, di verifica a presso-flessione deviata, taglio e torsione nei setti nonché dei confronti in termini di armatura totale e di deformabilità.

Nel presente paragrafo si richiamano dapprima tutti i provvedimenti normativi presi a riferimento, in seguito si descrivono i criteri e gli strumenti informatici adottati per la modellazione della struttura e per le verifiche.

6.1.1 Normativa di riferimento

- Provvedimenti per le costruzioni con particolari prescrizioni per le zone sismiche - Legge 2/2/1974 n° 64;
- Norme tecniche per l'esecuzione delle opere in cemento armato normale e precompresso e per le strutture metalliche - D.M. 14/2/1992;
- Norme tecniche per l'esecuzione delle opere in cemento armato normale e precompresso e per le strutture metalliche - D.M. 9/1/1996;
- Criteri generali per la verifica di sicurezza delle costruzioni e dei carichi e dei sovraccarichi - D.M. 16/1/1996;
- Norme tecniche relative alle costruzioni in zona sismica - D.M. 16/1/1996;
- Istruzioni per l'applicazione delle norme tecniche relative ai criteri generali per la verifica di sicurezza delle costruzioni e dei carichi e sovraccarichi di cui al D.M. 16 gennaio 1996 – Circ.M.LL.PP. del 4/7/1996 n°156;
- Istruzioni per l'applicazione delle Norme tecniche per il calcolo, l'esecuzione ed il collaudo delle opere in cemento armato normale e precompresso e per le strutture metalliche di cui al D.M. 9 gennaio 1996 – Circ.M.LL.PP. del 15/10/96 n.252;
- Istruzioni per l'applicazione delle Norme tecniche per le costruzioni in zone sismiche di cui al decreto ministeriale 16 gennaio 1996 – Circ.M.LL.PP. del 10/04/1997 n.65;
- Norme tecniche per le costruzioni – D.M. 14/09/2005;

- Primi elementi in materia di criteri generali per la classificazione sismica del territorio nazionale e di normative tecniche per le costruzioni in zona sismica – OPCM 3274 del 20/3/2003;
All.1: Criteri per l'individuazione delle zone sismiche – individuazione, formazione ed aggiornamento degli elenchi delle medesime zone;
- OPCM 3431 del 3/5/2005 – Ulteriori modifiche ed integrazioni all'OPCM 3274/03;
All.2: Norme tecniche per il progetto, la valutazione e l'adeguamento sismico degli edifici.

6.1.2 Modelli di calcolo adottati

L'analisi comparativa è stata eseguita, come detto, considerando i modelli di calcolo agli elementi finiti per ciascuna struttura, distinti in funzione del metodo di analisi e di verifica e della normativa di riferimento; nel seguito i modelli statici sono così denominati:

- S1: analisi statica equivalente secondo le prescrizioni dei DDMM '96 ed il metodo di verifica alle tensioni ammissibili;
- S2: analoghi ai precedenti, considerano in più forze sismiche orientate in pianta con angolo variabile con passo 30° rispetto alle due direzioni ortogonali di riferimento. Tale analisi, non prevista dalle norme, risulta utile per indagare più a fondo sui comportamenti delle strutture utilizzando delle condizioni di carico che, pur essendo convenzionali, risultano comunque più vicine alla realtà;
- S3: analisi statica equivalente secondo le prescrizioni dei DDMM '96 ed il metodo di verifica allo stato limite ultimo;
- S4: analoghi ai precedenti, considerano forze sismiche orientate in pianta con passo variabile di 30°;

- S5 e S6: analisi statica lineare prevista dalla nuova normativa adottando il metodo di verifica allo stato limite ultimo rispettivamente in classe di duttilità bassa e alta. Si precisa che, per l'edificio strategico, quest'ultime analisi sono riportate solo per completezza del confronto in quanto, come esplicitato di seguito, i requisiti di regolarità imposti dall'OPCM 3274\03 per poter applicare l'analisi statica non sono soddisfatti.

Analogamente per le analisi dinamiche modali si segue lo stesso criterio di definizione dei modelli:

- D1: analisi dinamica modale con le prescrizioni dei Decreti '96 ed il metodo di verifica alle tensioni ammissibili;
- D2: analoghi ai precedenti, ma con lo spettro di risposta applicato lungo direzioni variabili con passo 30° rispetto alle direzioni ortogonali di riferimento;
- D3: analisi dinamica modale e verifica allo stato limite ultimo secondo le prescrizioni dei DD.MM. '96;
- D4: analoghi ai precedenti, ma con l'angolo d'ingresso del sismo variabile con passo 30° ;
- D5: analisi dinamica modale prevista dalla nuova normativa adottando il metodo di verifica allo stato limite ultimo in classe di duttilità bassa e alta.

Di seguito si riporta uno specchio riassuntivo dei modelli considerati:

modello	tipo analisi	normativa	metodo verif.	Note
S1	Statica equivalente	DDMM '96	TA	
S2	Statica equivalente	DDMM '96	TA	angolo sismo var
S3	Statica equivalente	DDMM '96	SLU	
S4	Statica equivalente	DDMM '96	SLU	angolo sismo var
S5	Statica equivalente	DM '05-OPCM 3274	SLU – cl. B	
S6	Statica equivalente	DM '05-OPCM 3274	SLU – cl. A	
D1	Dinamica modale	DDMM '96	TA	
D2	Dinamica modale	DDMM '96	TA	angolo sismo var
D3	Dinamica modale	DDMM '96	SLU	
D4	Dinamica modale	DDMM '96	SLU	angolo sismo var
D5	Dinamica modale	DM '05 OPCM 3274	SLU – cl. B	

6.1.3 Modellazione FEM e verifiche

Il programma di calcolo impiegato per l'analisi è l'ETABS 8.45 prodotto dalla Computers and Structures Inc., Berkeley, California. I modelli agli elementi finiti sono caricati dalle azioni verticali e da quelle sismiche, come specificato di volta in volta nei capitoli successivi.

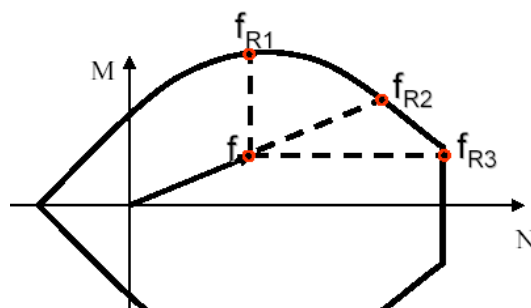
Verifiche alle tensioni ammissibili

Le verifiche degli elementi strutturali sono state eseguite mediante post-processor messi a punto presso il Dipartimento di Scienza delle Costruzioni dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II". Tali codici elaborano in automatico le tabelle di output, prodotte dal software ETABS, contenenti le proprietà

meccaniche, geometriche e le caratteristiche della sollecitazione di ciascun elemento e per ciascuna delle combinazioni di carico, per le quali il modello è stato analizzato. In funzione di tali informazioni il codice provvede ad eseguire un predimensionamento delle armature, nel rispetto dei quantitativi minimi e massimi imposti dalla normativa prescelta, nonché dei relativi interferri; successivamente vengono eseguite le verifiche a presso-flessione deviata di tutte le sezioni, per ciascuna combinazione di carico, restituendo infine i valori massimi delle tensioni nel calcestruzzo e nelle barre di armatura.

Verifiche allo stato limite ultimo

Le verifiche di travi e pilastri si effettuano mediante i post-processor implementati e descritti nel Capitolo 3. Si ricorda che i programmi restituiscono i valori del coefficiente di sicurezza di ciascuna sezione definito come il minimo dei coefficienti di amplificazione dei carichi di progetto λ , necessari per far sì che il punto rappresentativo delle sollecitazioni di progetto nello spazio (N, M_x, M_y) raggiunga la frontiera del dominio di rottura della sezione. Il coefficiente λ di ciascuna sezione è valutato per tutte le combinazioni di carico, in riferimento ai 7 percorsi di amplificazione dei carichi considerati.:



- 1 – Amplificazione proporzionale di N, M_x, M_y ;
- 2 - Amplificazione proporzionale di M_x, M_y , con N costante;
- 3 - Amplificazione proporzionale di N, M_y , con M_x costante;
- 4 - Amplificazione proporzionale di N, M_x , con M_y costante;
- 5 – Amplificazione di M_y , con N, M_x costanti;
- 6 – Amplificazione di M_x , con N, M_y costanti;
- 7 – Amplificazione di N , con M_x, M_y costanti;

Evidentemente un valore di $\lambda < 1$ indica che la verifica non è soddisfatta, in quanto il punto si trova all'esterno del dominio di rottura.

I post-processor relativi alle travi ed ai pilastri eseguono anche la verifica a taglio dopo aver inserito diametro, passo e numero di braccia delle staffe.

Le verifiche a presso-flessione deviata dei setti e dei nuclei si effettuano con il programma Enexsys, considerando tutte le combinazioni di carico dell'analisi.

Per la verifica a taglio di setti e nuclei, invece, si utilizzano dei fogli di calcolo automatici, predisposti *ad hoc*, per determinare le sollecitazioni ultime e confrontarle con i valori di calcolo. Per le analisi con la normativa previgente si considera il valore definito nel DM'9\1\96 come la “resistenza a taglio di elementi con armatura trasversale a taglio” (vd. [1] § 4.2.2.3). Per la analisi con la nuova normativa, invece, si considerano i valori di V_{Rd2} e V_{Rd3} definiti nell'OPCM 3431 rispettivamente come i valori limite per “l'anima a compressione” e per il “meccanismo resistente a trazione”. La prima grandezza è definita nella stessa Ordinanza [7]:

$$V_{Rd2} = 0,4 \cdot (0,7 - f_{ck}/200) \cdot f_{cd} \cdot b_0 \cdot z$$

dove f_{ck} e f_{cd} sono la resistenza cilindrica caratteristica e di progetto del calcestruzzo, b_0 è la larghezza della parete e z è l'altezza utile a taglio. Per la seconda grandezza, invece, si rimanda, per la classe di duttilità bassa e per le verifiche al di fuori delle zone di plasticizzazione degli elementi in classe di duttilità alta, alla “situazione non sismica”; poichè nel DM'05 non ci sono indicazioni per valutare tali grandezze, ed essendo anche la letteratura scientifica carente su questo argomento, si può solo ricorrere, non senza qualche dubbio, alle definizioni del DM'96 (vd § 4.2.2.3.2.).

Anche le verifiche sugli spostamenti si eseguono mediante fogli di calcolo appositamente predisposti.

Confronti

Il tipo di analisi denominato S1 è sicuramente il più diffuso in ambito professionale per il tipo di struttura in analisi, pertanto se ne considerano i risultati come riferimento per i confronti con le altre analisi. Le verifiche, condotte secondo la metodologia della tensioni ammissibili, conducono al dimensionamento delle armature utilizzate come parametro di riferimento per il confronto con gli altri modelli. In particolare, per tutti gli altri modelli, si esegue la verifica con armatura nota valutando i coefficienti di sicurezza e il numero di sezioni eventualmente non soddisfatte; successivamente si determina il quantitativo di armatura necessario a riportare i coefficienti di sicurezza delle sezioni entro i limiti normativi, ovvero se ne determina il possibile decremento, se i coefficienti di sicurezza risultano eccessivamente cautelativi. Tali coefficienti sono dati, per le analisi allo SLU, dal moltiplicatore dei carichi λ , definito in precedenza, mentre per le analisi alle TA sono dati dal rapporto tra le tensioni ammissibili e quelle di calcolo per il calcestruzzo e l'acciaio. Si osserva quindi che i due tipi di coefficienti sono disomogenei, in quanto il primo è dato da un rapporto tra sollecitazioni, mentre il secondo da un rapporto di tensioni. Il confronto diretto tra i risultati, pertanto, può essere solo qualitativo.

Di seguito si riportano, per ciascuno dei due edifici, dei diagrammi riassuntivi delle analisi in termini di taglio alla base, di verifica a flessione e taglio nelle travi, di verifica a presso-flessione deviata e taglio nei pilastri, di verifica a presso-flessione deviata, taglio e torsione nei setti nonché dei confronti in termini di armatura totale e di deformabilità.

6.2 Descrizione delle strutture esaminate

6.2.1 Edificio Strategico

L'edificio strategico ha una pianta rettangolare allungata di lati 12.70 m x 42.35 m ed è costituito da 2 livelli interrati con impalcati parziali e da 4 piani fuori terra. La destinazione d'uso prevalente prevede uffici ed alloggi per i piani fuori terra e magazzini o archivi per i piani interrati. Inoltre, è prevista una sopraelevazione in carpenteria metallica, che interessa metà delle dimensioni in pianta dell'edificio stesso. Tale sopraelevazione è schematizzata nei modelli di calcolo, ma non considerata nelle verifiche.

Dal punto di vista strutturale l'edificio è costituito da telai nelle due direzioni e da nuclei in c.a. contenenti corpi scala ed ascensori (vd.Figura 6-1).

I pilastri hanno sezione geometrica variabile 40 x 40÷70 cm oltre a due pilastri in prospettiva dalle dimensioni 30 x 30 cm.

Dei 4 nuclei presenti, i 2 più piccoli, denominati P1 e P2, sono destinati ad alloggiare i vani ascensori ed hanno una sezione trasversale scatolare. Gli altri due, denominati P3 e P4, ospitano i vani scala ed hanno sezione trasversale rispettivamente semiellittica aperta e scatolare chiusa; tutti hanno spessore costante con l'altezza e pari a 25cm. Inoltre al piano interrato è presente un muro, che si sviluppa internamente alla struttura lungo tutto il lato maggiore.

Gli elementi orizzontali sono costituiti da solai latero – cementizi gettati in opera con soletta collaborante, dello spessore di 20+4 cm oppure, per le zone destinate ai magazzini ed archivi, da solai in soletta piena di spessore 24 cm; le travi sono tutte emergenti di dimensione 40 x 60-70 cm.

Le fondazioni sono di tipo indirette, plinti su pali e platee su pali aventi altezza di 80 cm e collegate da travi nelle due direzioni longitudinale e trasversale. I pali del diametro 60 cm presentano una lunghezza pari a 24 m. Tali elementi risultano sufficientemente rigidi da giustificare i vincoli d'incastro adottati alla base del modello.

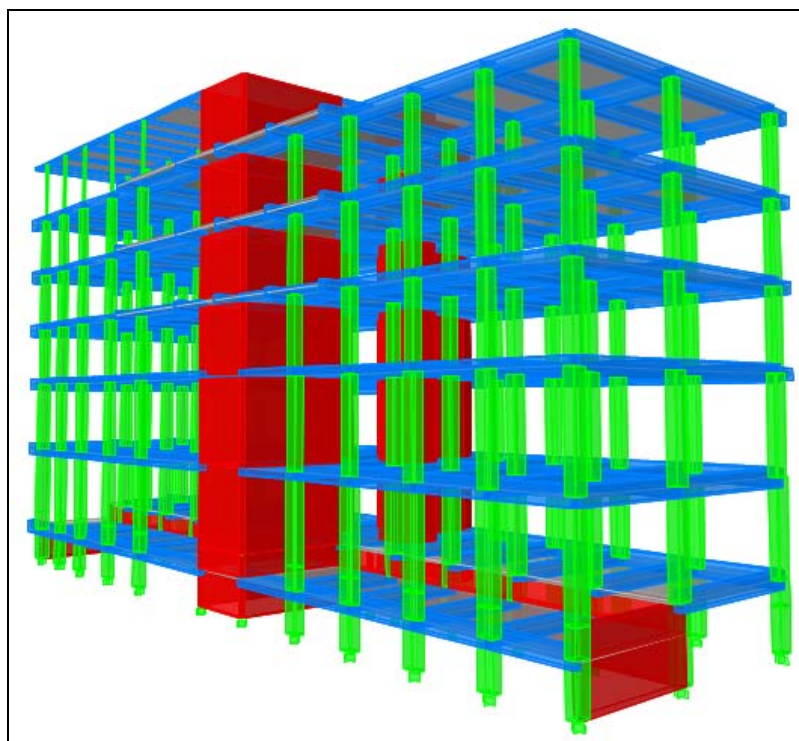
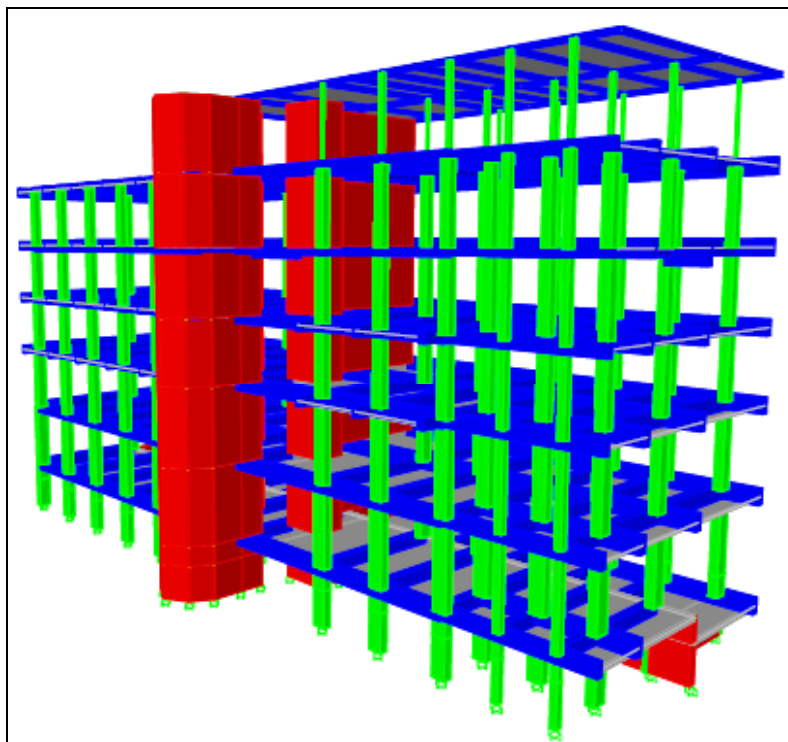


Figura 6-2 Edificio Strategico - Viste 3D del modello di calcolo

6.2.2 Edificio Civile

L'edificio civile ha una pianta quasi quadrata di lati 7.20 m x 7.00 m, è costituito da un piano interrato, circondato da un muro di 30 cm di spessore, ed altri tre piani fuori terra; la copertura è inclinata a falda unica. La destinazione d'uso è civile abitazione.

La struttura in elevazione è costituita da telai nelle due direzioni di riferimento; tali telai sono resi irregolari dalla presenza della copertura inclinata e dal vano scala decentrato con travi dei pianerottoli sfalsate (vd. Figura 6-3).

I pilastri hanno sezione geometrica variabile 30 x 30 e 30 x 40 cm; le travi perimetrali hanno sezioni variabili da 30 x 40 a 30 x 80, mentre sull'allineamento interno, a ciascun piano, sono presenti due travi a spessore di solaio di sezione 42 x 25 e 84 x 25, ottenute affiancando dei travetti prefabbricati.

I solai sono semi-prefabbricati a travetti e pignatte di spessore 20 + 5 cm, mentre la fondazione è costituita da una platea di spessore pari a 50 cm.

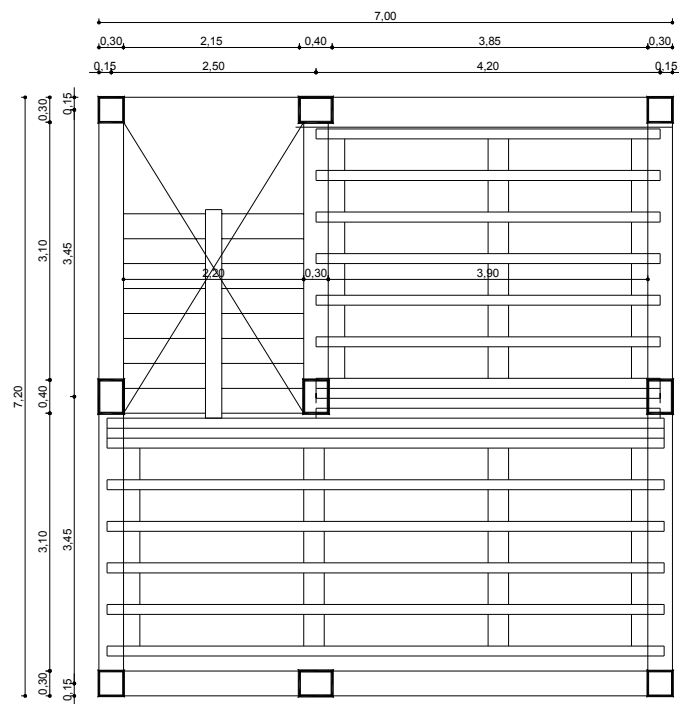


Figura 6-3 Edificio Civile - Pianta piano tipo

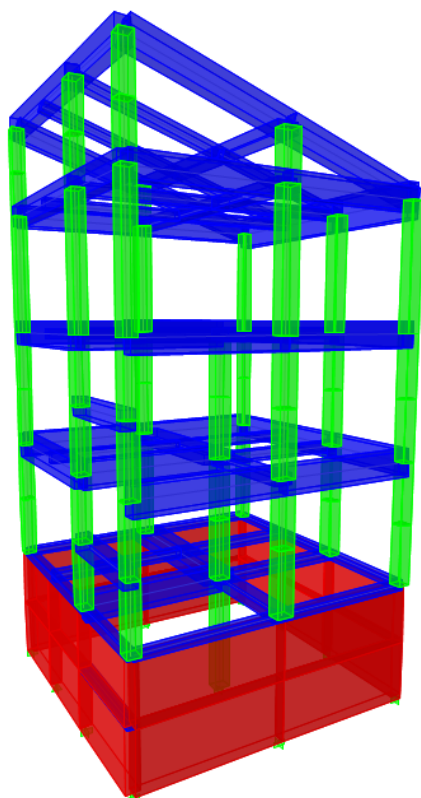


Figura 6-4 Edificio Civile - Vista 3D del modello di calcolo

6.2.3 Materiali

Entrambe le strutture sono realizzate in calcestruzzo classe C20/25 (R_{CK} 250) armato con barre ad aderenza migliorata FeB44K o FeB450C. Di seguito si riportano le caratteristiche meccaniche e le tensioni ammissibili.

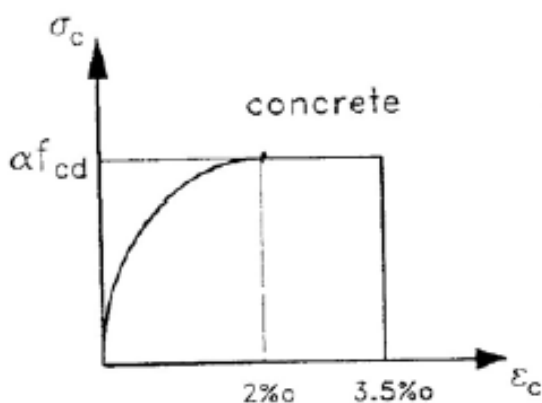
Prescrizioni D.M. 9/1/96

Calcestruzzo C20/25

- modulo elastico tangente	$E_c = 5700 \cdot \sqrt{25}$	= 28500 MPa
- coefficiente di Poisson	ν	= 0.20

Resistenze per verifiche allo stato limite ultimo:

- resistenza caratteristica cubica	R_{ck}	= 25.0 MPa
- resistenza caratteristica cilindrica	$f_{ck} = 0.83 \cdot R_{ck}$	= 20.8 MPa
- coef. di sicurezza calcestruzzo	$\gamma_{m,cls}$	= 1.60
- resistenza di calcolo cilindrica	$f_{cd} = f_{ck} / \gamma_{m,cls}$	= 13.0 MPa
- limite legame costitutivo cls	$\alpha \cdot f_{cd}$	= 11.0 MPa



Tensioni ammissibili:

- tensione normale di compr. per flessione	σ_c	= 8.50 MPa
- tensione normale di compr.semplice	σ_c	= 5.95 MPa
- tensione tangenziale limite	τ_{c0}	= 0.53 MPa
- tensione tangenziale ammissibile a taglio	τ_{c1}	= 1.69 MPa
- tensione tangenziale amm. per taglio e torsione	τ_{max}	= 1.90 MPa

Acciaio per c.a. FeB44K

- tensione caratteristica di snervamento	f_{yk}	= 430 MPa
- tensione caratteristica di rottura	f_{tk}	= 540 MPa
- coef. di sicurezza acciaio	$\gamma_{m,fe}$	= 1.15
- tensione caratteristica di progetto	$f_{yd} = f_{yk} / \gamma_{m,fe}$	= 374 MPa
- tensione ammissibile		= 255 MPa

Prescrizioni D.M. 14/9/05

Le prescrizioni riportate nel nuovo provvedimento normativo non sono, in generale, molto chiare; infatti manca un elenco dei simboli utilizzati, utile ad agevolare la lettura, ed inoltre le grandezze vengono indicate con simboli differenti e, cosa più grave, non sempre definiti. Pertanto, per poter interpretare correttamente le prescrizioni, si è fatto riferimento all'Eurocodice 2 – cap.3, come suggerito nel punto 11.1.10 del Decreto stesso.

Calcestruzzo C20/25

- modulo elastico secante	$E_c = 11000 \cdot \sqrt[3]{20 + 8}$	= 33400 MPa
- coefficiente di Poisson	ν	= 0.20

Resistenze per verifiche allo stato limite ultimo:

- resistenza caratteristica cubica	R_{ck}	= 25.0 MPa
- resistenza caratteristica cilindrica	f_{ck}	= 20.0 MPa
- coef. di sicurezza calcestruzzo	$\gamma_{m,cls}$	= 1.90
- resistenza di calcolo cilindrica	$f_{cd} = R_{ck} / \gamma_{m,cls}$	= 13.2 MPa
- limite legame costitutivo cls	$\alpha \cdot f_{cd}$	= 13.2 MPa

Acciaio per c.a. FeB 450C oppure FeB 450A

- tensione caratteristica di snervamento	f_{yk}	= 450 MPa
- tensione caratteristica di rottura	f_{tk}	= 540 MPa
- coef. di sicurezza acciaio	$\gamma_{m,fe}$	= 1.15
- tensione caratteristica di progetto	$f_{yd} = f_{yk} / \gamma_{m,fe}$	= 390 MPa

La differenza tra i due tipi di acciaio previsti dalla nuova normativa non riguarda le caratteristiche di resistenza, ma solo gli allungamenti a rottura, che valgono rispettivamente 7% per FeB450C e 3% per FeB450A. Questi valori non inficiano comunque le verifiche allo stato limite ultimo, poichè l'allungamento ultimo convenzionale dell'acciaio è fissato a 1%.

Confronto

Di seguito si riporta una sintesi delle principali analogie e differenze relative ai materiali definiti dalle due normative.

Calcestruzzo C20/25

	DM '96	DM '05
E_c	28500 MPa (tangente)	33400 MPa (secante)
ν	0.20	0.20
R_{ck}	25.0 MPa	25.0 MPa
f_{ck}	20.8 MPa	20.0 MPa
$\gamma_{m,cls}$	1.60	1.90
f_{cd}	13.0 MPa	13.2 MPa
$\alpha \cdot f_{cd}$	11.0 MPa	13.2 MPa

Acciaio per c.a. FeB44K – Fe450C

f_{yk}	430 MPa	450 MPa
f_{tk}	540 MPa	540 MPa
$\gamma_{m,fe}$	1.15	1.15
f_{yd}	374 MPa	390 MPa

6.2.4 Analisi dei Carichi

Di seguito si riportano le analisi dei carichi unitari verticali, valide per entrambe le normative, agenti sulle strutture:

Edificio Strategico

Solai latero - cementizi destinazione uffici - caserma (H=20+4 cm)

Peso proprio solaio in opera	3.00 kN/m ²
Pesi permanenti	1.50 kN/m ²
Sovraccarico accidentale	<u>3.00 kN/m²</u>
	7.50 kN/m ²

Solai soletta piena destinazione archivi e magazzini (H=24 cm)

Peso proprio solaio in opera	6.00 kN/m ²
Pesi permanenti	2.30 kN/m ²
Sovraccarico accidentale	<u>8.00 kN/m²</u>
	16.30 kN/m ²

Solai latero - cementizi vecchia copertura (H=20+4 cm)

Peso proprio solaio in opera	3.00 kN/m ²
Pesi permanenti	2.00 kN/m ²
Sovraccarico accidentale	<u>2.00 kN/m²</u>
	7.00 kN/m ²

Solai in lamiera grecata nuova copertura

Peso proprio solaio	1.75 kN/m ²
Pesi permanenti	2.00 kN/m ²
Sovraccarico accidentale	<u>1.00 kN/m²</u>
	4.75 kN/m ²

Scale

Peso proprio	3.00 kN/m ²
Pesi permanenti	2.00 kN/m ²
Sovraccarico accidentale	<u>4.00 kN/m²</u>
	9.00 kN/m ²

Balconi a sbalzo

Peso proprio	3.75 kN/m ²
Pesi permanenti	2.00 kN/m ²
Sovraccarico accidentale	<u>4.00 kN/m²</u>
	9.75 kN/m ²

Tamponature	10.00 kN/m
-------------	------------

Edificio Civile

Solai semi-prefabbricati destinazione civile abitazione (H=20+5cm)

Peso proprio solaio in opera	3.00 kN/m ²
Pesi permanenti	1.20 kN/m ²
Quota tramezzi	1.00 kN/m ²
Sovraccarico accidentale	<u>2.00 kN/m²</u>
	7.20 kN/m ²

Solai semi-prefabbricati di copertura (H=20+5cm)

Peso proprio solaio in opera	3.00 kN/m ²
Pesi permanenti	1.20 kN/m ²
Sovraccarico accidentale (neve)	<u>1.23 kN/m²</u>
	5.43 kN/m ²

Scale

(soletta rampante $s = 10$ cm; gradini riportati: alzata 17 cm, pedata 30 cm; pianerottolo $s = 20$ cm.)

Peso proprio + permanenti	6.70 kN/m ²
Sovraccarico accidentale	<u>4.00 kN/m²</u>
	10.70 kN/m ²

Balcone

Peso proprio	3.00 kN/m ²
Pesi permanenti	1.10 kN/m ²
Sovraccarico accidentale	<u>4.00 kN/m²</u>
	8.10 kN/m ²

6.3 *Analisi statiche equivalenti*

6.3.1 Calcolo e verifiche modelli S1 (DM '96 – T.A.)

Nel modello S1 si considerano agenti le azioni così come prescritto dai D.D.M.M. del '96, utilizzando il metodo di verifica alle tensioni ammissibili.

Le azioni gravitazionali dovute ai pesi propri strutturali, ai carichi fissi ed a quelli accidentali, derivanti dalla tipologia di destinazione d'uso, si applicano con il loro massimo valore.

Le azioni sismiche si schematizzano attraverso l'introduzione di due sistemi di forze orizzontali, agenti non contemporaneamente lungo le direzioni di riferimento; il valore al piano i-mo è definito dalla relazione:

$$F_i = K_{hi} \cdot W_i$$

$$W_i = G_i + s \cdot Q_i$$

$$K_{hi} = c \cdot R \cdot \varepsilon \cdot \beta \cdot I \cdot \gamma_i$$

dove:

- W_i peso delle masse strutturali di piano;
- G_i peso fisso di piano;
- Q_i sovraccarico accidentale di piano;
- s coefficiente di riduzione del sovraccarico pari a:
1.00 per sovraccarichi di scale, archivi e magazzini;
0.50 per sovraccarichi di uffici e caserma;
0.33 per sovraccarichi di copertura;
- K_{hi} coefficiente di ripartizione;
- c coefficiente di intensità sismica;
- R coefficiente di risposta ;
- ε coefficiente di fondazione;
- β coefficiente di struttura;
- I coeff. di protezione sismica;
- γ_i coefficiente di distribuzione delle azioni sismiche;

In più, avendo l'edificio strategico una pianta di forma rettangolare allungata, le azioni agenti ortogonalmente al lato lungo sono rese eccentriche rispetto al centro di massa, per tenere in conto eventuali dissimmetrie delle azioni gravitazionali accidentali e/o eventuali sovrasollecitazioni derivanti dalla non sincronia dell'azione sismica che può investire la struttura.

Le azioni verticali ed orizzontali, infine, si combinano tra di loro al fine di produrre i massimi effetti sulla struttura in termini di sollecitazioni e spostamenti, sommando gli effetti indotti dai carichi verticali con quelli derivanti dalle azioni sismiche.

Di seguito si riporta la determinazione delle forze sismiche e la definizione

delle condizioni e combinazioni di carico da applicare al modello di calcolo. I coefficienti assunti per definire le azioni sismiche delle due strutture sono:

		Edificio Strategico	Edificio Civile
c	coefficiente di intensità sismica =	0.07	0.07
R	coefficiente di risposta =	1.0	1.0
ε	coefficiente di fondazione =	1.0	1.0
β	coefficiente di struttura =	1.2	1.0
I	coeff. di protezione sismica =	1.4	1.0

Nelle tabelle seguenti, relative ai due edifici analizzati, si riportano per ciascun impalcato il peso sismico, l'altezza dallo spiccatto di fondazione, i coefficienti di distribuzione e ripartizione e, infine, la forza sismica.

Tabella 6-1 Edificio Strategico - Forze sismiche

PIANO [-]	QUOTA [m]	W_i [kN]	h_i [m]	$W_i h_i$ [kNm]	γ_i [-]	K_{hi} [-]	F_i [kN]
8	18,95	1920	24,60	47232	2,19	0,257	494
7	15,25	7395	20,90	154556	1,86	0,218	1616
6	11,85	8080	17,50	141400	1,56	0,183	1478
5	8,45	8240	14,10	116184	1,25	0,147	1215
4	5,05	8220	10,70	87954	0,95	0,112	919
3	1,05	8160	6,70	54672	0,60	0,070	572
2	-2,85	7760	2,80	21728	0,25	0,029	227
1	-3,85	6750	1,80	12150	0,16	0,019	127
		56525		635876			6647

N.B.: quota dello spiccatto di fondazione = -5.65m.

Come già detto, la struttura ha una pianta rettangolare di lati 12.70 x 42.35 m, essendo il rapporto tra il lato maggiore e quello minore pari a 3.33, compreso tra i valori 2.5 e 3.5, si considera, sul lato lungo, un'eccentricità pari a 4.7%. Pertanto si ha:

$$e_x = 0 \quad (\text{ecc. trasversale a X})$$

$$e_y = 0.047 \cdot 42.35 = 1.99 \text{ m} \quad (\text{ecc. trasversale a Y})$$

Tabella 6-2 Edificio Civile - Forze sismiche

PIANO [-]	W_i [kN]	h_i [m]	$W_i h_i$ [kNm]	γ_i [-]	K_{hi} [-]	F_i [kN]
Copertura	410	12,70	5200	1,68	0,117	48,0
4	600	11,55	6910	1,52	0,107	63,8
3	730	8,62	6320	1,14	0,080	58,3
2	780	5,69	4420	0,75	0,053	40,8
1	780	2,76	2150	0,36	0,025	19,9
	3300		24990			230,8

A partire dalle condizioni di carico elementari devono considerarsi 7 combinazioni di carico per l'edificio strategico e 5 per quello civile più due involuپی:

Edificio Strategico – Combinazioni di carico			Edificio Civile – Combinazioni di carico		
1	COMB1:	pesi propri + carichi perm. + sovracc. accid.	1	COMB1:	pesi propri + carichi perm. + sovracc. accid.
2	COMB2:	Comb1 + sismo X	2	COMB2:	Comb1 + sismo X
3	COMB3:	Comb1 – sismo X	3	COMB3:	Comb1 – sismo X
4	COMB4:	Comb1 + sismo $Y e^+$	4	COMB4:	Comb1 + sismo Y
5	COMB5:	Comb1 – sismo $Y e^+$	5	COMB5:	Comb1 – sismo Y
6	COMB6:	Comb1 + sismo $Y e^-$	-	INV:	involuppo COMB1÷5
7	COMB7:	Comb1 – sismo $Y e^-$	-	INVSIS:	inv. sismo X, sismo Y
-	INV:	involuppo COMB1÷7			
-	INVSIS:	inv. sismo X, sismo $Y e^+$, sismo $Y e^-$			

Il primo involucro è utile per le verifiche delle travi e per le verifiche a taglio dei pilastri; il secondo involucro, invece, è utile per le verifiche degli spostamenti.

6.3.1.1 Verifiche di resistenza

Travi: flessione retta e taglio

Per la verifica di questi elementi strutturali si analizzano, generalmente, cinque sezioni per ciascuna trave a ciascun livello per un totale di 2057 sezioni per l'edificio strategico e 203 per l'edificio civile. Si ricorda che la verifica si conduce per l'involuppo di tutte le combinazioni di carico, poiché riguarda una sola caratteristica della sollecitazione. Le armature inserite, longitudinali e trasversali, rispondono alle prescrizioni del D.M. '96 ed alla relativa Circolare Esplicativa del '97 in termini di percentuali di armature e distanze tra i ferri.

La verifica si effettua determinando le tensioni massime di calcestruzzo ed acciaio e confrontandole con le rispettive tensioni ammissibili.

Per comodità si definisce un coefficiente di sicurezza come rapporto tra la tensione ammissibile e quella massima riscontrata per il calcestruzzo e per l'acciaio: un coefficiente di sicurezza inferiore all'unità indica che la verifica non è soddisfatta.

Edificio Strategico

Dalle verifiche condotte si ottiene che il minimo coefficiente di sicurezza vale 1.00 sia per il calcestruzzo sia per l'acciaio, dal che si evince che tutte le sezioni soddisfano la verifica.

Di seguito si riporta un specchio riassuntivo delle verifiche a flessione, che mostra il numero di sezioni che hanno coefficiente di sicurezza minore di un certo valore e la relativa percentuale sul totale delle sezioni. Relativamente all'acciaio, si legge che ben 1607 sezioni, pari al 78.1% del totale, hanno un coefficiente superiore a 2.0, quindi con tensione di lavoro inferiore a 127 MPa, mentre 16 sezioni, pari al 0.8% hanno coefficiente compreso tra 1.0 e 1.1, quindi con tensioni variabili tra 255 MPa e 232 MPa. Relativamente al calcestruzzo, invece, si osserva che 1789 sezioni, pari al 87.0%, hanno coefficiente di sicurezza maggiore di 2, ossia la tensione di lavoro è inferiore a 4.25 MPa; 2.1% delle sezioni, invece, hanno un coefficiente compreso tra 1.0 e 1.1, con tensioni variabili tra 8.50 MPa e 7.73 MPa.

Edificio Strategico_S1_travi_flex				
n° sez. verificate:			2057	
coef. secur	N cls	N fe	cls	fe
>2	1789	1607	87,0%	78,1%
2,0	268	450	13,0%	21,9%
1,5	68	116	3,3%	5,6%
1,4	56	65	2,7%	3,2%
1,3	51	38	2,5%	1,8%
1,2	48	19	2,3%	0,9%
1,1	44	16	2,1%	0,8%
1,0	0	0	0,0%	0,0%

Per ottenere questo risultato è necessario avere un quantitativo di armatura longitudinale, con barre $\phi 16$, $\phi 20$ e $\phi 24$, stimato pari a 30.7 [ton]. Tale valore è preso a riferimento per le altre analisi, in cui si riporta l'incremento percentuale sul peso delle barre di armature necessarie a soddisfare le verifiche.

Per la verifica a taglio si considerano, sulle sezioni, l'involuppo massimo e quello minimo delle sollecitazioni di taglio e torsione. Si effettuano pertanto 4158 verifiche calcolando la tensione tangenziale τ e confrontandola con i valori limite.

Si definiscono due coefficienti di sicurezza: uno rispetto a τ_{c0} e uno rispetto a τ_{max} , definite nel paragrafo dei materiali.

Dalla tabella seguente si evince che le sezioni che necessitano di specifica armatura a taglio sono il 10.6%, mentre la sicurezza rispetto alla tensione massima ammissibile è sempre garantita, essendo i coefficienti maggiori di 1.00.

Edificio Strategico_S1_travi_taglio e tors.					Edificio Strategico_S1_travi_taglio e tors.				
n° sez. verificate: 4158					coef. secur	N τ_{c0}	N τ_{max}	τ_{c0}	τ_{max}
coef. secur	N τ_{c0}	N τ_{max}	τ_{c0}	τ_{max}	0,9	330	0	7,90%	0,00%
>2	2910	3953	70,00%	95,10%	0,8	269	0	6,50%	0,00%
2	1248	205	30,00%	4,90%	0,7	230	0	5,50%	0,00%
1,5	852	157	20,50%	3,80%	0,6	198	0	4,80%	0,00%
1,4	758	141	18,20%	3,40%	0,5	162	0	3,90%	0,00%
1,3	671	125	16,10%	3,00%	0,4	120	0	2,90%	0,00%
1,2	612	110	14,70%	2,60%	0,3	35	0	0,80%	0,00%
1,1	541	89	13,00%	2,10%	0,2	0	0	0,00%	0,00%
1	440	0	10,60%	0,00%					

Le armature a taglio inserite per soddisfare le prescrizioni della Circolare '97 sono staffe $\phi 8$ a 2 o 4 braccia con passo variabile in funzione della geometria e lungo l'ascissa della trave. Si precisa che gli elementi critici sono le travi corte tra i setti (vd. Figura 6-5); tuttavia l'adozione delle staffe a 4 braccia consente di soddisfare le verifiche. Il quantitativo di ferro totale stimato è pari a 16.7 [ton]. Come per l'armatura longitudinale, tale valore è preso a riferimento per il calcolo degli incrementi nelle altre analisi.

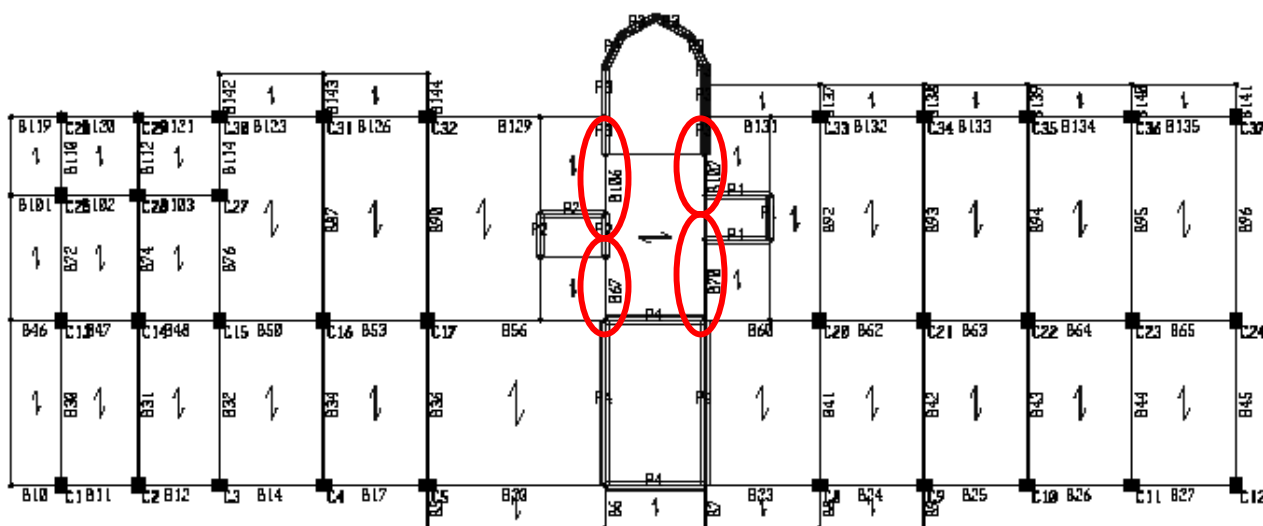


Figura 6-5 Edificio Strategico: travi corte tra i nuclei

Edificio Civile

Dalle verifiche condotte si ottiene che il minimo coefficiente di sicurezza vale 1.15, dal che si evince che il nostro edificio ha ancora ulteriori margini di sicurezza rispetto ai minimi imposti dalla normativa.

Dallo specchio riassuntivo delle verifiche a flessione, relativo alle 203 sezioni verificate, emerge ancor più chiaramente che i coefficienti di sicurezza sono generalmente molto alti.

Edificio Civile_S1_travi_flex				
n° sez. verificate:		203		
coef. secur	N cls	N fe	cls	fe
5,0	120	121	59,1%	59,6%
3,5	72	75	35,5%	36,9%
3,0	61	54	30,0%	26,6%
2,5	34	34	16,7%	16,7%
2,0	17	18	8,4%	8,9%
1,8	9	8	4,4%	3,9%
1,6	6	3	3,0%	1,5%
1,4	3	1	1,5%	0,5%
1,2	0	1	0,0%	0,5%
1,0	0	0	0,0%	0,0%

Questo risultato si ottiene con un quantitativo di armatura pari a circa 2.42 [ton]; tali armature, costituite da barre $\phi 16$ e $\phi 22$, soddisfano le limitazioni geometriche normative e le tipiche esigenze tecnologiche.

Per la verifica a taglio si considerano, sulle sezioni, l'involuppo massimo e quello minimo delle sollecitazioni di taglio e torsione. Si effettuano pertanto 223 verifiche calcolando la tensione tangenziale τ e confrontandola con i valori limite.

Dalla tabella seguente si evince che le sezioni che necessitano di specifica armatura a taglio sono il 10.6%, mentre la sicurezza rispetto alla tensione massima ammissibile è sempre garantita, essendo i coefficienti maggiori di 1.00.

Edificio Civile_S1_travi_taglio e tors.					Edificio Strategico_S1_travi_taglio e tors.				
n° sez. verificate: 223					coef. secur	N τ_{c0}	N τ_{max}	τ_{c0}	τ_{max}
coef. secur	N τ_{c0}	N τ_{max}	τ_{c0}	τ_{max}					
100	223	223	100,0%	100,0%	1,6	49	0	22,0%	0,0%
5,0	160	62	71,7%	27,8%	1,4	33	0	14,8%	0,0%
3,5	135	19	60,5%	8,5%	1,2	19	0	8,5%	0,0%
3,0	124	10	55,6%	4,5%	1,0	6	0	2,7%	0,0%
2,5	106	4	47,5%	1,8%	0,9	4	0	1,8%	0,0%
2,0	84	0	37,7%	0,0%	0,8	4	0	1,8%	0,0%
1,8	66	0	29,6%	0,0%	0,7	0	0	0,0%	0,0%

Le armature a taglio inserite per soddisfare le verifiche e le prescrizioni della Circolare '97 sono staffe $\phi 8$ a 2 braccia con passo variabile in funzione della geometria e lungo l'ascissa della trave.

Il quantitativo di ferro totale stimato è pari a 0.918 [ton]. Come per l'armatura longitudinale, tale valore è preso a riferimento per il calcolo degli incrementi nelle altre analisi.

Pilastri: presso-flessione deviata e taglio e torsione

Per la verifica di questi elementi strutturali si analizzano due sezioni per ciascun pilastro e per ciascun livello per un totale di 462 sezioni per l'edificio strategico e 108 per l'edificio civile. Si ricorda che la verifica si conduce per ciascuna combinazione di carico.

La verifica si effettua determinando le tensioni massime di calcestruzzo ed acciaio e confrontandole con le rispettive tensioni ammissibili; il coefficiente di sicurezza è dato dal rapporto tra la tensione ammissibile e quella massima riscontrata per il calcestruzzo e per i ferri: un coefficiente di sicurezza inferiore all'unità indica che la verifica non è soddisfatta.

Edificio Strategico

Le armature inserite, longitudinali e trasversali, rispondono alle prescrizioni del D.M. '96 ed alla relativa Circolare Esplicativa del '97 in termini di percentuali di

armature e distanze tra i ferri. In particolare il quantitativo di staffe è dettato dalle limitazioni geometriche, in quanto le azioni taglianti sono piuttosto basse su tutti i pilastri, dato che questi elementi strutturali non intervengono in maniera significativa nell'assorbimento delle azioni sismiche, data la presenza dei nuclei irrigidenti.

Di seguito si riporta un specchio riassuntivo delle verifiche a presso-flessione, che mostra il numero di sezioni che hanno coefficiente di sicurezza minore di un certo valore e la relativa percentuale sul totale delle sezioni. Relativamente all'acciaio, a conferma dell'osservazione fatta sopra, si legge che solo 6 sezioni, pari al 1.3% del totale, hanno un coefficiente inferiore a 2.0, ma superiore a 1.5, segno che i quantitativi di armatura inseriti sono generalmente superiori a quelli strettamente necessari alla verifica teorica.; pertanto si deduce che nelle rimanenti 456 sezioni la tensione di lavoro dell'acciaio è inferiore a 127 MPa. Relativamente al calcestruzzo, invece, si osserva che 397 sezioni, pari al 85.9%, hanno coefficiente di sicurezza minore di 2, pertanto nelle rimanenti 65 sezioni la tensione di lavoro è inferiore a 4.25 MPa; 11% delle sezioni, invece, ha un coefficiente compreso tra 1.0 e 1.1, con tensioni variabili tra 8.50 MPa e 7.73 MPa.

Edificio Strategico_S1_pilastri_pflex				
coef. secur	N cls	N fe	cls	fe
2,0	397	6	85,9%	1,3%
1,5	300	0	64,9%	0,0%
1,4	249	0	53,9%	0,0%
1,3	178	0	38,5%	0,0%
1,2	119	0	25,8%	0,0%
1,1	51	0	11,0%	0,0%
1,0	0	0	0,0%	0,0%

Per ottenere questo risultato è necessario avere un quantitativo di armatura longitudinale, con barre $\phi 26$ e $\phi 22$, stimato pari a 21.6 [ton]. Tale valore è preso a

riferimento per le altre analisi, in cui il quantitativo di acciaio è stimato con gli stessi criteri.

Per la verifica a taglio si considerano, sulle 462 sezioni già dette, l'involuppo massimo e minimo di taglio e torsione. Si effettuano pertanto 924 verifiche calcolando la tensione tangenziale τ , nelle due direzioni degli assi locali e confrontandola con i valori limite.

Si definiscono due coefficienti di sicurezza: uno rispetto a τ_{c0} e uno rispetto a τ_{max} , definite nel paragrafo dei materiali. Si osserva che solo 4 sezioni hanno coefficiente inferiore all'unità rispetto a τ_{c0} e quindi necessitano di armatura a taglio, mentre la sicurezza rispetto alla tensione massima ammissibile è assolutamente garantita, essendo i coefficienti maggiori di 3.01.

Edificio Strategico_S1_pilastri_taglio				
coef. secur	N τ_{c0}	N τ_{max}	τ_{c0}	τ_{max}
2,0	246	0	26,6%	0,0%
1,5	58	0	6,3%	0,0%
1,4	30	0	3,2%	0,0%
1,3	18	0	1,9%	0,0%
1,2	14	0	1,5%	0,0%
1,1	10	0	1,1%	0,0%
1,0	4	0	0,4%	0,0%
0,9	0	0	0,0%	0,0%

Le armature a taglio inserite per soddisfare le prescrizioni della Circolare '97 sono staffe $\phi 8$ a 2 braccia con passo variabile in funzione della geometria. Il quantitativo di ferro totale stimato è pari a 3.4 [ton].

Edificio Civile

Lo specchio riassuntivo seguente delle verifiche a presso-flessione mostra che anche i pilastri, come le travi, hanno notevoli margini di sicurezza essendo il coefficiente minimo pari a 1.17 mentre quasi la metà delle 108 sezioni considerate

hanno coefficiente maggiore di 2. Il fatto che i coefficienti dovuti all'acciaio siano più alti (solo 23 sezioni hanno coefficiente minore di 5) indica ancor più chiaramente che tali elementi strutturali hanno un'armatura sovradimensionata.

Edificio Civile_S1_pilastri_pflex				
coef. secur	N cls	N fe	cls	fe
5,0	88	23	81,5%	21,3%
3,5	74	8	68,5%	7,4%
3,0	73	6	67,6%	5,6%
2,5	62	1	57,4%	0,9%
2,0	57	0	52,8%	0,0%
1,8	48	0	44,4%	0,0%
1,6	32	0	29,6%	0,0%
1,4	16	0	14,8%	0,0%
1,2	1	0	0,9%	0,0%
1,0	0	0	0,0%	0,0%

Le armature longitudinali sono costituite sempre da barre $\phi 22$, per un totale in peso di acciaio pari a 2.44 [ton].

Per la verifica a taglio si considerano agenti sulle sezioni gli involucri massimo e minimo delle azioni taglianti nelle due direzioni di riferimento; la sollecitazione torcente si trascura dati i modesti contributi apportati alle tensioni.

Si osserva che solo 4 sezioni hanno coefficiente inferiore all'unità rispetto a τ_{c0} e quindi necessitano di armatura a taglio, mentre la sicurezza rispetto alla tensione massima ammissibile è assolutamente garantita, essendo i coefficienti maggiori di 3.01.

Edificio Civile_S1_pilastri_taglio				
coef. secur	N τ_{c0}	N τ_{max}	τ_{c0}	τ_{max}
3,5	100	10	92,6%	9,3%
3,0	92	4	85,2%	3,7%
2,5	92	0	85,2%	0,0%
2,0	66	0	61,1%	0,0%
1,8	46	0	42,6%	0,0%
1,6	34	0	31,5%	0,0%
1,4	22	0	20,4%	0,0%
1,2	6	0	5,6%	0,0%
1,0	4	0	3,7%	0,0%
0,9	2	0	1,9%	0,0%
0,8	0	0	0,0%	0,0%

Le armature a taglio inserite per soddisfare le prescrizioni della Circolare '97 sono staffe $\phi 8$ a 2 braccia con passo variabile in funzione della geometria. Il quantitativo di ferro totale stimato è pari a 0.368 [ton].

Setti e Nuclei: presso-flessione deviata e taglio e torsione (Edificio Strategico)

Nel solo edificio strategico, per la verifica a presso-flessione dei setti e dei nuclei si individuano, tra tutte le combinazioni di carico, le sei che massimizzano e minimizzano lo sforzo normale e i momenti flettenti lungo i due assi locali di riferimento della sezione resistente. Tutti gli elementi hanno sezione costante con l'altezza, i nuclei ascensori P1 e P2 (vd. Figura 6-1) sono armati con ferri $\phi 16/20''$ dalla base al 3° livello e con ferri $\phi 12/20''$ dal 4° livello alla sommità; il nucleo P3 del vano scala semi-ellittico è armato con ferri $\phi 26/20''$ e $\phi 20/20''$ dalla base al 3° livello e con ferri $\phi 12/20''$ dal 4° livello alla sommità; il nucleo P4 del vano scala scatolare è armato con ferri $\phi 20/20''$ dalla base al 3° livello e con ferri $\phi 12/20''$ dal 4° livello alla sommità; i setti P5 e P6, che si trovano solo al piano interrato, sono invece armati con ferri $\phi 12/20''$. Il peso totale delle armature verticali è quindi pari a 18.4 [ton].

Di seguito si riporta lo specchio riassuntivo delle verifiche a presso-flessione, in cui si possono leggere, per ciascuna sezione, i valori delle tensioni (positive se di trazione) massime riscontrate, il livello (*story*) e la combinazione in cui si riscontrano, il coefficiente di sicurezza e l'armatura verticale nella sezione.

Edificio Strategico_S1_setti_pflex										
		calcestruzzo				acciaio				
Setto	Livell.	σ_{c_max} [Mpa]	Story	Comb	λ_c	σ_{fe_max} [Mpa]	Story	Comb	λ_{fe}	armatura verticale
P1	4-8	-1,48	STORY4	COMBXP	5,74	52,3	STORY4	COMBXN	4,97	$\phi 12/20''$
P1	0-3	-5,18	STORY1	COMBXN	1,64	213,2	STORY1	COMBXN	1,22	$\phi 16/20''$
P2	4-8	-2,03	STORY6	COMBYNEN	4,19	92,2	STORY4	COMBXP	2,82	$\phi 12/20''$
P2	0-3	-4,20	STORY2	COMBXN	2,02	219,8	STORY1	COMBXP	1,18	$\phi 16/20''$
P3	4-8	-3,14	STORY4	COMBYNEP	2,71	110,9	STORY4	COMBYNEP	2,34	$\phi 12/20''$
P3	0-3	-8,29	STORY1-1	COMBYNEN	1,03	174,3	STORY1-1	COMBYNEN	1,49	$\phi 26/20''$ $\phi 20/20''$
P4	4-8	-2,55	STORY4	COMBYNEP	3,33	35,3	STORY4	COMBYNEP	7,37	$\phi 12/20''$
P4	0-3	-6,16	STORY1-1	COMBYNEN	1,38	184,1	STORY2	COMBXN	1,41	$\phi 20/20''$
P5	0-1	-2,50	STORY1-1	COMBYPEN	3,40	-37,4	STORY1-1	COMBYPEN	6,95	$\phi 12/20''$
P6	0-1	-3,70	STORY1-1	COMBYPEP	2,30	142,7	STORY1-1	COMBYPEP	1,82	$\phi 12/20''$

La verifica a taglio si effettua su ciascun elemento ad ogni livello considerando su 36 sezioni l'involuppo massimo e minimo di taglio e torsione.

Dalla tabella seguente si evince che le sezioni che necessitano di specifica armatura a taglio sono 15, mentre la sicurezza rispetto alla tensione massima ammissibile è sempre garantita, essendo i coefficienti maggiori di 1.3.

Edificio Strategico_S1_setti_taglio													
coef. sicur						coef. sicur							
N	τ_{c0}	N	τ_{max}	τ_{c0}	τ_{max}	N	τ_{c0}	N	τ_{max}	τ_{c0}	τ_{max}		
2,0	26	3	72,2%	8,3%		0,9	9	0	25,0%	0,0%			
1,5	22	1	61,1%	2,8%		0,8	9	0	25,0%	0,0%			
1,4	22	1	61,1%	2,8%		0,7	5	0	13,9%	0,0%			
1,3	22	0	61,1%	0,0%		0,6	4	0	11,1%	0,0%			
1,2	20	0	55,6%	0,0%		0,5	2	0	5,6%	0,0%			
1,1	17	0	47,2%	0,0%		0,4	1	0	2,8%	0,0%			
1,0	15	0	41,7%	0,0%		0,3	0	0	0,0%	0,0%			

Le armature a taglio inserite per soddisfare le verifiche e le prescrizioni della Circolare '97 sono costituite da barre orizzontali $\phi 12/20$ ", che garantiscono indonea percentuale di armatura nella sezione. Solo il setto P4 tra la base ed il terzo livello ed il setto P1 nel piano interrato necessitano di $\phi 16/20$ ". In definitiva il quantitativo di ferro totale stimato è pari a 11.5[ton].

6.3.1.2 Verifiche spostamenti di interpiano

Nei tabulati di calcolo sono riportati gli spostamenti relativi massimi tra gli impalcati; in ottemperanza al D.M. 16/01/1996 si verifica, con tali valori, la congruenza tra le aste e la verifica di funzionalità dei vincoli.

Di seguito si riportano, per ciascun edificio, due tabelle: nella prima si riassume, per ciascuna direzione di riferimento:

h altezza di interpiano;

η_p spostamenti relativi elastici dovuti ad azioni diverse dal sismo;

η_d spostamenti relativi dovuti al sismo;

$\eta_t = \frac{\eta_p \pm \lambda \cdot \eta_d}{X}$ spostamenti relativi totali;

in cui:

$\lambda = 4$ per edifici strategici;

$\lambda = 2$ per edifici civili;

$X = 1$ per calcolo effettuato alle tensioni ammissibili.

EDIFICIO STRATEGICO - CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI										
	Livello	h [mm]	Direzione X				Direzione Y			
			η_p [mm]	η_d [mm]	η_{tx}^+ [mm]	η_{tx}^- [mm]	η_p [mm]	η_d [mm]	η_{ty}^+ [mm]	η_{ty}^- [mm]
ST1-1 - BASE	1°	1800	0,00	0,10	0,41	-0,40	0,01	0,19	0,78	-0,77
ST1 - BASE	1°	2800	0,00	0,14	0,56	-0,56	0,01	0,53	2,13	-2,11
ST2 - ST1-1	2°	4900	0,03	1,61	6,49	-6,42	0,04	2,71	10,89	-10,81
ST2 - ST1	2°	3900	0,03	1,58	6,34	-6,27	0,03	2,38	9,54	-9,47
ST3 - ST2	3°	4000	0,07	2,38	9,58	-9,44	0,06	3,01	12,10	-11,99
ST4 - ST3	4°	3400	0,09	2,31	9,32	-9,14	0,06	2,61	10,50	-10,38
ST5 - ST4	5°	3400	0,10	2,27	9,16	-8,96	0,06	2,45	9,85	-9,72
ST6 - ST5	6°	3400	0,12	2,20	8,94	-8,70	0,07	2,27	9,14	-8,99

EDIFICIO CIVILE - CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI										
	Livello	h [mm]	Direzione X				Direzione Y			
			η_p [mm]	η_d [mm]	η_{tx}^+ [mm]	η_{tx}^- [mm]	η_p [mm]	η_d [mm]	η_{ty}^+ [mm]	η_{ty}^- [mm]
copert. -sottot.	5°	2140	0,00	0,50	1,00	-1,00	0,00	0,10	0,20	-0,20
sottot. - 3°P	4°	2930	0,00	2,20	4,40	-4,40	0,10	1,70	3,50	-3,30
3°P - 2°P	3°	2930	0,10	2,30	4,70	-4,50	0,00	2,30	4,60	-4,60
2°P - 1°P	2°	2930	0,00	2,10	4,20	-4,20	0,00	2,40	4,80	-4,80
1°P - BASE	1°	2760	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Nella seconda tabella si riportano, per ciascuna direzione di riferimento:

$\eta_{tlim} = 0.004 \cdot h$ spostamenti limite d'interpiano prescritti dalla norma per
garantirsi dal danneggiamento di elementi non strutturali ed
impianti, nell'ipotesi di elementi non strutturali realizzati in

modo da non interferire con la struttura;

esito verifica “positivo” se, per ciascuna direzione, $\eta_t \leq \eta_{tlim}$;

$$\lambda = \frac{\eta_{tlim}}{\eta_{ti}} \quad \text{coefficiente di sicurezza.}$$

EDIFICIO STRATEGICO – VERIFICHE DI SPOSTAMENTI										
			Verifica direzione X				Verifica direzione Y			
	Livello	η_{tlim}	λ_x^+	esito verifica	λ_x^-	esito verifica	λ_y^+	esito verifica	λ_y^-	esito verifica
		[mm]	[-]		[-]		[-]		[-]	
ST1-1 - BASE	1°	7,20	17,5	positivo	17,8	positivo	9,2	positivo	9,4	positivo
ST1 - BASE	1°	11,20	19,9	positivo	20,2	positivo	5,3	positivo	5,3	positivo
ST2 - ST1-1	2°	19,60	3,0	positivo	3,1	positivo	1,8	positivo	1,8	positivo
ST2 - ST1	2°	15,60	2,5	positivo	2,5	positivo	1,6	positivo	1,6	positivo
ST3 - ST2	3°	16,00	1,7	positivo	1,7	positivo	1,3	positivo	1,3	positivo
ST4 - ST3	4°	13,60	1,5	positivo	1,5	positivo	1,3	positivo	1,3	positivo
ST5 - ST4	5°	13,60	1,5	positivo	1,5	positivo	1,4	positivo	1,4	positivo
ST6 - ST5	6°	13,60	1,5	positivo	1,6	positivo	1,5	positivo	1,5	positivo

EDIFICIO CIVILE – VERIFICHE DI SPOSTAMENTI										
			Verifica direzione X				Verifica direzione Y			
	Livello	η_{tlim}	λ_x^+	esito verifica	λ_x^-	esito verifica	λ_y^+	esito verifica	λ_y^-	esito verifica
		[mm]	[-]		[-]		[-]		[-]	
copert. -sottot.	5°	8,56	8,6	positivo	8,6	positivo	42,8	positivo	42,8	positivo
sottot. - 3°P	4°	11,72	2,7	positivo	2,7	positivo	3,3	positivo	3,6	positivo
3°P - 2°P	3°	11,72	2,5	positivo	2,6	positivo	2,5	positivo	2,5	positivo
2°P - 1°P	2°	11,72	2,8	positivo	2,8	positivo	2,4	positivo	2,4	positivo
1°P - BASE	1°	11,04	-	positivo	-	positivo	-	positivo	-	positivo

6.3.2 Calcolo e verifiche modelli S2 (DM '96 – T.A. – angolo sismo var.)

Come già anticipato, l'analisi e la verifica condotte per il modello S2 sono analoghe a quelle del modello S1, ma in più si considerano le azioni sismiche agenti lungo direzioni inclinate rispetto a quelle di riferimento con angolo variabile con passo 30°. Pertanto si assegnano al centro di massa di ciascun impalcato le due componenti, F_{jx} e F_{jy} , della sollecitazione orizzontale e il momento torcente M_{jz} dovuto all'eccentricità accidentale secondo le modalità descritte di seguito.

Per la determinazione delle forze sismiche vale quanto già detto per il modello S1 in 6.3.1.

Per l'edificio strategico gli effetti dell'eccentricità accidentale (pari a 4.7%) si portano in conto applicando al centro di massa di ciascun impalcato un momento torcente di piano funzione dell'angolo α d'ingresso del sismo:

$$e_{\alpha} = 0.047 \cdot 42.35 \cdot \sin \alpha \text{ [m]}$$

pertanto si ha:

e_0	=0,00	e_{30}	=1,00	e_{60}	=1,72
e_{90}	=1,99	e_{120}	=1,72	e_{150}	=1,00

Tabella 6-3 Edificio Strategico - Azioni sismiche

		$\alpha = 0^\circ$			$\alpha = 30^\circ$			$\alpha = 60^\circ$			$\alpha = 90^\circ$		
PIANO	Fj	Fjx	Fjy	Mjz	Fjx	Fjy	Mjz	Fjx	Fjy	Mjz	Fjx	Fjy	Mjz
	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]
8	494	494	0	0	428	247	491	247	428	851	0	494	983
7	1616	1616	0	0	1399	808	1608	808	1399	2785	0	1616	3216
6	1478	1478	0	0	1280	739	1471	739	1280	2548	0	1478	2942
5	1215	1215	0	0	1052	607	1209	607	1052	2094	0	1215	2418
4	919	919	0	0	796	460	915	460	796	1585	0	919	1830
3	572	572	0	0	495	286	569	286	495	985	0	572	1138
2	227	227	0	0	197	114	226	114	197	392	0	227	452
1	127	127	0	0	110	64	126	64	110	219	0	127	253
		$\alpha = 120^\circ$			$\alpha = 150^\circ$			$\alpha = 180^\circ$			$\alpha = 210^\circ$		
PIANO	Fj	Fjx	Fjy	Mjz	Fjx	Fjy	Mjz	Fjx	Fjy	Mjz	Fjx	Fjy	Mjz
	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]
8	494	-247	428	851	-428	247	491	-494	0	0	-428	-247	491
7	1616	-808	1399	2785	-1399	808	1608	-1616	0	0	-1399	-808	1608
6	1478	-739	1280	2548	-1280	739	1471	-1478	0	0	-1280	-739	1471
5	1215	-607	1052	2094	-1052	607	1209	-1215	0	0	-1052	-607	1209
4	919	-460	796	1585	-796	460	915	-919	0	0	-796	-460	915
3	572	-286	495	985	-495	286	569	-572	0	0	-495	-286	569
2	227	-114	197	392	-197	114	226	-227	0	0	-197	-114	226
1	127	-64	110	219	-110	64	126	-127	0	0	-110	-64	126
		$\alpha = 240^\circ$			$\alpha = 270^\circ$			$\alpha = 300^\circ$			$\alpha = 330^\circ$		
PIANO	Fj	Fjx	Fjy	Mjz	Fjx	Fjy	Mjz	Fjx	Fjy	Mjz	Fjx	Fjy	Mjz
	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]
8	494	-247	-428	851	0	-494	983	247	-428	851	428	-247	491
7	1616	-808	-1399	2785	0	-1616	3216	808	-1399	2785	1399	-808	1608
6	1478	-739	-1280	2548	0	-1478	2942	739	-1280	2548	1280	-739	1471
5	1215	-607	-1052	2094	0	-1215	2418	607	-1052	2094	1052	-607	1209
4	919	-460	-796	1585	0	-919	1830	460	-796	1585	796	-460	915
3	572	-286	-495	985	0	-572	1138	286	-495	985	495	-286	569
2	227	-114	-197	392	0	-227	452	114	-197	392	197	-114	226
1	127	-64	-110	219	0	-127	253	64	-110	219	110	-64	126

Per l'edificio civile, invece, non è necessario considerare l'eccentricità accidentale; pertanto si ha:

Tabella 6-4 Edificio Civile - Azioni sismiche

		$\alpha = 0^\circ$			$\alpha = 30^\circ$			$\alpha = 60^\circ$			$\alpha = 90^\circ$		
PIANO	Fj	Fjx	Fjy	Mjz	Fjx	Fjy	Mjz	Fjx	Fjy	Mjz	Fjx	Fjy	Mjz
	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]
Copert.	4,80	4,80	0,00	-	4,16	2,40	-	2,40	4,16	-	0,00	4,80	-
4	6,38	6,38	0,00	-	5,52	3,19	-	3,19	5,52	-	0,00	6,38	-
3	5,83	5,83	0,00	-	5,05	2,92	-	2,92	5,05	-	0,00	5,83	-
2	4,08	4,08	0,00	-	3,53	2,04	-	2,04	3,53	-	0,00	4,08	-
1	1,99	1,99	0,00	-	1,72	0,99	-	0,99	1,72	-	0,00	1,99	-

		$\alpha = 120^\circ$			$\alpha = 150^\circ$			$\alpha = 180^\circ$			$\alpha = 210^\circ$		
PIANO	Fj	Fjx	Fjy	Mjz	Fjx	Fjy	Mjz	Fjx	Fjy	Mjz	Fjx	Fjy	Mjz
	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]
Copert.	4,80	-2,40	4,16	-	-4,16	2,40	-	-4,80	0,00	-	-4,16	-2,40	-
4	6,38	-3,19	5,52	-	-5,52	3,19	-	-6,38	0,00	-	-5,52	-3,19	-
3	5,83	-2,92	5,05	-	-5,05	2,92	-	-5,83	0,00	-	-5,05	-2,92	-
2	4,08	-2,04	3,53	-	-3,53	2,04	-	-4,08	0,00	-	-3,53	-2,04	-
1	1,99	-0,99	1,72	-	-1,72	0,99	-	-1,99	0,00	-	-1,72	-0,99	-

		$\alpha = 240^\circ$			$\alpha = 270^\circ$			$\alpha = 300^\circ$			$\alpha = 330^\circ$		
PIANO	Fj	Fjx	Fjy	Mjz	Fjx	Fjy	Mjz	Fjx	Fjy	Mjz	Fjx	Fjy	Mjz
	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]
Copert.	4,80	-2,40	-4,16	-	0,00	-4,80	-	2,40	-4,16	-	4,16	-2,40	-
4	6,38	-3,19	-5,52	-	0,00	-6,38	-	3,19	-5,52	-	5,52	-3,19	-
3	5,83	-2,92	-5,05	-	0,00	-5,83	-	2,92	-5,05	-	5,05	-2,92	-
2	4,08	-2,04	-3,53	-	0,00	-4,08	-	2,04	-3,53	-	3,53	-2,04	-
1	1,99	-0,99	-1,72	-	0,00	-1,99	-	0,99	-1,72	-	1,72	-0,99	-

Le combinazioni di carico da considerare sono 23 per l'edificio strategico e 13 per l'edificio civile più i due involuipi:

Edificio Strategico – Combinazioni di carico		
1	COMB1:	pesi propri + carichi perm. + sovracc. accid.
2	COMB000P:	Comb1+ sismo 0° (dir. X)
3	COMB030P:	Comb1+ sismo 30°
4	COMB060P:	Comb1+ sismo 60°
5	COMB090P:	Comb1+ sismo 90° (dir. Y e ⁺)
6	COMB120P:	Comb1+ sismo 120°
7	COMB150P:	Comb1 + sismo 150°
8	COMB180P:	Comb1 + sismo 180° (dir. -X)
9	COMB210P:	Comb1 + sismo 210°
10	COMB240P:	Comb1 + sismo 240°
11	COMB270P:	Comb1 + sismo 270° (dir. -Y e ⁺)
12	COMB300P:	Comb1 + sismo 300°
13	COMB330P:	Comb1 + sismo 330°
14	COMB030N:	Comb1- sismo 30°
15	COMB060N:	Comb1- sismo 60°
16	COMB090N:	Comb1- sismo 90° (dir. Y e ⁻)
17	COMB120N:	Comb1- sismo 120°
18	COMB150N:	Comb1 - sismo 150°
19	COMB210N:	Comb1 - sismo 210°
20	COMB240N:	Comb1 - sismo 240°
21	COMB270N:	Comb1 - sismo 270° (dir. -Y e ⁻)
22	COMB300N:	Comb1 - sismo 300°
23	COMB330N:	Comb1 - sismo 330°
-	INV:	involuppo COMB1÷23
-	INVSIS:	inv.SISMO000÷SISMO330

Edificio Civile – Combinazioni di carico		
1	COMB1:	pesi propri + carichi perm. + sovracc. accid.
2	COMB000:	Comb1+ sismo 0° (dir. X)
3	COMB030:	Comb1+ sismo 30°
4	COMB060:	Comb1+ sismo 60°
5	COMB090:	Comb1+ sismo 90° (dir. Y)
6	COMB120:	Comb1+ sismo 120°
7	COMB150:	Comb1 + sismo 150°
8	COMB180:	Comb1 + sismo 180° (dir. -X)
9	COMB210:	Comb1 + sismo 210°
10	COMB240:	Comb1 + sismo 240°
11	COMB270:	Comb1 + sismo 270° (dir. -Y)
12	COMB300:	Comb1 + sismo 300°
13	COMB330:	Comb1 + sismo 330°
-	INV:	involuppo COMB1÷13
-	INVSIS:	inv. SISMO000÷SISMO330

Si ricorda che il primo involucro è utile per le verifiche a flessione delle travi e per le verifiche a taglio delle strutture verticali; il secondo involucro, invece, è utile per le verifiche degli spostamenti.

6.3.2.1 Verifiche di resistenza

Travi: flessione retta e taglio

Si ricorda che la verifica si conduce per l'involuppo di tutte le combinazioni di carico, analizzando, generalmente, cinque sezioni per ciascuna trave per un totale di 2057 sezioni per l'edificio strategico e 203 per quello civile. In prima battuta si analizzano le sezioni armate come quelle del modello S1, in caso di esito negativo di alcune verifiche si procede ad incrementare le armature degli elementi interessati per riportare tutti i coefficienti a valori superiori all'unità.

Edificio Strategico

Rispetto al modello S1 si riscontra una generale diminuzione dei coefficienti di sicurezza. Tale diminuzione è poco influente per la maggioranza delle travi, mentre per 44 sezioni la verifica non risulta soddisfatta. Le sezioni in questione sono generalmente localizzate nelle travi corte tra i nuclei, già individuate in Figura 6-5.

Edificio Strategico_S2_travi_flex				
coef. secur	N cls	N fe	cls	fe
>2	1786	1508	86,8%	73,3%
2,0	271	549	13,2%	26,7%
1,5	77	180	3,7%	8,8%
1,4	60	125	2,9%	6,1%
1,3	58	72	2,8%	3,5%
1,2	54	37	2,6%	1,8%
1,1	49	28	2,4%	1,4%
1,0	44	16	2,1%	0,8%
0,9	37	9	1,8%	0,4%
0,8	16	0	0,8%	0,0%
0,7	1	0	0,0%	0,0%
0,6	0	0	0,0%	0,0%

L'esito negativo di tali verifiche impone un incremento di armatura negli elementi interessati: la stima del peso dell'armatura longitudinale necessaria è pari a 31.0 [ton], con un incremento percentuale in peso di 1.18% rispetto al modello S1. Occorre osservare, però, che l'incremento di armatura in alcune sezioni critiche è tale da superare addirittura il limite normativo del 4% di area di ferro. Si conclude, pertanto, che già con questo tipo di analisi tali elementi strutturali, critici ai fini antisismici, debbano essere riprogettati.

Per la verifica a taglio si considerano, come per S1, l'involuppo massimo e minimo delle sollecitazioni di taglio e torsione. Si effettuano pertanto 4158 verifiche calcolando la tensione tangenziale τ e confrontandola con i valori limite.

Edificio Strategico_S2_travi_taglio e tors.					Edificio Strategico_S2_travi_taglio e tors.				
coef. secur	N τ_{c0}	N τ_{max}	τ_{c0}	τ_{max}	coef. secur	N τ_{c0}	N τ_{max}	τ_{c0}	τ_{max}
>2	2880	3876	69,3%	93,2%	0,9	400	16	9,6%	0,4%
2	1278	282	30,7%	6,8%	0,8	343	3	8,2%	0,1%
1,5	940	212	22,6%	5,1%	0,7	292	1	7,0%	0,0%
1,4	856	201	20,6%	4,8%	0,6	245	0	5,9%	0,0%
1,3	768	193	18,5%	4,6%	0,5	196	0	4,7%	0,0%
1,2	694	185	16,7%	4,4%	0,4	169	0	4,1%	0,0%
1,1	613	161	14,7%	3,9%	0,3	48	0	1,2%	0,0%
1	515	58	12,4%	1,4%	0,2	0	0	0,0%	0,0%

Si osserva subito che alcune sezioni (1.4%) hanno tensioni tangenziali superiori a quella ammissibile e devono, quindi, essere riprogettate. Così come la verifica a flessione anche la verifica a taglio denuncia l'inadeguatezza delle travi corte tra i nuclei. Oltre a questo si osserva che il numero di sezioni che necessitano di specifica armatura a taglio è aumentato dal 10.5% del modello S1 a 12.4%. Le armature a taglio inserite sono le stesse del modello S1 più un incremento stimato pari a 0.88%, che significa un quantitativo di acciaio in peso pari a 16.9 [ton].

Edificio Civile

Rispetto al modello S1 si riscontra una modesta ed influente diminuzione dei coefficienti di sicurezza, indice che le combinazioni più gravose coincidono sostanzialmente con quelle in cui l'azione sismica è diretta lungo le direzioni di riferimento.

Edificio Civile_S2_travi_flex				
coef. secur	N cls	N fe	cls	fe
5,0	122	126	60,1%	62,1%
3,5	75	78	36,9%	38,4%
3,0	62	57	30,5%	28,1%
2,5	37	34	18,2%	16,7%
2,0	17	22	8,4%	10,8%
1,8	10	11	4,9%	5,4%
1,6	6	3	3,0%	1,5%
1,4	3	1	1,5%	0,5%
1,2	0	1	0,0%	0,5%
1,0	0	0	0,0%	0,0%

Essendo tutte le verifiche soddisfatte, non occorre determinare alcun incremento di armatura rispetto al modello S1.

Per la verifica a taglio valgono le stesse considerazioni.

Edificio Civile_S2_travi_taglio e tors.					Edificio Civile_S2_travi_taglio e tors.				
coef. secur	N τ_{c0}	N τ_{max}	τ_{c0}	τ_{max}	coef. secur	N τ_{c0}	N τ_{max}	τ_{c0}	τ_{max}
5,0	163	71	73,1%	31,8%	1,4	37	0	16,6%	0,0%
3,5	137	23	61,4%	10,3%	1,2	21	0	9,4%	0,0%
3,0	126	14	56,5%	6,3%	1,0	8	0	3,6%	0,0%
2,5	108	4	48,4%	1,8%	0,9	5	0	2,2%	0,0%
2,0	88	0	39,5%	0,0%	0,8	4	0	1,8%	0,0%
1,8	72	0	32,3%	0,0%	0,7	0	0	0,0%	0,0%
1,6	56	0	25,1%	0,0%	0,6	0	0	0,0%	0,0%

Essendo aumentato il numero delle sezioni che necessitano di armatura a taglio da 6 a 8 (3.6%), occorrono alcune staffe in più, ma l'incremento in peso di armatura, di fatto, non è apprezzabile.

Pilastri: presso-flessione deviata e taglio e torsione

Edificio Strategico

Dall'analisi dei risultati si evince che i coefficienti di sicurezza medi e quelli minimi sono uguali ai rispettivi coefficienti del modello S1: la verifica a presso-flessione di S2, cioè, non comporta sollecitazioni aggiuntive. Ciò è dovuto al fatto che le condizioni più gravose si hanno quando si considera il sismo agente lungo le direzioni di riferimento, quindi le verifiche sono analoghe a quelle di S1.

La tabella con l'andamento del numero di sezioni con coefficiente di sicurezza minore di un certo valore non si riporta perchè è analoga a quella di S1. In conclusione: le verifiche sono soddisfatte con le stesse armature di S1 senza incrementi.

Risultato analogo si ha per la verifica a taglio.

Edificio Civile

Lo specchio riassuntivo delle verifiche a presso-flessione mostra che gli effetti delle azioni sismiche agenti in direzioni diverse da quelle canoniche di analisi, determina una generale ma ininfluyente riduzione dei coefficienti. Una sola sezione risulterebbe non verificata, ma con un coefficiente di sicurezza di 0.99. Pertanto la verifica si considera ugualmente soddisfatta e non si considerano incrementi di armatura rispetto al modello S1.

Edificio Civile_S2_pilastri_pflex				
coef. secur	N cls	N fe	cls	fe
5,0	94	32	87,0%	29,6%
3,5	74	15	68,5%	13,9%
3,0	74	8	68,5%	7,4%
2,5	63	2	58,3%	1,9%
2,0	57	0	52,8%	0,0%
1,8	52	0	48,1%	0,0%
1,6	44	0	40,7%	0,0%
1,4	38	0	35,2%	0,0%
1,2	19	0	17,6%	0,0%
1,0	1	0	0,9%	0,0%
0,9	0	0	0,0%	0,0%

Per la verifica a taglio, analogamente, non si riscontrano risultati significativamente diversi da quelli del modello S1: la riduzione dei coefficienti, infatti, non riguarda le poche sezioni con i coefficienti più bassi, sicchè non sono necessari incrementi di armatura.

Edificio Civile_S2_pilastri_taglio				
coef. secur	N τ_{c0}	N τ_{max}	τ_{c0}	τ_{max}
3,5	100	6	92,6%	5,6%
3,0	100	4	92,6%	3,7%
2,5	92	0	85,2%	0,0%
2,0	70	0	64,8%	0,0%
1,8	44	0	40,7%	0,0%
1,6	34	0	31,5%	0,0%
1,4	26	0	24,1%	0,0%
1,2	6	0	5,6%	0,0%
1,0	4	0	3,7%	0,0%
0,9	2	0	1,9%	0,0%
0,8	0	0	0,0%	0,0%

Setti e Nuclei: presso-flessione deviata e taglio e torsione (Edificio Strategico)

Di seguito si riporta lo specchio riassuntivo delle verifiche a presso-flessione: è interessante osservare come il coefficiente di sicurezza del nucleo P1 sia drasticamente calato fino ad assumere valore minore di 1.0. Ciò accade perchè la forza sismica inclinata a 150° sulla direzione X determina una sollecitazione agente lungo la diagonale del nucleo e quindi lungo l'inerzia debole.

Edificio Strategico_S2_setti_pflex										
		calcestruzzo				acciaio				
Setto	Livell.	σ_{c_max} [Mpa]	Story	Comb	λ_c	σ_{fe_max} [Mpa]	Story	Comb	λ_{fe}	armatura verticale
P1	4-8	-8,56	STORY4	COMB150N	0,99	418,1	STORY4	COMB150N	0,62	φ12/20"
P1	0-3	-5,18	STORY1	COMB180P	1,64	213,2	STORY1	COMB180P	1,22	φ16/20"
P2	4-8	-2,03	STORY6	COMB270P	4,19	94,4	STORY6	COMB270N	2,75	φ12/20"
P2	0-3	-4,20	STORY2	COMB180P	2,02	198,0	STORY1	COMB000P	1,31	φ16/20"
P3	4-8	-3,12	STORY4	COMB090N	2,72	111,2	STORY4	COMB090N	2,34	φ12/20"
P3	0-3	-8,29	STORY1-1	COMB270P	1,03	174,3	STORY1-1	COMB270P	1,49	φ26/20" φ20/20"
P4	4-8	-2,55	STORY4	COMB180P	3,33	35,3	STORY4	COMB180P	7,37	φ12/20"
P4	0-3	-6,16	STORY1-1	COMB270P	1,38	184,1	STORY2	COMB180P	1,41	φ20/20"
P5	0-1	-2,50	STORY1-1	COMB270N	3,40	37,4	STORY1-1	COMB270N	6,95	φ12/20"
P6	0-1	-3,70	STORY1-1	COMB090P	2,30	145,4	STORY1-1	COMB090P	1,79	φ12/20"

Essendo la verifica del nucleo P1 allo *story4* non soddisfatta è necessario aumentare l'armatura, per cui si prolungano le barre φ16/20" per un livello in più. Ciò comporta un peso complessivo di acciaio per armatura verticale pari a 18.7 [ton], ossia un incremento di 1.8%.

Per la verifica a taglio e torsione si può osservare un minimo calo delle medie dei coefficienti di sicurezza, ma non dei minimi: ciò significa che non è necessaria armatura aggiuntiva rispetto a quella prevista per il modello S1.

Edificio Strategico_S2_setti_taglio e tors.			Edificio Strategico_S1_setti_taglio e tors.		
n° sez. verificate: 36			n° sez. verificate: 36		
Coef. sicur.	τ_{c0}	τ_{max}	Coef. sicur.	τ_{c0}	τ_{max}
media	1,55	5,43	media	1,60	5,61
min	0,40	1,39	min	0,40	1,39

Edificio Strategico_S2_setti_taglio				
coef. sicur	N τ_{c0}	N τ_{max}	τ_{c0}	τ_{max}
2,0	27	4	75,0%	11,1%
1,5	22	1	61,1%	2,8%
1,4	22	1	61,1%	2,8%
1,3	22	0	61,1%	0,0%
1,2	20	0	55,6%	0,0%
1,1	18	0	50,0%	0,0%
1,0	15	0	41,7%	0,0%
0,9	9	0	25,0%	0,0%
0,8	9	0	25,0%	0,0%
0,7	5	0	13,9%	0,0%
0,6	4	0	11,1%	0,0%
0,5	3	0	8,3%	0,0%
0,4	1	0	2,8%	0,0%
0,3	0	0	0,0%	0,0%

6.3.2.2 Verifiche spostamenti di interpiano

La verifica degli spostamenti risulta esattamente identica a quella dei modelli S1 e riportata in 6.3.1.2, in quanto gli spostamenti massimi si verificano, per entrambi gli edifici, quando le azioni sismiche agiscono lungo le due direzioni di riferimento.

6.3.3 Calcolo e verifiche modelli S3 (DM '96 – S.L.U.)

L'analisi condotta col modello S3 rispetta le prescrizioni dei DDMM '96; la verifica si conduce col metodo semi-probabilistico agli stati limite.

Per la determinazione delle forze sismiche vale quanto già detto per il modello S1 in 4.1.1 a cui si rimanda, i carichi verticali, invece, si combinano secondo l'espressione:

$$\alpha'_p = \gamma_g G_k + \gamma_p P_k + \gamma_q [Q_{tk} + \Sigma (\psi_{0i} Q_{ik})]$$

dove: G_k = valore caratteristico delle azioni permanenti;

P_k = valore caratteristico della forza di precompressione;

Q_{tk} = valore caratteristico del sovraccarico variabile di base;

Q_{ik} = i valori caratteristici delle azioni variabili tra loro indipendenti;

$\gamma_g = 1,4$ (oppure 1,0 se il suo contributo aumenta la sicurezza);

$\gamma_p = 1,2$ (oppure 0,9 se il suo contributo aumenta la sicurezza);

$\gamma_q = 1,5$ (oppure 0 se il suo contributo aumenta la sicurezza);

ψ_{0i} = coefficienti di combinazione allo stato limite ultimo, da assumere pari a 0,7 per i carichi variabili di esercizio nei fabbricati per abitazione e uffici.

Le azioni sismiche, invece, si combinano con i carichi verticali nel seguente modo:

$$\alpha'_p \pm \gamma_E \alpha$$

in cui α sono le sollecitazioni dovute al sismo convenzionale, γ_E è pari a 1.5.

Poichè il D.M. 16\1\96 non fissa i coefficienti γ_g e γ_q nella combinazione sismica, si è costretti a considerare tutte le 28 combinazioni di carico possibili per l'edificio strategico e tutte le 20 possibili per l'edificio civile:

Edificio Strategico – Combinazioni di carico					
1	COMBV1:	1.0·G	15	COMBV2YPEN:	CombV2 + 1.5·sismo Y e ⁻
2	COMBV2:	1.4·G	16	COMBV2YNEN:	CombV2 – 1.5·sismo Y e ⁻
3	COMBV3:	1.0·G + 1.5·Q	17	COMBV3XP:	CombV3 + 1.5·sismo X
4	COMBV4:	1.4·G + 1.5·Q	18	COMBV3XN:	CombV3 – 1.5·sismo X
5	COMBV1XP:	CombV1 + 1.5·sismo X	19	COMBV3YPEP:	CombV3 + 1.5·sismo Y e ⁺
6	COMBV1XN:	CombV1 – 1.5·sismo X	20	COMBV3YNEN:	CombV3 – 1.5·sismo Y e ⁺
7	COMBV1YPEP:	CombV1 + 1.5·sismo Y e ⁺	21	COMBV3YPEN:	CombV3 + 1.5·sismo Y e ⁻
8	COMBV1YNEN:	CombV1 – 1.5·sismo Y e ⁺	22	COMBV3YNEN:	CombV3 – 1.5·sismo Y e ⁻
9	COMBV1YPEN:	CombV1 + 1.5·sismo Y e ⁻	23	COMBV4XP:	CombV4 + 1.5·sismo X
10	COMBV1YNEN:	CombV1 – 1.5·sismo Y e ⁻	24	COMBV4XN:	CombV4 – 1.5·sismo X
11	COMBV2XP:	CombV2 + 1.5·sismo X	25	COMBV4YPEP:	CombV4 + 1.5·sismo Y e ⁺
12	COMBV2XN:	CombV2 – 1.5·sismo X	26	COMBV4YNEN:	CombV4 – 1.5·sismo Y e ⁺
13	COMBV2YPEP:	CombV2 + 1.5·sismo Y e ⁺	27	COMBV4YPEN:	CombV4 + 1.5·sismo Y e ⁻
14	COMBV2YNEN:	CombV2 – 1.5·sismo Y e ⁺	28	COMBV4YNEN:	CombV4 – 1.5·sismo Y e ⁻
-	INV:	inviluppo COMB1÷28			
-	INVSIS:	inviluppo SISMOX, SISMOYEP, SISMOYEN			

Edificio Civile – Combinazioni di carico					
1	COMBV1:	1.0·G	11	COMBV2YP:	CombV2 + 1.5·sismo Y
2	COMBV2:	1.4·G	12	COMBV2YN:	CombV2 – 1.5·sismo Y
3	COMBV3:	1.0·G + 1.5·Q	13	COMBV3XP:	CombV3 + 1.5·sismo X
4	COMBV4:	1.4·G + 1.5·Q	14	COMBV3XN:	CombV3 – 1.5·sismo X
5	COMBV1XP:	CombV1 + 1.5·sismo X	15	COMBV3YP:	CombV3 + 1.5·sismo Y
6	COMBV1XN:	CombV1 – 1.5·sismo X	16	COMBV3YN:	CombV3 – 1.5·sismo Y
7	COMBV1YP:	CombV1 + 1.5·sismo Y	17	COMBV4XP:	CombV4 + 1.5·sismo X
8	COMBV1YN:	CombV1 – 1.5·sismo Y	18	COMBV4XN:	CombV4 – 1.5·sismo X
9	COMBV2XP:	CombV2 + 1.5·sismo X	19	COMBV4YP:	CombV4 + 1.5·sismo Y
10	COMBV2XN:	CombV2 – 1.5·sismo X	20	COMBV4YN:	CombV4 – 1.5·sismo Y
-	INV:	inviluppo COMB1÷20			
-	INVSIS:	inviluppo SISMOX, SISMOY			

6.3.3.1 Verifiche di resistenza

Travi: flessione retta e taglio

La verifica allo stato limite ultimo si conduce col programma automatico, descritto nel Capitolo 4, che fornisce i moltiplicatori critici per la flessione e per il taglio. Le sezioni prese in considerazione sono le stesse degli altri modelli e sono in totale 2057 per l'edificio strategico e 23 per l'edificio civile. Si ricorda che la verifica si conduce per l'involuppo di tutte le combinazioni di carico. *In primis* si analizzano le sezioni armate come quelle del modello S1, successivamente, per le sezioni, che risultano non soddisfatte, si ripete la verifica con le correzioni del caso. Di seguito si riportano gli specchi riassuntivi delle verifiche a flessione retta (M-N) ed a taglio e torsione (T-T), in cui si legge il numero di sezioni con moltiplicatore critico minore di un certo valore e la relativa percentuale sul totale delle sezioni analizzate.

Edificio Strategico

Edificio Strategico_S3_travi				
coef. sicur	M-N	T-T	M-N %	T-T %
>2	1267	1861	61,6%	90,5%
2,0	790	196	38,4%	9,5%
1,5	302	47	14,7%	2,3%
1,4	179	33	8,7%	1,6%
1,3	72	19	3,5%	0,9%
1,2	31	8	1,5%	0,4%
1,1	21	1	1,0%	0,0%
1,0	19	0	0,9%	0,0%
0,9	19	0	0,9%	0,0%
0,8	19	0	0,9%	0,0%
0,7	18	0	0,9%	0,0%
0,6	16	0	0,8%	0,0%

Anche in questo caso il problema è dato dalle sezioni d'incastro delle travi nei setti. Per soddisfare le verifiche occorre incrementare le armature in alcuni elementi strutturali, tuttavia è possibile considerarne una riduzione in altri. In definitiva

ottimizzando le armature, si considerano ferri longitudinali di peso complessivo pari a 30.2 [ton], con un decremento rispetto a S1 del 1.57%, e ferri trasversali di peso totale 16.7 [ton], con decremento, considerando i decimali non riportati, del 0.34%.

Edificio Civile

La tabella riassuntiva dei risultati evidenzia, in questo caso, una sola verifica non soddisfatta per la verifica a flessione. In realtà, essendo il coefficiente di sicurezza di tale sezione pari a 0.97, la verifica potrebbe considerarsi comunque soddisfatta e comunque lo sarebbe con un modestissimo incremento di armatura.

Edificio Civile_S3_travi				
coef. sicur	M-N	T-T	M-N %	T-T %
5,0	149	91	73,4%	44,8%
3,5	107	38	52,7%	18,7%
3,0	84	22	41,4%	10,8%
2,5	53	11	26,1%	5,4%
2,0	29	5	14,3%	2,5%
1,8	23	4	11,3%	2,0%
1,6	11	0	5,4%	0,0%
1,4	8	0	3,9%	0,0%
1,2	1	0	0,5%	0,0%
1,0	1	0	0,5%	0,0%
0,9	0	0	0,0%	0,0%

Pilastri: presso-flessione deviata e taglio e torsione

Edificio Strategico

Le armature S1 servono e bastano anche per ottemperare alle verifiche di S3. Dall'analisi dei coefficienti di sicurezza si nota, anche in questo caso come in S1, che i coefficienti di sicurezza rispetto al taglio sono maggiori di quelli rispetto alla presso-flessione.

Edificio Strategico_S3_pilastr				
coef. secur	N-M	T-T	N-M %	T-T %
>2	207	435	44,8%	94,2%
2,0	255	26	55,2%	5,6%
1,5	24	0	5,2%	0,0%
1,4	6	0	1,3%	0,0%
1,3	1	0	0,2%	0,0%
1,2	0	0	0,0%	0,0%
1,1	0	0	0,0%	0,0%
1,0	0	0	0,0%	0,0%
0,9	0	0	0,0%	0,0%
0,8	0	0	0,0%	0,0%
0,7	0	0	0,0%	0,0%

Di seguito si riportano altre due tabelle riepilogative dell'analisi: nella prima si legge l'influenza del percorso di amplificazione del carico, descritto in 6.1.3, nella determinazione dei coefficienti di sicurezza minimi; si osserva che la maggioranza delle sezioni raggiungerebbe prima le deformazioni ultime se tutte e tre le sollecitazioni venissero amplificate proporzionalmente. Un numero non trascurabile di sezioni, invece, andrebbe in crisi prima se si amplificassero solo i momenti flettenti. Meno significativi sono, invece, gli altri percorsi di amplificazione.

Edificio Strategico_S3_pilastr – Amplificazioni di carico critiche		
percorso di carico	N° sez.	%
1 - Variabili: N, Mx, My	299	64,7%
2 - Variabili: Mx, My	146	31,6%
3 - Variabili: N, My	1	0,2%
4 - Variabili: N, Mx	0	0,0%
5 - Variabili: My	0	0,0%
6 - Variabili: Mx	0	0,0%
7 - Variabili: N	16	3,5%
	462	

Nella seconda tabella, invece, si riportano le condizioni di carico più gravose, ossia quelle per cui si ottiene il coefficiente di sicurezza minimo: si osserva che 13 sezioni, pari a 2.8% andrebbero in crisi per la più gravosa delle combinazioni dei carichi verticali, mentre tutte le altre raggiungerebbero la crisi per effetto di una delle combinazioni sismiche. Tra quest'ultime la maggioranza, il 78.6%, andrebbe in crisi quando i carichi verticali sono presenti con il loro massimo valore; una percentuale non trascurabile, il 14.1%, raggiungerebbe al contrario la crisi quando i carichi verticali sono al minimo del loro valore, mentre per la rimanente parte, meno significativa, si ottiene il minimo coefficiente per le situazioni intermedie.

Edificio Strategico_S3_pilastri - Combinazioni più gravose				
		N° sez.	%	
verticali	COMBV1	0	0,0%	1,0 G
	COMBV2	0	0,0%	1,4 G
	COMBV3	0	0,0%	1,0 G + 1,5 Q
	COMBV4	13	2,8%	1,4 G + 1,5 Q
sismiche	V1	65	14,1%	1,0 G + sismo
	V2	8	1,7%	1,4 G + sismo
	V3	13	2,8%	1,0 G + 1,5 Q + sismo
	V4	363	78,6%	1,4 G + 1,5 Q + sismo
		462		

Edificio Civile

Per i pilastri dell'edificio civile il cambio di metodo di verifica, dalle tensioni ammissibili allo stato limite ultimo, determina un sostanziale aumento dei coefficienti di sicurezza, dovuto allo sfruttamento più razionale dei materiali. Le armature S1, infatti, soddisfano le verifiche in maniera fin troppo abbondante, sicchè si prevede una riduzione delle armature longitudinali considerando barre $\phi 16$ al posto delle $\phi 22$. Con tale riduzione le sezioni risultano armate con percentuali di ferro vicine ai minimi di normativa; per le armature trasversali, invece, non è possibile considerare alcuna ulteriore riduzione.

Edificio Civile_S3_pilastri Armature S1					Edificio Civile_S3_pilastri Armature ridotte				
coef. sicur	N-M	T-T	N-M %	T-T %	coef. sicur	N-M	T-T	N-M %	T-T %
5,0	76	88	70,4%	81,5%	5,0	98	88	90,7%	81,5%
3,5	58	30	53,7%	27,8%	3,5	78	34	72,2%	31,5%
3,0	46	14	42,6%	13,0%	3,0	73	14	67,6%	13,0%
2,5	21	6	19,4%	5,6%	2,5	61	6	56,5%	5,6%
2,0	1	0	0,9%	0,0%	2,0	47	0	43,5%	0,0%
1,8	0	0	0,0%	0,0%	1,8	29	0	26,9%	0,0%
1,6	0	0	0,0%	0,0%	1,6	20	0	18,5%	0,0%
1,4	0	0	0,0%	0,0%	1,4	5	0	4,6%	0,0%
1,2	0	0	0,0%	0,0%	1,2	0	0	0,0%	0,0%
1,0	0	0	0,0%	0,0%	1,0	0	0	0,0%	0,0%

Il quantitativo di acciaio determinato è pari a 1.29 [ton], con una riduzione rispetto a S1 del 47.12%.

Per quanto riguarda il percorso di amplificazione del carico, descritto in 6.1.3, si osserva che il percorso numero 1 è ancora il più significativo, mentre circa il 30% delle sezioni raggiungerebbe prima le deformazioni ultime seguendo il percorso numero 2.

Edificio Civile_S3_pilastri – Amplificazioni di carico critiche		
percorso di carico	N° sez.	%
1 - Variabili: N, Mx, My	76	70,4%
2 - Variabili: Mx, My	32	29,6%
3 - Variabili: N, My	0	0,0%
4 - Variabili: N, Mx	0	0,0%
5 - Variabili: My	0	0,0%
6 - Variabili: Mx	0	0,0%
7 - Variabili: N	0	0,0%
	108	

La variazione di armatura, invece, porta i due percorsi esattamente al 50%, poiché variano la dimensione e la forma del dominio ultimo.

Dalla tabella seguente, invece, si evince che le combinazioni sismiche con i massimi carichi verticali risultano quasi sempre le più gravose, esattamente nel 97.2% dei casi.

Edificio Civile_S3_pilastri - Combinazioni più gravose				
Armature S1				
		N° sez.	%	
verticali	COMBV1	0	0,0%	1,0 G
	COMBV2	0	0,0%	1,4 G
	COMBV3	0	0,0%	1,0 G + 1,5 Q
	COMBV4	0	0,0%	1,4 G + 1,5 Q
sismiche	V1	2	1,9%	1,0 G + sismo
	V2	1	0,9%	1,4 G + sismo
	V3	0	0,0%	1,0 G + 1,5 Q + sismo
	V4	105	97,2%	1,4 G + 1,5 Q + sismo
		108		

Ciò vale anche per l'analisi con le armature ridotte, ma la percentuale di sezioni che hanno le combinazioni V4 come critiche si riduce da 97.2% a 81.5%, a vantaggio prevalentemente delle combinazioni V1.

Edificio Civile_S3_pilastri - Combinazioni più gravose				
Armature ridotte				
		N° sez.	%	
Verticali	COMBV1	0	0,0%	1,0 G
	COMBV2	0	0,0%	1,4 G
	COMBV3	0	0,0%	1,0 G + 1,5 Q
	COMBV4	0	0,0%	1,4 G + 1,5 Q
Sismiche	V1	11	10,2%	1,0 G + sismo
	V2	4	3,7%	1,4 G + sismo
	V3	5	4,6%	1,0 G + 1,5 Q + sismo
	V4	88	81,5%	1,4 G + 1,5 Q + sismo
		108		

Setti e Nuclei: presso-flessione deviata e taglio e torsione (Edificio Strategico)

Di seguito si riporta lo specchio riassuntivo delle verifiche a presso-flessione: si osserva che con la verifica allo stato limite ultimo si riesce a ridurre l'armatura sul setto P3 (vano scala semi-ellittico) sostituendo le barre $\phi 26$ del modello S1 con barre $\phi 20$. La possibilità di far lavorare l'acciaio anche in campo plastico, infatti, consente di ridurre il quantitativo di acciaio nelle zone più sollecitate.

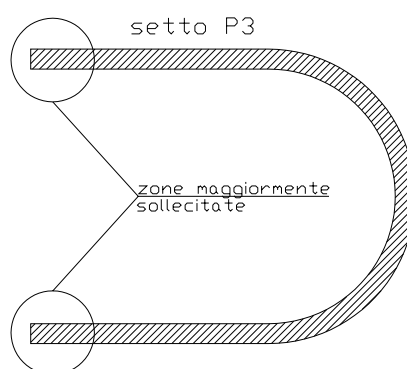


Figura 6-6 Edificio Strategico - Setto P3

Edificio Strategico_S3_setti_pflex					
Setto	Livell.	Story	Comb	λ_c	armatura verticale
P1	4-8	STORY4	COMBV1XN	3,13	$\phi 12/20''$
P1	0-3	STORY2	COMBV1XN	1,28	$\phi 16/20''$
P2	4-8	STORY4	COMBV1XP	2,00	$\phi 12/20''$
P2	0-3	STORY2	COMBV1XP	1,12	$\phi 16/20''$
P3	4-8	STORY4	COMBV2YNEP	1,89	$\phi 12/20''$
P3	0-3	STORY1-1	COMBV4YNEN	1,41	$\phi 20/20''$
P4	4-8	STORY4	COMBV1YPEP	2,50	$\phi 12/20''$
P4	0-3	STORY2	COMBV1XP	1,35	$\phi 20/20''$
P5	0-1	STORY1-1	COMBV3YPEN	4,76	$\phi 12/20''$
P6	0-1	STORY1-1	COMBV4YPEP	2,86	$\phi 12/20''$

In definitiva il quantitativo di acciaio delle armature verticali è pari a 18.0 [ton], ossia con un incremento negativo rispetto a S1 pari a -2,3%.

Di seguito si riportano le combinazioni di carico critiche, che sono ovviamente tutte sismiche. E' interessante osservare come, per la maggioranza delle sezioni, le combinazioni critiche siano quelle abbinate ai minimi carichi verticali.

Edificio Strategico_S3_setti_pflex - Combinazioni più gravose				
		N° sez.	%	
verticali	COMBV1	0	0,0%	1,0 G
	COMBV2	0	0,0%	1,4 G
	COMBV3	0	0,0%	1,0 G + 1,5 Q
	COMBV4	0	0,0%	1,4 G + 1,5 Q
sismiche	V1	6	60,0%	1,0 G + sismo
	V2	1	10,0%	1,4 G + sismo
	V3	1	10,0%	1,0 G + 1,5 Q + sismo
	V4	2	20,0%	1,4 G + 1,5 Q + sismo
		10		

La verifica a taglio si esegue su tutti i setti a ciascun livello e si considerano le sollecitazioni massime e minime del taglio agente lungo le due direzioni di riferimento di ciascun setto; si eseguono quindi 144 verifiche. Si considerano inoltre, in ciascuna verifica, lo sforzo normale e il momento flettente associati a tali valori del taglio.

Anche la verifica a taglio, così come quella a presso-flessione, consente di ridurre i quantitativi di armatura orizzontale rispetto a quelli di S1. Da una parte, infatti, il numero di sezioni che richiede specifica armatura a taglio è maggiore, ma dall'altra la verifica allo stato limite ultimo risulta sempre soddisfatta considerando il minimo di armatura orizzontale tecnologicamente necessaria, costituita da $\phi 8/20''$, eccezion fatta per il nucleo P4 allo *story*2, che necessita di $\phi 12/20''$.

Il coefficiente di sicurezza minimo rispetto a V_{Rd2} è pari a 1.06, per cui le verifiche risultano soddisfatte.

Edificio Strategico_S3_setti_taglio		
coef. secur	N λ_{Rd2}	λ_{Rd2}
2,0	32	22,2%
1,5	15	10,4%
1,4	11	7,6%
1,3	6	4,2%
1,2	5	3,5%
1,1	3	2,1%
1,0	0	0,0%

Il quantitativo di acciaio per armatura orizzontale nei setti vale pertanto 11.4 [ton], con una riduzione dello 0.9% rispetto a S1.

Per quanto riguarda le combinazioni più gravose, si osserva che le due combinazioni estreme, con i carichi verticali massimi e minimi, determinano il maggior numero di casi critici nelle verifiche con circa 80%.

Edificio Strategico_S3_setti_taglio - Combinazioni più gravose				
		N° sez.	%	
verticali	COMBV1	0	0,0%	1,0 G
	COMBV2	0	0,0%	1,4 G
	COMBV3	0	0,0%	1,0 G + 1,5 Q
	COMBV4	0	0,0%	1,4 G + 1,5 Q
sismiche	V1	57	39,6%	1,0 G + sismo
	V2	15	10,4%	1,4 G + sismo
	V3	15	10,4%	1,0 G + 1,5 Q + sismo
	V4	57	39,6%	1,4 G + 1,5 Q + sismo
		144		

6.3.3.2 Verifiche spostamenti di interpiano

La verifica degli spostamenti da condurre in questo caso è analoga a quella prevista per il modello S1, salvo cambiare il valore di X. Di seguito si riportano le due tabelle descritte in 6.3.1.2, con l'elenco dei simboli utilizzati.

Nella prima delle tabelle seguenti si riportano, per ciascuna direzione di riferimento:

h altezza di interpiano;

η_p spostamenti relativi elastici dovuti ad azioni diverse dal sismo;

η_d spostamenti relativi dovuti al sismo;

$\eta_t = \frac{\eta_p \pm \lambda \cdot \eta_d}{X}$ spostamenti relativi totali;

in cui:

$\lambda = 4$ funzione del coefficiente di protezione sismica I;

$X = 1.5$ per calcolo effettuato agli stati limite.

EDIFICIO STRATEGICO – CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI										
			Direzione X				Direzione Y			
	Livello	h [mm]	η_p [mm]	η_d [mm]	η_{tx}^+ [mm]	η_{tx}^- [mm]	η_p [mm]	η_d [mm]	η_{ty}^+ [mm]	η_{ty}^- [mm]
ST1-1 - BASE	1°	1800	0,01	0,15	0,41	-0,40	0,01	0,29	0,78	-0,76
ST1 - BASE	1°	2800	0,00	0,21	0,56	-0,55	0,02	0,79	2,12	-2,10
ST2 - ST1-1	2°	4900	0,05	2,44	6,53	-6,47	0,06	4,03	10,80	-10,72
ST2 - ST1	2°	3900	0,05	2,38	6,39	-6,32	0,05	3,53	9,45	-9,38
ST3 - ST2	3°	4000	0,10	3,59	9,64	-9,51	0,09	4,48	11,99	-11,88
ST4 - ST3	4°	3400	0,13	3,50	9,42	-9,25	0,09	3,88	10,41	-10,29
ST5 - ST4	5°	3400	0,15	3,43	9,24	-9,05	0,10	3,64	9,77	-9,63
ST6 - ST5	6°	3400	0,18	3,34	9,03	-8,79	0,11	3,37	9,07	-8,91

EDIFICIO CIVILE – CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI										
			Direzione X				Direzione Y			
	Livello	h [mm]	η_p [mm]	η_d [mm]	η_{tx}^+ [mm]	η_{tx}^- [mm]	η_p [mm]	η_d [mm]	η_{ty}^+ [mm]	η_{ty}^- [mm]
copert. -sottot.	5°	2140	0,15	0,75	1,10	-0,90	0,00	0,15	0,20	-0,20
sottot. - 3°P	4°	2930	0,00	3,30	4,40	-4,40	0,15	2,55	3,50	-3,30
3°P - 2°P	3°	2930	0,15	3,45	4,70	-4,50	0,00	3,45	4,60	-4,60
2°P - 1°P	2°	2930	0,00	3,15	4,20	-4,20	0,00	3,60	4,80	-4,80
1°P - BASE	1°	2760	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Si osserva come, per entrambi gli edifici, gli spostamenti relativi sismici siano uguali a circa una volta e mezza quelli di S1 e, di conseguenza, gli spostamenti relativi totali ed i coefficienti di sicurezza riportati di seguito siano praticamente uguali a quelli del modello S1.

Nella seconda tabella si riportano, per ciascuna direzione di riferimento:

$\eta_{lim} = 0.004 \cdot h$ spostamenti limite d'interpiano prescritti dalla norma per garantirsi dal danneggiamenti di elementi non strutturali ed impianti, nell'ipotesi di elementi non strutturali realizzati in modo da non interferire con la struttura;

esito verifica “positivo” se, per ciascuna direzione, $\eta_t \leq \eta_{lim}$;

$\lambda = \frac{\eta_{lim}}{\eta_{ti}}$ coefficiente di sicurezza.

EDIFICIO STRATEGICO – VERIFICHE DI SPOSTAMENTI										
			Verifica direzione X				Verifica direzione Y			
	Livello	η_{lim}	λ_x^+	esito verifica	λ_x^-	esito verifica	λ_y^+	esito verifica	λ_y^-	esito verifica
		[mm]	[-]		[-]		[-]		[-]	
ST1-1 - BASE	1°	7,20	17,5	positivo	17,8	positivo	9,3	positivo	9,4	positivo
ST1 - BASE	1°	11,20	20,1	positivo	20,3	positivo	5,3	positivo	5,3	positivo
ST2 - ST1-1	2°	19,60	3,0	positivo	3,0	positivo	1,8	positivo	1,8	positivo
ST2 - ST1	2°	15,60	2,4	positivo	2,5	positivo	1,7	positivo	1,7	positivo
ST3 - ST2	3°	16,00	1,7	positivo	1,7	positivo	1,3	positivo	1,3	positivo
ST4 - ST3	4°	13,60	1,4	positivo	1,5	positivo	1,3	positivo	1,3	positivo
ST5 - ST4	5°	13,60	1,5	positivo	1,5	positivo	1,4	positivo	1,4	positivo
ST6 - ST5	6°	13,60	1,5	positivo	1,5	positivo	1,5	positivo	1,5	positivo

EDIFICIO CIVILE – VERIFICHE DI SPOSTAMENTI										
			Verifica direzione X				Verifica direzione Y			
	Livello	η_{lim}	λ_x^+	esito verifica	λ_x^-	esito verifica	λ_y^+	esito verifica	λ_y^-	esito verifica
		[mm]	[-]		[-]		[-]		[-]	
copert. -sottot.	5°	8,56	7,8	positivo	9,5	positivo	42,8	positivo	42,8	positivo
sottot. - 3°P	4°	11,72	2,7	positivo	2,7	positivo	3,3	positivo	3,6	positivo
3°P - 2°P	3°	11,72	2,5	positivo	2,6	positivo	2,5	positivo	2,5	positivo
2°P - 1°P	2°	11,72	2,8	positivo	2,8	positivo	2,4	positivo	2,4	positivo
1°P - BASE	1°	11,04	-	positivo	-	positivo	-	positivo	-	positivo

6.3.4 Calcolo e verifiche modelli S4 (DM '96 – S.L.U. – angolo sismo var.)

L'analisi e la verifica condotte per il modello S4 sono analoghe a quelle del modello S3, ma in più si considerano le azioni sismiche agenti lungo direzioni inclinate rispetto a quelle di riferimento con angolo variabile con passo 30°.

Per la determinazione delle forze sismiche e delle eccentricità accidentali vale quanto già detto per il modello S1 in 6.3.1 e per il modello S2 in 0.

I carichi verticali, come già detto in 4.3.2 per il modello S3, si combinano secondo l'espressione:

$$\alpha'_p = \gamma_g G_k + \gamma_p P_k + \gamma_q [Q_{tk} + \Sigma (\psi_{0i} Q_{ik})]$$

Pertanto, a partire dalle condizioni di carico elementari si considerano, per l'edificio strategico, 92 combinazioni di carico. Per l'edificio civile, invece, si dovrebbero considerare 52 combinazioni, ma poiché si è visto nel modello S3 che le combinazioni con i massimi carichi verticali, tipo V4, sono generalmente le più gravose, si considerano un numero di combinazioni minore e pari a 16.

Edificio Civile – Combinazioni di carico					
1	COMBV1:	1.0 · G	9	COMBV4_120:	CombV4 + 1.5·sismo 120°
2	COMBV2:	1.4 · G	10	COMBV4_150:	CombV4 + 1.5·sismo 150°
3	COMBV3:	1.0 · G + 1.5 · Q	11	COMBV4_180:	CombV4 + 1.5·sismo 180°
4	COMBV4:	1.4 · G + 1.5 · Q	12	COMBV4_210:	CombV4 + 1.5·sismo 210°
5	COMBV4_000:	CombV4 + 1.5·sismo 0°	13	COMBV4_240:	CombV4 + 1.5·sismo 240°
6	COMBV4_030:	CombV4 + 1.5·sismo 30°	14	COMBV4_270:	CombV4 + 1.5·sismo 270°
7	COMBV4_060:	CombV4 + 1.5·sismo 60°	15	COMBV4_300:	CombV4 + 1.5·sismo 300°
8	COMBV4_090:	CombV4 + 1.5 · sismo 90°	16	COMBV4_330:	CombV4 + 1.5·sismo 330°
-	INV:	involuppo COMB1÷16			
-	INVSIS:	involuppo SISMO000÷SISMO330			

Edificio Strategico – Combinazioni di carico		
1	COMBV1:	$1.0 \cdot G$
2	COMBV2:	$1.4 \cdot G$
3	COMBV3:	$1.0 \cdot G + 1.5 \cdot Q$
4	COMBV4:	$1.4 \cdot G + 1.5 \cdot Q$
5\27\49\71	COMBV1\2\3\4_000P:	CombV1\2\3\4 + $1.5 \cdot \text{sismo } 0^\circ$
6\28\50\72	COMBV1\2\3\4_030P:	CombV1\2\3\4 + $1.5 \cdot \text{sismo } 30^\circ$
7\29\51\73	COMBV1\2\3\4_060P :	CombV1\2\3\4 + $1.5 \cdot \text{sismo } 60^\circ$
8\30\52\74	COMBV1\2\3\4_090P:	CombV1\2\3\4 + $1.5 \cdot \text{sismo } 90^\circ$
9\31\53\75	COMBV1\2\3\4_120P:	CombV1\2\3\4 + $1.5 \cdot \text{sismo } 120^\circ$
10\32\54\76	COMBV1\2\3\4_150P:	CombV1\2\3\4 + $1.5 \cdot \text{sismo } 150^\circ$
11\33\55\77	COMBV1\2\3\4_180P:	CombV1\2\3\4 + $1.5 \cdot \text{sismo } 180^\circ$
12\34\56\78	COMBV1\2\3\4_210P:	CombV1\2\3\4 + $1.5 \cdot \text{sismo } 210^\circ$
13\35\57\79	COMBV1\2\3\4_240P:	CombV1\2\3\4 + $1.5 \cdot \text{sismo } 240^\circ$
14\36\58\80	COMBV1\2\3\4_270P:	CombV1\2\3\4 + $1.5 \cdot \text{sismo } 270^\circ$
15\37\59\81	COMBV1\2\3\4_300P:	CombV1\2\3\4 + $1.5 \cdot \text{sismo } 300^\circ$
16\38\60\82	COMBV1\2\3\4_330P:	CombV1\2\3\4 + $1.5 \cdot \text{sismo } 330^\circ$
17\39\61\83	COMBV1\2\3\4_030N:	CombV1\2\3\4 - $1.5 \cdot \text{sismo } 30^\circ$
18\40\62\84	COMBV1\2\3\4_060N :	CombV1\2\3\4 - $1.5 \cdot \text{sismo } 60^\circ$
19\41\63\85	COMBV1\2\3\4_090N:	CombV1\2\3\4 - $1.5 \cdot \text{sismo } 90^\circ$
20\42\64\86	COMBV1\2\3\4_120N:	CombV1\2\3\4 - $1.5 \cdot \text{sismo } 120^\circ$
21\43\65\87	COMBV1\2\3\4_150N:	CombV1\2\3\4 - $1.5 \cdot \text{sismo } 150^\circ$
22\44\66\88	COMBV1\2\3\4_210N:	CombV1\2\3\4 - $1.5 \cdot \text{sismo } 210^\circ$
23\45\67\89	COMBV1\2\3\4_240N:	CombV1\2\3\4 - $1.5 \cdot \text{sismo } 240^\circ$
24\46\68\90	COMBV1\2\3\4_270N:	CombV1\2\3\4 - $1.5 \cdot \text{sismo } 270^\circ$
25\47\69\91	COMBV1\2\3\4_300N:	CombV1\2\3\4 - $1.5 \cdot \text{sismo } 300^\circ$
26\48\70\92	COMBV1\2\3\4_330N:	CombV1\2\3\4 - $1.5 \cdot \text{sismo } 330^\circ$
-	INV:	involuppo COMB1÷92
-	INVSIS:	involuppo SISMO000÷SISMO330

6.3.4.1 Verifiche di resistenza

Travi: flessione retta e taglio

Edificio Strategico

Così come per il confronto tra i modelli S2 e S1, anche in questo caso osserviamo una diminuzione dei coefficienti di sicurezza delle sezioni, più significativa per il taglio; a sinistra si trova la prima verifica, con le armature di S1, a destra quella con le armature incrementate.

Edificio Strategico_S4_travi armature S1					Edificio Strategico_S4_travi armature ridotte				
coef. secur	M-N	T-T	M-N %	T-T %	coef. secur	M-N	T-T	M-N %	T-T %
>2	954	1833	46,4%	89,1%	>2	1121	1828	54,5%	88,9%
2,0	1103	224	53,6%	10,9%	2,0	936	229	45,5%	11,1%
1,5	728	120	35,4%	5,8%	1,5	517	88	25,1%	4,3%
1,4	581	106	28,2%	5,2%	1,4	409	64	19,9%	3,1%
1,3	426	82	20,7%	4,0%	1,3	300	37	14,6%	1,8%
1,2	302	67	14,7%	3,3%	1,2	231	19	11,2%	0,9%
1,1	197	61	9,6%	3,0%	1,1	156	10	7,6%	0,5%
1,0	151	53	7,3%	2,6%	1,0	0	0	0,0%	0,0%
0,9	115	42	5,6%	2,0%	0,9	0	0	0,0%	0,0%
0,8	84	40	4,1%	1,9%	0,8	0	0	0,0%	0,0%
0,7	69	34	3,4%	1,7%	0,7	0	0	0,0%	0,0%
0,6	58	12	2,8%	0,6%	0,6	0	0	0,0%	0,0%

A differenza del modello S2, però, in questo caso la verifica allo stato limite ultimo consente comunque di soddisfare i requisiti normativi incrementando l'armatura a taglio.

Il quantitativo di armatura longitudinale richiesto è pari a 30.8 [ton], con un incremento rispetto a S1 del 0.28%, mentre il quantitativo di armatura trasversale è pari a 17.3 [ton], con incremento del 3.20%.

Edificio Civile

Analogamente all'edificio strategico anche per l'edificio civile i risultati dell'analisi S4 sono appena peggiori di quelli dell'analisi S3 e comunque la riduzione dei coefficienti non riguarda le sezioni più sollecitate. Si ricorda che l'unica sezione con coefficiente minore di 1 si ritiene comunque soddisfatta poiché il coefficiente di sicurezza di tale sezione è pari a 0.97.

Edificio Civile_S4_travi				
coef. sicur	M-N	T-T	M-N %	T-T %
5,0	151	91	74,4%	44,8%
3,5	102	37	50,2%	18,2%
3,0	85	23	41,9%	11,3%
2,5	51	11	25,1%	5,4%
2,0	29	5	14,3%	2,5%
1,8	20	3	9,9%	1,5%
1,6	11	0	5,4%	0,0%
1,4	7	0	3,4%	0,0%
1,2	1	0	0,5%	0,0%
1,0	1	0	0,5%	0,0%
0,9	0	0	0,0%	0,0%

Pertanto non si considerano variazioni di armatura rispetto a S1.

Pilastri: presso-flessione deviata e taglio e torsione

Edificio Strategico

Anche per questa analisi le armature S1 sono sufficienti per ottemperare le verifiche; inoltre non si riscontrano significative variazioni dei coefficienti rispetto a quelli del modello S3.

Edificio Strategico_S4_pilastrì				
coef. secur	N-M	T-T	N-M %	T-T %
>2	207	435	44,8%	94,2%
2,0	255	26	55,2%	5,6%
1,5	24	0	5,2%	0,0%
1,4	6	0	1,3%	0,0%
1,3	1	0	0,2%	0,0%
1,2	0	0	0,0%	0,0%
1,1	0	0	0,0%	0,0%
1,0	0	0	0,0%	0,0%

Edificio Civile

In linea con i risultati di S3 anche in questa analisi si ritrovano coefficienti di sicurezza eccessivamente alti, tanto da giustificare una riduzione delle armature longitudinale fino a quantitativi vicini ai minimi di normativa.

Edificio Civile_S4_pilastrì					Edificio Civile_S4_pilastrì				
Armature S1					Armature ridotte				
coef. secur	N-M	T-T	N-M %	T-T %	coef. secur	N-M	T-T	N-M %	T-T %
5,0	81	90	75,0%	83,3%	5,0	98	90	90,7%	83,3%
3,5	60	66	55,6%	61,1%	3,5	82	68	75,9%	63,0%
3,0	51	24	47,2%	22,2%	3,0	73	24	67,6%	22,2%
2,5	26	8	24,1%	7,4%	2,5	60	10	55,6%	9,3%
2,0	3	2	2,8%	1,9%	2,0	51	2	47,2%	1,9%
1,8	0	0	0,0%	0,0%	1,8	36	0	33,3%	0,0%
1,6	0	0	0,0%	0,0%	1,6	27	0	25,0%	0,0%
1,4	0	0	0,0%	0,0%	1,4	6	0	5,6%	0,0%
1,2	0	0	0,0%	0,0%	1,2	0	0	0,0%	0,0%
1,0	0	0	0,0%	0,0%	1,0	0	0	0,0%	0,0%

Il quantitativo di acciaio per l'armatura longitudinale, già determinato in S3, è pari a 1.29 [ton], con una riduzione rispetto a S1 del 47.12%; l'armatura a taglio resta invece invariata, essendo, ricordiamo, già vicina ai minimi di normativa.

Setti e Nuclei: presso-flessione deviata e taglio e torsione (Edificio Strategico)

Di seguito si riporta lo specchio riassuntivo delle verifiche a presso-flessione. Così come osservato nel confronto tra S2 e S1, analogamente tra S4 e S3 si riscontrano gli stessi coefficienti di sicurezza, dovuti al fatto che le combinazioni critiche sono sempre le stesse, ad eccezione del nucleo P1. Anche in questo caso P1 registra un calo del coefficiente, ma tale da non inficiare l'esito positivo della verifica.

Edificio Strategico_S4_setti_pflex					
Setto	Livell.	Story	Comb	λ_c	armatura verticale
P1	4-8	STORY4	COMBV1150P	2,63	$\phi 12/20''$
P1	0-3	STORY2	COMBV1180P	1,28	$\phi 16/20''$
P2	4-8	STORY4	COMBV1000P	2,00	$\phi 12/20''$
P2	0-3	STORY2	COMBV1000P	1,12	$\phi 16/20''$
P3	4-8	STORY4	COMBV2090N	1,89	$\phi 12/20''$
P3	0-3	STORY1-1	COMBV4270P	1,41	$\phi 20/20''$
P4	4-8	STORY4	COMBV1180P	2,50	$\phi 12/20''$
P4	0-3	STORY2	COMBV1180P	1,35	$\phi 20/20''$
P5	0-1	STORY1-1	COMBV3270N	4,76	$\phi 12/20''$
P6	0-1	STORY1-1	COMBV3090P	2,86	$\phi 12/20''$

In definitiva il quantitativo di acciaio delle armature verticali è pari a quello di S3: 18.0 [ton], ossia con un decremento rispetto a S1 pari al 2.3%.

Anche per la verifica a taglio e torsione i coefficienti di sicurezza sono praticamente uguali a quelli del modello S3, quindi non è necessario incrementare l'armatura a taglio. Pertanto il quantitativo di acciaio per armatura orizzontale nei setti vale sempre 11.4 [ton], con una riduzione percentuale del 0.9% rispetto a S1.

Edificio Strategico_S4_setti_taglio		
coef. secur	N λ_{Rd2}	λ_{Rd2}
2,0	32	22,2%
1,5	13	9,0%
1,4	11	7,6%
1,3	6	4,2%
1,2	5	3,5%
1,1	2	1,4%
1,0	0	0,0%

6.3.4.2 Verifiche spostamenti di interpiano

La verifica degli spostamenti risulta esattamente identica a quella del modello S3 e riportata in 6.3.3.2, in quanto gli spostamenti massimi si verificano, per entrambi gli edifici, quando le azioni sismiche agiscono lungo le due direzioni di riferimento.

6.3.5 Calcolo e verifiche modelli S5 (OPCM 3274 – Classe B)

Secondo la nuova normativa l'analisi statica equivalente può essere utilizzata solo per le strutture che soddisfano i requisiti di regolarità.

L'edificio strategico rispetta i requisiti di regolarità in pianta ma non quelli in altezza, in quanto non tutti gli elementi resistenti (pareti dei piani interrati) si sviluppano per tutta l'altezza dell'edificio; conseguentemente, vi è un brusco cambio di rigidezza al primo livello fuori terra. Sebbene l'assenza di tale requisito di regolarità comporti l'obbligo di un metodo di analisi più complesso, è stata comunque eseguita un'analisi statica per valutare le conseguenze operative di tale

pratica progettuale. La struttura dell'edificio strategico può considerarsi “mista telaio – pareti” in quanto al telaio è affidata la gran parte della resistenza ai carichi verticali, mentre i setti assorbono l'aliquota più significativa delle azioni orizzontali.

La struttura dell'edificio civile, invece, può considerarsi a telaio semplice incastrato nei setti del livello interrato, questi ultimi estremamente più rigidi dei pilastri fuori terra, come si evince dalla verifica degli spostamenti, riportata di seguito in 6.3.1.2. Il pilastro del vano scala, invece, che si interrompe al 3° livello, determina una diminuzione di rigidezza inferiore al 30%; in particolare, la rigidezza è stata assunta proporzionale all'inerzia dei pilastri:

$$\begin{array}{ll} \text{in dir. X:} & \Sigma I_X^{3^{\circ}liv} = 860000\text{cm}^4, \quad \Sigma I_X^{30 \times 40} = 160000\text{cm}^4; \\ \text{in dir. Y:} & \Sigma I_Y^{3^{\circ}liv} = 930000\text{cm}^4, \quad \Sigma I_Y^{30 \times 40} = 90000\text{cm}^4. \end{array}$$

Pertanto, è lecito considerare l'analisi statica per l'edificio civile.

Per determinare le forze sismiche agenti sulla struttura occorre innanzi tutto definire lo spettro di progetto allo stato limite ultimo per le verifiche strutturali e quello allo stato limite di danno per le verifiche degli spostamenti.

Lo spettro di risposta elastico è stato valutato assumendo che gli edifici si trovino in zona 2 su suolo di tipo B:

a_g	accelerazione orizzontale massima	$= 0.25 \cdot g$
S	fattore del profilo stratigrafico del sottosuolo	$= 1.25$
T_B	periodo corrispondente all'inizio del ramo piatto	$= 0.15[\text{sec}]$
T_C	periodo corrispondente alla fine del ramo piatto	$= 0.50[\text{sec}]$
T_D	periodo corrispondente al cambio di parabola	$= 2.50[\text{sec}]$

inoltre:

ξ	smorz. viscoso equivalente	$= 5\%$
η	fattore di smorzamento	$= 1$

Le ordinate dello spettro elastico corrispondenti ai valori suddetti sono riportati in Figura 6-7 e Figura 6-8. Nelle figure sono diagrammati anche gli spettri di progetto allo stato limite di danno nonché gli spettri allo stato limite ultimo da utilizzare per le verifiche strutturali in classe di duttilità bassa e alta. Quest'ultimo spettro, in particolare, è utilizzato nell'analisi S6 riportata in 6.3.6.

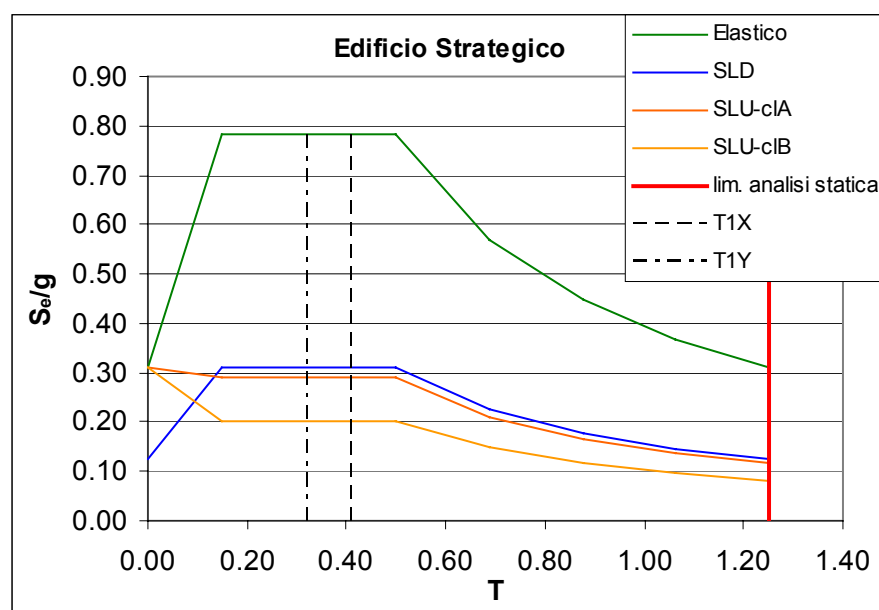


Figura 6-7 - Edificio Strategico - Spettri di risposta dell'accelerazione

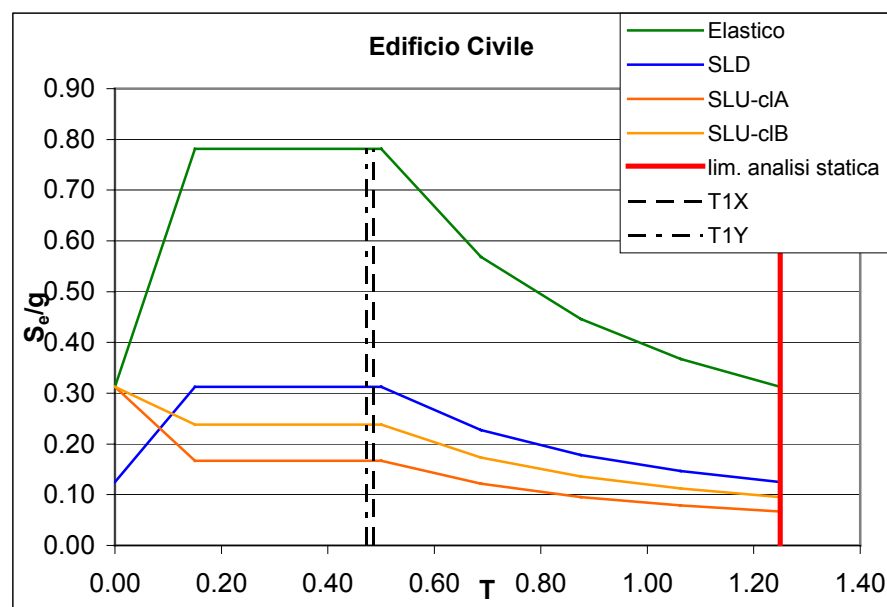


Figura 6-8 Edificio Civile - Spettri di risposta dell'accelerazione

Gli spettri allo stato limite di danno si ottengono dividendo quelli elastici per il fattore 2.5. Il fattore di struttura necessario per valutare lo spettro di progetto allo stato limite ultimo, invece, è dato da:

$$q = q_0 \cdot K_D \cdot K_R$$

dove: q_0 è il fattore di tipologia strutturale = $C \cdot \alpha_u / \alpha_1$;

K_D è il fattore di duttilità;

K_R è il fattore di regolarità.

I periodi fondamentali di vibrazione, necessari per determinare le ordinate spettrali e quindi le forze sismiche, possono determinarsi con l'ausilio dei modelli di calcolo agli elementi finiti, che forniscono per i due edifici i valori riportati nella Tabella 6-5. Entrambe le coppie di valori sono comprese tra T_B e T_C pertanto l'ordinata spettrale da considerare e, di conseguenza, la forza sismica sono uguali in entrambe le direzioni. In Tabella 6-5 sono riportati i valori delle ordinate spettrali allo stato limite ultimo, in classe di duttilità bassa e alta, e quelli allo stato limite di danno.

Tabella 6-5 Coefficienti di struttura, periodi fondamentali di vibrazione ed ordinate spettrali

	Edificio strategico	Edificio civile		Edificio strateg.	Edificio civile
α_u / α_1	1.2	1.3	T_x	0.41[sec]	0.49[sec]
q_0	$4 \cdot \alpha_u / \alpha_1$	$4.5 \cdot \alpha_u / \alpha_1$	T_y	0.32[sec]	0.47[sec]
K_R	0.8	0.8	$S_d^{SLU,B}(T)$	$0.29 \cdot g$	$0.24 \cdot g$
K_{D_clB}	0.7	0.7	$S_d^{SLU,A}(T)$	$0.20 \cdot g$	$0.17 \cdot g$
q_{clB}	2.69	3.28	$S_d^{SLD}(T)$	$0.31 \cdot g$	$0.31 \cdot g$
K_{D_clA}	1.0	1.0			
q_{clA}	3.84	4.68			

Le azioni sismiche globali si determinano con la formula:

$$F_h = W \cdot \lambda \cdot S_d(T_1) / g$$

Per l'edificio strategico le forze sismiche allo stato limite ultimo, in classe di duttilità alta e bassa, e per lo stato limite di danno valgono rispettivamente:

$$F_{h_SLU,A} = 8978 \text{ kN}$$

$$F_{h_SLU,B} = 12825 \text{ kN}$$

$$F_{h_SLD} = 13790 \text{ kN}.$$

In alternativa si sarebbe potuto determinare il periodo fondamentale di vibrazione mediante la formula approssimata:

$$T_1 = C \cdot H^{3/4} = 0.55 \text{ [sec]}$$

dove: C coefficiente di struttura = 0.05 (struttura non a telaio)

H altezza dell'edificio = 24.60 m

Poichè $T_1 > T_B$ si ottengono ordinate spettrali e quindi forze sismiche minori di quelle valutate in precedenza; per lo stato limite ultimo e di danno si ha:

$$S_d(T_1) = 0.26 \cdot g \Rightarrow F_{H,SLU} = 11610 \text{ kN}$$

$$S_d(T_1) = 0.28 \cdot g \Rightarrow F_{H,SLD} = 11485 \text{ kN}.$$

Per ottenere le stesse forze sismiche si dovrebbe considerare $H = 20.90 \text{ m}$ ($T_1 = 0.49$), ossia non si dovrebbe considerare l'ultimo livello costituito dalla sopraelevazione in acciaio.

Di seguito, in Tabella 6-6, si riportano i pesi sismici e le forze statiche di piano.

Tabella 6-6 Edificio Strategico - Forze sismiche, classe di duttilità bassa

QUOTA	PIANO	W_i	h_i	$W_i h_i$	γ_i	F_{i_SLU}	F_{i_SLD}
		[kN]	[m]			[kN]	[kN]
18,95	8	1890	24,60	46494	0,08	1018	1095
15,25	7	6870	20,90	143583	0,25	3145	3382
11,85	6	7340	17,50	128450	0,22	2814	3025
8,45	5	7490	14,10	105609	0,18	2313	2487
5,05	4	7495	10,70	80197	0,14	1757	1889
1,05	3	7450	6,70	49915	0,09	1093	1176
-2,85	2	7150	2,80	20020	0,03	439	472
-3,85	1	6230	1,80	11214	0,02	246	264
		51915		585482		12825	13790

Si osserva come il peso sismico sia minore di quello considerato nelle analisi con la vecchia normativa, che è pari a 56525 [kN].

Si ricorda, infine, che occorre considerare il coefficiente di protezione sismica $I = 1.4$ nelle combinazioni di carico.

Per l'edificio civile, considerando le ordinate spettrali corrispondenti ai periodi fondamentali di vibrazione riportati sopra, si ha:

$$F_{i_SLU,A} = 468 \text{ kN}$$

$$F_{i_SLU,B} = 669 \text{ kN}$$

$$F_{i_SLD} = 877 \text{ kN}.$$

In questo caso l'approccio semplificato per la determinazione del periodo T_1 non comporta variazioni di sollecitazione sismica, nonostante le perplessità sui valori da assegnare alle grandezze C e H . Si potrebbe, infatti, considerare la struttura a "telaio con i setti alla base" ed altezza media tra 11.55 e 12.70 m; in tal caso si avrebbe: $T_1 = 0.05 \cdot 12.125^{3/4} = 0.32 \text{ sec}$. In alternativa si potrebbe ipotizzare che la struttura a "telaio" in elevazione sia fondata sui setti rigidi del piano interrato, in tal caso si

avrebbe: $T_1 = 0.075 \cdot 9.37^{3/4} = 0.40$ sec. In entrambi i casi ci si trova sul ramo piatto dello spettro, quindi l'ordinata spettrale non cambia.

Di seguito, in, si riportano i pesi sismici e le forze statiche di piano.

Tabella 6-7 Edificio Civile - Forze sismiche

QUOTA	PIANO	W_i	h_i	$W_i h_i$	γ_i	F_{i_SLU}	F_{i_SLD}
		[kN]	[m]			[kN]	[kN]
12,70	c	410	12,70	5207	0,21	139	182
11,55	4	600	11,55	6930	0,28	185	243
8,62	3	730	8,62	6293	0,25	168	220
5,69	2	780	5,69	4438	0,18	119	155
2,76	1	780	2,76	2153	0,09	58	75
		3300		25021		669	877

In questo caso il peso sismico di fatto non varia rispetto a quello considerato nelle analisi con la vecchia normativa.

Le masse per la determinazione dei pesi sismici sono date dall'espressione: $G_k + \sum_i \psi_{Ei} Q_{ki}$, in cui i coefficienti $\psi_{Ei} = \psi_{2i} \cdot \phi$ sono tabellati in normativa; i pesi sismici per i modelli S5 e S6 sono risultati inferiori a quelli calcolati con la normativa previgente.

I carichi verticali sono stati valutati in base all'espressione:

$$\sum_{j=1}^m (\gamma_{Gj} \cdot \gamma_{Ej} \cdot G_{kj}) + \gamma_{Qi} \cdot \gamma_{EQi} \cdot Q_{k1} + \sum_{i=2}^n (\psi_{0i} \cdot \gamma_{Qi} \cdot \gamma_{EQi} \cdot Q_{ki}) + \sum_{h=1}^h (\gamma_{Ph} \cdot \gamma_{EP_h} \cdot P_{kh})$$

dove: G_{kj} = valore caratteristico delle j-esima azione permanente;

P_{kh} = valore caratteristico della h-esima deformazione impressa;

Q_{k1} = valore caratteristico del sovraccarico variabile di base;

Q_{ki} = valore caratteristico della i-esima azione variabile;
 $\gamma_G = 1.4$ (oppure 0.9 se il suo contributo aumenta la sicurezza);
 $\gamma_P = 1.2$ (oppure 0,9 se il suo contributo aumenta la sicurezza);
 $\gamma_Q = 1,5$ (oppure 0 se il suo contributo aumenta la sicurezza);
 γ_E = coefficienti di modello delle azioni;
 ψ_{0i} = coefficienti di combinazione.

In questi casi si considerano i coefficienti di modello γ_E pari a 1 e si considerano assenti le deformazioni impresse P e le azioni variabili secondarie. In definitiva le combinazioni per carichi verticali considerate sono 4:

$$\gamma_G \cdot G_k + \gamma_Q \cdot Q_k$$

Le azioni sismiche, invece, si combinano con i carichi verticali nel seguente modo:

$$\gamma_E E + G_k + \sum_i (\psi_{2i} \cdot Q_{ki})$$

in cui γ_E è il fattore di importanza pari a 1.4 per l'edificio strategico e 1.0 per quello civile, mentre i coefficienti ψ_{2i} , che forniscono i valori quasi-permanenti dei carichi accidentali, dipendono dalle destinazioni d'uso dei locali e sono pari a 0.80 per archivi e magazzini, 0.30 per uffici, caserme e civili abitazioni, 0.20 per le coperture e 0.80 per le scale.

In conclusione si ottengono 36 combinazioni di carico, di cui 4 dei carichi verticali e 32 sismiche. In questo caso il numero di combinazioni da considerare è uguale per i due edifici in quanto anche per l'edificio civile occorre considerare l'eccentricità accidentale.

Edificio Strategico \ Civile – Combinazioni di carico		
1	COMBV1:	$0.9 \cdot G$
2	COMBV2:	$1.4 \cdot G$
3	COMBV3:	$0.9 \cdot G + 1.5 \cdot Q$
4	COMBV4:	$1.4 \cdot G + 1.5 \cdot Q$
-	COMBVERT	$G + 0.3 \cdot Q_{uff} + 0.8 \cdot Q_{mag} + 0.2 \cdot Q_{cop} + 0.8 \cdot Q_{scala}$ $G + 0.3 \cdot Q_{abb} + 0.2 \cdot Q_{cop} + 0.8 \cdot Q_{scala}$
5	COMB1:	$CombVert + 1.4 \cdot sisma X^{e+} + 0.42 \cdot sisma Y^{e+}$
6	COMB2:	$CombVert + 1.4 \cdot sisma X^{e+} - 0.42 \cdot sisma Y^{e+}$
7	COMB3:	$CombVert + 1.4 \cdot sisma X^{e+} + 0.42 \cdot sisma Y^{e-}$
8	COMB4:	$CombVert + 1.4 \cdot sisma X^{e+} - 0.42 \cdot sisma Y^{e-}$
9	COMB5:	$CombVert - 1.4 \cdot sisma X^{e+} + 0.42 \cdot sisma Y^{e+}$
10	COMB6:	$CombVert - 1.4 \cdot sisma X^{e+} - 0.42 \cdot sisma Y^{e+}$
11	COMB7:	$CombVert - 1.4 \cdot sisma X^{e+} + 0.42 \cdot sisma Y^{e-}$
12	COMB8:	$CombVert - 1.4 \cdot sisma X^{e+} - 0.42 \cdot sisma Y^{e-}$
13	COMB9:	$CombVert + 1.4 \cdot sisma X^{e-} + 0.42 \cdot sisma Y^{e+}$
14	COMB10:	$CombVert + 1.4 \cdot sisma X^{e-} - 0.42 \cdot sisma Y^{e+}$
15	COMB11:	$CombVert + 1.4 \cdot sisma X^{e-} + 0.42 \cdot sisma Y^{e-}$
16	COMB12:	$CombVert + 1.4 \cdot sisma X^{e-} - 0.42 \cdot sisma Y^{e-}$
17	COMB13:	$CombVert - 1.4 \cdot sisma X^{e-} + 0.42 \cdot sisma Y^{e+}$
18	COMB14:	$CombVert - 1.4 \cdot sisma X^{e-} - 0.42 \cdot sisma Y^{e+}$
19	COMB15:	$CombVert - 1.4 \cdot sisma X^{e-} + 0.42 \cdot sisma Y^{e-}$
20	COMB16:	$CombVert - 1.4 \cdot sisma X^{e-} - 0.42 \cdot sisma Y^{e-}$
21	COMB17:	$CombVert + 0.42 \cdot sisma X^{e+} + 1.4 \cdot sisma Y^{e+}$
22	COMB18:	$CombVert + 0.42 \cdot sisma X^{e+} - 1.4 \cdot sisma Y^{e+}$
23	COMB19:	$CombVert + 0.42 \cdot sisma X^{e+} + 1.4 \cdot sisma Y^{e-}$
24	COMB20:	$CombVert + 0.42 \cdot sisma X^{e+} - 1.4 \cdot sisma Y^{e-}$
25	COMB21:	$CombVert - 0.42 \cdot sisma X^{e+} + 1.4 \cdot sisma Y^{e+}$

26	COMB22:	CombVert - 0.42·sisma X ^{e+} - 1.4·sisma Y ^{e+}
27	COMB23:	CombVert - 0.42·sisma X ^{e+} + 1.4·sisma Y ^{e-}
28	COMB24:	CombVert - 0.42·sisma X ^{e+} - 1.4·sisma Y ^{e-}
29	COMB25:	CombVert + 0.42·sisma X ^{e-} + 1.4·sisma Y ^{e+}
30	COMB26:	CombVert + 0.42·sisma X ^{e-} - 1.4·sisma Y ^{e+}
31	COMB27:	CombVert + 0.42·sisma X ^{e-} + 1.4·sisma Y ^{e-}
32	COMB28:	CombVert + 0.42·sisma X ^{e-} - 1.4·sisma Y ^{e-}
33	COMB29:	CombVert - 0.42·sisma X ^{e-} + 1.4·sisma Y ^{e+}
34	COMB30:	CombVert - 0.42·sisma X ^{e-} - 1.4·sisma Y ^{e+}
35	COMB31:	CombVert - 0.42·sisma X ^{e-} + 1.4·sisma Y ^{e-}
36	COMB32:	CombVert - 0.42·sisma X ^{e-} - 1.4·sisma Y ^{e-}
-	INV:	INVILUPPO COMB 1÷36

6.3.5.1 Verifiche di resistenza

Travi: flessione retta e taglio

Edificio Strategico

Le verifiche allo stato limite ultimo si conducono, come al solito, considerando le 2057 sezioni considerate negli altri modelli, analizzando dapprima le sezioni armate come quelle del modello S1 e poi quelle armate in modo da soddisfare le verifiche.

Di seguito si riportano gli specchi riassuntivi delle verifiche a flessione retta (M-N) ed a taglio e torsione (T-T): a sinistra si trova la prima verifica, con le armature di S1, a destra quella con le armature modificate.

Edificio Strategico_S5_travi armature S1					Edificio Strategico_S5_travi armature aumentate				
coef. sicur	M-N	T-T	M-N %	T-T %	coef. sicur	M-N	T-T	M-N %	T-T %
>2	595	1627	28,9%	79,1%	>2	944	1728	45,9%	84,0%
2,0	1462	430	71,1%	20,9%	2,0	1113	329	54,1%	16,0%
1,5	1210	170	58,8%	8,3%	1,5	848	143	41,2%	7,0%
1,4	1147	149	55,8%	7,2%	1,4	785	130	38,2%	6,3%
1,3	1072	142	52,1%	6,9%	1,3	704	114	34,2%	5,5%
1,2	979	131	47,6%	6,4%	1,2	595	102	28,9%	5,0%
1,1	905	116	44,0%	5,6%	1,1	392	91	19,1%	4,4%
1,0	781	109	38,0%	5,3%	1,0	53	77	2,6%	3,7%
0,9	648	95	31,5%	4,6%	0,9	52	63	2,5%	3,1%
0,8	502	87	24,4%	4,2%	0,8	41	47	2,0%	2,3%
0,7	343	75	16,7%	3,6%	0,7	29	15	1,4%	0,7%
0,6	217	75	10,5%	3,6%	0,6	24	0	1,2%	0,0%

Dall'analisi dei risultati appare evidente come per alcuni elementi non si riesca a soddisfare le verifiche, per quanto si aumenti l'armatura; le notevoli sollecitazioni sismiche, infatti, pari a quasi il doppio di quelle del modello S3, forniscono sollecitazioni inaccettabili non solo sulle travi corte tra i nuclei, ma anche nelle sezioni d'incastro nei setti stessi di altre travi più lunghe. Il coefficiente di sicurezza minimo è molto basso e vale 0.24 con le armature di S1 e aumenta solo fino a 0.46 con la massima armatura possibile. Si conclude, pertanto, che tali elementi debbano essere riprogettati. Anche per il taglio si ha un risultato analogo: il coefficiente minimo passa da 0.24 a 0.65.

Fatta eccezione per tali elementi strutturali critici, per gli altri si considerano armature longitudinali di peso complessivo pari a 32.4 [ton], con un incremento rispetto a S1 del 5.78%, ed armature trasversali di peso totale 17.4 [ton], con incremento del 3.68%. Tali incrementi quindi sono valutati a meno degli elementi che non soddisfano le verifiche, in quanto non ha senso, per questi casi, definire la nuova armatura.

Edificio Civile

Per l'edificio civile, grazie ai notevoli margini di sicurezza di cui si è già detto, non si ottiene un risultato eccessivamente negativo: solo il 7.9% delle sezioni risultano non soddisfatte, la peggiore con un coefficiente pari a 0.60. Incrementando opportunamente le armature negli elementi interessati e tenendo comunque conto delle tipiche esigenze tecnologiche si riescono a soddisfare tutte le verifiche: l'unica sezione non soddisfatta, infatti, ha un coefficiente pari a 0.99.

Edificio Civile_S5_travi armature S1					Edificio Civile_S5_travi armature aumentate				
coef. secur	M-N	T-T	M-N %	T-T %	coef. secur	M-N	T-T	M-N %	T-T %
5,0	163	130	80,3%	64,0%	5,0	163	130	80,3%	64,0%
3,5	142	86	70,0%	42,4%	3,5	142	86	70,0%	42,4%
3,0	126	61	62,1%	30,0%	3,0	125	61	61,6%	30,0%
2,5	106	35	52,2%	17,2%	2,5	103	35	50,7%	17,2%
2,0	88	17	43,3%	8,4%	2,0	86	17	42,4%	8,4%
1,8	77	13	37,9%	6,4%	1,8	76	13	37,4%	6,4%
1,6	66	10	32,5%	4,9%	1,6	57	10	28,1%	4,9%
1,4	52	4	25,6%	2,0%	1,4	43	4	21,2%	2,0%
1,2	33	0	16,3%	0,0%	1,2	27	0	13,3%	0,0%
1,0	16	0	7,9%	0,0%	1,0	1	0	0,5%	0,0%
0,9	7	0	3,4%	0,0%	0,9	0	0	0,0%	0,0%
0,8	3	0	1,5%	0,0%	0,8	0	0	0,0%	0,0%
0,7	1	0	0,5%	0,0%	0,7	0	0	0,0%	0,0%
0,6	0	0	0,0%	0,0%	0,6	0	0	0,0%	0,0%

Le armature così determinate hanno un peso dell'acciaio pari a 2.51 [ton], con un incremento del 3.56% rispetto al peso delle armature S1.

Per il taglio, invece, le verifiche risultano comunque soddisfatte e non si considerano variazioni di armatura.

Pilastri: presso-flessione deviata e taglio e torsione

Edificio Strategico

Le armature S1 non bastano in questo caso ad ottemperare alle verifiche né per la presso-flessione né per il taglio. Tuttavia un incremento opportuno di acciaio, pari rispettivamente al 8.71% per la presso-flessione e 2.79% per il taglio, determina la risoluzione positiva del problema.

Edificio Strategico_S5_pilastri armature S1					Edificio Strategico_S5_pilastri armature aumentate				
coef. secur	M-N	T-T	M-N %	T-T %	coef. secur	M-N	T-T	M-N %	T-T %
>2	83	102	18,0%	22,1%	>2	83	102	18,0%	22,1%
2,0	379	360	82,0%	77,9%	2,0	379	360	82,0%	77,9%
1,5	322	332	69,7%	71,9%	1,5	317	313	68,6%	67,7%
1,4	296	284	64,1%	61,5%	1,4	284	249	61,5%	53,9%
1,3	267	240	57,8%	51,9%	1,3	242	202	52,4%	43,7%
1,2	225	194	48,7%	42,0%	1,2	163	134	35,3%	29,0%
1,1	172	150	37,2%	32,5%	1,1	79	62	17,1%	13,4%
1,0	106	100	22,9%	21,6%	1,0	0	0	0,0%	0,0%
0,9	50	36	10,8%	7,8%	0,9	0	0	0,0%	0,0%
0,8	18	18	3,9%	3,9%	0,8	0	0	0,0%	0,0%
0,7	5	4	1,1%	0,9%	0,7	0	0	0,0%	0,0%

In definitiva i pilastri necessitano di 23.5 [ton] di acciaio per le armature verticali e di 3.5 [ton] per le armature trasversali, con incrementi rispettivamente pari a 8.71% e 2.78% rispetto al caso S1.

Di seguito si riporta la tabella riepilogativa in cui si legge l'influenza del percorso di amplificazione del carico nella determinazione dei coefficienti di sicurezza minimi, si osserva che la maggioranza delle sezioni raggiungerebbe prima le deformazioni ultime seguendo il percorso n°2 (amplificazione proporzionale dei momenti). Un numero non trascurabile di sezioni, invece, andrebbe in crisi prima se si amplificassero tutte e tre le sollecitazioni, mentre gli altri percorsi sono meno o per nulla significativi.

Edificio Strategico_S5_pilastri – Amplificazioni di carico critiche		
percorso di carico	N° sez.	%
1 - Variabili: N, Mx, My	192	41,6%
2 - Variabili: Mx, My	240	51,9%
3 - Variabili: N, My	2	0,4%
4 - Variabili: N, Mx	0	0,0%
5 - Variabili: My	2	0,4%
6 - Variabili: Mx	0	0,0%
7 - Variabili: N	26	5,6%
	462	

Edificio Civile

Così come avviene per le travi, anche per i pilastri il forte aumento delle sollecitazioni sismiche determina una riduzione dei coefficienti di sicurezza.

Edificio Civile_S5_pilastri				
coef. secur	N-M	T-T	N-M %	T-T %
5,0	82	92	75,9%	85,2%
3,5	65	92	60,2%	85,2%
3,0	60	86	55,6%	79,6%
2,5	59	86	54,6%	79,6%
2,0	57	66	52,8%	61,1%
1,8	52	46	48,1%	42,6%
1,6	42	38	38,9%	35,2%
1,4	27	18	25,0%	16,7%
1,2	12	4	11,1%	3,7%
1,0	2	2	1,9%	1,9%
0,9	0	0	0,0%	0,0%

I notevoli margini che si avevano con le analisi con la normativa previgente, fanno sì che solo due sezioni, appartenenti allo stesso livello di una pilastrata richiedano l'aggiunta di una coppia di barre $\phi 22$. Il quantitativo di acciaio per

armature longitudinali richiesto è così pari a 2.46 [ton], con un incremento di 0.70% rispetto a S1.

Per le armature trasversali, invece, i coefficienti di sicurezza delle due sezioni non verificate valgono 0.97: basta infittire il passo delle staffe nelle zone interessate per risolvere il problema. Il quantitativo di acciaio richiesto diventa, pertanto, pari a 0.370 [ton], che significa un incremento dello 0.58%.

I percorsi di amplificazione dei carichi significativi sono gli stessi trovati per l'analisi S3, ma cambiano le percentuali come riportato di seguito:

Edificio Civile_S5_pilastri – Amplificazioni di carico critiche		
percorso di carico	N° sez.	%
1 - Variabili: N, Mx, My	51	47,2%
2 - Variabili: Mx, My	57	52,8%
3 - Variabili: N, My	0	0,0%
4 - Variabili: N, Mx	0	0,0%
5 - Variabili: My	0	0,0%
6 - Variabili: Mx	0	0,0%
7 - Variabili: N	0	0,0%
	108	

Setti e Nuclei: presso-flessione deviata e taglio e torsione (Edificio Strategico)

Di seguito si riporta lo specchio riassuntivo delle verifiche a presso-flessione. Si osserva che le verifiche condotte con l'armatura di S1 restituiscono tutti coefficienti inferiori all'unità, tranne nel caso del nucleo P1. Per soddisfare le verifiche si aumentano i diametri dei ferri come indicato nell'ultima colonna e si ottiene così un quantitativo di acciaio pari a 34.2 [ton], con un consistente incremento rispetto a S1 pari a 85.9%.

Edificio Strategico_S5_setti_pflex							
Setto	Livell.	Story	Comb	λ_{c_S1}	armatura verticale	λ_{c_S5}	armatura verticale
P1	4-8	STORY4	COMB5	1,04	$\phi 12/20''$	1,04	$\phi 12/20''$
P1	0-3	STORY1	COMB5	0,60	$\phi 16/20''$	1,32	$\phi 24/20''$
P2	4-8	STORY4	COMB9	0,90	$\phi 12/20''$	1,23	$\phi 16/20''$
P2	0-3	STORY2	COMB3	0,53	$\phi 16/20''$	1,18	$\phi 24/20''$
P3	4-8	STORY4	COMB24	0,61	$\phi 12/20''$	1,08	$\phi 16/20''$
P3	0-3	STORY1-1	COMB30	0,51	$\phi 20/20''$	1,11	$\phi 26/15''$
P4	4-8	STORY4	COMB9	0,86	$\phi 12/20''$	1,41	$\phi 16/20''$
P4	0-3	STORY2	COMB15	0,57	$\phi 20/20''$	1,02	$\phi 24/15''$
P5	0-1	STORY1-1	COMB25	0,83	$\phi 12/20''$	1,39	$\phi 16/20''$
P6	0-1	STORY1-1	COMB19	0,68	$\phi 12/20''$	1,14	$\phi 16/20''$

Per quanto riguarda la verifica a taglio si riportano i valori dei coefficienti di sicurezza valutati rispetto a V_{Rd2} e V_{Rd3} , definiti nel paragrafo 2.3.

Edificio Strategico_S5_setti_taglio				
coef. secur	N λ_{Rd2}	N λ_{Rd3}	λ_{Rd2}	λ_{Rd3}
2,0	50	25	34,7%	17,4%
1,5	42	11	29,2%	7,6%
1,4	35	10	24,3%	6,9%
1,3	31	6	21,5%	4,2%
1,2	26	4	18,1%	2,8%
1,1	12	2	8,3%	1,4%
1,0	7	0	4,9%	0,0%
0,9	2	0	1,4%	0,0%
0,8	0	0	0,0%	0,0%

Le 7 sezioni non verificate si localizzano al livello interrato sui setti P4, P5 e P6, che assorbono un taglio maggiore del taglio limite. Poichè quest'ultimo valore non dipende dall'armatura a taglio, ma solo dalla larghezza dell'anima delle pareti e

dal braccio delle forze interne, si deduce che per riportare le verifiche nei limiti normativi occorre cambiare le sezioni, incrementandone gli spessori. Tuttavia, il fatto che i valori siano comunque prossimi all'unità (il valore minimo è pari a 0.89), fa subito intuire che l'incremento di spessore possa essere modesto.

Per quanto riguarda le armature trasversali si può osservare che le armature di S1, pari al minimo di normativa, soddisfano anche la verifica per V_{Rd3} . Il quantitativo di acciaio richiesto sarebbe, quindi, sempre pari a 11,5 [ton].

6.3.5.2 Verifiche spostamenti di interpiano

La verifica degli spostamenti si conduce con riferimento allo stato limite di danno: occorre verificare che gli spostamenti di interpiano ottenuti dall'analisi η_t siano inferiori al 5 ‰ dell'altezza di interpiano h .

I risultati sono riassunti nelle due tabelle seguenti, in cui si riportano, per ciascuna direzione di riferimento:

h	altezza di interpiano;
η_t	spostamenti per le comb. di carico sismiche allo SLD;
$\eta_{lim} = 0.004 \cdot h$	spostamenti limite d'interpiano;
$\lambda = \frac{\eta_{tlim}}{\eta_{ti}}$	coefficiente di sicurezza;
<i>esito verifica:</i> “positivo” se, per ciascuna direzione, $\eta_t \leq \eta_{lim}$;	

EDIFICIO STRATEGICO									
CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI					VERIFICHE				
	Livello	h	η_{tx}	η_{ty}	η_{lim}	λ_x^+	stato verifica	λ_y^+	stato verifica
		[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[-]		[-]	
ST1-1 - BASE	1°	1800	0,18	0,34	9,00	49,3	positivo	26,1	positivo
ST1 - BASE	1°	2800	0,26	0,95	14,00	53,1	positivo	14,8	positivo
ST2 - ST1-1	2°	4900	3,06	4,87	24,50	8,0	positivo	5,0	positivo
ST2 - ST1	2°	3900	2,97	4,27	19,50	6,6	positivo	4,6	positivo
ST3 - ST2	3°	4000	4,45	5,41	20,00	4,5	positivo	3,7	positivo
ST4 - ST3	4°	3400	4,42	4,70	17,00	3,8	positivo	3,6	positivo
ST5 - ST4	5°	3400	4,24	4,41	17,00	4,0	positivo	3,9	positivo
ST6 - ST5	6°	3400	4,11	4,09	17,00	4,1	positivo	4,2	positivo

EDIFICIO CIVILE									
CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI					VERIFICHE				
	Livello	h	η_{tx}	η_{ty}	η_{lim}	λ_x^+	stato verifica	λ_y^+	stato verifica
		[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[-]		[-]	
copert. -sottot.	5°	2140	0,80	0,30	10,70	13,4	positivo	35,7	positivo
sottot. - 3°P	4°	2930	6,90	6,30	14,65	2,1	positivo	2,3	positivo
3°P - 2°P	3°	2930	9,20	8,30	14,65	1,6	positivo	1,8	positivo
2°P - 1°P	2°	2930	9,30	8,80	14,65	1,6	positivo	1,7	positivo
1°P - BASE	1°	2760	0,10	0,10	13,80	138,0	positivo	138,0	positivo

Si osserva come la verifica sia complessivamente meno gravosa rispetto a quella imposta dalla normativa previgente; infatti non solo gli spostamenti relativi totali sono inferiori, ma gli spostamenti limite sono superiori, sicchè i coefficienti di sicurezza aumentano.

6.3.6 Calcolo e verifiche modelli S6 (OPCM 3274 – Classe A)

Per la definizione degli spettri di risposta vale quanto detto nel paragrafo 6.3.5, a cui si rimanda; in particolare gli spettri sono rappresentati in Figura 6-7 e Figura 6-8. Di seguito si riportano i pesi sismici W_i e le forze statiche di piano $F_{i,SLU}$ dei due edifici per l'analisi in classe di duttilità alta; si riportano, inoltre, le altezze di piano h_i ed i coefficienti di ripartizione delle forze sismiche di piano γ_i .

Tabella 6-8 Edificio Strategico - Forze sismiche, classe di duttilità alta

QUOTA	PIANO	W_i	h_i	$W_i h_i$	γ_i	$F_{i,SLU}$	$F_{i,SLD}$
		[kN]	[m]			[kN]	[kN]
18,95	8	1890	24,60	46494	0,08	713	1095
15,25	7	6870	20,90	143583	0,25	2202	3382
11,85	6	7340	17,50	128450	0,22	1970	3025
8,45	5	7490	14,10	105609	0,18	1619	2487
5,05	4	7495	10,70	80197	0,14	1230	1889
1,05	3	7450	6,70	49915	0,09	765	1176
-2,85	2	7150	2,80	20020	0,03	307	472
-3,85	1	6230	1,80	11214	0,02	172	264
		51915		585482		8978	13790

Si ricorda che anche in questo tipo di analisi, le forze sismiche devono essere combinate con i carichi verticali considerando l'amplificazione dovuta al coefficiente di protezione sismica $I = 1.4$ per edificio strategico.

Tabella 6-9 Edificio Civile - Forze sismiche, classe di duttilità alta

QUOTA	PIANO	W_i	h_i	$W_i h_i$	γ_i	F_{i_SLU}	F_{i_SLD}
		[kN]	[m]			[kN]	[kN]
12,70	c	410	12,70	5207	0,21	97	182
11,55	4	600	11,55	6930	0,28	130	243
8,62	3	730	8,62	6293	0,25	118	220
5,69	2	780	5,69	4438	0,18	83	155
2,76	1	780	2,76	2153	0,09	40	75
		3300		25021		468	877

Le combinazioni di carico sono le stesse del modello S5 riportate in 6.3.5.

6.3.6.1 Verifiche di resistenza

Travi: flessione retta e taglio

Edificio Strategico

Le verifiche col criterio della gerarchia delle resistenze non si applicano al telaio della struttura, in quanto gli elementi preposti ad assorbire l'aliquota principale delle sollecitazioni sismiche sono i setti ed i nuclei. Pertanto le verifiche di travi e pilastri si conducono normalmente, ma con le sollecitazioni inferiori rispetto al caso precedente S5.

Se le verifiche in classe di duttilità bassa, riportate in 6.3.5.1, risultano non soddisfatte per ben 781 sezioni a presso-flessione e 109 a taglio, in questa analisi, condotta in classe di duttilità alta, la situazione migliora ma permane l'esito negativo della verifica per 144 sezioni a presso-flessione e 36 a taglio.

La tabella che segue riporta il numero di sezioni con coefficiente di sicurezza minore di un certo valore e la relativa percentuale sul totale delle sezioni per la verifica a presso-flessione e taglio é con le armature note di S1 é con quelle determinate *ad hoc*.

Edificio Strategico_S6_travi armature S1					Edificio Strategico_S6_travi armature aumentate				
coef. sicur	M-N	T-T	M-N %	T-T %	coef. sicur	M-N	T-T	M-N %	T-T %
>2	1233	1896	59,9%	92,2%	>2	1271	1911	61,8%	92,9%
2,0	801	138	38,9%	6,7%	2,0	763	123	37,1%	6,0%
1,5	372	95	18,1%	4,6%	1,5	111	78	5,4%	3,8%
1,4	284	87	13,8%	4,2%	1,4	59	67	2,9%	3,3%
1,3	222	74	10,8%	3,6%	1,3	49	58	2,4%	2,8%
1,2	154	56	7,5%	2,7%	1,2	41	50	2,0%	2,4%
1,1	117	35	5,7%	1,7%	1,1	30	29	1,5%	1,4%
1,0	90	17	4,4%	0,8%	1,0	25	11	1,2%	0,5%
0,9	68	4	3,3%	0,2%	0,9	20	0	1,0%	0,0%
0,8	29	0	1,4%	0,0%	0,8	10	0	0,5%	0,0%
0,7	6	0	0,3%	0,0%	0,7	0	0	0,0%	0,0%
0,6	0	0	0,0%	0,0%	0,6	0	0	0,0%	0,0%

Sebbene la situazione sia, ovviamente, migliorata rispetto all'analisi S5, tuttavia anche in questo caso, come per il precedente, si ottiene esito negativo per le verifiche dei soliti elementi critici, le travi corte tra i nuclei individuate in Figura 6-5, da riprogettare.

Per soddisfare le altre verifiche si considerano armature longitudinali di peso complessivo leggermente inferiore al caso di bassa duttilità e pari a 32.0 [ton], con un incremento rispetto a S1 del 4.37%, ed armature trasversali uguali a quelle di S5 di peso totale 17.4 [ton], con incremento del 3.68% rispetto a S1. Tali incrementi sono valutati a meno degli elementi che non soddisfano le verifiche, in quanto non ha senso, per questi casi, definire la nuova armatura.

Edificio Civile

Per questo edificio occorre eseguire le verifiche secondo il criterio della gerarchia delle resistenze. Nel caso delle travi la verifica a flessione viene effettuata con le sollecitazioni di calcolo, mentre la verifica a taglio viene effettuata con delle azioni di calcolo amplificate del 20% e confrontate con delle azioni taglianti "limite", dipendenti dalla geometria delle travi, allo scopo di scongiurare i meccanismi di

rottura fragili dovuti al taglio. Si veda, a tal proposito l'Ordinanza P.C.M. 3431 § 5.4.1[7], di cui qui si riporta uno stralcio:

Per le strutture in CD"A", vale quanto segue:	
-	il contributo del calcestruzzo alla resistenza a taglio viene considerato nullo e si considera esclusivamente il contributo dell'acciaio; per le travi di fondazione le verifiche a taglio ed il calcolo delle armature si eseguono come per le situazioni non sismiche.
-	se il più grande dei valori assoluti di V_{max} e V_{min} supera il valore:
	(5.2)
	$V_{R1} = 10 \tau_{Rd} b_w \cdot d$
	dove $\tau_{Rd} = R_{ck}^{2/3} / 28$, in Mpa, b_w è la larghezza dell'anima della trave, d è l'altezza utile della sezione, allora la resistenza deve venire affidata esclusivamente ad apposita armatura diagonale nei due sensi, con inclinazione di 45° rispetto l'asse della trave;
-	in ogni caso il più grande dei valori assoluti non può superare il valore: $V_{R1} = 15 \tau_{Rd} b_w d$.

Di seguito si riporta lo specchio riassuntivo dell'analisi. In questo caso la colonna relativa alla verifica a taglio con le armature S1 (indicata con *****) è indicativa, in quanto non considera le verifiche di gerarchia delle resistenze. La colonna T-T di destra, invece, riporta i risultati delle verifiche a taglio considerando la GR.

Edificio Civile_S6_travi armature S1					Edificio Civile_S6_travi armature aumentate (GR)				
coef. sicur	M-N	T-T	M-N %	T-T %	coef. sicur	M-N	T-T	M-N %	T-T %
		*					GR		
5,0	150	106	73,9%	52,2%	5,0	150	126	73,9%	52,2%
3,5	115	42	56,7%	20,7%	3,5	115	81	56,7%	20,7%
3,0	99	25	48,8%	12,3%	3,0	99	53	48,8%	12,3%
2,5	79	16	38,9%	7,9%	2,5	79	28	38,9%	7,9%
2,0	54	5	26,6%	2,5%	2,0	54	15	26,6%	2,5%
1,8	41	4	20,2%	2,0%	1,8	41	11	20,2%	2,0%
1,6	29	0	14,3%	0,0%	1,6	29	4	14,3%	0,0%
1,4	16	0	7,9%	0,0%	1,4	16	4	7,9%	0,0%
1,2	8	0	3,9%	0,0%	1,2	8	0	3,9%	0,0%
1,0	1	0	0,5%	0,0%	1,0	0	0	0,0%	0,0%
0,9	1	0	0,5%	0,0%	0,9	0	0	0,0%	0,0%
0,8	0	0	0,0%	0,0%	0,8	0	0	0,0%	0,0%

Dall'analisi dei risultati si evince che le travi armate come S1 soddisfano la verifica a flessione ad eccezione di una sezione, che registra un coefficiente $\lambda_{min} =$

0.83. Un modesto incremento di armatura, pari allo 0.03% sul peso totale di armature longitudinali delle travi (2.421 [ton]), consente di soddisfare la verifica.

Per la verifica a taglio con GR, si ha che il minimo coefficiente di sicurezza per le travi passa da 1.680 a 1.355, pertanto non è necessario alcun incremento di armatura trasversale.

Pilastrì: presso-flessione deviata e taglio e torsione

Edificio Strategico

Come già detto per le travi, anche i pilastri vengono verificati con le nuove sollecitazioni di calcolo, ridotte per l'analisi in classe di duttilità alta, senza considerare altri aggravi.

Le armature S1 bastano in questo caso ad ottemperare alle verifiche, fatta eccezione per una sezione a presso-flessione e due a taglio. Occorre, quindi, aumentare l'armatura longitudinale in un pilastro per un livello portarla a 21.7 [ton] contro le 21.6 [ton] di S1, mentre bastano poche staffe per sistemare le cose a taglio.

Edificio Strategico_S6_pilastrì				
coef. sicur	M-N	T-T	M-N %	T-T %
>2	187	228	40,5%	49,4%
2,0	275	234	59,5%	50,6%
1,5	77	66	16,7%	14,3%
1,4	41	38	8,9%	8,2%
1,3	17	22	3,7%	4,8%
1,2	7	12	1,5%	2,6%
1,1	4	4	0,9%	0,9%
1,0	1	2	0,2%	0,4%
0,9	0	0	0,0%	0,0%

Edificio Civile

La verifica in classe di duttilità alta dei pilastri prevede degli aggravi alle sollecitazioni sia per la verifica a presso-flessione, al fine di scongiurare la

plasticizzazione dei pilastri e quindi i meccanismi di piano, sia per la verifica a taglio, al fine di scongiurare i relativi meccanismi di rottura fragile. Si veda, a tal proposito l'Ordinanza P.C.M. 3431 § 5.4.2 [7], di cui qui si riporta uno stralcio:

<p>Per le strutture in CD"A", i momenti flettenti di calcolo nei pilastri si ottengono moltiplicando i momenti derivanti dall'analisi per il fattore di amplificazione α.</p> <p>Il fattore di amplificazione, il cui scopo è quello di proteggere i pilastri dalla plasticizzazione, è dato dall'espressione:</p> $\alpha = \gamma_{Rd} \cdot \frac{ \sum M_{Ri} }{ \sum M_{Pi} } \quad (5.3)$ <p>nella quale $\gamma_{Rd} = 1,20$, $\sum M_{Ri}$ è la somma dei momenti resistenti delle travi convergenti in un nodo, aventi verso concorde, e $\sum M_{Pi}$ è la somma dei momenti nei pilastri al di sopra ed al di sotto del medesimo nodo, ottenuti dall'analisi.</p> <p>Nel caso in cui i momenti nei pilastri siano di verso discorde, il solo valore maggiore va posto al denominatore della formula 5.3, mentre il minore va sommato ai momenti resistenti delle travi.</p> <p>Il fattore di amplificazione α deve essere calcolato per entrambi i versi della azione sismica, applicando il fattore di amplificazione calcolato per ciascun verso ai momenti calcolati nei pilastri con l'azione agente nella medesima direzione.</p> <p>Per la sezione di base dei pilastri del piano terreno si applica il maggiore tra il momento risultante dall'analisi ed il momento utilizzato per la sezione di sommità del pilastro.</p> <p>Non si applicano fattori di amplificazione alle sezioni di sommità dei pilastri dell'ultimo piano.</p> <p>Al valore del momento di calcolo ottenuto applicando la procedura suddetta deve essere associato il più sfavorevole valore dello sforzo normale ottenuto dall'analisi, per ciascun verso dell'azione sismica.</p> <p>Per le strutture in CD"A", al fine di escludere la formazione di meccanismi inelastici dovuti al taglio, gli sforzi di taglio nei pilastri da utilizzare per le verifiche ed il dimensionamento delle armature si ottengono dalla condizione di equilibrio del pilastro soggetto all'azione dei momenti resistenti nelle sezioni di estremità superiore (M_{Rp}^s) ed inferiore (M_{Rp}^i) secondo l'espressione:</p> $V = \gamma_{Rd} \cdot \frac{M_{Rp}^s + M_{Rp}^i}{l_p} \quad (5.5)$ <p>nella quale $\gamma_{Rd} = 1,20$, l_p è la lunghezza del pilastro.</p>	
--	--

In prima battuta si riportano i risultati delle verifiche ordinarie, condotte in automatico col programma:

Edificio Civile_S6_pilastri				
coef. sicur	M-N	T-T	M-N %	T-T %
5,0	71	92	65,7%	85,2%
3,5	59	88	54,6%	81,5%
3,0	59	74	54,6%	68,5%
2,5	54	42	50,0%	38,9%
2,0	31	22	28,7%	20,4%
1,8	19	14	17,6%	13,0%
1,6	7	4	6,5%	3,7%
1,4	2	2	1,9%	1,9%
1,2	0	0	0,0%	0,0%
1,0	0	0	0,0%	0,0%

Dato che tutte le verifiche sono soddisfatte, si può passare a valutare le amplificazioni delle sollecitazioni previste dalla normativa. Le amplificazioni richieste per soddisfare il principio di gerarchia delle resistenze sono fortemente penalizzanti: se consideriamo la sezione con coefficiente di sicurezza minimo, infatti, osserviamo che, per la verifica a presso-flessione il momento flettente deve essere amplificato di un fattore 2.27. Tale fattore amplificativo è dato, oltre che dal coefficiente γ_{Rd} , anche dal rapporto della somma dei momenti ultimi delle travi afferenti al nodo sulla somma dei momenti di calcolo dei pilastri. Per avere benefici nella verifica si dovrebbero avere travi con momenti ultimi non molto alti. Nel nostro caso, invece, si ha che il moltiplicatore critico minimo passa da 1.31 a 0.79. Se ne deduce che, risultando la struttura già verificata in classe di duttilità bassa, non è conveniente effettuare la verifica in classe di duttilità alta.

Travi di collegamento (Edificio Strategico)

Poiché nell'analizzare la struttura si è riscontrato un comportamento prevalente a setti, è necessario effettuare dei controlli sulla duttilità degli elementi di collegamento con le pareti dei nuclei (vd. OPCM 3431 § 5.4.6 [7]). Tali elementi sono proprio le travi n° 67, 70, 106 e 107, ai vari livelli, di Figura 6-5. Il primo

controllo è di tipo geometrico e risulta subito soddisfatto per le travi n° 67, 70 e 106; le travi n° 107, invece, hanno un rapporto tra luce netta e altezza utile inferiore a 3; poiché il valore del taglio nelle sezioni di estremità V_d , a tutti i livelli, risulta:

$$4 \cdot b \cdot d \cdot \tau_{Rd} < V_d < 15 \cdot b \cdot d \cdot \tau_{Rd}$$

nel caso di un progetto ex novo della struttura sarebbe opportuno posizionare delle armature a croce al fine di avere la formazione di cerniere plastiche nella zona a contatto.

Si ricorda, in ogni caso, che molte sezioni non soddisfano nemmeno le verifiche ordinarie sopra riportate, pertanto si ritiene opportuna una nuova progettazione di tali elementi ed una successiva modifica del modello di analisi.

Setti e Nuclei: presso-flessione deviata e taglio e torsione (Edificio Strategico)

Di seguito si riporta lo specchio riassuntivo delle verifiche a presso-flessione. Si osserva che le verifiche condotte con l'armatura di S1 restituiscono coefficienti inferiori all'unità, tranne nel caso dei setti P5 e P6. Per soddisfare le verifiche si aumentano i diametri, come indicato nell'ultima colonna e si ottiene così un quantitativo di acciaio pari a 23.91 [ton] con un consistente incremento rispetto a S1 pari a 29.95%.

Edificio Strategico_S6_setti_pflex							
Setto	Livel.	Story	Comb	λ_{c_S1}	armatura verticale	λ_{c_S5}	armatura verticale
P1	4-8	STORY4	COMB5	1,65	$\phi 12/20''$	1,65	$\phi 12/20''$
P1	0-3	STORY2	COMB5	0,96	$\phi 16/20''$	1,21	$\phi 18/20''$
P2	4-8	STORY4	COMB9	1,44	$\phi 12/20''$	1,44	$\phi 12/20''$
P2	0-3	STORY2	COMB3	0,80	$\phi 16/20''$	1,24	$\phi 20/20''$
P3	4-8	STORY4	COMB24	0,97	$\phi 12/20''$	1,72	$\phi 16/20''$
P3	0-3	STORY1-1	COMB30	0,78	$\phi 20/20''$	1,11	$\phi 24/20''$
P4	4-8	STORY4	COMB9	1,52	$\phi 12/20''$	1,52	$\phi 12/20''$
P4	0-3	STORY2	COMB15	0,88	$\phi 20/20''$	1,17	$\phi 24/20''$
P5	0-1	STORY1-1	COMB25	1,60	$\phi 12/20''$	1,60	$\phi 12/20''$
P6	0-1	STORY1-1	COMB19	1,17	$\phi 12/20''$	1,17	$\phi 12/20''$

Per quanto riguarda la verifica a taglio si riportano i valori dei coefficienti di sicurezza valutati rispetto a V_{Rd2} e V_{Rd3} , definiti nel paragrafo 2.3.

Edificio Strategico_S6_setti_taglio		
n° sez. verificate:		144
Coef. sicur.	λ_{Rd2}	λ_{Rd3}
media	2,44	2,44
min	0,30	0,30

Edificio Strategico_S6_setti_taglio				
coef. sicur	N λ_{Rd2}	N λ_{Rd3}	λ_{Rd2}	λ_{Rd3}
2,0	34	9	23,6%	6,3%
1,5	8	2	5,6%	1,4%
1,4	4	0	2,8%	0,0%
1,3	2	0	1,4%	0,0%
1,2	0	0	0,0%	0,0%
1,1	0	0	0,0%	0,0%
1,0	0	0	0,0%	0,0%

In realtà, le sezioni risultano maggiormente sollecitate, in quanto tutte le azioni taglianti devono amplificarsi del coefficiente α variabile in funzione della direzione del sismo e del rapporto definito dalla normativa (vd. OPCM 3431 § 5.4.5 [7]).

Tale verifica non è stata eseguita in quanto comunque la struttura, nel suo complesso, non soddisfa le prescrizioni in classe di duttilità alta.

6.3.6.2 Verifiche spostamenti di interpiano

Le verifiche degli spostamenti si effettuano riferendosi allo stato limite di danno, che è indipendente dalla classe di duttilità dell'edificio, pertanto vale quanto esposto in 6.3.5.2.

6.4 Analisi dinamiche modali

6.4.1 Calcolo e verifiche modelli D1 (DM '96 – T.A.)

Nel modello D1 si considerano agenti le azioni così come prescritto dai D.D.M.M. del '96, utilizzando il metodo di verifica alle tensioni ammissibili.

Le azioni gravitazionali statiche dovute ai pesi propri strutturali, ai carichi fissi ed a quelli accidentali, derivanti dalla tipologia di destinazione d'uso, si applicano con il loro massimo valore.

Le azioni sismiche vengono applicate col metodo dello spettro di risposta. Le masse sismiche di piano si determinano a partire dai pesi sismici riportati in 6.3.1, dividendo gli stessi per l'accelerazione di gravità; la massa rotazionale si ottiene moltiplicando la massa traslazionale per il quadrato del raggio d'inerzia ρ . Nelle tabelle seguenti si riassumono, per i due edifici e per ciascun impalcato, le dimensioni in pianta B e H, il quadrato del raggio d'inerzia, la massa traslazionale M e quella rotazionale e, infine, le coordinate del centro di massa in cui si applicano tali masse.

Tabella 6-10 Edificio Strategico - Masse sismiche

Piano	B	H	ρ^2	M	$M\rho^2$	X_{CM}	Y_{CM}
	[m]	[m]	[m ²]	[t]	[tm ²]	[m]	[m]
8	24,00	12,70	61,4	193	11900	15,07	6,84
7	42,35	12,70	162,9	727	118300	20,56	6,53
6	42,35	12,70	162,9	808	131700	21,63	6,47
5	42,35	12,70	162,9	822	134000	21,49	6,55
4	42,35	12,70	162,9	821	133700	21,44	6,75
3	42,35	12,70	162,9	814	132600	21,29	6,47
2	42,35	7,00	153,5	757	116200	21,24	9,09
1	42,35	5,70	152,2	627	95500	21,22	2,78

Tabella 6-11 Edificio Civile - Masse sismiche

Piano	B	H	ρ^2	M	$M\rho^2$	X_{CM}	Y_{CM}
	[m]	[m]	[m ²]	[t]	[tm ²]	[m]	[m]
sottot+cop	6,70	6,90	7,7	103	794	3,35	3,45
PIANO 3	6,70	6,90	7,7	74,4	574	3,35	3,45
PIANO 2	6,70	6,90	7,7	79,5	613	3,35	3,45
PIANO 1	6,70	6,90	7,7	79,5	613	3,35	3,45

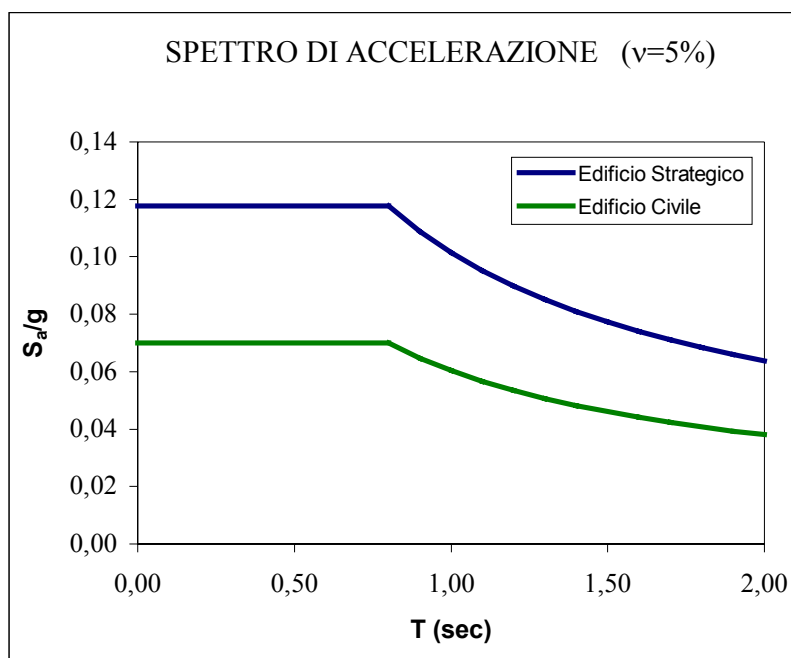
Lo spettro di risposta considerato, in ipotesi di smorzamento $\nu = 5\%$, è dato dalle seguenti relazioni:

$$S_a/g = c \cdot R \cdot \varepsilon \cdot \beta \cdot I$$

$$R = 1.0 \quad \text{per } T_0 \leq 0.8[\text{sec}]$$

$$R = 0.862 \cdot T_0^{2/3} \quad \text{per } T_0 > 0.8[\text{sec}]$$

in cui i simboli sono definiti in 6.4.1. Di seguito se ne riporta la rappresentazione grafica.

**Figura 6-9** DM 96 - Spettri di risposta dell'accelerazione

A partire dalle condizioni di carico elementari, per l'analisi dinamica di entrambe le strutture analizzate, si considerano 3 combinazioni di carico più due involuppi:

Edificio Strategico \ Edificio Civile – Combinazioni di carico		
1	COMBVERT:	pesi propri + carichi perm. + sovraccarichi accidentali
2	COMB X:	Combvert + Spec X
3	COMB Y:	Combvert + Spec Y
-	INV:	involuppo COMB1÷3
-	INVSIS:	involuppo COMB2÷3

Per l'analisi dinamica non si porta in conto l'eccentricità accidentale in quanto non è richiesto dalla normativa; inoltre non si definiscono le combinazioni con sismo negativo in quanto il programma di calcolo tiene già in conto il fatto che lo spettro di accelerazione agisce in una direzione in entrambi i versi. I due involuppi considerati sono utili rispettivamente per la verifica a flessione delle travi e per la determinazione degli spostamenti sismici nella verifica di deformabilità.

6.4.1.1 Verifiche di resistenza

Travi: flessione retta e taglio

Per la verifica di questi elementi strutturali si analizzano, generalmente, cinque sezioni per ciascuna trave a ciascun livello per un totale di 2057 sezioni per l'edificio strategico e 203 per l'edificio civile. Si ricorda che la verifica si conduce per l'involuppo di tutte le combinazioni di carico, poiché riguarda una sola caratteristica della sollecitazione, essendo le altre trascurabili. In questo modo non si pone il problema della perdita dei segni delle sollecitazioni sismiche affrontato nel capitolo 5.

Le armature inserite, longitudinali e trasversali, rispondono alle prescrizioni del D.M. '96 ed alla relativa Circolare Esplicativa del '97 in termini di percentuali di armature e distanze tra i ferri.

La verifica si effettua determinando le tensioni massime di calcestruzzo ed acciaio e confrontandole con le rispettive tensioni ammissibili.

Per comodità si definisce un coefficiente di sicurezza come rapporto tra la tensione ammissibile e quella massima riscontrata per il calcestruzzo e per l'acciaio: un coefficiente di sicurezza inferiore all'unità indica che la verifica non è soddisfatta. In prima battuta si analizzano sempre le sezioni armate come quelle del modello S1, poi si determinano eventuali variazioni di armatura.

Edificio Strategico

Di seguito si riporta un specchio riassuntivo delle verifiche a flessione, che mostra il numero di sezioni che hanno coefficiente di sicurezza minore di un certo valore e la relativa percentuale sul totale delle sezioni.

Edificio Strategico_D1_travi_flex				
coef. secur	N cls	N fe	cls	fe
>2	1979	1913	96,2%	93,0%
2,0	78	144	3,8%	7,0%
1,5	42	34	2,0%	1,7%
1,4	34	18	1,7%	0,9%
1,3	20	2	1,0%	0,1%
1,2	1	0	0,0%	0,0%
1,1	0	0	0,0%	0,0%
1,0	0	0	0,0%	0,0%

Dalla tabella si evince un aumento dei valori medi dei coefficienti rispetto al risultato di S1; infatti ben 93% delle sezioni ha un valore superiore a 2.0, mentre il coefficiente minimo è pari a 1.19. Ciò accade poichè nell'analisi dinamica le sollecitazioni sismiche sono generalmente minori di quelle dovute all'analisi statica. Pertanto si può avere una lieve diminuzione dell'armatura longitudinale pari a

1.48% essendo necessario utilizzare 30.2 [ton] di acciaio per l'armatura longitudinale.

Per la verifica a taglio si considerano, come per S1, l'involuppo massimo e minimo delle sollecitazioni di taglio e torsione. Si effettuano pertanto 4158 verifiche calcolando la tensione tangenziale τ e confrontandola con i valori limite.

Dalla tabella seguente si evince che la sicurezza rispetto alla tensione massima ammissibile è sempre garantita e le sezioni che necessitano di specifica armatura a taglio sono il 7.6%, mentre nell'analisi S1 sono 10.6%. L'armatura prevista, tuttavia, non può essere diminuita rispetto a quella di S1 in quanto è comunque necessaria a soddisfare le prescrizioni geometriche della Circolare '97 ed è pari a 16.7 [ton].

Edificio Strategico_D1_travi_taglio e tors.				
coef. secur	N τ_{c0}	N τ_{max}	τ_{c0}	τ_{max}
>2	3089	4016	74,3%	96,6%
2,0	1069	142	25,7%	3,4%
1,5	697	59	16,8%	1,4%
1,4	649	54	15,6%	1,3%
1,3	582	54	14,0%	1,3%
1,2	512	53	12,3%	1,3%
1,1	410	51	9,9%	1,2%
1,0	316	0	7,6%	0,0%
0,9	265	0	6,4%	0,0%
0,8	210	0	5,1%	0,0%
0,7	163	0	3,9%	0,0%
0,6	88	0	2,1%	0,0%

Edificio Civile

Dalla tabella riassuntiva dei risultati si evince un aumento dei valori medi dei coefficienti rispetto al risultato di S1; infatti la percentuale di sezioni con coefficiente minore di 2 è passata da 8,9% nel modello S1 a 2,0%; il coefficiente minimo è passato da 1.15 a 1.50, a causa della riduzione di sollecitazioni che si hanno nell'analisi dinamica.

Edificio Civile_D1_travi_flex				
coef. secur	N cls	N fe	cls	fe
5,0	88	98	43,3%	48,3%
3,5	41	41	20,2%	20,2%
3,0	29	25	14,3%	12,3%
2,5	13	18	6,4%	8,9%
2,0	3	4	1,5%	2,0%
1,8	2	2	1,0%	1,0%
1,6	1	0	0,5%	0,0%
1,4	0	0	0,0%	0,0%
1,2	0	0	0,0%	0,0%
1,0	0	0	0,0%	0,0%

Per la verifica a taglio si considerano, come per S1, l'involuppo massimo e minimo delle sollecitazioni di taglio e torsione. Si effettuano pertanto 223 verifiche calcolando la tensione tangenziale τ e confrontandola con i valori limite.

Dalla tabella seguente si evince che la sicurezza rispetto alla tensione massima ammissibile è sempre garantita e le sezioni che necessitano di specifica armatura a taglio sono solo 5: il 2.2%, mentre nell'analisi S1 sono 6: 2.7%.

Edificio Civile_D1_travi_taglio e tors.				
coef. secur	N τ_{c0}	N τ_{max}	τ_{c0}	τ_{max}
5,0	147	41	65,9%	18,4%
3,5	118	14	52,9%	6,3%
3,0	100	6	44,8%	2,7%
2,5	86	1	38,6%	0,4%
2,0	60	0	26,9%	0,0%
1,8	47	0	21,1%	0,0%
1,6	34	0	15,2%	0,0%
1,4	27	0	12,1%	0,0%
1,2	14	0	6,3%	0,0%
1,0	5	0	2,2%	0,0%
0,9	2	0	0,9%	0,0%
0,8	0	0	0,0%	0,0%

Pilastri: presso-flessione deviata e taglio e torsione

Per la verifica di questi elementi strutturali si analizzano, come noto, due sezioni per ciascun pilastro e per ciascun livello per un totale di 462 sezioni per l'edificio strategico e 18 per l'edificio civile. Si ricorda che la verifica si conduce per ciascuna combinazione di carico considerando l'involuppo rettangolare delle sollecitazioni descritto nel Capitolo 5. Le armature inserite sono quelle analizzate nel modello S1.

Edificio Strategico

Di seguito si riporta lo specchio riassuntivo delle verifiche a presso-flessione, che mostra il numero di sezioni che hanno coefficiente di sicurezza minore di un certo valore e la relativa percentuale sul totale delle sezioni.

Edificio Strategico_D1_pilastri_pflex				
coef. secur	N cls	N fe	cls	fe
2,0	136	462	29,4%	100,0%
1,5	326	0	70,6%	0,0%
1,4	94	0	20,3%	0,0%
1,3	47	0	10,2%	0,0%
1,2	21	0	4,5%	0,0%
1,1	4	0	0,9%	0,0%
1,0	0	0	0,0%	0,0%

Si osserva che i coefficienti di sicurezza sono significativamente maggiori di quelli di S1, poichè le sollecitazioni sismiche nell'analisi dinamica sono minori di quelle dell'analisi statica. E' possibile, quindi, diminuire l'armatura longitudinale utilizzando barre $\phi 20$; nella maggior parte delle sezioni si può inserire addirittura solo l'armatura minima richiesta per ottemperare le prescrizioni geometriche. Il quantitativo di acciaio necessario è pari infine a 14.3 [ton], con un decremento del 33.6% rispetto a S1.

Si ricorda che le azioni sismiche sui pilastri sono piuttosto basse, dato che questi elementi strutturali non intervengono in maniera significativa nell'assorbimento delle azioni sismiche, avendo l'edificio i 4 nuclei irrigiditi.

Analogamente per la verifica a taglio: si considera, come detto, l'involuppo massimo e minimo di taglio e torsione sulle 462 sezioni. Si effettuano pertanto 924 verifiche calcolando la tensione tangenziale τ , nelle due direzioni degli assi locali e confrontandola con i valori limite.

Nella tabella riepilogativa dei risultati si osserva che, in questo caso, tutte le sezioni hanno coefficiente maggiore dell'unità rispetto a τ_{c0} e quindi non necessitano di armatura a taglio. Non è, quindi, necessaria armatura aggiuntiva rispetto a quella di S1, né è possibile diminuirla ulteriormente, poichè è già pari al minimo normativo e tecnologico richiesto.

Edificio Strategico_D1_pilastri_taglio				
coef. sicur	N τ_{c0}	N τ_{max}	τ_{c0}	τ_{max}
2,0	34	0	3,7%	0,0%
1,5	6	0	0,6%	0,0%
1,4	4	0	0,4%	0,0%
1,3	2	0	0,2%	0,0%
1,2	0	0	0,0%	0,0%
1,1	0	0	0,0%	0,0%
1,0	0	0	0,0%	0,0%

Edificio Civile

Dallo specchio riassuntivo delle verifiche a presso-flessione si osserva che, anche in questo caso, i coefficienti di sicurezza sono significativamente maggiori di quelli di S1, poichè le sollecitazioni sismiche nell'analisi dinamica sono minori di quelle dell'analisi statica.

Edificio Civile_D1_pilastri_pflex armature S1					Edificio Civile_D1_pilastri_pflex armature ridotte				
coef. secur	N τ_{c0}	N τ_{max}	τ_{c0}	τ_{max}	coef. secur	N τ_{c0}	N τ_{max}	τ_{c0}	τ_{max}
5,0	87	18	80,6%	16,7%	5,0	94	40	87,0%	37,0%
3,5	73	5	67,6%	4,6%	3,5	84	24	77,8%	22,2%
3,0	70	1	64,8%	0,9%	3,0	74	18	68,5%	16,7%
2,5	58	0	53,7%	0,0%	2,5	72	11	66,7%	10,2%
2,0	47	0	43,5%	0,0%	2,0	63	3	58,3%	2,8%
1,8	38	0	35,2%	0,0%	1,8	57	0	52,8%	0,0%
1,6	24	0	22,2%	0,0%	1,6	52	0	48,1%	0,0%
1,4	5	0	4,6%	0,0%	1,4	42	0	38,9%	0,0%
1,2	0	0	0,0%	0,0%	1,2	21	0	19,4%	0,0%
1,0	0	0	0,0%	0,0%	1,0	0	0	0,0%	0,0%

La riduzione di armature longitudinali prevista consiste nel sostituire tutte le barre $\phi 22$ con barre $\phi 16$, ad eccezione di due pilastrate (la C2 e C3), che necessitano di un quantitativo di armatura maggiore. In definitiva il peso complessivo di acciaio calcolato è 1.34 [ton].

Analogamente per la verifica a taglio: si considera, come detto, l'involuppo massimo e minimo di taglio e torsione sulle 108 sezioni. Si effettuano pertanto le verifiche calcolando la tensione tangenziale τ , nelle due direzioni degli assi locali e confrontandola con i valori limite.

Nella tabella riepilogativa dei risultati si osserva che, anche per l'edificio civile così come per quello strategico, tutte le sezioni hanno coefficiente maggiore dell'unità rispetto a τ_{c0} e quindi non necessitano di armatura a taglio. Non è, quindi, necessaria armatura aggiuntiva rispetto a quella di S1, né è possibile diminuirla ulteriormente, poichè è già pari al minimo normativo e tecnologico richiesto.

Edificio Civile_D1_pilastri_taglio				
coef. secur	N τ_{c0}	N τ_{max}	τ_{c0}	τ_{max}
5,0	104	22	96,3%	20,4%
3,5	100	0	92,6%	0,0%
3,0	96	0	88,9%	0,0%
2,5	68	0	63,0%	0,0%
2,0	30	0	27,8%	0,0%
1,8	22	0	20,4%	0,0%
1,6	6	0	5,6%	0,0%
1,4	4	0	3,7%	0,0%
1,2	0	0	0,0%	0,0%
1,0	0	0	0,0%	0,0%

Setti e Nuclei: presso-flessione deviata e taglio e torsione (Edificio Strategico)

Per la verifica a presso-flessione dei setti e dei nuclei si individuano, tra tutte le combinazioni di carico, le sei che massimizzano e minimizzano lo sforzo normale e i momenti flettenti lungo i due assi locali di riferimento della sezione resistente.

Di seguito si riporta lo specchio riassuntivo delle verifiche a presso-flessione, in cui si possono leggere, per ciascuna sezione, i valori delle tensioni (positive se di trazione) massime riscontrate, il livello (*story*) e la combinazione in cui si riscontrano, il coefficiente di sicurezza e l'armatura verticale totale nella sezione.

Edificio Strategico_D1_setti_pflex										
calcestruzzo						acciaio				
Setto	Livell.	σ_{c_max} [Mpa]	Story	Comb	λ_c	σ_{fe_max} [Mpa]	Story	Comb	λ_{fe}	armatura verticale
P1	4-8	-1,20	STORY4	COMBX MIN	7,08	17,8	STORY4	COMBX MIN	14,61	$\phi 12/20''$
P1	0-3	-3,20	STORY2	COMBX MAX	2,66	97,5	STORY2	COMBX MAX	2,67	$\phi 16/20''$
P2	4-8	-1,50	STORY4	COMBX MIN	5,67	33,4	STORY6	COMBY MAX	7,78	$\phi 12/20''$
P2	0-3	-3,00	STORY2	COMBX MIN	2,83	98,2	STORY1	COMBX MAX	2,65	$\phi 16/20''$
P3	4-8	-1,80	STORY4	COMBY MIN	4,72	26,3	STORY4	COMBY MIN	9,89	$\phi 12/20''$
P3	0-3	-4,80	STORY1-1	COMBY MAX	1,77	78,9	STORY2	COMBX MIN	3,30	$\phi 20/20''$
P4	4-8	-1,80	STORY4	COMBX MAX	4,72	26,7	STORY4	COMBX MAX	9,74	$\phi 12/20''$
P4	0-3	-4,50	STORY2	COMBY MAX	1,89	75,6	STORY2	COMBY MAX	3,44	$\phi 20/20''$
P5	0-1	-1,60	STORY1-1	COMBY MIN	5,31	23,9	STORY1-1	COMBY MIN	10,88	$\phi 12/20''$
P6	0-1	-1,80	STORY1-1	COMBY MAX	4,72	53,2	STORY1-1	COMBY MAX	4,89	$\phi 12/20''$
P1	4-8	-1,20	STORY4	COMBX MIN	7,08	17,8	STORY4	COMBX MIN	14,61	$\phi 12/20''$

Poichè le sollecitazioni sismiche sono sensibilmente minori di quelle dell'analisi statica, anche le tensioni sugli elementi strutturali destinati ad assorbire tali azioni sono piuttosto basse. In questa situazione si può ridurre l'armatura verticale a presso-flessione, nei limiti geometrici e tecnologici imposti dalla normativa, utilizzando sempre $\phi 12/20''$. In questo modo si ottiene un quantitativo di acciaio pari a 11.6 [ton] con una riduzione rispetto a S1 pari a 37.0%.

La verifica a taglio si effettua su ciascun elemento ad ogni livello considerando su 36 sezioni l'involuppo massimo e minimo di taglio e torsione.

Si osserva nello specchio riepilogativo dei risultati che almeno una sezione ha coefficiente inferiore all'unità rispetto a τ_{c0} e quindi necessita di armatura a taglio, ma il coefficiente minimo è maggiore rispetto a quello di S1, essendo pari a 0.64. Dalla tabella seguente si evince che le sezioni che necessitano di specifica armatura a taglio sono solo 3, rispetto alle 15 di S1, mentre la sicurezza rispetto alla tensione

massima ammissibile è sempre garantita, essendo i coefficienti sempre maggiori di 2.26.

Edificio Strategico_D1_setti_taglio				
coef. secur	N τ_{c0}	N τ_{max}	τ_{c0}	τ_{max}
2,0	16	0	44,4%	0,0%
1,5	11	0	30,6%	0,0%
1,4	10	0	27,8%	0,0%
1,3	9	0	25,0%	0,0%
1,2	7	0	19,4%	0,0%
1,1	4	0	11,1%	0,0%
1,0	3	0	8,3%	0,0%
0,9	3	0	8,3%	0,0%
0,8	3	0	8,3%	0,0%
0,7	2	0	5,6%	0,0%
0,6	0	0	0,0%	0,0%

Le armature a taglio inserite per soddisfare le verifiche e le prescrizioni della Circolare '97 sono costituite, pertanto, da barre orizzontali $\phi 12/20$ ", che garantiscono indonea percentuale di armatura nella sezione. In definitiva il quantitativo di ferro totale stimato è pari a 11.4 [ton], con una lieve riduzione rispetto a S1 pari a 0.9%.

6.4.1.2 Verifiche spostamenti di interpiano

Nei tabulati di calcolo sono riportati gli spostamenti relativi massimi tra gli impalcati; in ottemperanza al D.M. 16\01\1996 si verifica, con tali valori, la congruenza tra le aste e la verifica di funzionalità dei vincoli.

Di seguito si riportano, per ciascun edificio, due tabelle: nella prima si riassume, per ciascuna direzione di riferimento:

- h altezza di interpiano;
- η_p spostamenti relativi elastici dovuti ad azioni diverse dal sismo;
- η_d spostamenti relativi dovuti al sismo;

$$\eta_t = \frac{\eta_p \pm \lambda \cdot \eta_d}{X} \text{ spostamenti relativi totali;}$$

in cui:

$\lambda = 4$ funzione del coefficiente di protezione sismica I;

$X = 1$ per calcolo effettuato alle tensioni ammissibili.

EDIFICIO STRATEGICO - CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI										
	Livello	h [mm]	Direzione X				Direzione Y			
			η_p [mm]	η_d [mm]	η_{tx}^+ [mm]	η_{tx}^- [mm]	η_p [mm]	η_d [mm]	η_{ty}^+ [mm]	η_{ty}^- [mm]
ST1-1 - BASE	1°	1800	0,00	0,06	0,25	-0,24	0,01	0,10	0,42	-0,41
ST1 - BASE	1°	2800	0,00	0,09	0,35	-0,35	0,01	0,28	1,14	-1,12
ST2 - ST1-1	2°	4900	0,03	1,00	4,04	-3,97	0,04	1,28	5,14	-5,06
ST2 - ST1	2°	3900	0,03	0,98	3,94	-3,87	0,03	1,10	4,42	-4,35
ST3 - ST2	3°	4000	0,07	1,51	6,12	-5,97	0,06	1,43	5,79	-5,68
ST4 - ST3	4°	3400	0,09	1,49	6,03	-5,85	0,06	1,31	5,28	-5,17
ST5 - ST4	5°	3400	0,10	1,48	6,02	-5,81	0,06	1,29	5,24	-5,11
ST6 - ST5	6°	3400	0,12	1,45	5,91	-5,67	0,07	1,28	5,17	-5,03

EDIFICIO CIVILE - CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI										
	Livello	h [mm]	Direzione X				Direzione Y			
			η_p [mm]	η_d [mm]	η_{tx}^+ [mm]	η_{tx}^- [mm]	η_p [mm]	η_d [mm]	η_{ty}^+ [mm]	η_{ty}^- [mm]
copert. - sottot.	5°	2140	0,00	0,30	0,60	-0,60	0,00	0,10	0,20	-0,20
sottot. - 3°P	4°	2930	0,10	2,00	4,10	-3,90	0,10	1,80	3,70	-3,50
3°P - 2°P	3°	2930	0,00	2,10	4,20	-4,20	0,00	2,20	4,40	-4,40
2°P - 1°P	2°	2930	0,00	1,90	3,80	-3,80	0,00	2,30	4,60	-4,60
1°P - BASE	1°	2760	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Nella successiva tabella si riportano, per ciascuna direzione di riferimento:

$\eta_{lim} = 0.004 \cdot h$ spostamenti limite d'interpiano prescritti dalla norma per

garantirsi dal danneggiamenti di elementi non strutturali ed

impianti, nell'ipotesi di elementi non strutturali realizzati in modo da non interferire con la struttura;

esito verifica “positivo” se, per ciascuna direzione, $\eta_t \leq \eta_{lim}$;

$$\lambda = \frac{\eta_{tlim}}{\eta_{ti}} \quad \text{coefficiente di sicurezza.}$$

EDIFICIO STRATEGICO – VERIFICHE DI SPOSTAMENTI										
			Verifica direzione X				Verifica direzione Y			
	Livello	η_{tlim}	λ_X^+	esito verifica	λ_X^-	esito verifica	λ_Y^+	esito verifica	λ_Y^-	esito verifica
		[mm]	[-]		[-]		[-]		[-]	
ST1-1 - BASE	1°	7,20	28,9	positivo	29,8	positivo	17,2	positivo	17,7	positivo
ST1 - BASE	1°	11,20	31,7	positivo	32,4	positivo	9,8	positivo	10,0	positivo
ST2 - ST1-1	2°	19,60	4,9	positivo	4,9	positivo	3,8	positivo	3,9	positivo
ST2 - ST1	2°	15,60	4,0	positivo	4,0	positivo	3,5	positivo	3,6	positivo
ST3 - ST2	3°	16,00	2,6	positivo	2,7	positivo	2,8	positivo	2,8	positivo
ST4 - ST3	4°	13,60	2,3	positivo	2,3	positivo	2,6	positivo	2,6	positivo
ST5 - ST4	5°	13,60	2,3	positivo	2,3	positivo	2,6	positivo	2,7	positivo
ST6 - ST5	6°	13,60	2,3	positivo	2,4	positivo	2,6	positivo	2,7	Positivo

EDIFICIO CIVILE – VERIFICHE DI SPOSTAMENTI										
			Verifica direzione X				Verifica direzione Y			
	Livello	η_{tlim}	λ_X^+	esito verifica	λ_X^-	esito verifica	λ_Y^+	esito verifica	λ_Y^-	esito verifica
		[mm]	[-]		[-]		[-]		[-]	
copert. -sottot.	5°	8,56	14,3	positivo	14,3	positivo	42,8	positivo	42,8	positivo
sottot. - 3°P	4°	11,72	2,9	positivo	3,0	positivo	3,2	positivo	3,3	positivo
3°P - 2°P	3°	11,72	2,8	positivo	2,8	positivo	2,7	positivo	2,7	positivo
2°P - 1°P	2°	11,72	3,1	positivo	3,1	positivo	2,5	positivo	2,5	positivo
1°P - BASE	1°	11,04	-	positivo	-	positivo	-	positivo	-	positivo

Si osserva che, rispetto a S1, gli spostamenti sismici sono diminuiti e, di conseguenza, i coefficienti di sicurezza sono aumentati in quanto la sollecitazione sismica dinamica è minore di quella statica.

6.4.2 Calcolo e verifiche modelli D2 (DM '96 – T.A. – angolo sismo var.)

Nel modello D2 si considerano agenti le azioni così come prescritto dai D.D.M.M. del '96, utilizzando il metodo di verifica alle tensioni ammissibili.

Le azioni sismiche vengono applicate col metodo dello spettro di risposta secondo quanto descritto per i modelli D1 in 6.4.1, ma lo spettro viene applicato alla struttura secondo angoli d'ingresso variabili in pianta con passo 30°. Pertanto si definiscono, per entrambi gli edifici, le seguenti condizioni di carico spettrali:

- SPEC000: spettro di accelerazione applicato a 0° rispetto a X
- SPEC030: spettro di accelerazione applicato a 30° rispetto a X
- SPEC060: spettro di accelerazione applicato a 60° rispetto a X
- SPEC090: spettro di accelerazione applicato a 90° rispetto a X
- SPEC120: spettro di accelerazione applicato a 120° rispetto a X
- SPEC150: spettro di accelerazione applicato a 150° rispetto a X

A partire dalle condizioni di carico statiche elementari e dalle condizioni spettrali elencate, si considerano 7 combinazioni di carico più due involuppi:

Edificio Strategico \ Edificio Civile – Combinazioni di carico		
1	COMBVERT:	pesi propri + carichi perm. + sovraccarichi accidentali
2	COMB 000:	Combvert + Spec000
3	COMB 030:	Combvert + Spec030
4	COMB 060:	Combvert + Spec060
5	COMB 090:	Combvert + Spec090
6	COMB 120:	Combvert + Spec120
7	COMB 150:	Combvert + Spec150
-	INV:	involuppo COMB1÷3
-	INVSIS:	involuppo COMB2÷3

Per l'analisi dinamica non si porta in conto l'eccentricità accidentale in quanto non è richiesto dalla normativa; inoltre non si definiscono le combinazioni con sismo negativo in quanto il programma di calcolo tiene già in conto il fatto che lo spettro di accelerazione agisce in una direzione in entrambi i versi. I due inviluppi considerati sono utili rispettivamente per la verifica a flessione delle travi e per la determinazione degli spostamenti sismici nella verifica di deformabilità.

6.4.2.1 Verifiche di resistenza

Travi: flessione retta e taglio

Si ricorda che la verifica si conduce per l'inviluppo di tutte le combinazioni di carico, analizzando, generalmente, cinque sezioni per ciascuna trave.

Edificio Strategico

Rispetto al modello S1 si riscontra una generale diminuzione dei coefficienti di sicurezza. Tale diminuzione è poco influente per la maggioranza delle travi, mentre per 44 sezioni la verifica non risulta soddisfatta. Le sezioni in questione sono generalmente localizzate nelle travi corte tra i nuclei, già individuate in Figura 6-5.

Di seguito si riporta lo specchio riassuntivo delle verifiche a flessione retta effettuate sulle 2057 sezioni già definite, in cui si legge il coefficiente di sicurezza minore di un certo valore e la relativa percentuale sul totale delle sezioni.

Rispetto al modello D1 si riscontra una generale diminuzione dei coefficienti di sicurezza, ma non significativa, mentre resta comunque evidente l'aumento rispetto a S1. Il quantitativo di acciaio longitudinale calcolato è uguale a quello di D1 e pari a 30.2 [ton]. Si fa osservare che, in questo caso, l'armatura delle travi corte rispetta i limiti normativi, a differenza del modello S2.

Edificio Strategico_D2_travi_flex				
coef. secur	N cls	N fe	cls	fe
>2	1992	1951	96,8%	94,8%
2,0	65	106	3,2%	5,2%
1,5	23	6	1,1%	0,3%
1,4	22	1	1,1%	0,0%
1,3	16	0	0,8%	0,0%
1,2	7	0	0,3%	0,0%
1,1	0	0	0,0%	0,0%
1,0	0	0	0,0%	0,0%

Per la verifica a taglio si considerano, come al solito, l'involuppo massimo e minimo delle sollecitazioni di taglio e torsione. Si effettuano pertanto 4158 verifiche calcolando la tensione tangenziale τ e confrontandola con i valori limite.

Si osserva che i due tipi di analisi dinamica portano a risultati analoghi per quanto riguarda i valori minimi, ma dalla tabella seguente si nota una leggera diminuzione delle medie.

Edificio Strategico_D2_travi_taglio e tors.					Edificio Strategico_D1_travi_taglio e tors.				
coef. secur	N τ_{c0}	N τ_{max}	τ_{c0}	τ_{max}	coef. secur	N τ_{c0}	N τ_{max}	τ_{c0}	τ_{max}
>2	3020	3985	72,6%	95,8%	>2	3089	4016	74,3%	96,6%
2,0	1138	173	27,4%	4,2%	2,0	1069	142	25,7%	3,4%
1,5	727	85	17,5%	2,0%	1,5	697	59	16,8%	1,4%
1,4	680	78	16,4%	1,9%	1,4	649	54	15,6%	1,3%
1,3	627	76	15,1%	1,8%	1,3	582	54	14,0%	1,3%
1,2	548	73	13,2%	1,8%	1,2	512	53	12,3%	1,3%
1,1	450	69	10,8%	1,7%	1,1	410	51	9,9%	1,2%
1,0	334	0	8,0%	0,0%	1,0	316	0	7,6%	0,0%
0,9	276	0	6,6%	0,0%	0,9	265	0	6,4%	0,0%
0,8	217	0	5,2%	0,0%	0,8	210	0	5,1%	0,0%
0,7	173	0	4,2%	0,0%	0,7	163	0	3,9%	0,0%
0,6	118	0	2,8%	0,0%	0,6	88	0	2,1%	0,0%

Le armature a taglio inserite sono le stesse del modello S1, che significa un quantitativo di acciaio in peso pari a 16.7 [ton].

Edificio Civile

Rispetto al modello D1 si riscontra una modesta ed ininfluyente diminuzione dei coefficienti di sicurezza, indice che le combinazioni più gravose coincidono sostanzialmente con quelle in cui l'azione sismica è diretta lungo le direzioni di riferimento.

Edificio Civile_D2_travi_flex				
coef. secur	N cls	N fe	cls	fe
5,0	79	91	38,9%	44,8%
3,5	41	37	20,2%	18,2%
3,0	27	25	13,3%	12,3%
2,5	12	17	5,9%	8,4%
2,0	3	3	1,5%	1,5%
1,8	2	2	1,0%	1,0%
1,6	1	0	0,5%	0,0%
1,4	0	0	0,0%	0,0%
1,2	0	0	0,0%	0,0%

Essendo tutte le verifiche soddisfatte, non occorre determinare alcun incremento di armatura rispetto al modello S1.

Per la verifica a taglio valgono le stesse considerazioni, ma la riduzione dei coefficienti è più evidente.

Edificio Civile_S2_travi_taglio e tors.									
coef. secur	N τ_{c0}	N τ_{max}	τ_{c0}	τ_{max}	coef. secur	N τ_{c0}	N τ_{max}	τ_{c0}	τ_{max}
5,0	146	38	65,5%	17,0%	1,4	23	0	10,3%	0,0%
3,5	115	8	51,6%	3,6%	1,2	8	0	3,6%	0,0%
3,0	97	4	43,5%	1,8%	1,0	4	0	1,8%	0,0%
2,5	84	1	37,7%	0,4%	0,9	2	0	0,9%	0,0%
2,0	55	0	24,7%	0,0%	0,8	0	0	0,0%	0,0%
1,8	42	0	18,8%	0,0%	0,7	0	0	0,0%	0,0%
1,6	33	0	14,8%	0,0%	0,6	0	0	0,0%	0,0%

Essendo aumentato il numero delle sezioni che necessitano di armatura a taglio da 6 a 4 (1.8%), occorrono alcune staffe in meno, ma il decremento in peso di armatura, di fatto, non è apprezzabile.

Pilastri: presso-flessione deviata e taglio e torsione

Edificio Strategico

Leggendo lo specchio riassuntivo riportato qui di seguito si osserva che i coefficienti minimi sono uguali ai rispettivi coefficienti del modello D1.

Edificio Strategico_D2_pilastri_pflex				
coef. secur	N cls	N fe	cls	fe
2,0	126	462	27,3%	100,0%
1,5	336	0	72,7%	0,0%
1,4	107	0	23,2%	0,0%
1,3	70	0	15,2%	0,0%
1,2	19	0	4,1%	0,0%
1,1	3	0	0,6%	0,0%
1,0	0	0	0,0%	0,0%

Anche per la verifica a taglio si ha lo stesso fenomeno. Di seguito, per brevità, si riporta solo uno specchio comparativo tra i coefficienti minimi e medi delle analisi D2 e D1.

Edificio Strategico_D2_pilastri_taglio e tors.			Edificio Strategico_D1_pilastri_taglio e tors.		
n° sez. verificate: 924			n° sez. verificate: 924		
Coef. secur.	τ_{c0}	τ_{max}	Coef. secur.	τ_{c0}	τ_{max}
media	7,87	24,97	media	8,99	28,52
min	1,25	3,97	min	1,25	3,97

In definitiva l'acciaio necessario per armare i pilastri è uguale a quello del modello D1, ossia occorrono 14.3 [ton] per l'armature longitudinale e 3.4 [ton] per quella trasversale.

Edificio Civile

Dallo specchio riassuntivo delle verifiche riportato qui di seguito si osserva una media riduzione dei coefficienti di sicurezza rispetto a quelli calcolati col modello D1; tale riduzione, però, non compromette l'esito positivo delle verifiche.

Edificio Civile_D2_pilastri_pflex Armature S1					Edificio Civile_D2_pilastri_pflex Armature ridotte				
coef. secur	N cls	N fe	cls	fe	coef. secur	N cls	N fe	cls	fe
5,0	87	24	80,6%	22,2%	5,0	94	40	87,0%	37,0%
3,5	73	8	67,6%	7,4%	3,5	84	24	77,8%	22,2%
3,0	72	1	66,7%	0,9%	3,0	74	18	68,5%	16,7%
2,5	60	1	55,6%	0,9%	2,5	72	11	66,7%	10,2%
2,0	51	0	47,2%	0,0%	2,0	60	3	55,6%	2,8%
1,8	45	0	41,7%	0,0%	1,8	56	0	51,9%	0,0%
1,6	39	0	36,1%	0,0%	1,6	50	0	46,3%	0,0%
1,4	18	0	16,7%	0,0%	1,4	41	0	38,0%	0,0%
1,2	4	0	3,7%	0,0%	1,2	22	0	20,4%	0,0%
1,0	0	0	0,0%	0,0%	1,0	0	0	0,0%	0,0%

Le armature longitudinali calcolate sono maggiori di quelle di D1 e pari a 1.36 [ton].

I risultati delle verifiche a taglio non sono sostanzialmente diversi da quelli di D1: i coefficienti di sicurezza minimi restano invariati a fronte di una leggera diminuzione dei valori medi. Di seguito, per brevità, si riporta solo uno specchio comparativo tra i coefficienti minimi e medi delle analisi D2 e D1.

Edificio Civile_D2_pilastri_taglio e tors.			Edificio Civile_D1_pilastri_taglio e tors.		
n° sez. verificate: 108			n° sez. verificate: 108		
Coef. secur.	τ_{c0}	τ_{max}	Coef. secur.	τ_{c0}	τ_{max}
media	2,73	7,88	media	2,73	7,88
min	1,28	3,68	min	1,28	3,68

Setti e Nuclei: presso-flessione deviata e taglio e torsione (Edificio Strategico)

Per la verifica a presso-flessione dei setti e dei nuclei del modello D2 si segnala che le combinazioni di carico critiche sono esattamente le stesse del modello D1, ossia le combinazioni con angolo d'ingresso del sismo a 0° o 90° ; pertanto non si riporta lo specchio riassuntivo in quanto perfettamente conforme a quello riportato in 6.4.1.1. Ovviamente anche il quantitativo di acciaio per le barre longitudinali è uguale e pari a 11.6 [ton].

La verifica a taglio, invece, porta ad una lievissima diminuzione dei coefficienti di sicurezza rispetto a D1, tale da non alterarne il quantitativo di acciaio trasversale calcolato e pari a 11.4 [ton].

Edificio Strategico_D2_setti_taglio		
n° sez. verificate:		36
coef secur	τ_{c0}	τ_{max}
media	2,38	8,36
min	0,61	2,14

6.4.2.2 Verifiche spostamenti di interpiano

La verifica degli spostamenti risulta esattamente identica a quella dei modelli D1 e riportata in 6.4.1.2, in quanto gli spostamenti massimi si verificano, per entrambi gli edifici, quando le azioni sismiche agiscono lungo le due direzioni di riferimento.

6.4.3 Calcolo e verifiche modelli D3 (DM '96 – S.L.U.)

L'analisi condotta col modello D3 rispetta le prescrizioni dei DDMM '96; la verifica si conduce col metodo semi-probabilistico agli stati limite.

Per la definizione dello spettro di risposta e delle masse sismiche vale quanto già detto per il modello D1 nel paragrafo 6.4.1, a cui si rimanda.

Per entrambe le strutture si definiscono le seguenti combinazioni di carico:

Edificio Strategico \ Edificio Civile – Combinazioni di carico		
1	COMBV1:	$1.0 \cdot G$
2	COMBV2:	$1.4 \cdot G$
3	COMBV3:	$1.0 \cdot G + 1.5 \cdot Q$
4	COMBV4:	$1.4 \cdot G + 1.5 \cdot Q$
5	COMBV1X:	$\text{CombV1} + 1.5 \cdot \text{SpecX}$
6	COMBV1Y:	$\text{CombV1} + 1.5 \cdot \text{SpecY}$
7	COMBV2X:	$\text{CombV2} + 1.5 \cdot \text{SpecX}$
8	COMBV2Y:	$\text{CombV2} + 1.5 \cdot \text{SpecY}$
9	COMBV3X:	$\text{CombV3} + 1.5 \cdot \text{SpecX}$
10	COMBV3Y:	$\text{CombV3} + 1.5 \cdot \text{SpecY}$
11	COMBV4X:	$\text{CombV4} + 1.5 \cdot \text{SpecX}$
12	COMBV4Y:	$\text{CombV4} + 1.5 \cdot \text{SpecY}$
-	INV:	involuppo COMB1÷12
-	INVSIS:	involuppo SpecX, SpecY

Per l'analisi dinamica non si porta in conto l'eccentricità accidentale in quanto non è richiesto dalla normativa; inoltre non si definiscono le combinazioni con sismo negativo in quanto il programma di calcolo tiene già in conto il fatto che lo spettro di accelerazione agisce in una direzione in entrambi i versi. I due involuppi considerati sono utili rispettivamente per la verifica a flessione delle travi e per la determinazione degli spostamenti sismici nella verifica di deformabilità.

6.4.3.1 Verifiche di resistenza

Travi: flessione retta e taglio

La verifica allo stato limite ultimo si conduce col programma automatico, descritto nel Capitolo 4, che fornisce i moltiplicatori critici per la flessione e per il taglio. Le sezioni prese in considerazione sono le stesse degli altri modelli: 2057 per l'edificio strategico e 203 per l'edificio civile. Si ricorda che la verifica si conduce per l'involuppo di tutte le combinazioni di carico. *In primis* si analizzano le sezioni armate come quelle del modello S1, successivamente, si considerano eventuali ottimizzazioni delle armature. Di seguito si riportano gli specchi riassuntivi delle verifiche a flessione retta (M-N) ed a taglio e torsione (T-T), in cui si legge il numero di sezioni con coefficiente di sicurezza minore di un certo valore e la relativa percentuale sul totale delle sezioni analizzate.

Edificio Strategico

Edificio Strategico_D3_travi				
coef. secur	M-N	T-T	M-N %	T-T %
>2	1716	2042	83,4%	99,3%
2,0	341	15	16,6%	0,7%
1,5	68	0	3,3%	0,0%
1,4	20	0	1,0%	0,0%
1,3	4	0	0,2%	0,0%
1,2	2	0	0,1%	0,0%
1,1	1	0	0,0%	0,0%
1,0	0	0	0,0%	0,0%

In questo caso la riduzione delle sollecitazioni sismiche dovute all'analisi dinamica non comporta i problemi sulle sezioni d'incastro delle travi nei setti; il valore minimo dei moltiplicatori dei carichi è pari a 1.07.

Le armature longitudinali e trasversali sono le stesse del modello S1, ossia pari rispettivamente a 30.7 [ton] e 16.7 [ton].

Edificio Civile

Edificio Civile_D3_travi				
coef. sicur	M-N	T-T	M-N %	T-T %
5,0	144	81	70,9%	39,9%
3,5	97	37	47,8%	18,2%
3,0	78	26	38,4%	12,8%
2,5	50	9	24,6%	4,4%
2,0	25	5	12,3%	2,5%
1,8	16	1	7,9%	0,5%
1,6	8	0	3,9%	0,0%
1,4	7	0	3,4%	0,0%
1,2	2	0	1,0%	0,0%
1,0	0	0	0,0%	0,0%

In questo caso il coefficiente di sicurezza minimo vale 1.16. Le armature longitudinali e trasversali sono le stesse di S1: rispettivamente 2.42 [ton] e 0.918 [ton].

Pilastri: presso-flessione deviata e taglio e torsione

La verifica allo stato limite ultimo si conduce col programma automatico, descritto nel Capitolo 4, che fornisce i moltiplicatori critici per la presso-flessione e per il taglio. Le sezioni prese in considerazione sono le stesse degli altri modelli: 462 per l'edificio strategico e 108 per l'edificio civile. La verifica si conduce per ciascuna combinazione di carico.

Edificio Strategico

Le armature S1 restituiscono valori dei coefficienti piuttosto alti, come si evince dalla tabella seguente.

Edificio Strategico_D3_pilastr				
coef. secur	N-M	T-T	N-M %	T-T %
>2	435	461	94,2%	99,8%
2,0	27	0	5,8%	0,0%
1,5	0	0	0,0%	0,0%
1,4	0	0	0,0%	0,0%
1,3	0	0	0,0%	0,0%
1,2	0	0	0,0%	0,0%
1,1	0	0	0,0%	0,0%
1,0	0	0	0,0%	0,0%

Il moltiplicatore di carico minimo vale 1.55. E' possibile quindi applicare il minimo di armatura tecnologica già prevista anche per il modello D1: 14.3 [ton] per l'armatura longitudinale e 3.4 [ton] per quella trasversale.

Di seguito si riportano altre due tabelle riepilogative dell'analisi: nella prima si legge l'influenza del percorso di amplificazione del carico nella determinazione dei coefficienti di sicurezza minimi. Si osserva che la maggioranza delle sezioni raggiungerebbe prima le deformazioni ultime se tutte e tre le sollecitazioni venissero amplificate proporzionalmente; un numero non trascurabile di sezioni, invece, andrebbe in crisi prima se si amplificassero solo i momenti flettenti. Meno o per nulla significativi sono, invece, gli altri percorsi di amplificazione.

Edificio Strategico_D3_pilastr – Amplificazioni di carico critiche		
percorso di carico	N° sez.	%
1 - Variabili: N, Mx, My	379	82,0%
2 - Variabili: Mx, My	66	14,3%
3 - Variabili: N, My	0	0,0%
4 - Variabili: N, Mx	0	0,0%
5 - Variabili: My	0	0,0%
6 - Variabili: Mx	0	0,0%
7 - Variabili: N	17	3,7%
	462	

Nella seconda tabella, invece, si riportano le condizioni di carico più gravose, ossia quelle per cui si ottiene il coefficiente di sicurezza minimo: si osserva che solo 5 sezioni, pari a 1.1% andrebbero in crisi per la più gravosa delle combinazioni dei carichi verticali, mentre tutte le altre raggiungerebbero la crisi per effetto di una delle combinazioni sismiche. Tra quest'ultime la stragrande maggioranza, il 94.6%, andrebbe in crisi quando i carichi verticali sono presenti con il loro massimo valore, mentre per percentuali trascurabili di sezioni si raggiungerebbe la crisi per le altre condizioni.

Edificio Strategico_D3_pilastrì - Combinazioni più gravose				
		N° sez.	%	
verticali	COMBV1	0	0,0%	1,0 G
	COMBV2	0	0,0%	1,4 G
	COMBV3	0	0,0%	1,0 G + 1,5 Q
	COMBV4	5	1,1%	1,4 G + 1,5 Q
sismiche	V1	8	1,7%	1,0 G + sismo
	V2	3	0,6%	1,4 G + sismo
	V3	9	1,9%	1,0 G + 1,5 Q + sismo
	V4	437	94,6%	1,4 G + 1,5 Q + sismo
		462		

Edificio Civile

Confrontando i risultati di questa analisi, con le armature di riferimento, con quelli dell'analisi S3, riportati in 6.3.3, ci si accorge del miglioramento che si ottiene con l'analisi dinamica modale: il moltiplicatore critico, infatti, nel caso della pressoflessione, passa da 1.96 nel caso S3 a 2.23, mentre il valore medio di tale grandezza passa da 4.53 a 4.87. Per il taglio, invece, il valore minimo passa da 2.04 per S3 a 2.69, mentre il valore medio passa da 4.55 per S3 a 5.23.

Considerando i notevoli margini di sicurezza ottenuti, si considera la riduzione delle armature longitudinali, così come nel modello S3. Si ricorda che non è possibile

ridurre ulteriormente né le armature longitudinali né quelle trasversali per rispettare le prescrizioni minime di normativa.

Edificio Civile_D3_pilastri Armature S1					Edificio Civile_D3_pilastri Armature ridotte				
coef. secur	N-M	T-T	N-M %	T-T %	coef. secur	N-M	T-T	N-M %	T-T %
5,0	72	88	66,7%	81,5%	5,0	90	88	83,3%	81,5%
3,5	49	18	45,4%	16,7%	3,5	77	14	71,3%	13,0%
3,0	21	8	19,4%	7,4%	3,0	67	6	62,0%	5,6%
2,5	9	0	8,3%	0,0%	2,5	54	0	50,0%	0,0%
2,0	0	0	0,0%	0,0%	2,0	25	0	23,1%	0,0%
1,8	0	0	0,0%	0,0%	1,8	12	0	11,1%	0,0%
1,6	0	0	0,0%	0,0%	1,6	3	0	2,8%	0,0%
1,4	0	0	0,0%	0,0%	1,4	0	0	0,0%	0,0%
1,2	0	0	0,0%	0,0%	1,2	0	0	0,0%	0,0%
1,0	0	0	0,0%	0,0%	1,0	0	0	0,0%	0,0%

Il quantitativo di acciaio per armatura longitudinale determinato è pari a 1.29 [ton], con una riduzione rispetto a S1 del 47.12%. L'acciaio trasversale pesa sempre 0.368 [ton].

Per quanto riguarda il percorso critico di amplificazione del carico, si osserva che il numero 1 è ancora il più significativo, mentre circa il 25% delle sezioni raggiungerebbe prima le deformazioni ultime seguendo il percorso numero 2.

Edificio Civile_D3_pilastri – Amplificazioni di carico critiche		
percorso di carico	N° sez.	%
1 - Variabili: N, Mx, My	81	75.0%
2 - Variabili: Mx, My	27	25.0%
3 - Variabili: N, My	0	0,0%
4 - Variabili: N, Mx	0	0,0%
5 - Variabili: My	0	0,0%
6 - Variabili: Mx	0	0,0%
7 - Variabili: N	0	0,0%
	108	

La variazione di armatura, così come nel modello S3, porta i due percorsi a valori vicini al 50% (per l'esattezza 52% per il percorso n°1 e 48% per il n°2), poiché variano la dimensione e la forma del dominio ultimo.

Dalla seconda tabella, invece, si evince che le combinazioni sismiche con i massimi carichi verticali risultano sempre le più gravose salvo 2 eccezioni (1.9% delle sezioni).

Edificio Civile_D3_pilastri - Combinazioni più gravose				
Armature S1				
		N° sez.	%	
Verticali	COMBV1	0	0,0%	1,0 G
	COMBV2	0	0,0%	1,4 G
	COMBV3	0	0,0%	1,0 G + 1,5 Q
	COMBV4	0	0,0%	1,4 G + 1,5 Q
sismiche	V1	0	0.0%	1,0 G + sismo
	V2	0	0.0%	1,4 G + sismo
	V3	2	1.9%	1,0 G + 1,5 Q + sismo
	V4	106	98.1%	1,4 G + 1,5 Q + sismo
		108		

Ciò vale anche per l'analisi con le armature ridotte, ma la percentuale di sezioni che hanno le combinazioni V4 come critiche si riduce da 97.2% a 81.5%, a vantaggio prevalentemente delle combinazioni V1.

Edificio Civile_D3_pilastri - Combinazioni più gravose				
Armature ridotte				
		N° sez.	%	
Verticali	COMBV1	0	0,0%	1,0 G
	COMBV2	0	0,0%	1,4 G
	COMBV3	0	0,0%	1,0 G + 1,5 Q
	COMBV4	0	0,0%	1,4 G + 1,5 Q
Sismiche	V1	11	10,2%	1,0 G + sismo
	V2	2	1,9%	1,4 G + sismo
	V3	2	1,9%	1,0 G + 1,5 Q + sismo
	V4	93	86,1%	1,4 G + 1,5 Q + sismo
		108		

Setti e Nuclei: presso-flessione deviata e taglio e torsione (Edificio Strategico)

Di seguito si riporta lo specchio riassuntivo delle verifiche a presso-flessione.

Edificio Strategico_D3_setti_pflex					
Setto	Livel.	Story	Comb	λ_c	armatura verticale
P1	4-8	STORY4	COMBV1X MAX	6,25	$\phi 12/20''$
P1	0-3	STORY2	COMBV4X MAX	3,33	$\phi 16/20''$
P2	4-8	STORY4	COMBV1X MAX	3,85	$\phi 12/20''$
P2	0-3	STORY2	COMBV1X MAX	2,08	$\phi 16/20''$
P3	4-8	STORY4	COMBV1Y MAX	5,00	$\phi 12/20''$
P3	0-3	STORY1-1	COMBV1Y MAX	2,56	$\phi 20/20''$
P4	4-8	STORY4	COMBV4X MAX	5,88	$\phi 12/20''$
P4	0-3	STORY1-1	COMBV4Y MIN	2,86	$\phi 20/20''$
P5	0-1	STORY1-1	COMBV4X MIN	6,67	$\phi 12/20''$
P6	0-1	STORY1-1	COMBV1Y MAX	2,56	$\phi 12/20''$

Anche in questo caso si osserva un considerevole aumento dei coefficienti di sicurezza rispetto a quelli calcolati nel modello S3, dovuto alla riduzione delle sollecitazioni nell'analisi dinamica rispetto a quella statica. Pertanto si può ridurre l'armatura ai quantitativi del modello D1, pari al minimo tecnologico e normativo, ossia 11.6 [ton] di acciaio.

La verifica a taglio si effettua su ciascun elemento ad ogni livello considerando su 36 sezioni l'involuppo massimo e minimo di taglio e torsione.

Il coefficiente minimo è pari a 1.75 e risulta ben maggiore rispetto a quello di S3 pari a 1.06; inoltre si ha che solo due sezioni hanno coefficiente inferiore a 2.00. La tabella riassuntiva non si riporta perché poco significativa.

Le armature a taglio inserite sono costituite, come per il modello D1, da barre orizzontali $\phi 12/20''$; Il quantitativo di ferro previsto è quindi pari a 11.4 [ton], con una lieve riduzione rispetto a S1 pari a 0.9%.

6.4.3.2 Verifiche spostamenti di interpiano

Nella tabella seguente si riportano, per ciascuna direzione di riferimento:

h altezza di interpiano;

η_p spostamenti relativi elastici dovuti ad azioni diverse dal sismo;

η_d spostamenti relativi dovuti al sismo;

$\eta_t = \frac{\eta_p \pm \lambda \cdot \eta_d}{X}$ spostamenti relativi totali;

in cui:

$\lambda = 4$ funzione del coefficiente di protezione sismica I;

$X = 1$ per calcolo effettuato alle tensioni ammissibili.

EDIFICIO STRATEGICO – CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI										
	Livello	h [mm]	Direzione X				Direzione Y			
			η_p [mm]	η_d [mm]	η_{tx}^+ [mm]	η_{tx}^- [mm]	η_p [mm]	η_d [mm]	η_{ty}^+ [mm]	η_{ty}^- [mm]
ST1-1 - BASE	1°	1800	0,24	0,16	0,58	-0,26	0,06	0,36	0,99	-0,92
ST1 - BASE	1°	2800	0,06	0,28	0,79	-0,71	0,02	0,54	1,46	-1,43
ST2 - ST1-1	2°	4900	-0,19	2,41	6,29	-6,54	0,01	2,82	7,52	-7,51
ST2 - ST1	2°	3900	-0,01	2,28	6,08	-6,09	0,04	2,63	7,05	-7,00
ST3 - ST2	3°	4000	0,10	3,19	8,57	-8,44	0,08	3,44	9,23	-9,13
ST4 - ST3	4°	3400	0,13	2,83	7,64	-7,47	0,08	2,83	7,59	-7,48
ST5 - ST4	5°	3400	0,15	2,68	7,24	-7,04	0,09	2,41	6,50	-6,38
ST6 - ST5	6°	3400	0,18	2,43	6,60	-6,37	0,10	1,93	5,20	-5,07

EDIFICIO CIVILE – CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI										
			Direzione X				Direzione Y			
	Livello	h [mm]	η_p [mm]	η_d [mm]	η_{tx}^+ [mm]	η_{tx}^- [mm]	η_p [mm]	η_d [mm]	η_{ty}^+ [mm]	η_{ty}^- [mm]
copert. -sottot.	5°	2140	0.00	0.45	0.60	-0.60	0.00	0.15	0.20	-0.20
sottot. - 3°P	4°	2930	0.00	3.60	4.80	-4.80	0.15	3.15	4.30	-4.10
3°P - 2°P	3°	2930	0.15	3.90	5.30	-5.10	0.00	4.05	5.40	-5.40
2°P - 1°P	2°	2930	0.00	3.30	4.40	-4.40	0.00	4.05	5.40	-5.40
1°P - BASE	1°	2760	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Nella successiva tabella si riportano, per ciascuna direzione di riferimento:

$\eta_{lim} = 0.004 \cdot h$ spostamenti limite d'interpiano prescritti dalla norma per garantirsi dal danneggiamenti di elementi non strutturali ed impianti, nell'ipotesi di elementi non strutturali realizzati in modo da non interferire con la struttura;

esito verifica “positivo” se, per ciascuna direzione, $\eta_t \leq \eta_{lim}$;

$\lambda = \frac{\eta_{lim}}{\eta_{ti}}$ coefficiente di sicurezza.

EDIFICIO STRATEGICO – VERIFICHE DI SPOSTAMENTI										
			Verifica direzione X				Verifica direzione Y			
			λ_{X^+}	esito verifica	λ_{X^-}	esito verifica	λ_{Y^+}	esito verifica	λ_{Y^-}	esito verifica
	Livello	η_{lim} [mm]	[-]		[-]		[-]		[-]	
ST1-1 - BASE	1°	7,20	12,3	positivo	27,4	positivo	7,2	positivo	7,8	positivo
ST1 - BASE	1°	11,20	14,1	positivo	15,8	positivo	7,7	positivo	7,8	positivo
ST2 - ST1-1	2°	19,60	3,1	positivo	3,0	positivo	2,6	positivo	2,6	positivo
ST2 - ST1	2°	15,60	2,6	positivo	2,6	positivo	2,2	positivo	2,2	positivo
ST3 - ST2	3°	16,00	1,9	positivo	1,9	positivo	1,7	positivo	1,8	positivo
ST4 - ST3	4°	13,60	1,8	positivo	1,8	positivo	1,8	positivo	1,8	positivo
ST5 - ST4	5°	13,60	1,9	positivo	1,9	positivo	2,1	positivo	2,1	positivo
ST6 - ST5	6°	13,60	2,1	positivo	2,1	positivo	2,6	positivo	2,7	positivo

EDIFICIO CIVILE – VERIFICHE DI SPOSTAMENTI										
			Verifica direzione X				Verifica direzione Y			
	Livello	η_{lim}	λ_X^+	esito verifica	λ_X^-	esito verifica	λ_Y^+	esito verifica	λ_Y^-	esito verifica
		[mm]	[-]		[-]		[-]		[-]	
copert. -sottot.	5°	8.56	14.3	positivo	14.3	positivo	42.8	positivo	42.8	positivo
sottot. - 3°P	4°	11.72	2.4	positivo	2.4	positivo	2.7	positivo	2.9	positivo
3°P - 2°P	3°	11.72	2.2	positivo	2.3	positivo	2.2	positivo	2.2	positivo
2°P - 1°P	2°	11.72	2.7	positivo	2.7	positivo	2.2	positivo	2.2	positivo
1°P - BASE	1°	11.04	-	positivo	-	positivo	-	positivo	-	positivo

Si osserva l'aumento degli spostamenti elastici e sismici rispetto a quelli di D1 dovuto alle combinazioni di carico agli stati limite; tuttavia la diminuzione dei coefficienti di sicurezza non altera l'esito della verifica, che risulta comunque abbondantemente soddisfatta.

6.4.4 Calcolo e verifiche modelli D4 (DM '96– S.L.U. – angolo sismo var.)

L'analisi e la verifica condotte per il modello D4 sono analoghe a quelle del modello D3, ma in più si considerano le azioni sismiche agenti lungo direzioni inclinate rispetto a quelle di riferimento con angolo variabile con passo 30°.

Le azioni sismiche vengono applicate col metodo dello spettro di risposta secondo quanto descritto per i modelli D1 in 6.4.1 e D2 in 6.4.2. Si definiscono, per entrambi gli edifici, le seguenti condizioni di carico spettrali:

SPEC000: spettro di accelerazione applicato a 0° rispetto a X

SPEC030: spettro di accelerazione applicato a 30° rispetto a X

SPEC060: spettro di accelerazione applicato a 60° rispetto a X

SPEC090: spettro di accelerazione applicato a 90° rispetto a X

SPEC120: spettro di accelerazione applicato a 120° rispetto a X

SPEC150: spettro di accelerazione applicato a 150° rispetto a X

A partire dalle condizioni di carico statiche elementari e dalle condizioni spettrali elencate, si considerano 7 x 4 combinazioni di carico più due involuppi:

Edificio Strategico \ Edificio Civile – Combinazioni di carico					
1	COMBV1:	$1.0 \cdot G$	15	COMBV2_120:	$\text{CombV2} + 1.5 \cdot \text{Spec120}$
2	COMBV2:	$1.4 \cdot G$	16	COMBV2_150:	$\text{CombV2} + 1.5 \cdot \text{Spec150}$
3	COMBV3:	$1.0 \cdot G + 1.5 \cdot Q$	17	COMBV3_000:	$\text{CombV3} + 1.5 \cdot \text{Spec000}$
4	COMBV4:	$1.4 \cdot G + 1.5 \cdot Q$	18	COMBV3_030:	$\text{CombV3} + 1.5 \cdot \text{Spec030}$
5	COMBV1_000:	$\text{CombV1} + 1.5 \cdot \text{Spec000}$	19	COMBV3_060:	$\text{CombV3} + 1.5 \cdot \text{Spec060}$
6	COMBV1_030:	$\text{CombV1} + 1.5 \cdot \text{Spec030}$	20	COMBV3_090:	$\text{CombV3} + 1.5 \cdot \text{Spec090}$
7	COMBV1_060:	$\text{CombV1} + 1.5 \cdot \text{Spec060}$	21	COMBV3_120:	$\text{CombV3} + 1.5 \cdot \text{Spec120}$
8	COMBV1_090:	$\text{CombV1} + 1.5 \cdot \text{Spec090}$	22	COMBV3_150:	$\text{CombV3} + 1.5 \cdot \text{Spec150}$
9	COMBV1_120:	$\text{CombV1} + 1.5 \cdot \text{Spec120}$	23	COMBV4_000:	$\text{CombV4} + 1.5 \cdot \text{Spec000}$
10	COMBV1_150:	$\text{CombV1} + 1.5 \cdot \text{Spec150}$	24	COMBV4_030:	$\text{CombV4} + 1.5 \cdot \text{Spec030}$
11	COMBV2_000:	$\text{CombV2} + 1.5 \cdot \text{Spec000}$	25	COMBV4_060:	$\text{CombV4} + 1.5 \cdot \text{Spec060}$
12	COMBV2_030:	$\text{CombV2} + 1.5 \cdot \text{Spec030}$	26	COMBV4_090:	$\text{CombV4} + 1.5 \cdot \text{Spec090}$
13	COMBV2_060:	$\text{CombV2} + 1.5 \cdot \text{Spec060}$	27	COMBV4_120:	$\text{CombV4} + 1.5 \cdot \text{Spec120}$
14	COMBV2_090:	$\text{CombV2} + 1.5 \cdot \text{Spec090}$	28	COMBV4_150:	$\text{CombV4} + 1.5 \cdot \text{Spec150}$
-	INV:	involuppo COMB1÷28			
-	INVSIS:	involuppo Spec000÷150			

Per l'analisi dinamica non si porta in conto l'eccentricità accidentale in quanto non è richiesto dalla normativa; inoltre non si definiscono le combinazioni con sismo negativo in quanto il programma di calcolo tiene già in conto il fatto che lo spettro di accelerazione agisce in una direzione in entrambi i versi. I due involuppi considerati sono utili rispettivamente per la verifica a flessione delle travi e per la determinazione degli spostamenti sismici nella verifica di deformabilità.

6.4.4.1 Verifiche di resistenza

Travi: flessione retta e taglio

Edificio Strategico

Di seguito si riporta lo specchio riassuntivo delle verifiche a flessione retta (M-N) ed a taglio e torsione (T-T).

Edificio Strategico_D4_travi				
coef. secur	M-N	T-T	M-N %	T-T %
>2	1715	2042	83,4%	99,3%
2,0	342	15	16,6%	0,7%
1,5	56	0	2,7%	0,0%
1,4	21	0	1,0%	0,0%
1,3	4	0	0,2%	0,0%
1,2	2	0	0,1%	0,0%
1,1	1	0	0,0%	0,0%
1,0	0	0	0,0%	0,0%

Dalla tabella si osserva che i coefficienti di sicurezza subiscono un lieve decremento, tuttavia i valori minimi sono uguali a quelli di D3: il moltiplicatore minimo è pari a 1.07.

Le armature longitudinali e trasversali sono le stesse dei modelli S1 e D3, ossia pari rispettivamente a 30.2 [ton] e 16.7 [ton].

Edificio Civile

Analogamente all'edificio strategico anche per l'edificio civile i risultati dell'analisi D4 sono appena peggiori di quelli dell'analisi D3 e comunque la riduzione dei coefficienti non riguarda le sezioni più sollecitate; di fatto l'analisi conduce allo stesso risultato di D3.

Pilastrini: presso-flessione deviata e taglio e torsione

Edificio Strategico

Anche in questa analisi, come per la precedente, le armature S1 restituiscono valori dei coefficienti piuttosto alti ed appena inferiori ai valori riscontrati in D3. Si applica, pertanto la riduzione di armatura già prevista anche per il modello D1: 14.3 [ton] per l'armatura longitudinale e 3.4 [ton] per quella trasversale.

Risultati analoghi a quelli di D3 si ottengono anche per quanto riguarda le combinazioni di carico critiche ed i relativi percorsi di amplificazione del carico.

Edificio Civile

Anche per l'edificio civile questa analisi non porta a risultati sostanzialmente diversi da quelli di D3, sia in termini di coefficienti di sicurezza delle sezioni con le armature di riferimento, sia in termini di riduzione dell'armatura pari sempre al 47.12% in peso.

Setti e Nuclei: presso-flessione deviata e taglio e torsione (Edificio Strategico)

I risultati delle verifiche a presso-flessione dei setti e dei nuclei sono perfettamente analoghi a quelli del modello D3, in quanto le combinazioni di carico critiche sono proprio quelle con la sollecitazione sismica applicata lungo le direzioni di riferimento. Lo specchio riassuntivo delle verifiche è uguale a quello riportato a pagina 260. Il quantitativo di acciaio longitudinale necessario è ovviamente pari a quello dell'analisi precedente, ossia 11.6 [ton] di acciaio.

Stesse considerazioni possono farsi per la verifica a taglio: i risultati non si discostano di fatto da quelli del modello D3 (vd. pag. 260).

6.4.4.2 Verifiche spostamenti di interpiano

Le tabelle riepilogative delle verifiche degli spostamenti non si riportano poichè sono praticamente uguali a quelle dell'analisi precedente riportata in 6.4.3.2, a cui si rimanda.

6.4.5 Calcolo e verifiche modelli D5 (OPCM 3274 – Classe B)

Con i modelli D5 si analizzano le strutture secondo le prescrizioni della nuova normativa utilizzando il metodo di analisi dinamico modale e ipotizzando le strutture in classe di duttilità bassa.

Le masse sismiche e gli spettri di risposta elastico, allo SLD e allo SLU sono già stati determinati in 6.3.5 e sono di seguito riportati nella Figura 6-10 e Figura 6-11. In questa analisi, a differenza dell'analisi statica, gli spettri vengono tracciati senza la limitazione al periodo $2.5 \times T_c$. Si ricorda che il fattore di struttura q vale 2.69 per l'edificio strategico e 3.28 per l'edificio civile (vd. Tabella 6-5).

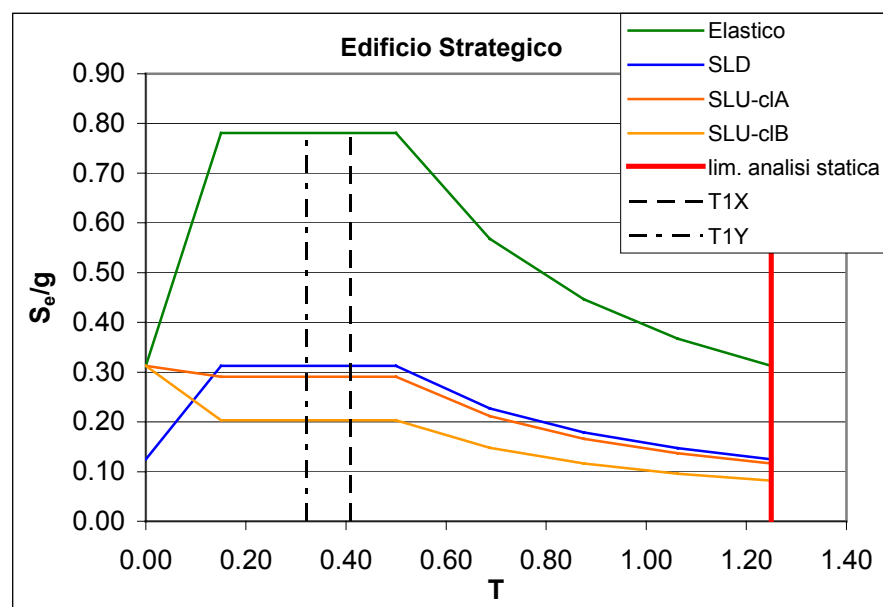


Figura 6-10 Edificio Strategico - Spettri di risposta dell'accelerazione

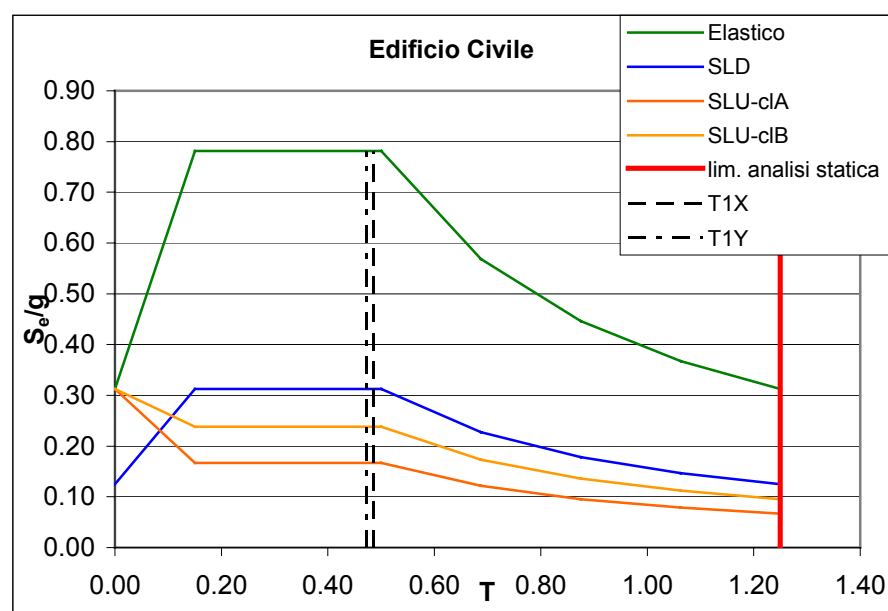


Figura 6-11 Edificio Civile - Spettri di risposta dell'accelerazione

In base alle prescrizione della nuova normativa occorre sempre considerare l'eccentricità accidentale pari al 5% per entrambe le direzioni di analisi, indipendentemente dalla geometria delle strutture analizzate, quindi non solo per

l'edificio strategico, che ha una pianta rettangolare allungata, ma anche per l'edificio civile, sebbene abbia una pianta quasi quadrata.

Affianco alle condizioni di carico statiche elementari si considerano le due spettrali applicate lungo le due direzioni di riferimento.

I carichi verticali si combinano nel modo già descritto nel paragrafo 6.3.5 e qui sintetizzato:

$$\gamma_G \cdot G_k + \gamma_Q \cdot Q_k$$

Le azioni sismiche, invece, si combinano con i carichi verticali nel seguente modo:

$$\gamma_E E + G_k + \sum_i (\psi_{2i} \cdot Q_{ki})$$

in cui il valore dei coefficienti ψ_2 è definito in 6.3.5.

Si ottengono, pertanto 5 combinazioni di carico, 4 verticali ed una sismica:

Edificio Strategico \ Edificio Civile – Combinazioni di carico		
1	CombV1:	$0.9 \cdot G$
2	CombV2:	$1.4 \cdot G$
3	CombV3:	$0.9 \cdot G + 1.5 \cdot Q$
4	CombV4:	$1.4 \cdot G + 1.5 \cdot Q$
-	COMBVERT	$G + 0.3 \cdot Q_{uff} + 0.8 \cdot Q_{mag} + 0.2 \cdot Q_{cop} + 0.8 \cdot Q_{scala}$ $G + 0.3 \cdot Q_{abb} + 0.2 \cdot Q_{cop} + 0.8 \cdot Q_{scala}$
5	CombY \ combX:	CombVert + (SpecY \ SpecX)
-	Inv:	inviluppo COMB 1÷5

6.4.5.1 Verifiche di resistenza

Travi: flessione retta e taglio

Edificio Strategico

Le verifiche allo stato limite ultimo si conducono, come al solito, considerando le 2057 sezioni considerate negli altri modelli, analizzando dapprima le sezioni armate come quelle del modello S1 e poi quelle armate in modo da soddisfare le verifiche.

Di seguito si riportano gli specchi riassuntivi delle verifiche a flessione retta (M-N) ed a taglio e torsione (T-T), in cui si legge il valore minimo dei coefficienti di sicurezza relativi alle sezioni analizzate: a sinistra si trova la prima verifica, con le armature di S1, a destra quella corretta.

Edificio Strategico_D5_travi armature S1			Edificio Strategico_D5_travi armature D5		
n° sez. verificate: 2057			n° sez. verificate: 2057		
Coef. secur.	M-N	T-T	Coef. secur.	M-N	T-T
min	0.53	1.11	min	0.74	1.00

Risulta subito evidente come per alcuni elementi non si riesca a soddisfare le verifiche, per quanto si aumenti l'armatura; le notevoli sollecitazioni sismiche, infatti, pari a quasi il doppio di quelle del modello D3, forniscono sollecitazioni inaccettabili non solo sulle travi corte tra i nuclei, ma anche nelle sezioni d'incastro delle travi più lunghe nei setti stessi. Si trae pertanto la stessa conclusione dell'analisi statica: tali elementi debbono essere riprogettati.

Edificio Strategico_D5_travi armature S1					Edificio Strategico_D5_travi armature aumentate				
coef. secur	M-N	T-T	M-N %	T-T %	coef. secur	M-N	T-T	M-N %	T-T %
>2	1624	1914	78,9%	93,0%	>2	1661	1914	80,7%	93,0%
2,0	433	123	19,9%	6,0%	2,0	396	143	19,3%	7,0%
1,5	184	103	7,8%	5,0%	1,5	160	117	7,8%	5,7%
1,4	149	94	6,1%	4,6%	1,4	141	108	6,9%	5,3%
1,3	130	81	5,2%	3,9%	1,3	129	95	6,3%	4,6%
1,2	126	48	5,0%	2,3%	1,2	123	62	6,0%	3,0%
1,1	114	30	4,4%	1,5%	1,1	96	49	4,7%	2,4%
1,0	76	11	3,7%	0,5%	1,0	17	0	0,8%	0,0%
0,9	59	6	2,9%	0,3%	0,9	7	0	0,3%	0,0%
0,8	47	0	2,3%	0,0%	0,8	5	0	0,2%	0,0%
0,7	18	0	0,9%	0,0%	0,7	0	0	0,0%	0,0%
0,6	2	0	0,1%	0,0%	0,6	0	0	0,0%	0,0%

Per soddisfare le altre verifiche si considerano armature longitudinali di peso complessivo pari a 31.74 [ton], con un incremento rispetto a S1 del 3.46%, ed armature trasversali di peso totale 16.76 [ton], con incremento del 0.12%. Tali incrementi considerano nelle 17 sezioni critiche il massimo di armatura tecnologicamente possibile.

Edificio Civile

Per l'edificio civile, grazie ai notevoli margini di sicurezza di cui si è già detto, non si ottiene un risultato eccessivamente negativo: solo 8 sezioni, pari al 3.9% del totale sezioni risultano non soddisfatte, la peggiore con un coefficiente pari a 0.71. Se si considera che nell'analisi S5 le sezioni non verificate sono 16 ed il coefficiente minimo vale 0.60, si vede come anche con la nuova normativa l'analisi dinamica modale risulti meno gravosa. Incrementando opportunamente le armature negli elementi interessati e tenendo comunque conto delle tipiche esigenze tecnologiche si riescono a soddisfare tutte le verifiche.

Edificio Civile_D5_travi armature S1					Edificio Civile_D5_travi armature aumentate				
coef. secur	M-N	T-T	M-N %	T-T %	coef. secur	M-N	T-T	M-N %	T-T %
5,0	160	120	78,8%	59,1%	5,0	160	120	78,8%	59,1%
3,5	134	71	66,0%	35,0%	3,5	132	71	65,0%	35,0%
3,0	116	44	57,1%	21,7%	3,0	114	44	56,2%	21,7%
2,5	101	23	49,8%	11,3%	2,5	100	23	49,3%	11,3%
2,0	77	14	37,9%	6,9%	2,0	76	14	37,4%	6,9%
1,8	69	10	34,0%	4,9%	1,8	65	10	32,0%	4,9%
1,6	53	5	26,1%	2,5%	1,6	48	5	23,6%	2,5%
1,4	34	1	16,7%	0,5%	1,4	32	1	15,8%	0,5%
1,2	24	0	11,8%	0,0%	1,2	20	0	9,9%	0,0%
1,0	8	0	3,9%	0,0%	1,0	0	0	0,0%	0,0%
0,9	2	0	1,0%	0,0%	0,9	0	0	0,0%	0,0%
0,8	1	0	0,5%	0,0%	0,8	0	0	0,0%	0,0%
0,7	0	0	0,0%	0,0%	0,7	0	0	0,0%	0,0%

Le armature longitudinali così determinate hanno un peso dell'acciaio pari a 2.46 [ton], con un incremento del 1.86% rispetto al peso delle armature S1. Le armature trasversali non vengono alterate e pesano complessivamente 0.918 [ton].

Pilastri: presso-flessione deviata e taglio e torsione

Per la verifica di questi elementi strutturali si analizzano due sezioni per ciascun pilastro e per ciascun livello per un totale di 462 sezioni per l'edificio strategico e 108 per l'edificio civile. La verifica imposta dalla nuova normativa prevede, come detto, di considerare gli effetti del sismo agente lungo le due direzioni di riferimento con la regola del 30% e prevede altresì di considerare gli effetti dell'eccentricità accidentale. Pertanto le verifiche sono state eseguite utilizzando le procedure di calcolo automatiche del programma Etabs, che considera un involucro rettangolare delle sollecitazioni sismiche.

Edificio Strategico

Edificio Strategico_D5_pilastr				
coef. Sicur	N-M	T-T	N-M %	T-T %
>2	135	162	29,2%	35,1%
2,0	321	300	69,5%	64,9%
1,5	252	220	54,5%	47,6%
1,4	214	176	46,3%	38,1%
1,3	153	142	33,1%	30,7%
1,2	98	72	21,2%	15,6%
1,1	33	20	7,1%	4,3%
1,0	8	6	1,7%	1,3%
0,9	1	2	0,2%	0,4%
0,8	1	0	0,2%	0,0%
0,7	1	0	0,2%	0,0%

In definitiva i pilastri necessitano di 21.64 [ton] di acciaio per le armature verticali e di 3.45 [ton] per le armature trasversali.

Di seguito si riporta la tabella riepilogativa in cui si legge l'influenza del percorso di amplificazione del carico nella determinazione dei coefficienti di sicurezza minimi; si osserva che la maggioranza delle sezioni raggiungerebbe prima le deformazioni ultime seguendo il percorso n°2 (amplificazione proporzionale di momenti). Un numero non trascurabile di sezioni, invece, andrebbe in crisi prima se si amplificassero tutte e tre le sollecitazioni (percorso n°1), mentre gli altri percorsi sono meno o per nulla significativi.

Edificio Strategico_D5_pilastr – Amplificazioni di carico critiche		
percorso di carico	N° sez.	%
1 - Variabili: N, Mx, My	133	29,2%
2 - Variabili: Mx, My	291	64,0%
3 - Variabili: N, My	0	0,0%
4 - Variabili: N, Mx	0	0,0%
5 - Variabili: My	0	0,0%
6 - Variabili: Mx	0	0,0%
7 - Variabili: N	31	6,8%
	455	

Edificio Civile

Così come avviene per le travi, anche per i pilastri il forte aumento delle sollecitazioni sismiche determina una riduzione dei coefficienti di sicurezza.

Edificio Civile_D5_pilastri				
coef. secur	N-M	T-T	N-M %	T-T %
5,0	82	92	75,9%	85,2%
3,5	65	92	60,2%	85,2%
3,0	60	86	55,6%	79,6%
2,5	59	86	54,6%	79,6%
2,0	57	66	52,8%	61,1%
1,8	52	46	48,1%	42,6%
1,6	42	38	38,9%	35,2%
1,4	27	18	25,0%	16,7%
1,2	12	4	11,1%	3,7%
1,0	2	2	1,9%	1,9%
0,9	0	0	0,0%	0,0%

I notevoli margini che si avevano con le analisi con la normativa previgente, fanno sì che solo due sezioni, appartenenti allo stesso livello di una pilastrata richiedano l'aggiunta di una coppia di barre $\phi 22$. Il quantitativo di acciaio per armature longitudinali richiesto è pari a 2.46 [ton], con un incremento di 0.70% rispetto a S1.

Per le armature trasversali, invece, i coefficienti di sicurezza delle due sezioni non verificate valgono 0.97: basta infittire il passo delle staffe nelle zone interessate per risolvere il problema. Il quantitativo di acciaio richiesto diventa, pertanto, pari a 0.370 [ton], che significa un incremento dello 0.58%.

I percorsi di amplificazione dei carichi significativi sono gli stessi trovati per l'analisi S3, ma cambiano le percentuali come riportato di seguito:

Edificio Civile_S5_pilastri – Amplificazioni di carico critiche		
percorso di carico	N° sez.	%
1 - Variabili: N, Mx, My	51	47,2%
2 - Variabili: Mx, My	57	52,8%
3 - Variabili: N, My	0	0,0%
4 - Variabili: N, Mx	0	0,0%
5 - Variabili: My	0	0,0%
6 - Variabili: Mx	0	0,0%
7 - Variabili: N	0	0,0%
	108	

Setti e Nuclei: presso-flessione deviata e taglio e torsione (Edificio Strategico)

Di seguito si riporta lo specchio riassuntivo delle verifiche a presso-flessione. Si osserva che le verifiche condotte con l'armatura di S1 restituiscono coefficienti inferiori all'unità in 7 sezioni su 10. Per soddisfare le verifiche si aumentano i diametri, come indicato nell'ultima colonna, e si ottiene così un quantitativo di acciaio pari a 30.6 [ton] con un consistente incremento rispetto a S1 pari al 66.2%.

Edificio Strategico_D5_setti_pflex							
Setto	Livell.	Story	Comb	λ_{c_S1}	armatura	λ_{c_D5}	armatura
					verticale		verticale
P1	4-8	STORY4	COMB5	1,02	$\phi 12/20''$	1,30	$\phi 12/20''$
P1	0-3	STORY1	COMB5	0,85	$\phi 16/20''$	1,30	$\phi 20/20''$
P2	4-8	STORY4	COMB9	0,86	$\phi 12/20''$	1,16	$\phi 16/20''$
P2	0-3	STORY2	COMB3	0,75	$\phi 16/20''$	1,16	$\phi 20/20''$
P3	4-8	STORY4	COMB24	0,52	$\phi 12/20''$	1,00	$\phi 20/20''$
P3	0-3	STORY1-1	COMB30	0,72	$\phi 20/20''$	1,01	$\phi 24/20''$
P4	4-8	STORY4	COMB9	0,58	$\phi 12/20''$	1,01	$\phi 20/20''$
P4	0-3	STORY2	COMB15	0,66	$\phi 20/20''$	1,01	$\phi 24/20''$
P5	0-1	STORY1-1	COMB25	1,35	$\phi 12/20''$	1,35	$\phi 12/20''$
P6	0-1	STORY1-1	COMB19	1,07	$\phi 12/20''$	1,06	$\phi 12/20''$

Per quanto riguarda la verifica a taglio si riportano i valori dei coefficienti di sicurezza valutati rispetto a V_{Rd2} e V_{Rd3} .

Edificio Strategico_D5_setti_taglio				
coef. secur	N λ_{Rd2}	N λ_{Rd3}	λ_{Rd2}	λ_{Rd3}
2,0	34	12	23,6%	8,3%
1,5	14	1	9,7%	0,7%
1,4	3	0	2,1%	0,0%
1,3	2	0	1,4%	0,0%
1,2	0	0	0,0%	0,0%
1,1	0	0	0,0%	0,0%
1,0	0	0	0,0%	0,0%

Si osserva che le notevoli sollecitazioni sismiche, sebbene comportino un notevole aggravio nella verifica a presso-flessione, non pregiudicano tuttavia la verifica a taglio. In questo caso, infatti, l'aumento delle sollecitazioni è controbilanciato dalla possibilità di considerare come aree resistenti a taglio delle aree aggiuntive oltre quelle delle anime parallele alla sollecitazione, come si legge nel paragrafo dell'Ordinanza 3431 qui riportato:

5.4.5.2 Verifiche di resistenza

Nel caso di parete semplice, la verifica di resistenza si effettua con riferimento al rettangolo di base. Nel caso di pareti di forma composta, la verifica va fatta considerando la parte di sezione costituita dalle anime parallele o approssimativamente parallele alla direzione principale sismica e dalle ali di dimensioni date dal minimo fra: effettiva larghezza dell'ala, metà della distanza fra anime adiacenti, 25% dell'altezza complessiva della parete H.

Tali incrementi di area resistente sono risultati comunque insufficienti nella verifica del modello statico S5 riportato in 6.3.5.1.

6.4.5.2 Verifiche spostamenti di interpiano

La verifica degli spostamenti si conduce con riferimento allo stato limite di danno: occorre verificare che gli spostamenti di interpiano ottenuti dall'analisi η_t siano inferiori al 5 ‰ dell'altezza di interpiano h .

I risultati sono riassunti nelle due tabelle seguenti, in cui si riportano, per ciascuna direzione di riferimento:

h altezza di interpiano;

η_t spostamenti per le comb. di carico sismiche allo SLD;

$\eta_{lim} = 0.004 \cdot h$ spostamenti limite d'interpiano;

$\lambda = \frac{\eta_{lim}}{\eta_{ti}}$ coefficiente di sicurezza;

esito verifica: “positivo” se, per ciascuna direzione, $\eta_t \leq \eta_{lim}$;

EDIFICIO STRATEGICO									
CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI					VERIFICHE				
	Livello	h [mm]	η_{tx} [mm]	η_{ty} [mm]	η_{lim} [mm]	λ_x^+ [-]	stato verifica	λ_y^+ [-]	stato verifica
ST1-1 - BASE	1°	1800	0,31	0,60	9,00	29,1	positivo	15,1	positivo
ST1 - BASE	1°	2800	0,54	0,86	14,00	26,1	positivo	16,2	positivo
ST2 - ST1-1	2°	4900	3,50	5,12	24,50	7,0	positivo	4,8	positivo
ST2 - ST1	2°	3900	3,27	4,86	19,50	6,0	positivo	4,0	positivo
ST3 - ST2	3°	4000	4,82	6,03	20,00	4,1	positivo	3,3	positivo
ST4 - ST3	4°	3400	4,37	5,03	17,00	3,9	positivo	3,4	positivo
ST5 - ST4	5°	3400	4,23	4,27	17,00	4,0	positivo	4,0	positivo
ST6 - ST5	6°	3400	4,14	3,55	17,00	4,1	positivo	4,8	positivo

EDIFICIO CIVILE									
CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI					VERIFICHE				
	Livello	h [mm]	η_{tx} [mm]	η_{ty} [mm]	η_{tlim} [mm]	λ_x^+ [-]	stato verifica	λ_y^+ [-]	stato verifica
copert. -sottot.	5°	2140	0,90	0,40	10,70	11,9	positivo	26,7	positivo
sottot. - 3°P	4°	2930	6,80	6,60	14,65	2,2	positivo	2,2	positivo
3°P - 2°P	3°	2930	9,20	8,60	14,65	1,6	positivo	1,7	positivo
2°P - 1°P	2°	2930	9,00	9,00	14,65	1,6	positivo	1,6	positivo
1°P - BASE	1°	2760	0,10	0,10	13,80	138,0	positivo	138,0	positivo

Si osserva come la verifica sia complessivamente meno gravosa rispetto a quella imposta dalla normativa previgente; infatti non solo gli spostamenti relativi totali sono inferiori, ma gli spostamenti limite sono superiori, sicchè i coefficienti di sicurezza aumentano.

6.5 Confronti

6.5.1 Confronti in termini di tagli alla base

Nel presente paragrafo si riportano, per i due edifici, i tagli alla base determinati per ciascun modello di calcolo adottato ed il relativo diagramma di confronto. Per le analisi condotte con la nuova normativa il tagliante alla base si ottiene sommando vettorialmente il taglio dovuto all'azione sismica in una direzione con il 30% di quello nella direzione ortogonale. Per mero confronto si riportano anche i taglianti statici determinati per suoli diversi dal suolo B, considerato nelle analisi per entrambi gli edifici.

Dal diagramma di Figura 1-1 si legge chiaramente il considerevole aumento delle sollecitazioni sismiche imposte dalla nuova normativa per questo edificio strategico. In particolare l'incremento tra l'analisi statica con il DM'96 allo stato limite ultimo e quella con l'Ordinanza, considerando l'edificio in classe di duttilità bassa è pari al 88%. Gli incrementi sono ovviamente più contenuti nel caso di analisi in classe di duttilità alta e pari al 32%. Se consideriamo i taglianti nelle analisi dinamiche, invece, gli incrementi salgono addirittura a 142% per la classe di duttilità bassa e 69% per quella alta. La riduzione del tagliante sismico in classe di duttilità alta rispetto a quella bassa, nell'ambito della nuova normativa, è pari al 30%, ma a fronte di una significativa complicazione delle verifiche. Il beneficio, invece, che si ottiene in termini di sollecitazioni sismiche considerando l'analisi dinamica anziché quella statica è maggiore nell'ambito della normativa previgente, circa 40% (modelli S3 – D3), mentre con l'Ordinanza vale circa il 24% (modelli S5 – D5 e S6 – D6). Si deduce pertanto come lo spettro di risposta convenzionale definito nel DM '96 dia, per la nostra struttura, sconti maggiori in termini di sollecitazioni rispetto allo spettro introdotto dall'Ordinanza 3274. Le ordinate spettrali del ramo piatto, corrispondenti ai primi e più importanti periodi di vibrazione della struttura, sono pari a 0.118 nel caso del DM '96, da amplificare per 1.5 per l'analisi allo stato limite ultimo, e 0.290

nel caso della nuova normativa in classe di duttilità bassa, da amplificare per il coefficiente di struttura $I = 1.4$; in definitiva il valore $S(T)/g$ è uguale a 0.177 per lo spettro della vecchia normativa e 0.406, ben 2.3 volte maggiore, per la nuova normativa.

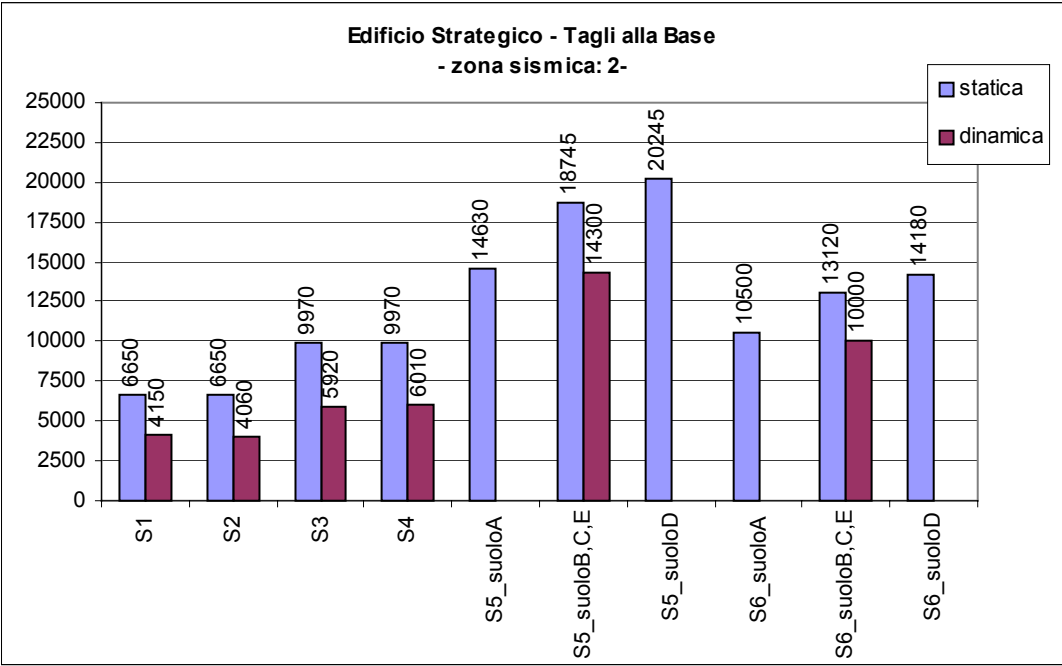


Figura 1-1 Edificio Strategico - Tagli alla base

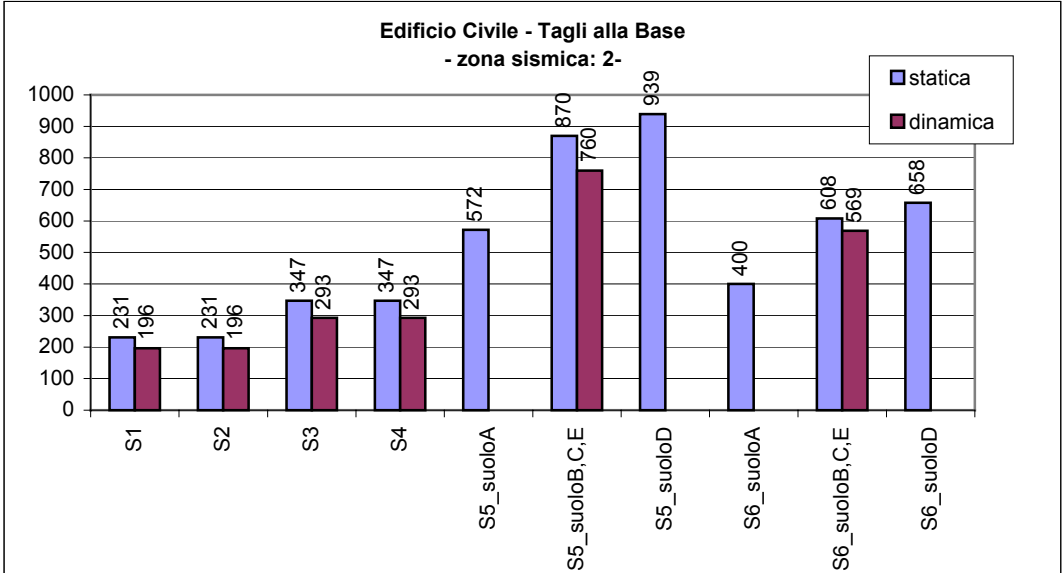


Figura 1-2 Edificio Civile - Tagli alla base

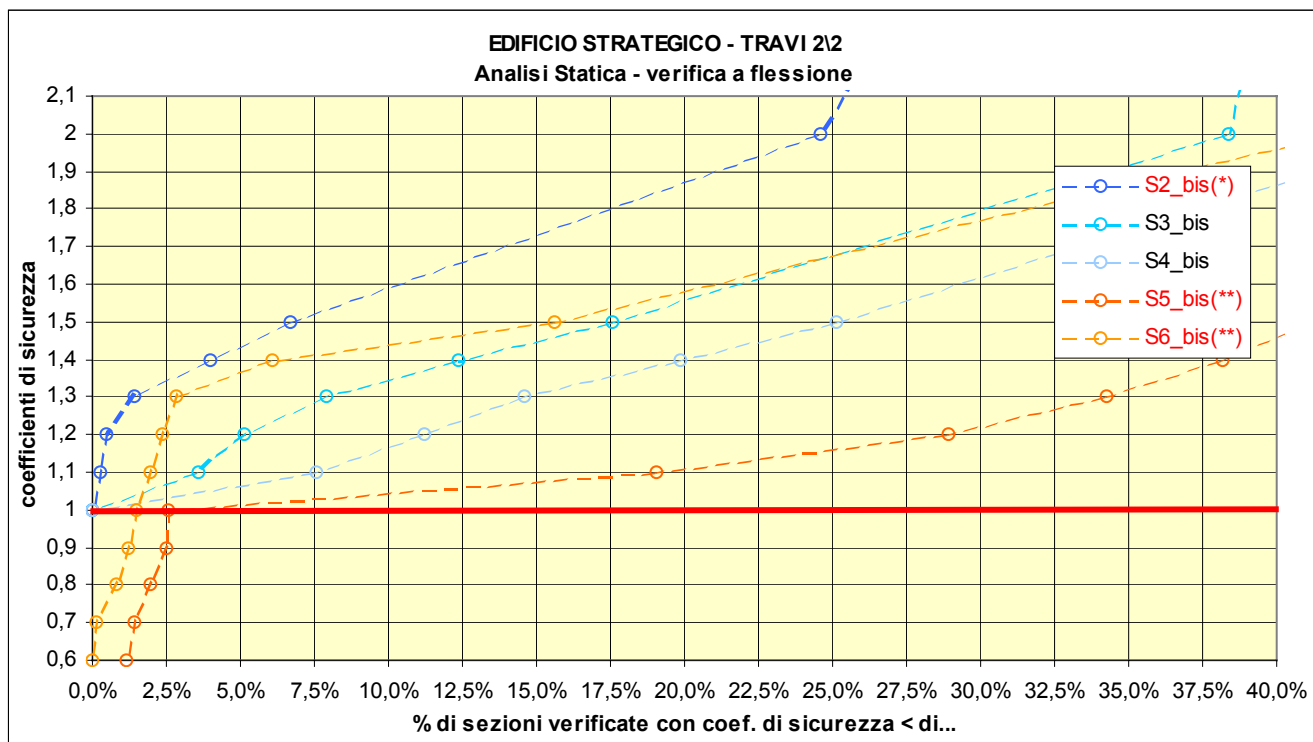
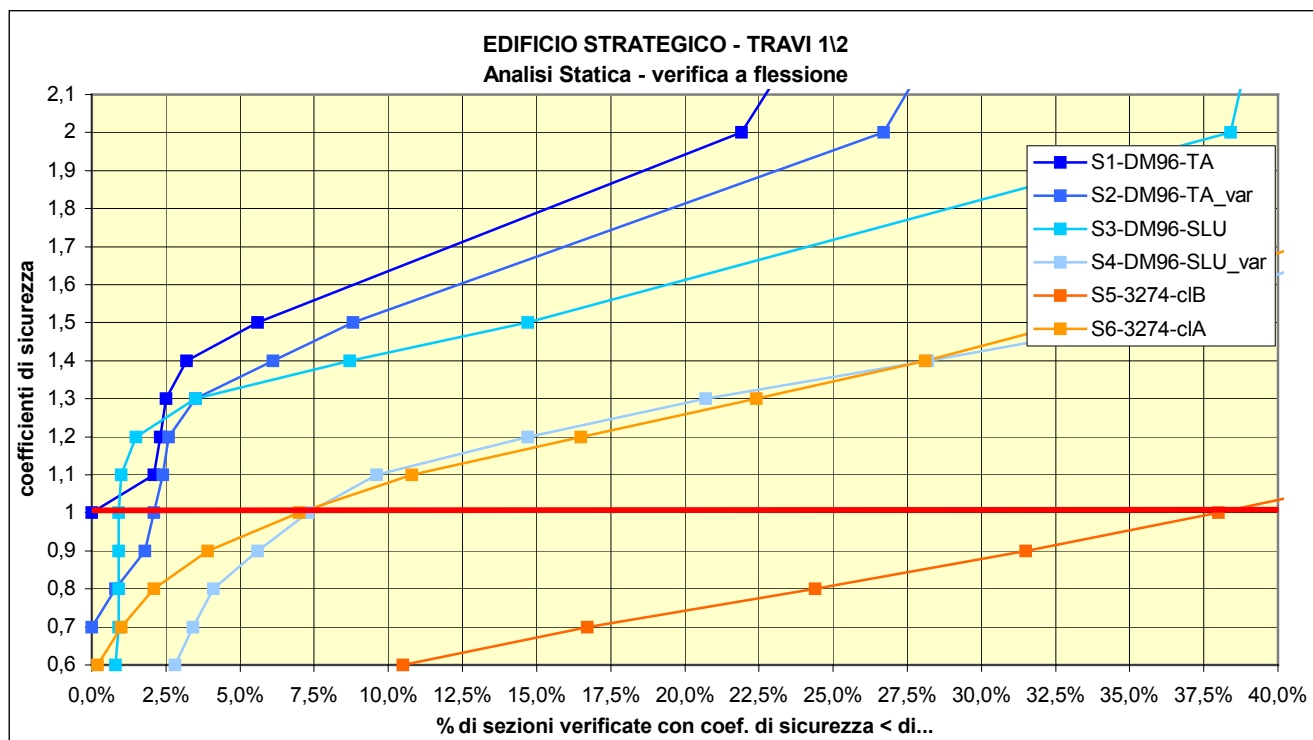
Dal diagramma di Figura 1-2 si evince il considerevole aumento delle sollecitazioni sismiche imposte dalla nuova normativa anche per questo edificio civile. In particolare in questo caso l'incremento tra l'analisi DM'96 allo stato limite ultimo e quella con l'Ordinanza, considerando l'edificio in classe di duttilità bassa è pari al 93%. Gli incrementi sono ovviamente più contenuti nel caso di analisi in classe di duttilità alta e pari al 35%. La riduzione del tagliante sismico in classe di duttilità alta rispetto a quella bassa, nell'ambito della nuova normativa, è pari al 30%, per l'analisi statica e 25% per quella dinamica.

Il beneficio, invece, che si ottiene in termini di sollecitazioni sismiche considerando l'analisi dinamica anzichè quella statica non è elevato e vale circa il 15% nell'ambito della normativa previgente e appena il 6% per l'analisi in classe di duttilità alta con l'Ordinanza.

6.5.2 Confronti in termini di verifiche di resistenza

Di seguito si riportano i diagrammi riassuntivi delle verifiche effettuate per ciascun edificio, per ciascun gruppo di elementi strutturali e per ciascun tipo di verifica: presso-flessione deviata, taglio e torsione. In ascisse si leggono le percentuali di sezioni sottoposte a verifica, in ordinate i coefficienti di sicurezza già definiti in precedenza. Le curve rappresentano, per ciascun modello, l'andamento della percentuale di sezioni verificate con coefficiente di sicurezza minore di un assegnato valore; i valori in forma tabellare sono riportati nei paragrafi 6.3 e 6.4. Le curve di colore blu ed azzurro si riferiscono alle analisi eseguite secondo la norma previgente, mentre quelle in arancione si riferiscono alla nuova normativa; le curve continue sono relative alle verifiche svolte considerando le armature proporzionate per il modello S1, mentre quelle tratteggiate (Sx-bis) tengono conto degli eventuali incrementi di armatura utilizzati per garantirne il soddisfacimento; non si riportano, invece, le curve relative ai casi in cui le armature vengono diminuite.

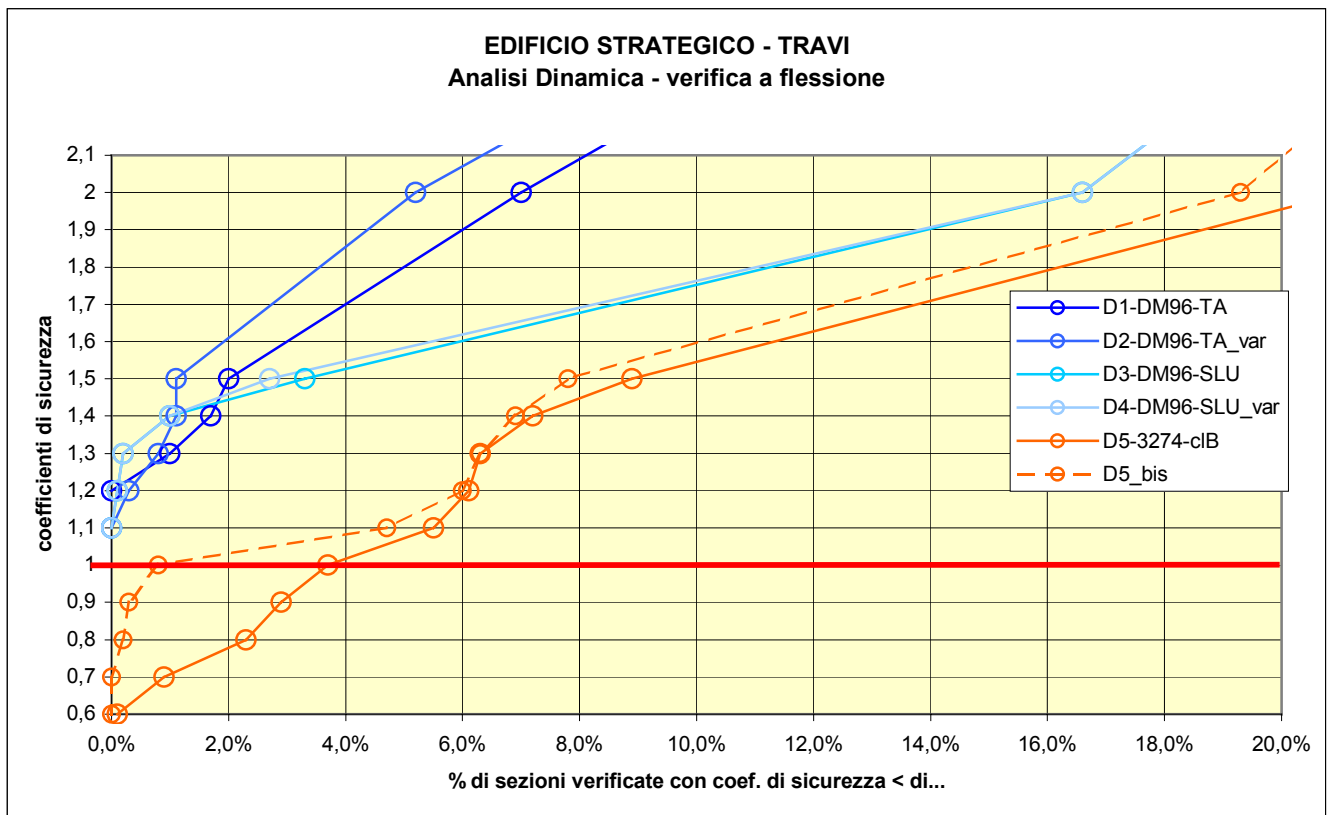
grafico 6-1



Edificio Strategico

Si osservi inizialmente (grafico 6-1) che, per quanto riguarda la verifica a flessione delle travi dell'edificio strategico nell'analisi statica, la curva del modello S1 è l'unica che si trova tutta al di sopra del limite corrispondente al coefficiente unitario; ciò è dovuto al fatto che l'edificio è stato progettato in base al DM96 col metodo delle TA. Il 2.1% delle 2057 sezioni sottoposte a verifica ha coef. < 1.1 mentre il 21.9% ha coef. < 2 . Gli altri modelli statici sono caratterizzati da una generalizzata diminuzione dei coefficienti di sicurezza, rispetto al modello S1, via via più accentuata per i modelli S2, S3 ed S4. Tale diminuzione è poco influente per la maggioranza delle travi, mentre impone un incremento di armatura in alcune sezioni localizzate in corrispondenza delle travi corte, tra i nuclei scala ed ascensori (vd. Figura 6-1), elementi notoriamente critici dal punto di vista sismico. Le analisi statiche eseguite con il DM'96 allo SLU (curve azzurre continue) impongono la necessità di incrementare l'armatura longitudinale negli elementi non verificati per riportare le curve stesse al di sopra del coefficiente unitario (curve azzurre discontinue). In generale, le curve tratteggiate sintetizzano l'esito delle verifiche eseguite con gli incrementi di armatura adottati di volta in volta e riportati nel paragrafo 6.5.3. Nel modello S2 (*-vd. grafico 6-1), l'incremento di armatura in alcune sezioni critiche è tale da superare il limite normativo del 4% relativa alla percentuale massima di armatura; pertanto, si deduce che, con questo tipo di analisi, tali elementi strutturali, critici ai fini antisismici, debbano essere riprogettati. Anche le analisi statiche con la nuova norma (curve arancioni) non conducono mai, per quanto si aumenti l'armatura, ad un esito positivo delle verifiche, anche in classe di duttilità alta (**-vd. grafico 6-1). Ciò accade perché nelle verifiche allo stato limite ultimo si riscontra un meccanismo di rottura di tipo fragile (rottura del cls per schiacciamento); in tali situazioni è poco utile l'incremento dell'armatura ma si dovrebbe modificare la geometria della sezione.

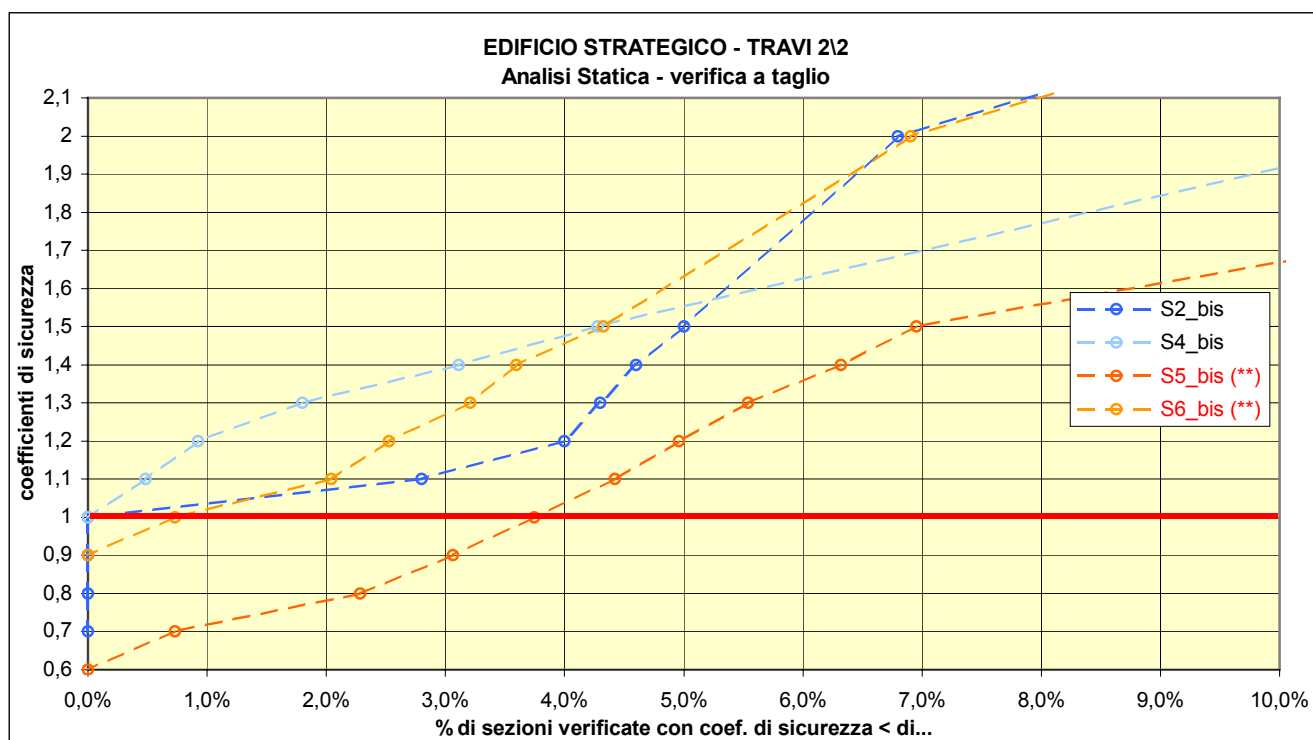
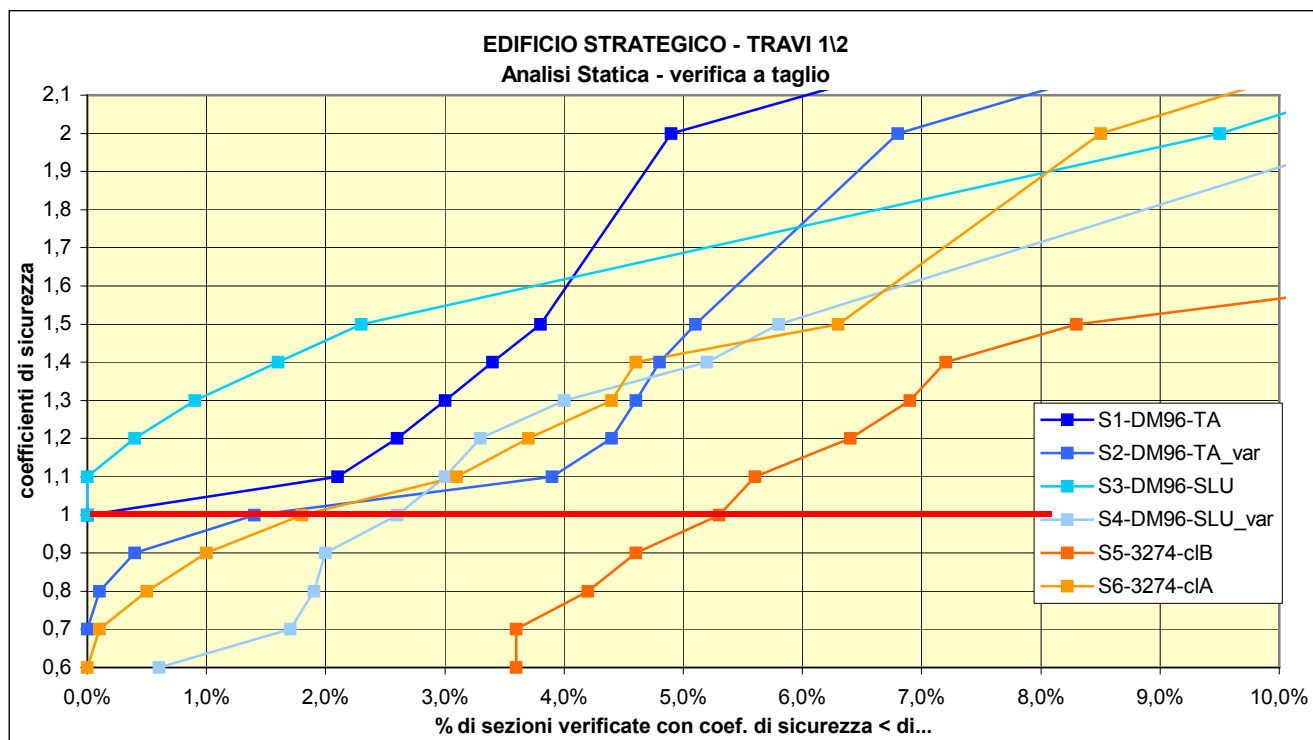
grafico 6-2



L'analisi dinamica (grafico 6-2) risulta generalmente meno gravosa di quella statica, ma la struttura armata con le armature di S1 non soddisfa comunque le prescrizioni imposte dalla nuova normativa per il 3.7% delle 2057 sezioni (curva D5). Incrementando le armature delle sezioni critiche anche fino al massimo possibile non si ottiene comunque un risultato positivo per lo 0.8% delle sezioni, appartenenti ai già detti elementi critici, ossia alle travi corte tra i nuclei.

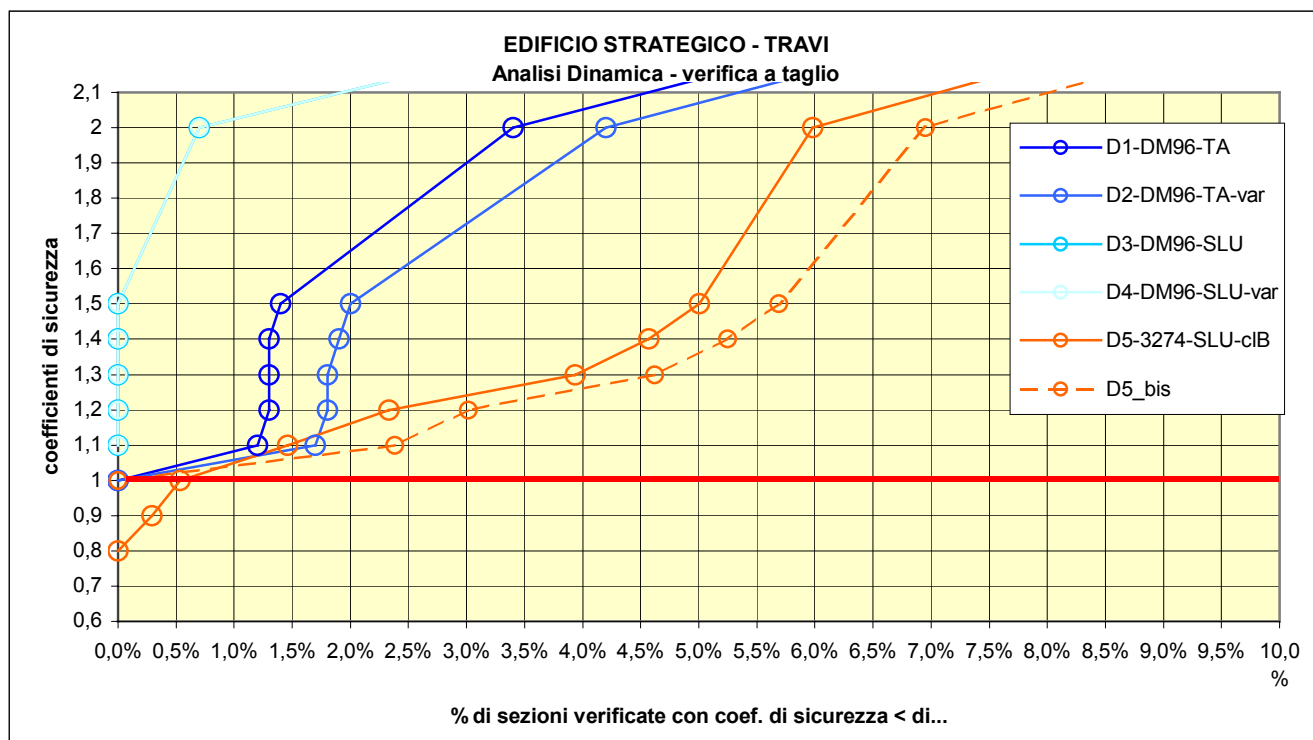
Il diagramma riassuntivo delle verifica a taglio delle analisi statiche (grafico 6-3) mostra come i modelli S2 e S4, con angolo di ingresso del sismo variabile in pianta, necessitano di un incremento di armatura per soddisfare le verifiche a taglio delle travi; i modelli statici con la nuova normativa, invece, così come per le verifiche a flessione, non risultano soddisfatti, nonostante un notevole incremento di armatura nelle sezioni critiche. In particolare 0.7% delle sezioni (15) risultano avere coefficiente <1.

grafico 6-3



Decisamente meno gravose le verifiche con l'analisi dinamica (grafico 6-4), che risultano tutte soddisfatte.

grafico 6-4



Nell'edificio strategico i pilastri svolgono un ruolo secondario nell'assorbire le forze sismiche; infatti in tutte le analisi statiche con la normativa previgente le verifiche risultano soddisfatte (grafico 6-5). Le analisi statiche con la nuova norma, invece, portano ad avere ben 106 sezioni (22.9%) con coefficiente < 1 . A differenza delle travi, però, è possibile in questo caso incrementare le armature per soddisfare le verifiche.

grafico 6-5

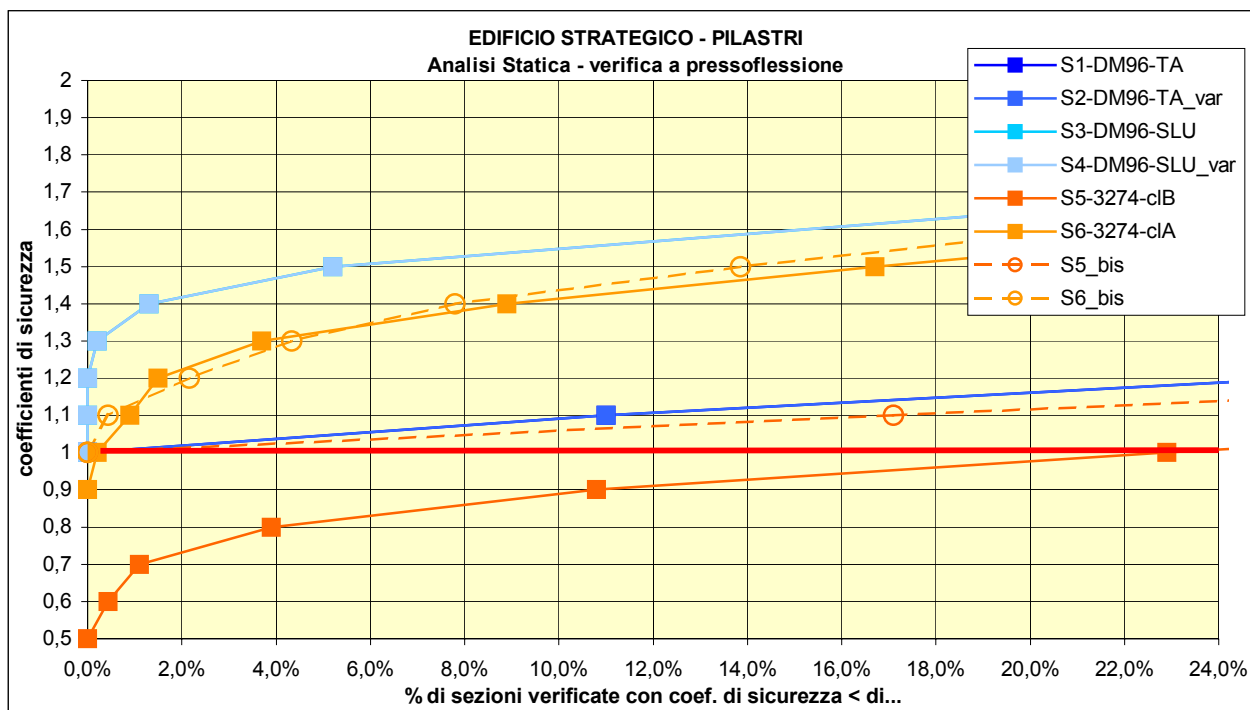
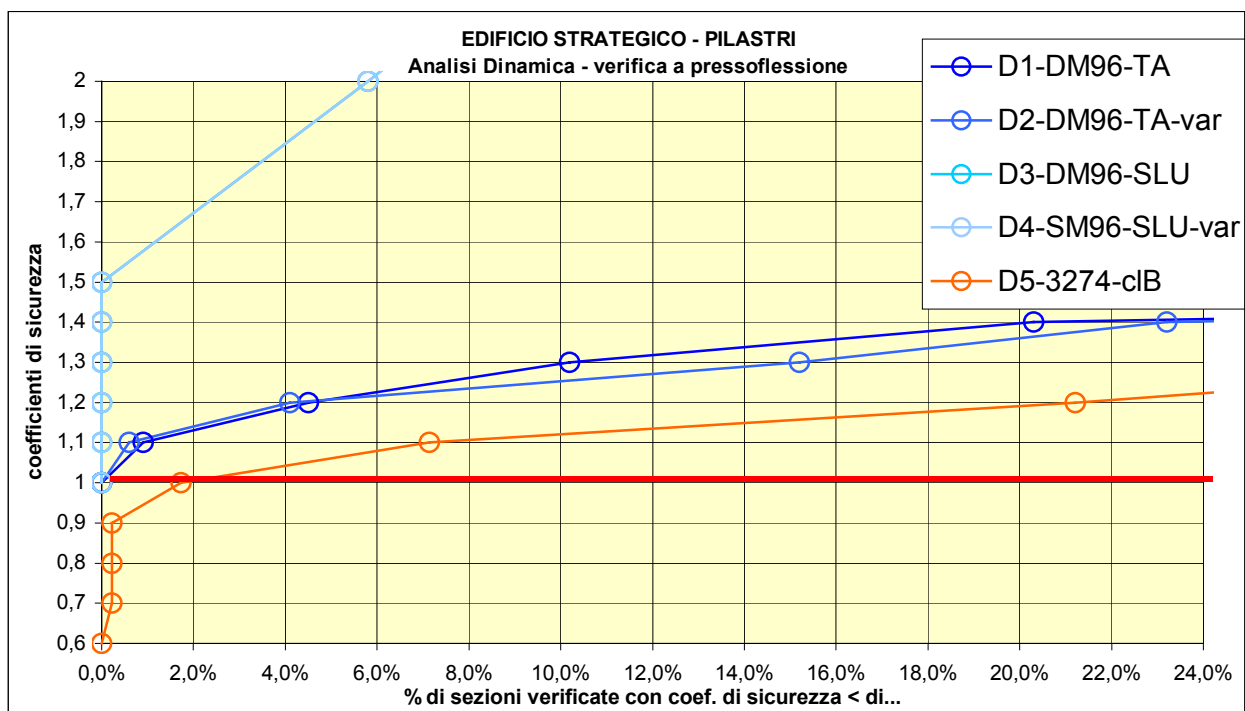


grafico 6-6

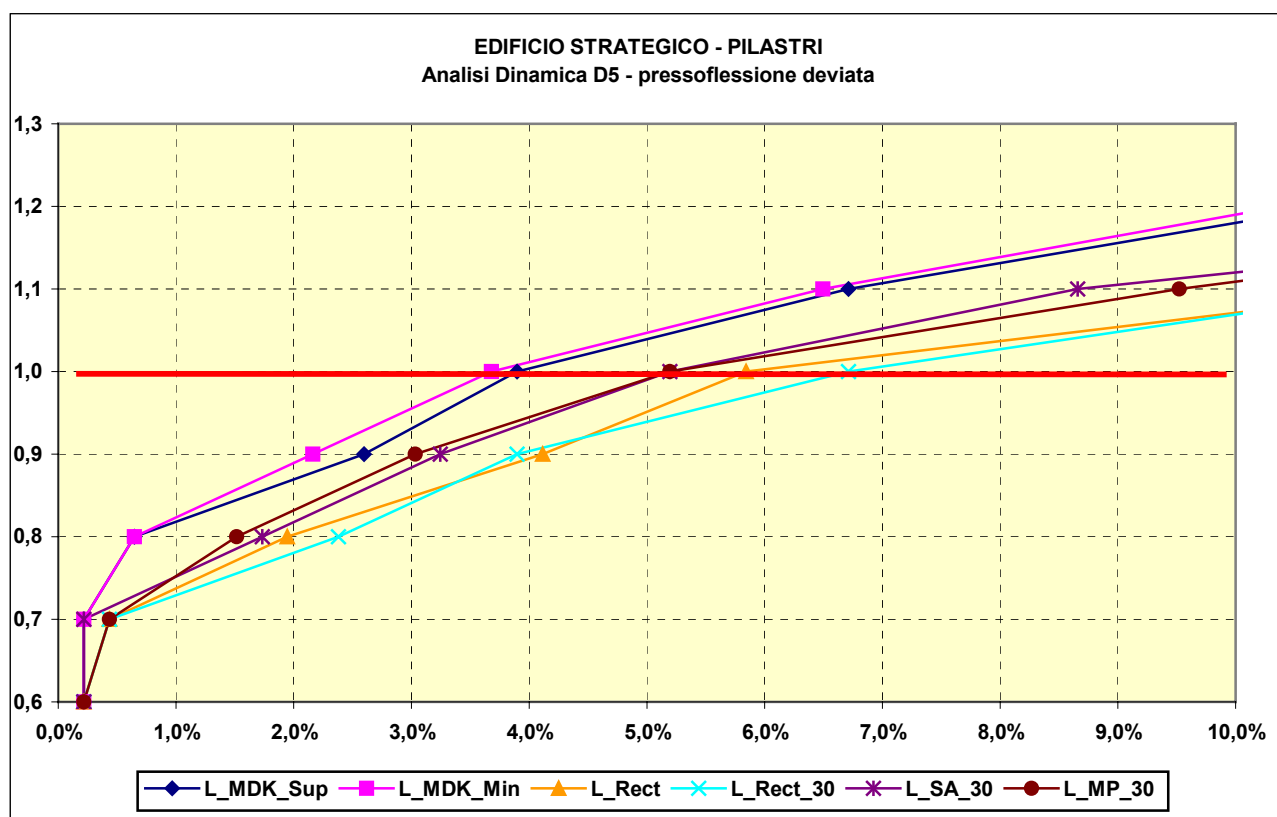


I risultati riportati nel grafico 6-6 si riferiscono alle verifiche effettuate per l'analisi dinamica considerando, per entrambe le normative, l'involuppo rettangolare delle sollecitazioni sismiche; in più, per l'analisi D5, si considera l'effetto del sismo agente contemporaneamente lungo le due direzioni di riferimento e la loro combinazione con la regola del 30%, così come previsto dall'Ordinanza.

Nel grafico 6-7, invece, si riportano i risultati delle verifiche effettuate con le procedure presentate nel Cap. 5 e qui di seguito brevemente elencate:

- **L_MDK_Sup:** iper-involuppo “supremo” di Menun e Der Kiureghian, ottenuto per discretizzazione dei punti della superficie descritta dall'Equazione 5-39;
- **L_MDK_Min:** iper-involuppo di Menun e Der Kiureghian minimizzato con il metodo iterativo presentato in [14];
- **L_Rect:** involucro rettangolare combinato con la SRSS, che considera un involucro rettangolare, assegnando tutte le possibili combinazioni di segno alle sollecitazioni sismiche, dopo aver combinato gli effetti delle due azioni sismiche applicate lungo le direzioni di riferimento ortogonali con una combinazione SRSS;
- **L_Rect_30:** involucro rettangolare combinato con la regola del 30%, che considera un involucro rettangolare dopo aver combinato gli effetti delle due azioni sismiche applicate lungo le direzioni di riferimento ortogonali con la regola del 30%;
- **L_SA_30:** somma algebrica, che attribuisce alle sollecitazioni sismiche i segni della somma algebrica delle sollecitazioni di tutti i modi di vibrazione, successivamente li combina con la regola del 30%;
- **L_MP_30:** modo prevalente, che attribuisce alle sollecitazioni sismiche i segni delle analoghe sollecitazioni del modo di vibrazione prevalente, successivamente li combina con la regola del 30%.

grafico 6-7

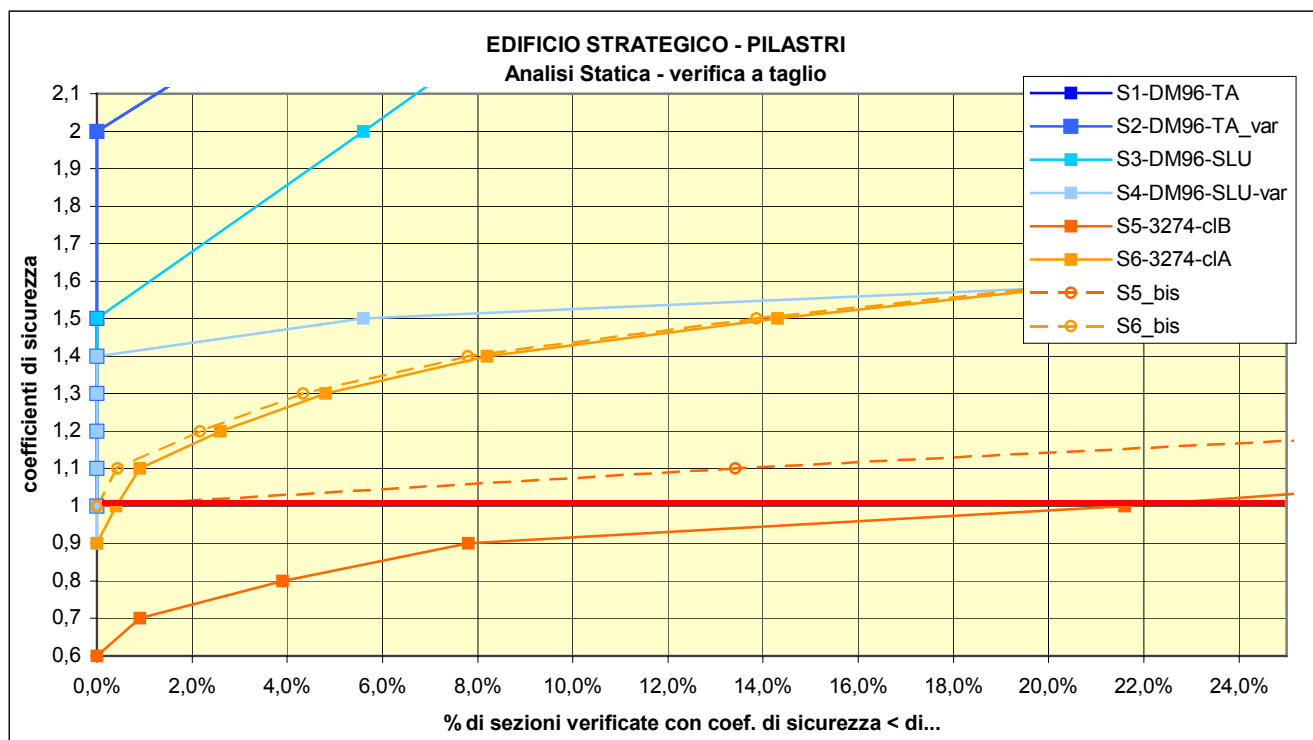


I metodi L_MDK forniscono i valori massimi dei moltiplicatori critici; inoltre i due metodi restituiscono valori fra loro molto simili, a conferma della bontà della procedura semplificata, che risulta estremamente più veloce di quella rigorosa. Gli altri metodi risultano tutti più conservativi, come ci si aspettava. I moltiplicatori critici relativi agli involucri rettangolari (L_Rect e L_Rect_30) sono i più piccoli, mentre quelli di modo prevalente e somma modale (L_MP ed L_SA) sono intermedi fra quelli ottenuti con l'iper-involuppo e quelle ottenuti con l'involuppo rettangolare.

I coefficienti rappresentati nel grafico 6-7 non sono in realtà direttamente confrontabili con la curva D5 rappresentata nel grafico 6-6 perché sono ottenuti senza considerare l'effetto dell'eccentricità accidentale. Per avere un confronto diretto si dovrebbe sovrapporre la curva L_Rect del grafico 6-7 con la curva D5 del grafico 6-6: le due curve, infatti, sono analoghe e si discostano solo per gli effetti dell'eccentricità accidentale. Tali effetti risultano tutt'altro che trascurabili: le sezioni

non verificate, infatti, sono pari al 5.84% del totale, senza eccentricità, e 18.4% nell'altro caso.

grafico 6-8



Ritornando alle analisi statiche, per le verifiche a taglio (grafico 6-8) valgono le stesse considerazioni valide per la verifica a presso-flessione: poichè i pilastri svolgono un ruolo secondario nell'assorbimento delle forze sismiche, le verifiche con la normativa previgente sono tutte soddisfatte. Le forti sollecitazioni imposte dalla nuova norma, invece, influenzano anche i pilastri, per cui il 21.6% delle sezioni risultano non verificate per la classe di duttilità bassa; nel caso di analisi in classe alta, invece, il risultato negativo si limita allo 0.4% delle sezioni. In entrambi i casi, un incremento opportuno di armatura consente di soddisfare le verifiche (curve S5_bis e S6_bis).

grafico 6-9

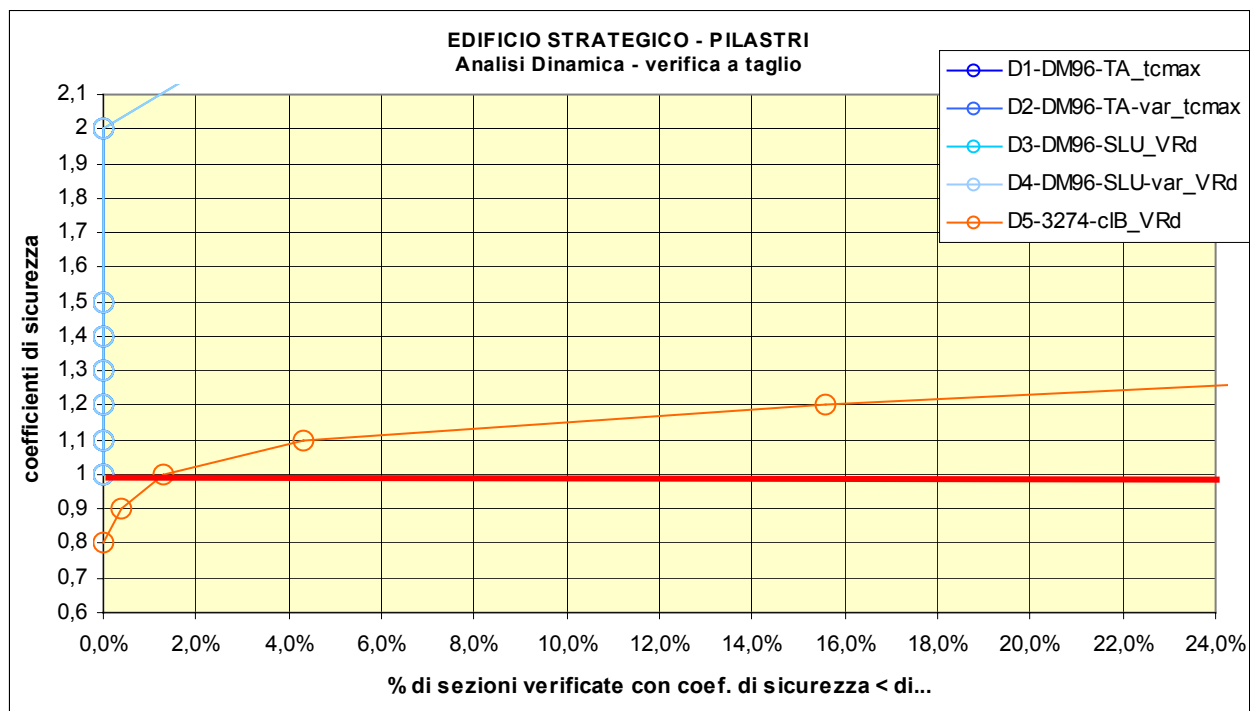
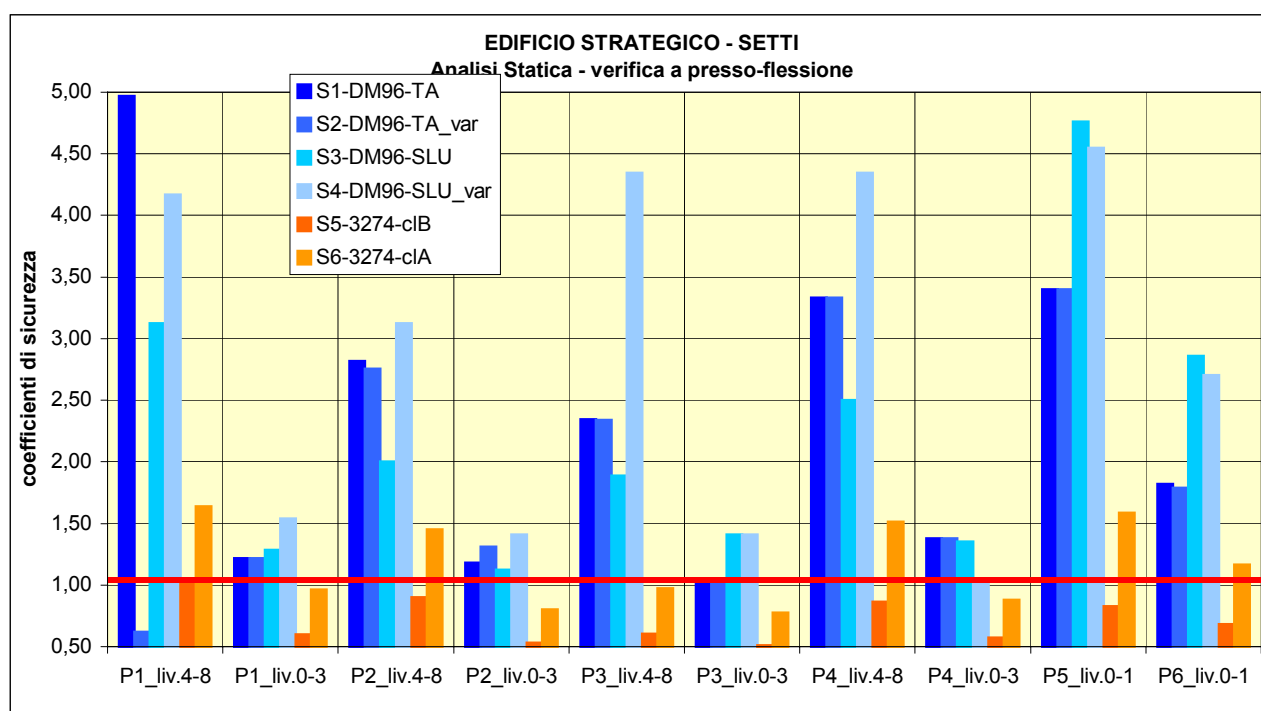


grafico 6-10



Per rappresentare i risultati delle verifiche delle analisi statiche sui 6 setti e nuclei si è utilizzato un diagramma a barre (grafico 6-10) con la consueta distinzione cromatica; i setti da P1 a P4, che si sviluppano per tutta l'altezza dell'edificio con uguale sezione (vd. Figura 6-1), hanno un cambio di armatura al di sopra del 3° livello; i setti P5 e P6, invece, si trovano solo nei livelli interrati. E' interessante osservare come il coefficiente di sicurezza del nucleo P1, nel modello S2, sia drasticamente calato fino ad assumere valore minore di 1.0. Ciò accade in quanto la forza sismica inclinata a 150° sulla direzione X determina una sollecitazione agente proprio lungo la diagonale del nucleo, quindi lungo l'inerzia debole, comportando l'attingimento della tensione ammissibile in un ferro di spigolo, mentre tutti gli altri hanno tassi di lavoro più bassi. Viceversa, nella corrispondente analisi allo stato limite ultimo (modello S4), tale inconveniente viene superato dalla possibilità di cimentare i materiali in campo plastico. Oltre questa particolarità, si evince dal grafico come la nuova normativa comporti, per la classe di duttilità bassa, sollecitazioni tali da non soddisfare le verifiche in 9 casi su 10 ed in 5 casi per la classe alta. In tutti i casi è possibile portare i coefficienti a valori superiori all'unità con gli opportuni incrementi di armatura indicati in seguito nel paragrafo 6.5.3.

Il grafico 6-11 evidenzia delle diversità di comportamento degli elementi strutturali in oggetto soggetti alle analisi dinamiche rispetto a quelle statiche. In generale, però, i moltiplicatori critici sono tutti più elevati. Le analisi con la normativa previgente risultano tutte soddisfatte, ma l'analisi D5 con la nuova norma comporta l'esito negativo della verifica in 7 casi su 10, rispetto ai 9 dell'analisi statica in classe di duttilità bassa.

grafico 6-11

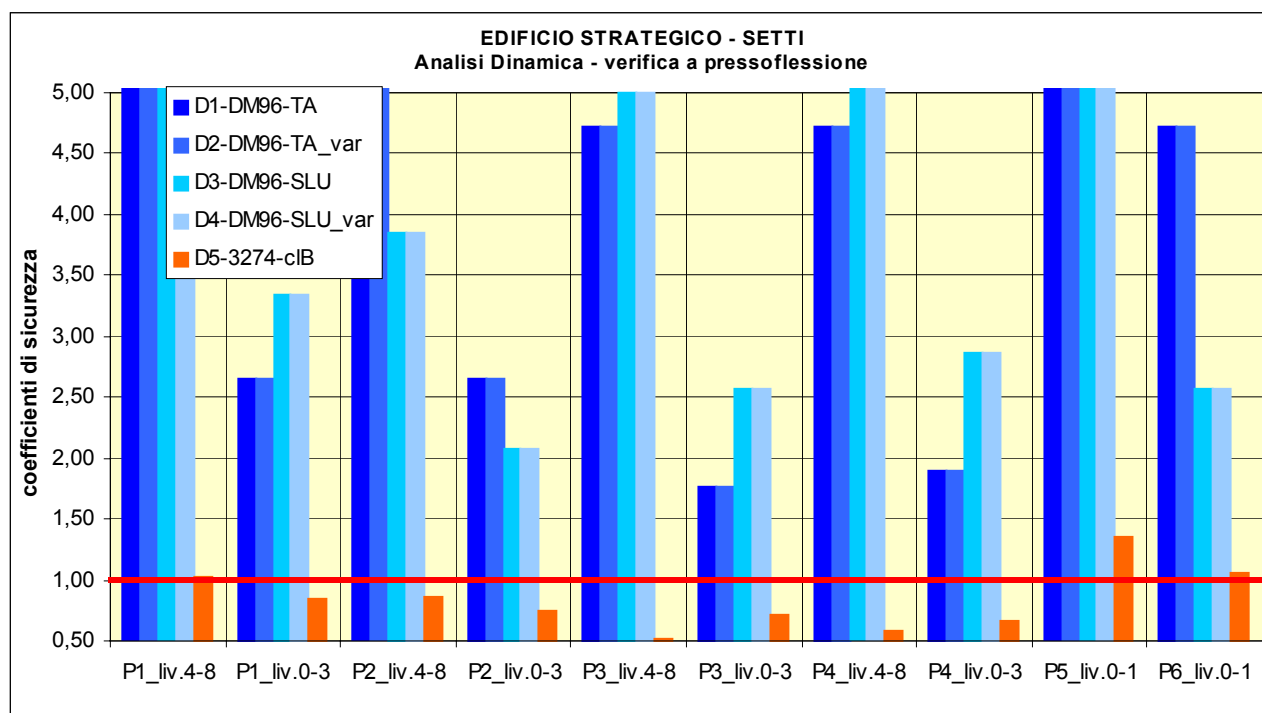


grafico 6-12

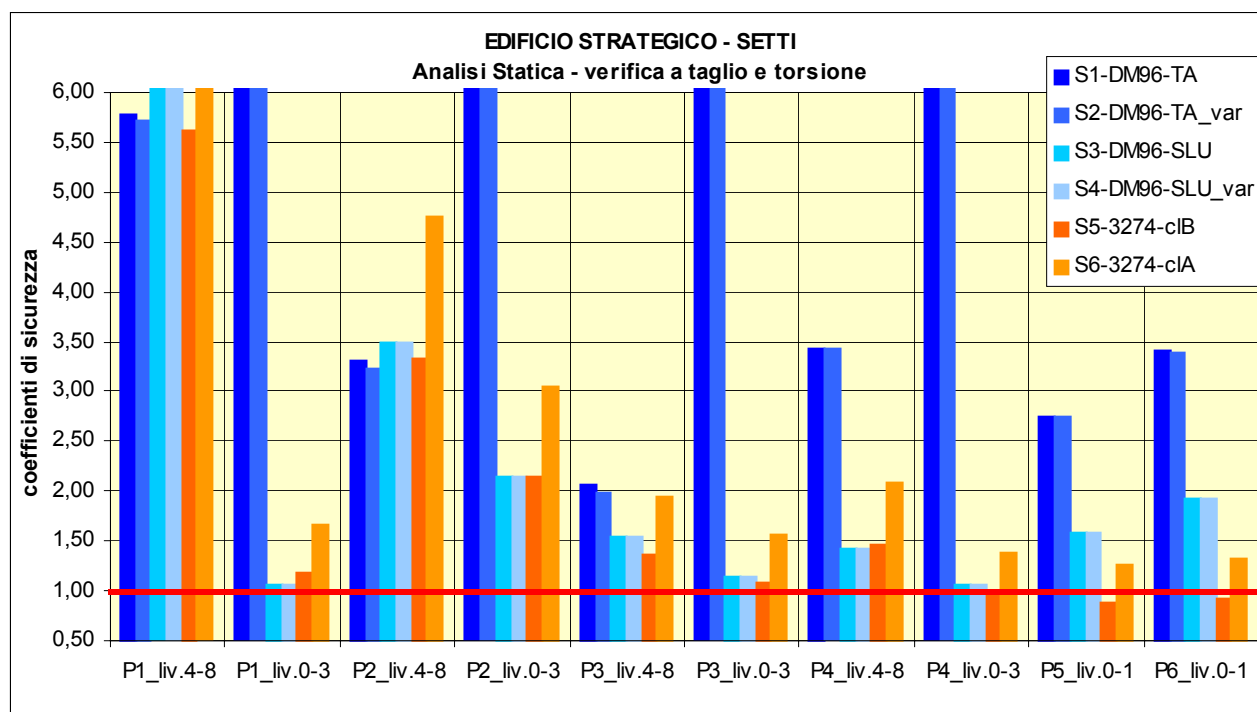
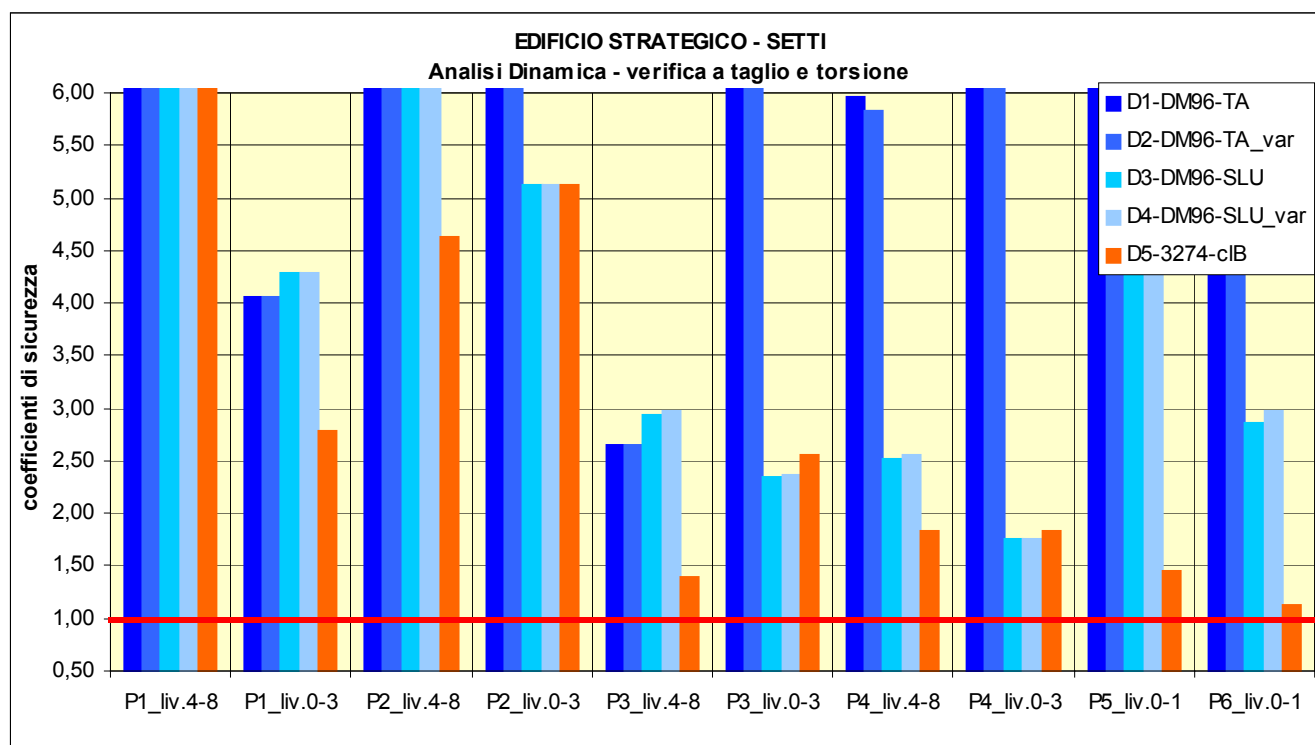


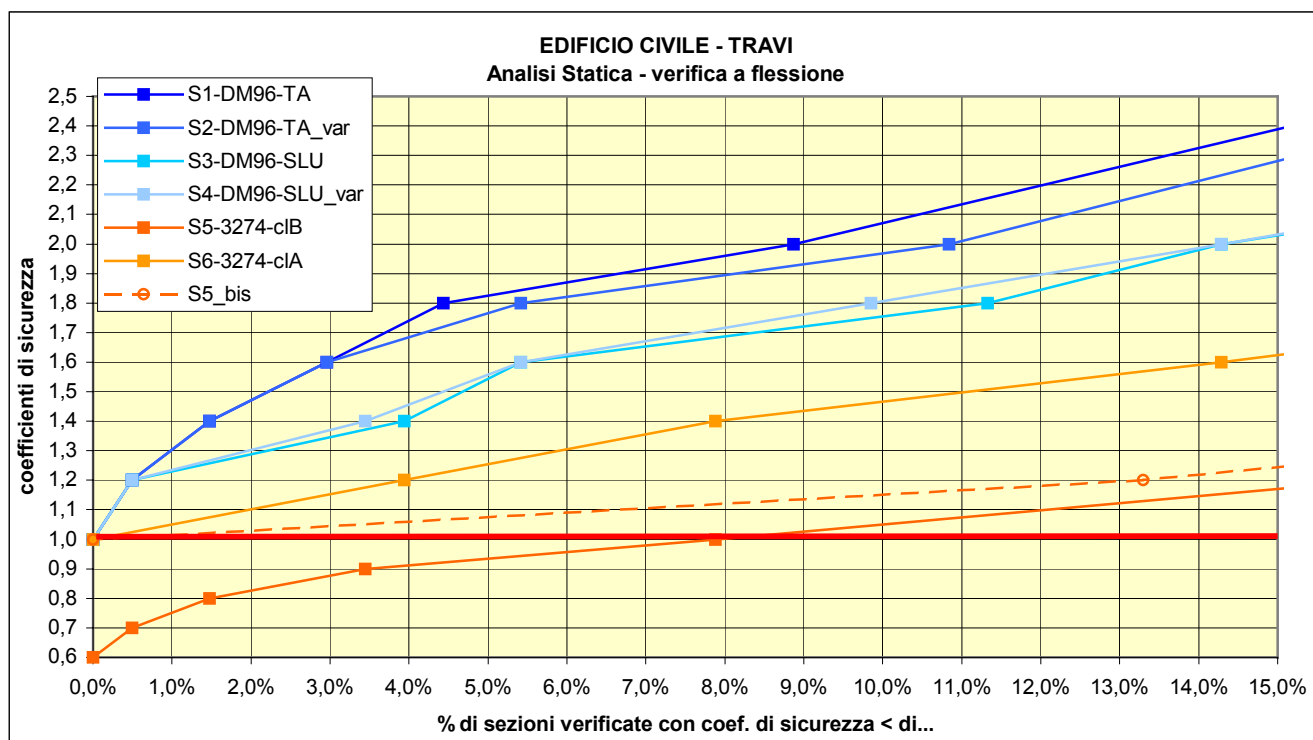
grafico 6-13



Per quanto riguarda le verifiche a taglio per le analisi statiche (grafico 6-12) si osserva come solo il modello S5 porti, in 3 casi, a coefficienti di sicurezza inferiori all'unità. Le 7 sezioni non verificate si localizzano al livello interrato sui setti P4, P5 e P6, che assorbono un taglio maggiore del taglio limite V_{Rd2} . Poichè quest'ultimo valore non dipende dall'armatura a taglio, ma solo dalla larghezza dell'anima delle pareti e dal braccio delle forze interne, si deduce che per riportare le verifiche nei limiti normativi occorre cambiare le sezioni, incrementandone gli spessori. Tuttavia, il fatto che i valori siano comunque prossimi all'unità, fa subito intuire che l'incremento di spessore possa essere modesto.

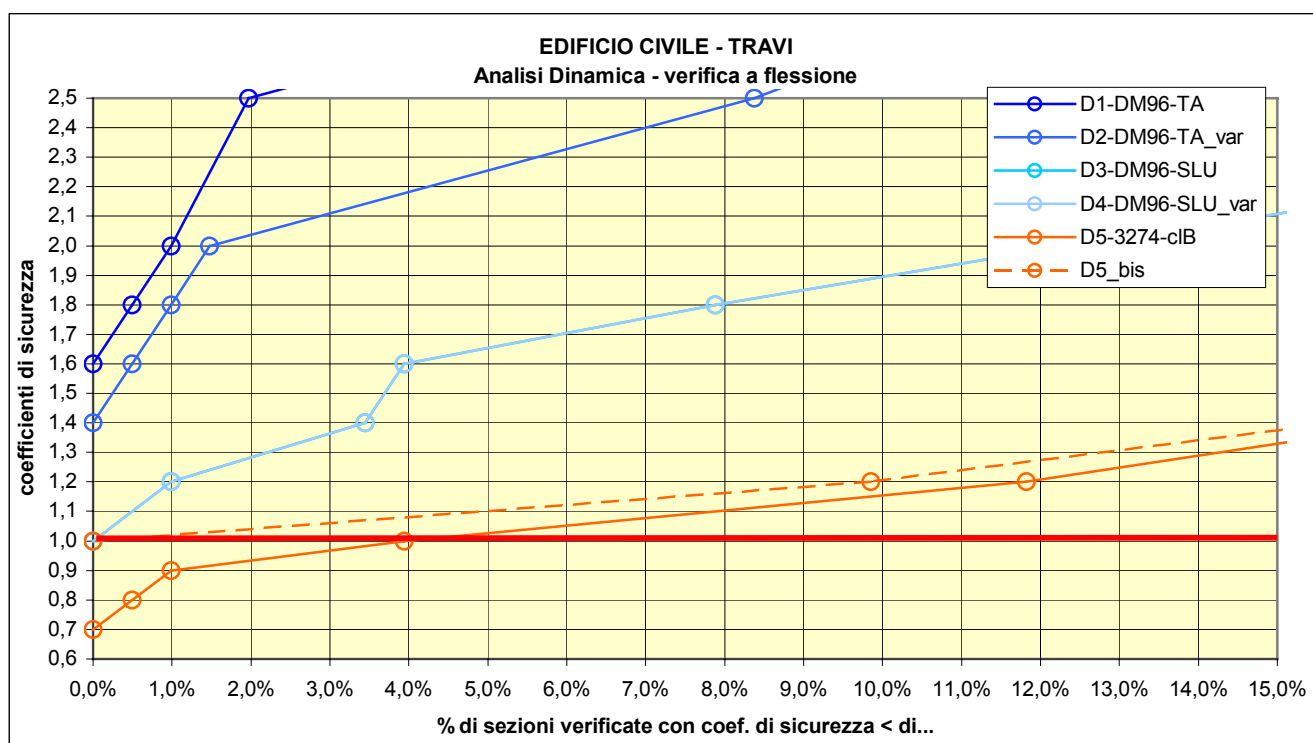
Nell'analisi dinamica (grafico 6-13) le verifiche risultano tutte soddisfatte.

grafico 6-14



L'edificio civile ha uno schema resistente a telaio incastrato nei setti del piano interrato. Dal grafico 6-14 emerge che le analisi statiche S1 e S2 hanno un accettabile margine di sicurezza: il coef. minimo è infatti pari a 1.1, mentre per le analisi allo stato limite (S3 e S4) solo una sezione ha coefficiente di poco inferiore all'unità. I notevoli incrementi di sollecitazione sismica imposti dalla nuova normativa determinano una riduzione significativa dei coef. per l'analisi in classe di duttilità bassa (7.9 % di sezioni non verificate) e meno accentuata per quella in classe alta (0.5 % di sezioni non verificate). Tuttavia, in entrambi i casi, è possibile incrementare l'armatura per riportare le curve al di sopra dell'unità. La curva S6_bis non è riportata in quanto poco significativa.

grafico 6-15



Dal grafico 6-15 riepilogativo delle analisi dinamiche si evince il beneficio ricavato dall'analisi dinamica: le sezioni non verificate passano da 7.9% a 3.9%. In ogni caso un incremento di armatura opportuna risolve il problema. La curva D5_bis non è riportata in quanto poco significativa.

Le sollecitazioni taglianti sulle travi, dovute alle analisi statiche e dinamiche, non sono particolarmente significative: dal grafico 6-16 e grafico 6-17, infatti, si evince come tutte le sezioni abbiano elevati coefficienti di sicurezza in tutte le analisi (le curve S2 e S3 sono sovrapposte, così come le S3, S4 e S6; analogamente per le D3 e D4).

grafico 6-16

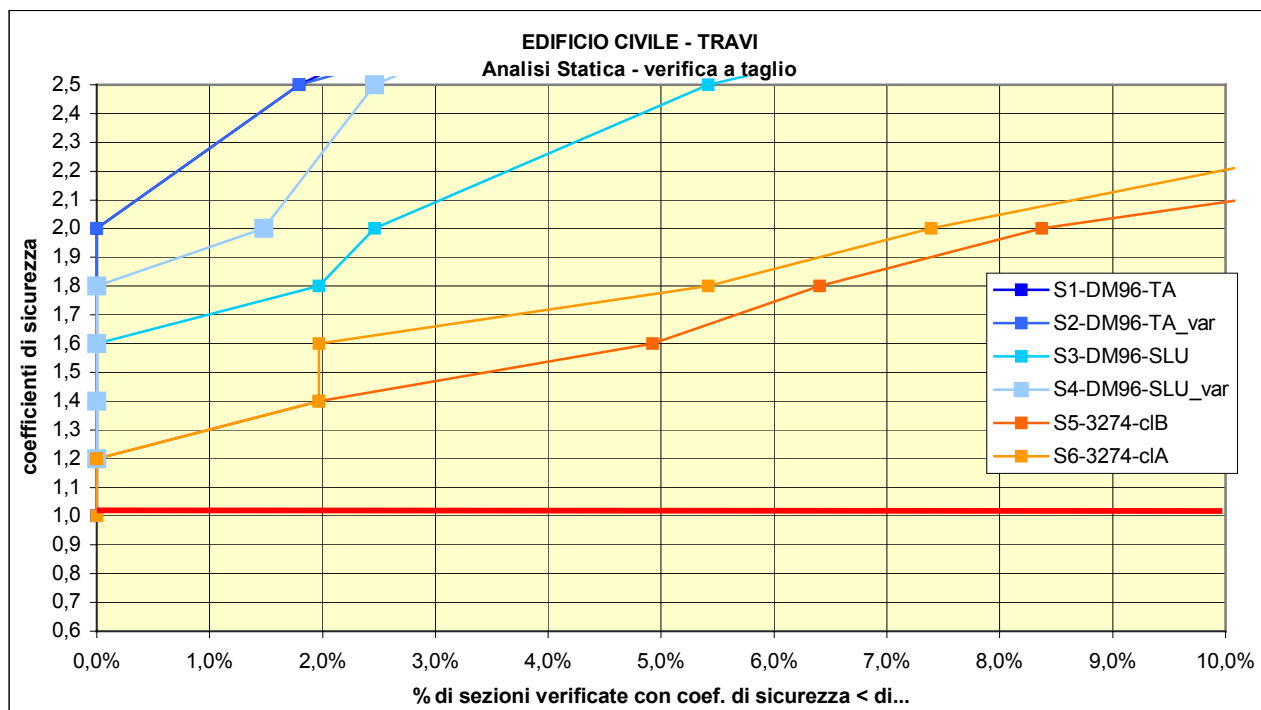


grafico 6-17

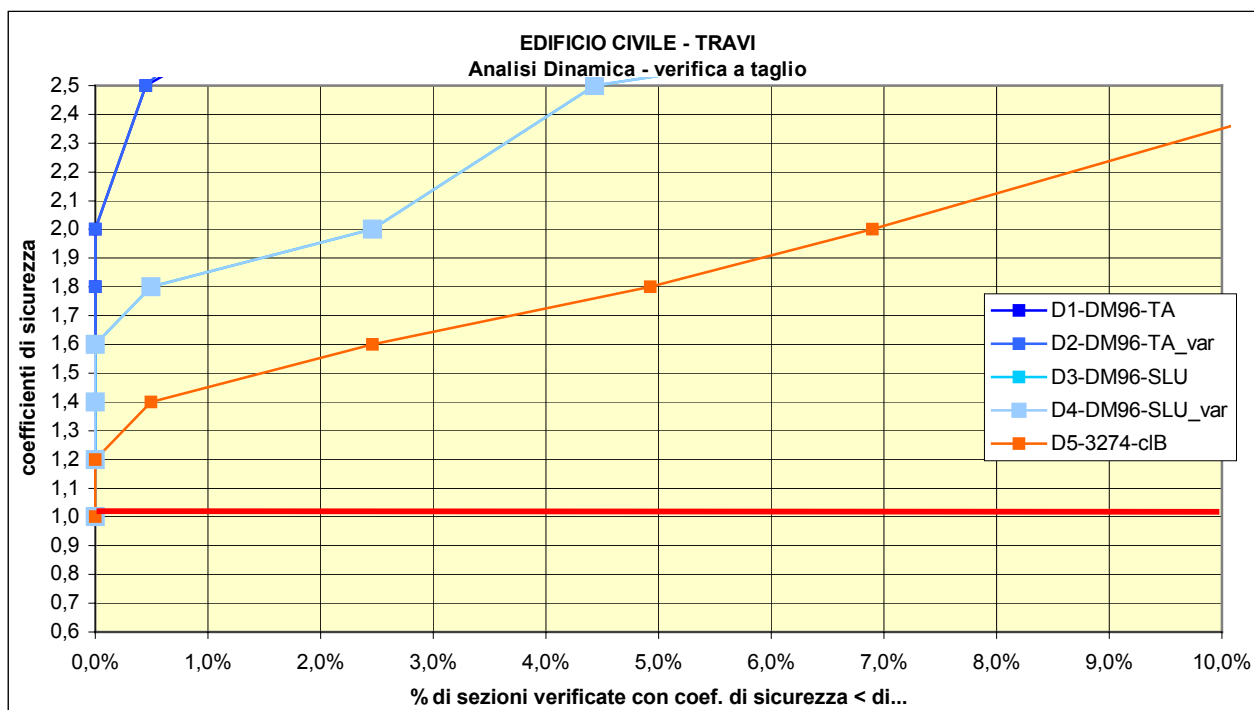


grafico 6-18

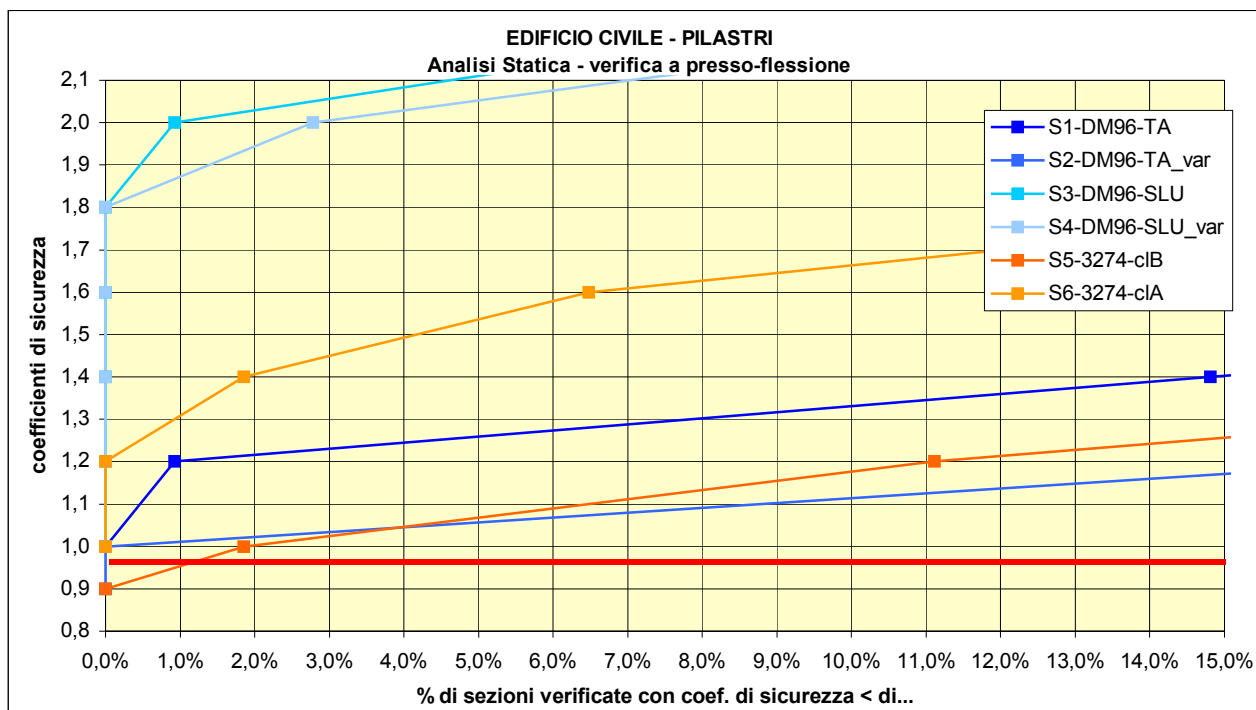
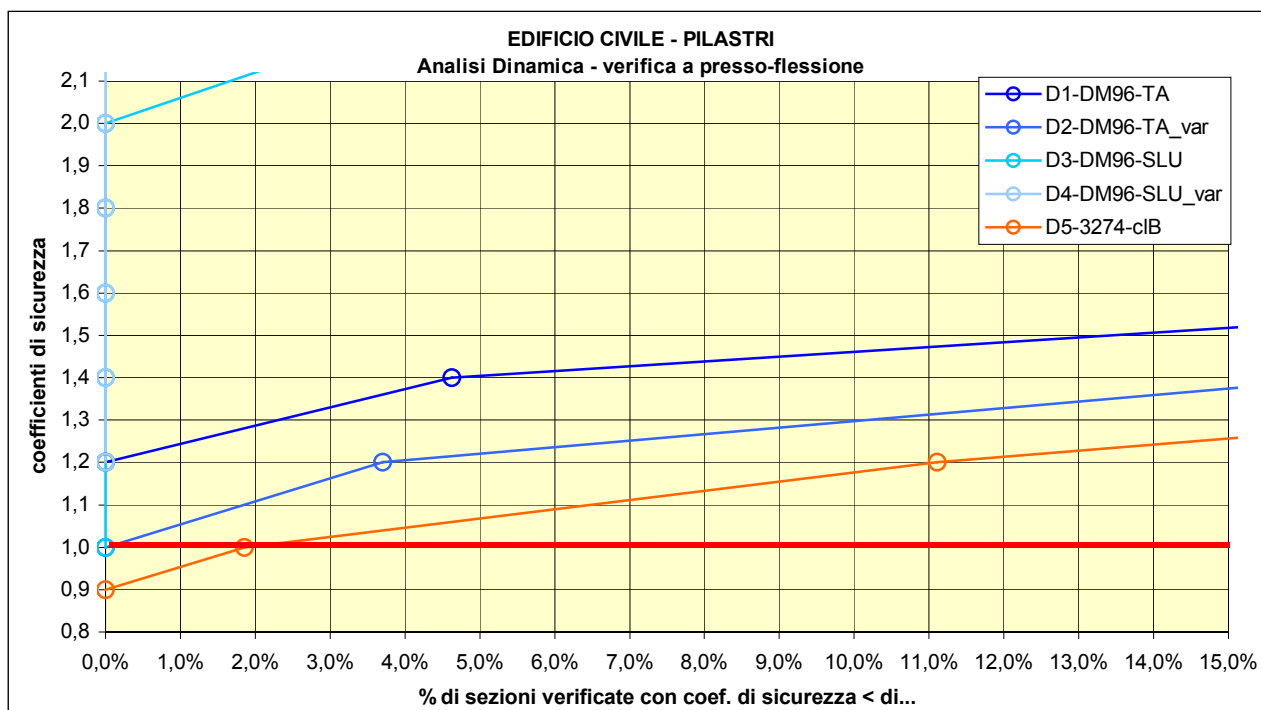


grafico 6-19

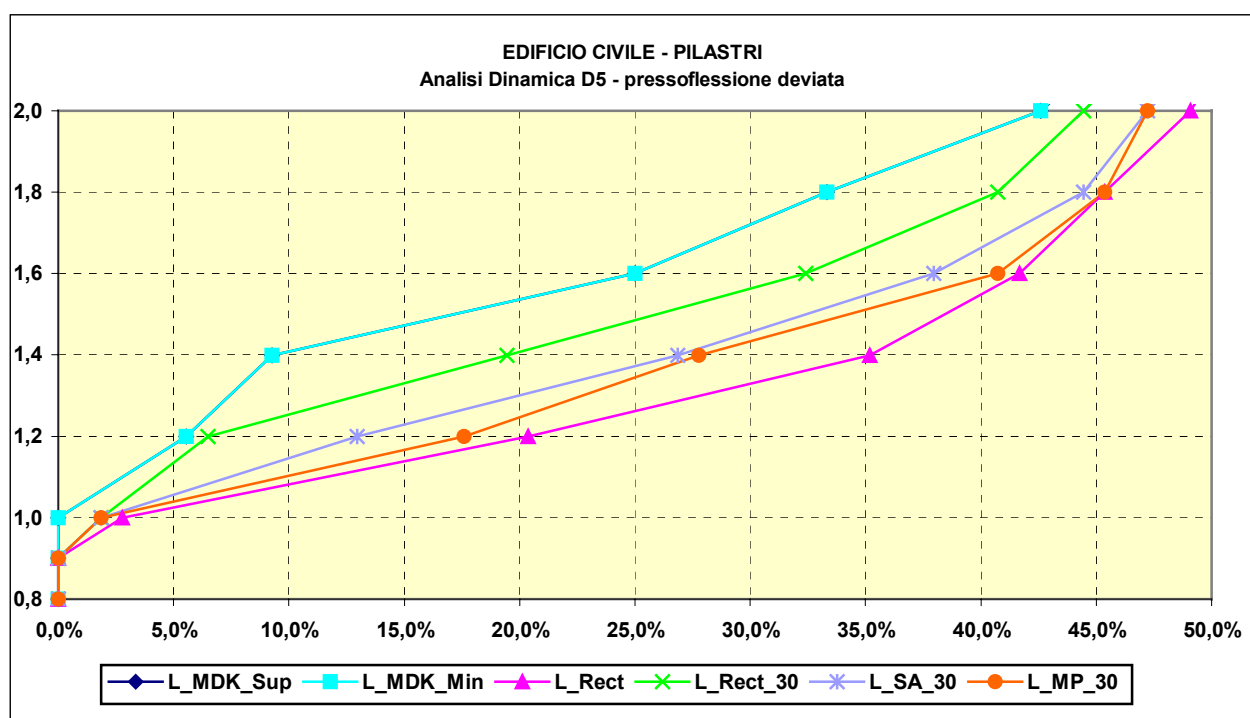


Dall'analisi dei risultati sui pilastri, riassunti nel grafico 6-18 e nel grafico 6-19, risulta chiaro come anche questi elementi, armati in origine in modo da avere dei margini di sicurezza (particolarmente evidenti nelle analisi allo stato limite ultimo, rappresentate dalle curve S3 e S4) non richiedano eccessivi incrementi di armatura per soddisfare le verifiche con la nuova normativa sia a presso-flessione sia a taglio (grafico 6-21, grafico 6-22); non sono infatti molte le sezioni non verificate. Si precisa che la curva relativa alle verifiche a taglio (grafico 6-21) del modello S6 è ottenuta considerando il criterio di gerarchia delle resistenze, che prevede incrementi consistenti delle sollecitazioni di calcolo con conseguente diminuzione dei moltiplicatori critici.

La curva D5 del grafico 6-19 risponde alle prescrizioni della nuova normativa: considera gli effetti dell'azione sismica agente lungo le due direzioni di riferimento e combina gli effetti con la regola del 30%.

Di seguito, invece, si riporta il grafico 6-20 riassuntivo delle verifiche effettuate con le procedure presentate nel Cap. 5 e già elencate a pagina 288.

grafico 6-20



I metodi L_MDK forniscono i valori massimi dei moltiplicatori critici; le due curve sono perfettamente sovrapposte, come per l'edificio strategico, a ulteriore conferma della bontà della procedura minimizzata. Gli altri metodi risultano tutti più conservativi, anche in maniera eccessiva. In questo caso, come ci si aspettava, i coefficienti di L_Rect sono sempre più piccoli, indice che l'involuppo rettangolare combinato con la SRSS è sempre a vantaggio di sicurezza, anche rispetto allo stesso involucro ottenuto con la regola del 30%. Rispetto all'edificio strategico, in questo caso si riscontra una sostanziale differenza di risultati tra i due involucri rettangolari, che però tende a ridursi verso i valori prossimi o inferiori all'unità. In questo caso, quindi, i coefficienti di modo prevalente e somma modale sono intermedi fra quelli ottenuti con i due involucri rettangolari e forniscono risultati non molto diversi tra di loro.

Si ribadisce nuovamente che i coefficienti rappresentati dalle curve del grafico 6-20 non sono direttamente confrontabili con quelli della curva D5 rappresentata nel grafico 6-19 perché sono ottenuti senza considerare l'effetto dell'eccentricità accidentale. In particolare dalla curva L_rect del grafico 6-20 si vede che solo il 2.78 % delle sezioni risultano avere moltiplicatore critico inferiore all'unità, mentre la curva D5 del grafico 6-19, in cui si considerano gli effetti dell'eccentricità accidentale, mostra che le sezioni non verificate sono il 10.2 %.

grafico 6-21

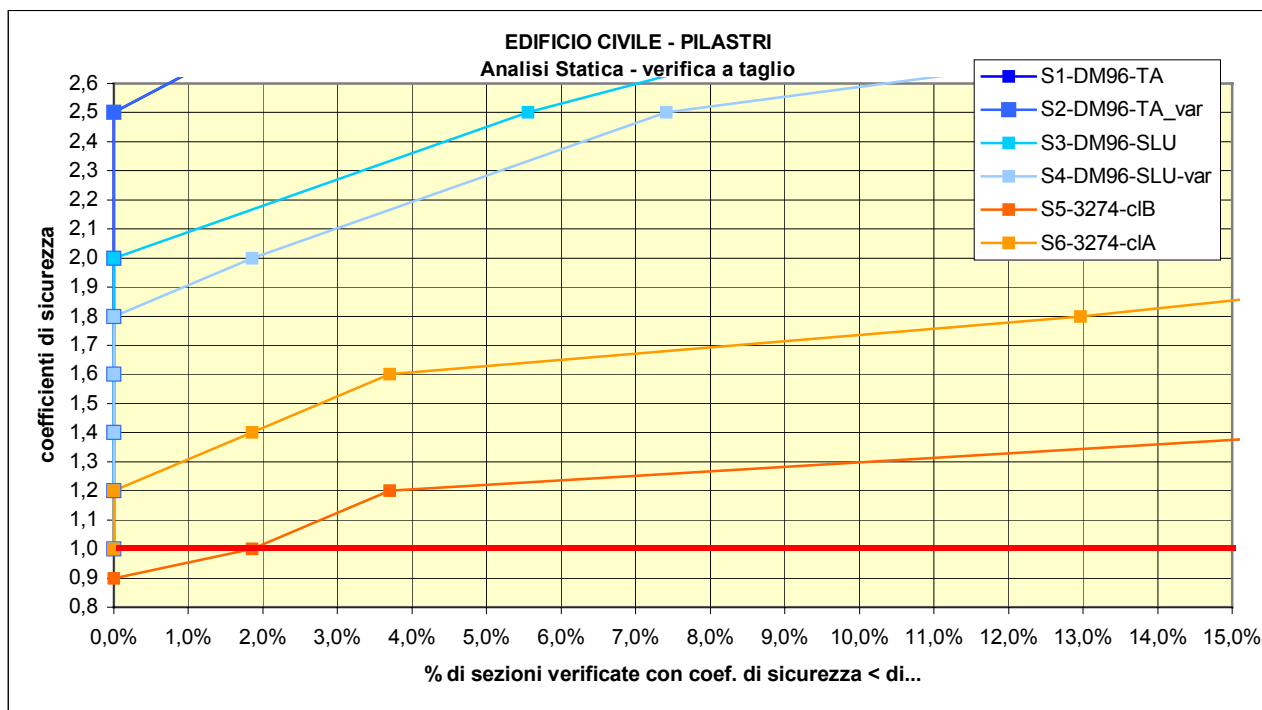
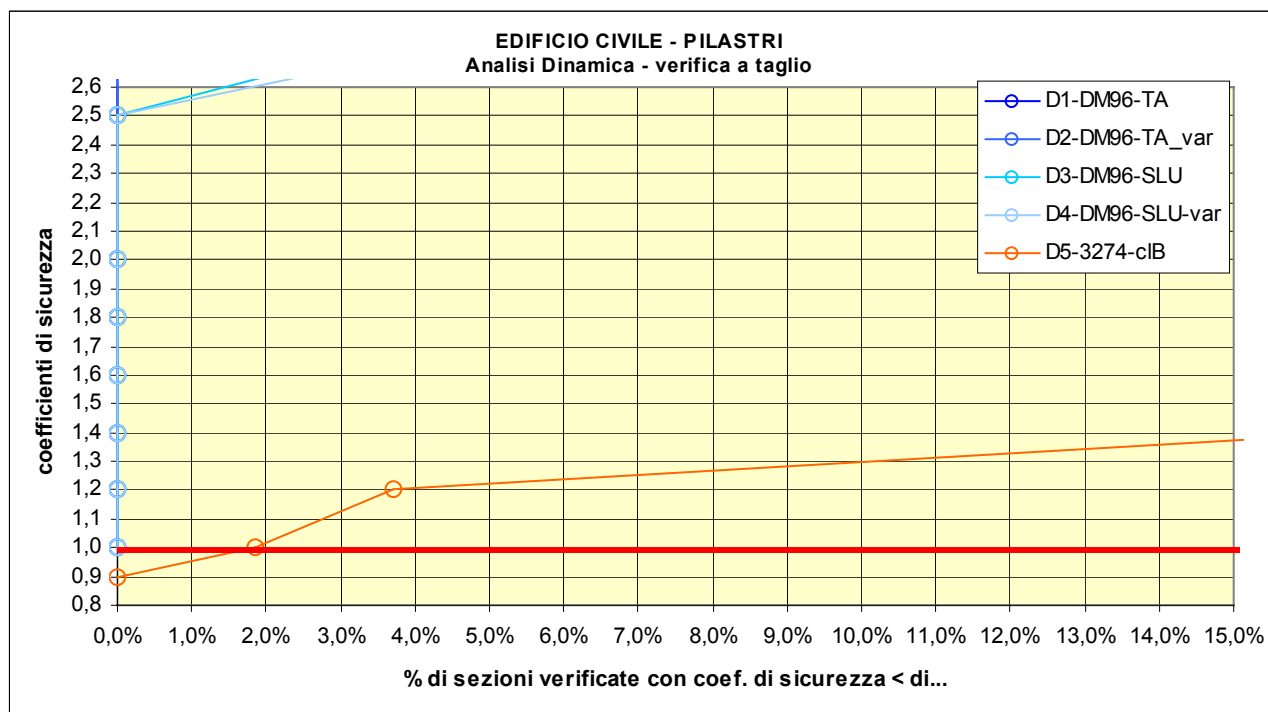


grafico 6-22



6.5.3 Confronti in termini di armature totali

Di seguito si riporta, per ciascun edificio e per ciascuna metodi analisi: statica e dinamica, una tabella riepilogativa ed il relativo grafico con il peso totale di armature necessarie a soddisfare le verifiche nei diversi elementi strutturali così come calcolato nei paragrafi 6.3 e 6.4. Si riporta altresì l'incremento percentuale rispetto alle armature derivanti dal modello S1. Si precisa che i pesi di acciaio riportati fanno riferimento alle sole armature necessarie per le verifiche, trascurando quelle tecnologiche: sovrapposizioni e piegature per l'ancoraggio delle barre. I valori riportati in rosso si riferiscono agli incrementi teorici calcolati ma che comunque non portano ad un esito positivo delle verifiche: si ricorda, infatti, che in alcune travi si superano i limiti massimi di armatura previsti dalle normative nei modelli S2, S5, S6 e D5. In particolare le verifiche non sono soddisfatte a causa del meccanismo di rottura di tipo fragile (rottura del cls per schiacciamento), che rende poco utile l'aumento di armatura nelle sezioni. Per i setti, invece, un risultato irrimediabilmente compromesso si ha nelle analisi S5 e S6, in cui la carenza è dovuta allo spessore insufficiente delle pareti.

I dati in tabella evidenziano come le analisi allo stato limite ultimo con la normativa previgente portino ad una riduzione complessiva del quantitativo di armature, riduzione dovuta principalmente al fatto che tale metodo di verifica comporta un utilizzo dei materiali più intensivo rispetto al metodo alle tensioni ammissibili. Le notevoli sollecitazioni sismiche imposte dalla nuova norma, invece, costringono ad un notevole incremento delle armature negli elementi verticali.

Tabella 6-12 Peso delle armature ed incrementi percentuali rispetto a S1

	Edificio Strategico – Analisi Statiche													
	Travi				Pilastrri				Setti				Totale	
	N-M	T-T	N-M	T-T	N-M	T-T	N-M	T-T	N-M	T-T	N-M	T-T		
	[t]	[t]	%	%	[t]	[t]	%	%	[t]	[t]	%	%	[t]	%
S1	30,68	16,74	-	-	21,64	3,45	-	-	18,40	11,40	-	-	102,31	-
S2	31,04	16,88	1,17%	0,85%	21,64	3,45	0,00%	0,00%	18,74	11,47	1,85%	0,61%	103,22	0,89%
S3	30,20	16,68	-1,58%	-0,36%	21,64	3,45	0,00%	0,00%	17,97	11,40	-2,34%	0,00%	101,34	-0,95%
S4	30,76	17,27	0,26%	3,18%	21,64	3,45	0,00%	0,00%	17,97	11,40	-2,34%	0,00%	102,49	0,18%
S5	32,45	17,35	5,77%	3,66%	23,52	3,51	8,69%	1,74%	34,21	11,52	85,92%	1,05%	122,56	19,79%
S6	32,02	17,35	4,36%	3,66%	21,66	3,45	0,09%	0,00%	23,91	12,87	29,95%	12,89%	111,26	8,75%

grafico 6-23

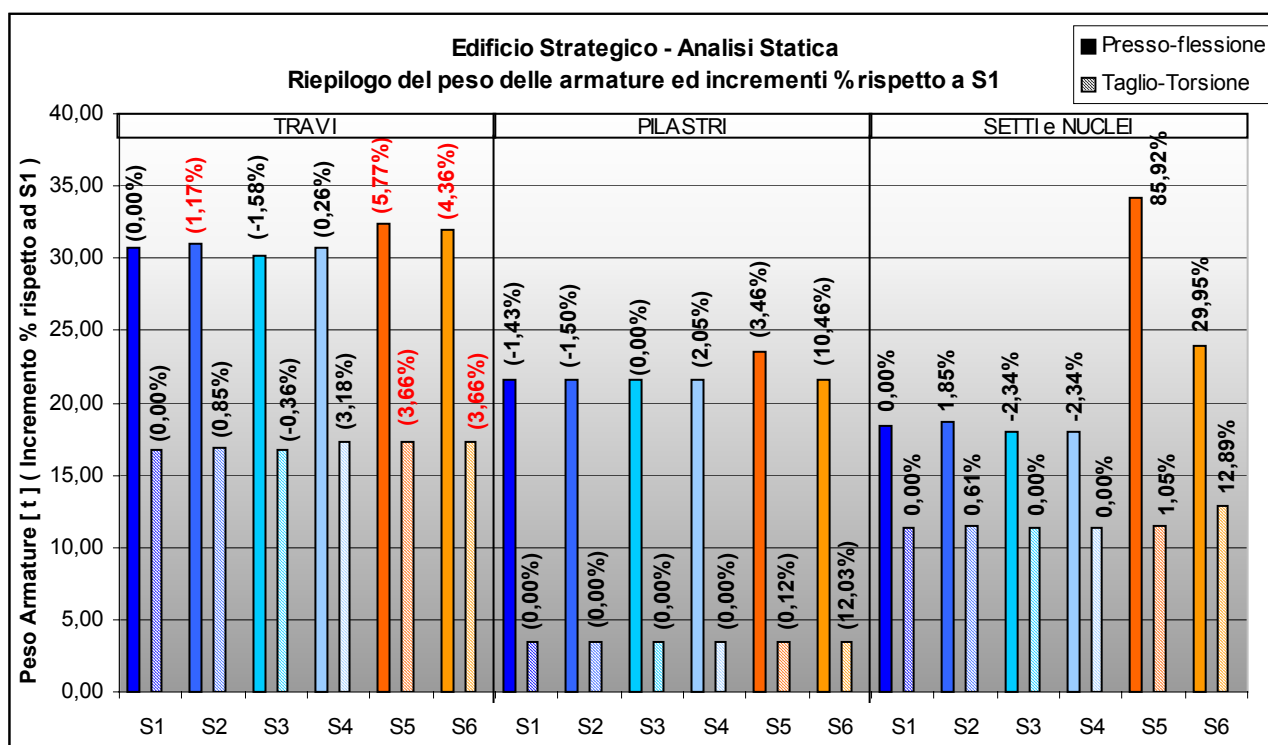
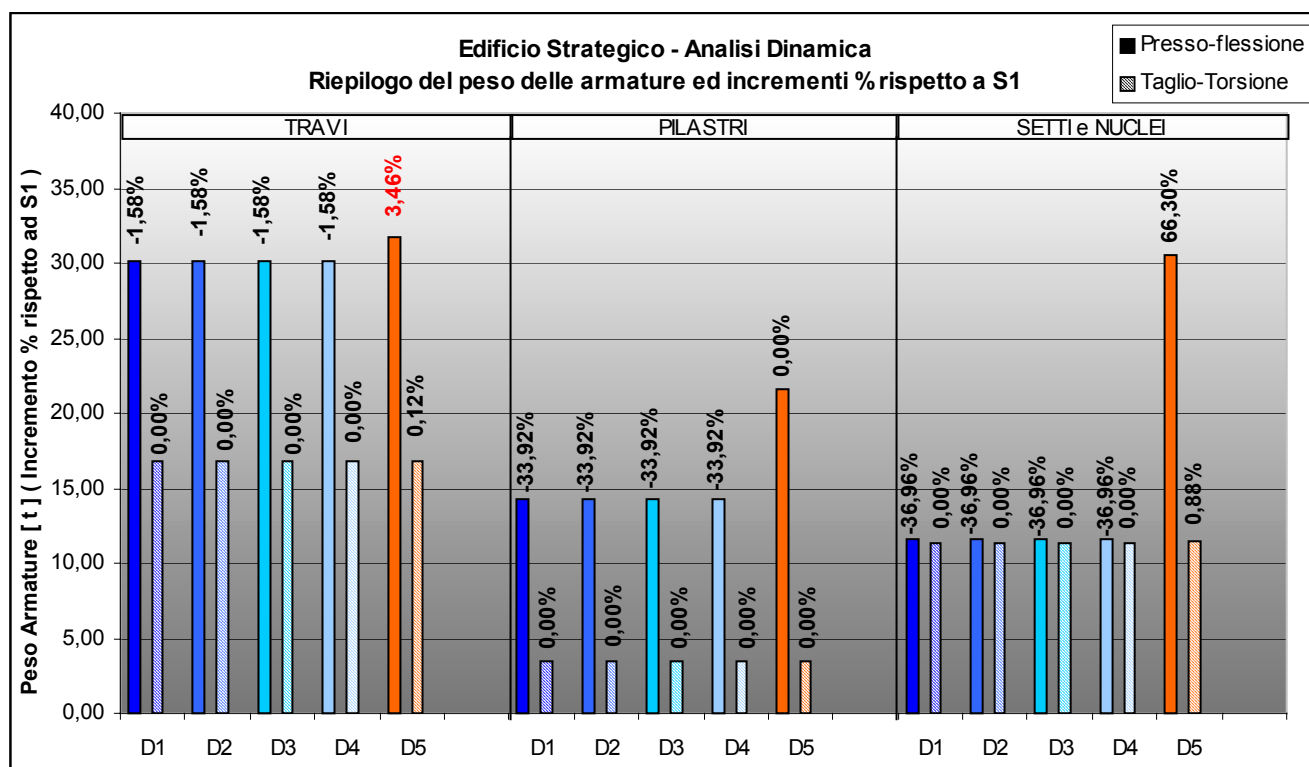


Tabella 6-13 Peso delle armature ed incrementi percentuali rispetto a S1

Edificio Strategico – Analisi Dinamiche													
	Travi				Pilastrri				Setti				Totale
	N-M	T-T	N-M	T-T	N-M	T-T	N-M	T-T	N-M	T-T	N-M	T-T	
	[t]	[t]	%	%	[t]	[t]	%	%	[t]	[t]	%	%	[t] %
D1	30,20	16,74	-1,58%	0,00%	14,30	3,45	-33,92%	0,00%	11,60	11,40	-36,96%	0,00%	87,69 -14,29%
D2	30,20	16,74	-1,58%	0,00%	14,30	3,45	-33,92%	0,00%	11,60	11,40	-36,96%	0,00%	87,69 -14,29%
D3	30,20	16,74	-1,58%	0,00%	14,30	3,45	-33,92%	0,00%	11,60	11,40	-36,96%	0,00%	87,69 -14,29%
D4	30,20	16,74	-1,58%	0,00%	14,30	3,45	-33,92%	0,00%	11,60	11,40	-36,96%	0,00%	87,69 -14,29%
D5	31,74	16,76	3,46%	0,12%	21,64	3,45	0,00%	0,00%	30,60	11,50	66,30%	0,88%	115,69 13,08%

grafico 6-24

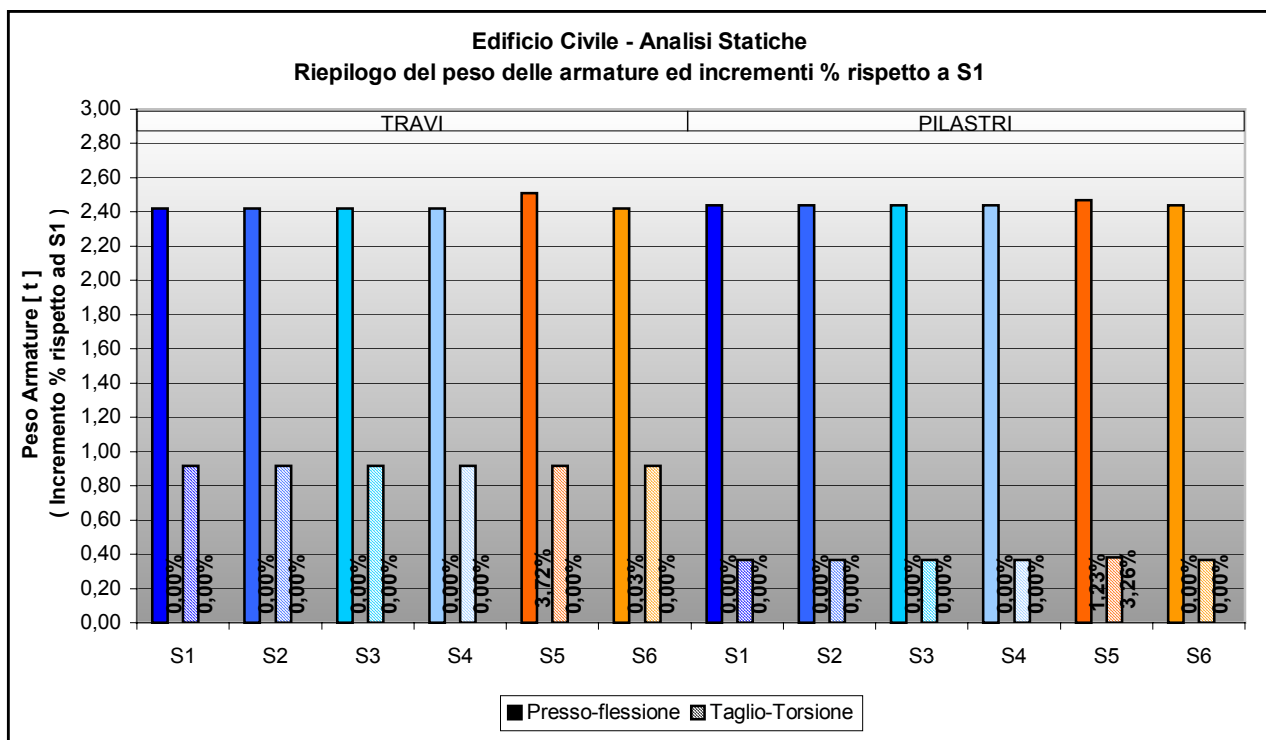


Per l'edificio civile il dimensionamento iniziale delle armature ha risentito della necessità di rispettare i quantitativi minimi imposti dal DM '96 e dalla necessità di uniformare le armature stesse per tener conto delle tipiche esigenze di cantiere; pertanto gli incrementi richiesti dalla nuova normativa sono piuttosto contenuti, anche per la classe di duttilità bassa: complessivamente per travi e pilastri si ha un aumento di 120 kg di ferro per l'armatura longitudinale e 10 kg per quella trasversale, pari rispettivamente a 2.47% e 0.93%.

Tabella 6-14 Edificio civile – Peso delle armature ed incrementi percentuali rispetto a S1

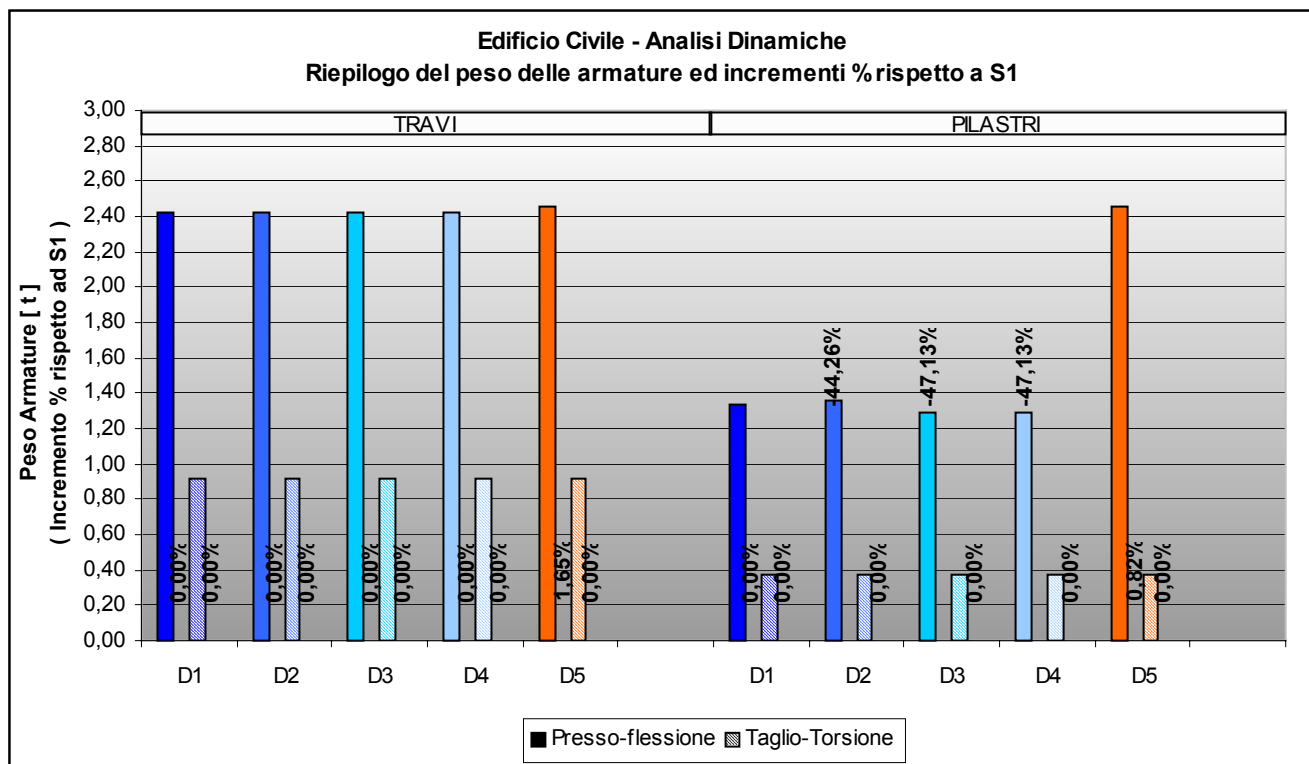
Edificio Civile – Analisi Statiche										
Travi					Pilastri				Totale	
	[t]	[t]	%	%	[t]	[t]	%	%	[t]	%
	N-M	T-T	N-M	T-T	N-M	T-T	N-M	T-T		
S1	2,42	0,92	-	-	2,44	0,37	-	-	6,15	-
S2	2,42	0,92	0,00%	0,00%	2,44	0,37	0,00%	0,00%	6,15	0,00%
S3	2,42	0,92	0,00%	0,00%	2,44	0,37	0,00%	0,00%	6,15	0,00%
S4	2,42	0,92	0,00%	0,00%	2,44	0,37	0,00%	0,00%	6,15	0,00%
S5	2,51	0,92	3,72%	0,00%	2,47	0,38	1,23%	3,26%	6,28	2,15%
S6	2,42	0,92	0,03%	0,00%	2,44	0,37	0,00%	0,00%	6,15	0,01%

grafico 6-25



Edificio Civile – Analisi Dinamiche										
	Travi				Pilastri				Totale	
	[t]	[t]	%	%	[t]	[t]	%	%	[t]	%
	N-M	T-T	N-M	T-T	N-M	T-T	N-M	T-T		
D1	2,42	0,92	0,00%	0,00%	1,34	0,37	-45,08%	0,00%	5,05	-17,90%
D2	2,42	0,92	0,00%	0,00%	1,36	0,37	-44,26%	0,00%	5,07	-17,57%
D3	2,42	0,92	0,00%	0,00%	1,29	0,37	-47,13%	0,00%	5,00	-18,71%
D4	2,42	0,92	0,00%	0,00%	1,29	0,37	-47,13%	0,00%	5,00	-18,71%
D5	2,46	0,92	1,65%	0,00%	2,46	0,37	0,82%	0,00%	6,21	0,98%

grafico 6-26



6.5.4 Confronti in termini di verifiche di deformabilità

Le verifiche degli spostamenti sono sempre abbondantemente soddisfatte dato che le strutture analizzate sono in c.a., quindi piuttosto rigide. Nei due diagrammi sono rappresentati gli spostamenti di piano massimi e quelli limite, in valore assoluto; sulla sinistra si leggono le grandezze relative alla direzione X e sulla destra quelle associate alla direzione Y.

Per l'edificio strategico si nota come (grafico 6-27 e grafico 6-28), gli spostamenti di piano dovuti alle azioni sismiche siano inferiori rispetto a quelli calcolati con l'analisi con la norma previgente, nonostante le analisi relative alla nuova normativa siano condotte con lo spettro allo stato limite di danno e quindi con sollecitazioni ben maggiori. Come si evince anche dal diagramma, la verifica risulta nel complesso meno gravosa; ciò è anche dovuto al fatto che la nuova normativa da una parte ha modificato la formulazione atta a calcolare il modulo di elasticità del calcestruzzo, introducendo valori più elevati rispetto ai precedenti, dall'altra ha aumentato i valori degli spostamenti limite.

Per l'edificio civile (grafico 6-29 e grafico 6-30), meno rigido rispetto a quello strategico, l'analisi con la O.P.C.M. 3274 comporta spostamenti maggiori di quelli calcolati con la normativa previgente; tuttavia le verifiche sono sempre abbondantemente soddisfatte.

grafico 6-27

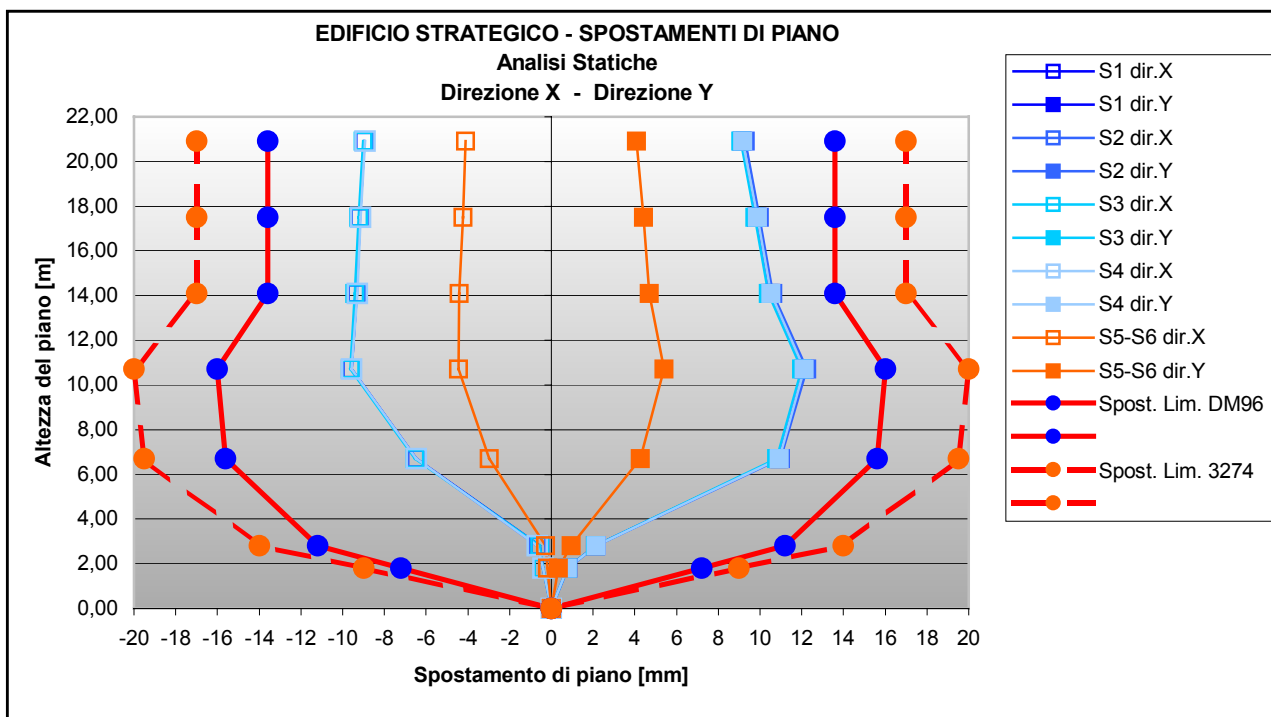


grafico 6-28

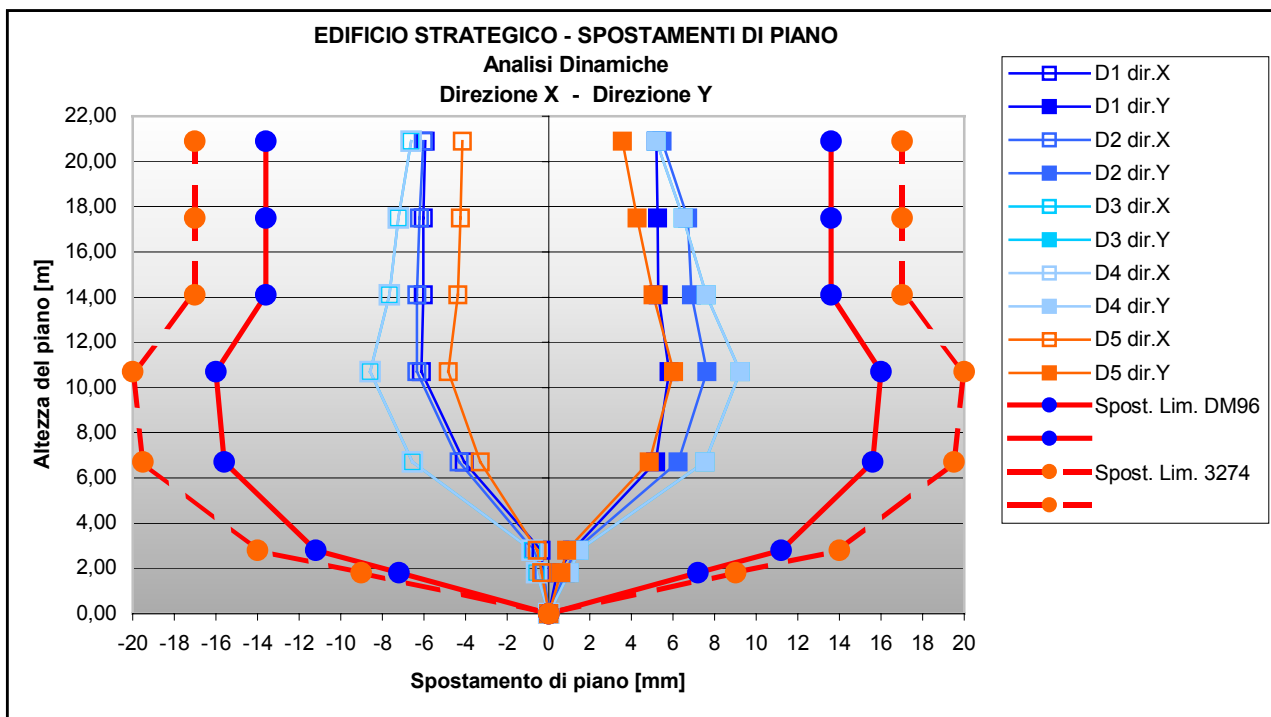


grafico 6-29

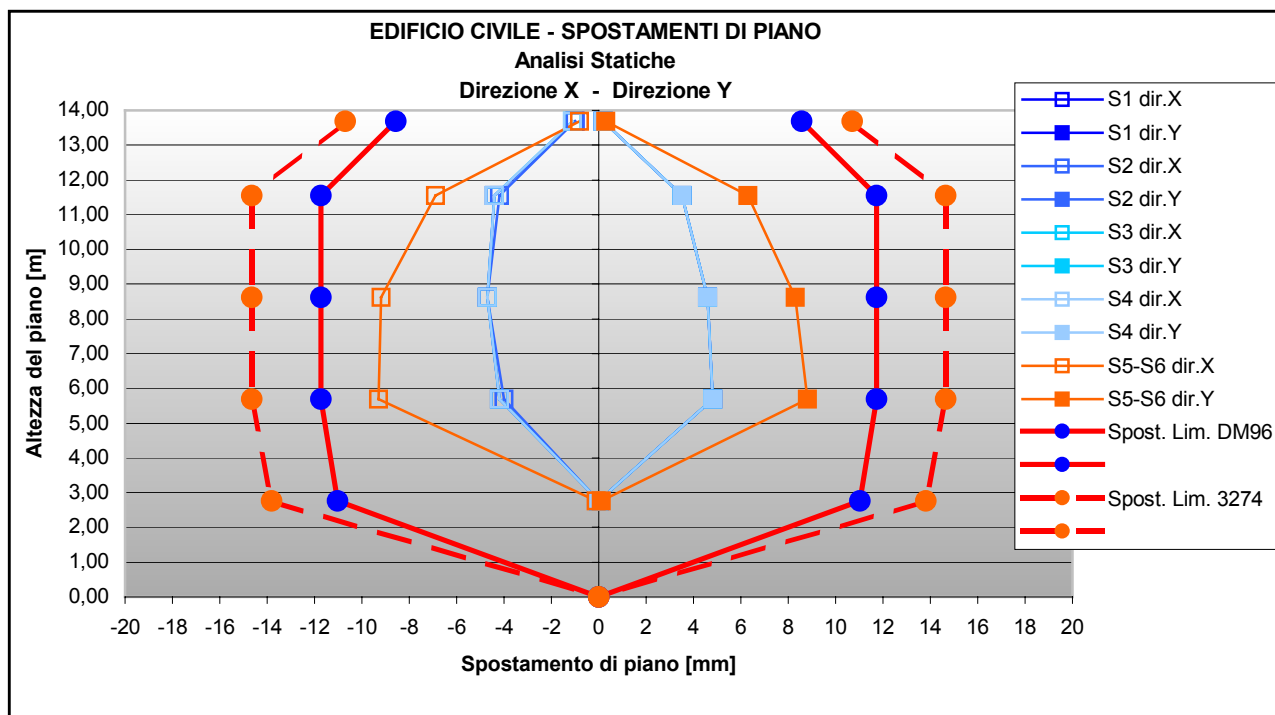
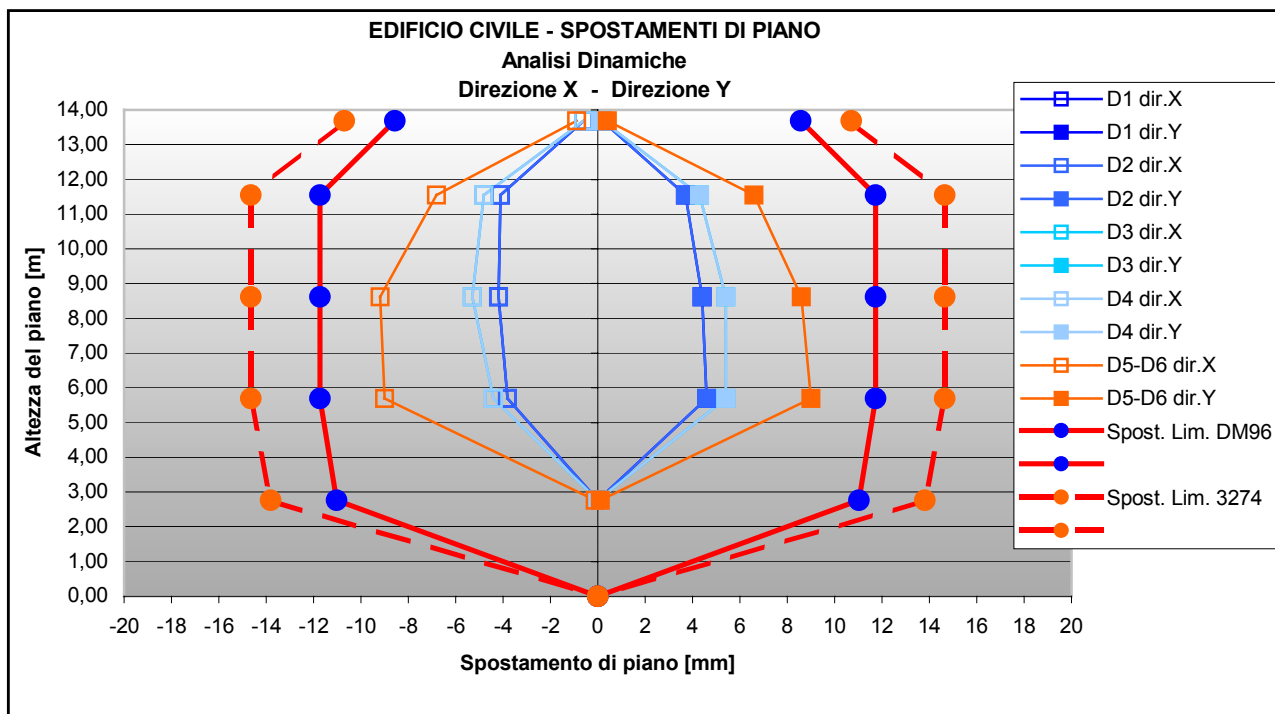


grafico 6-30



6.5.5 Conclusioni

Le analisi comparative illustrate in precedenza mostrano che l'edificio per civile abitazione può soddisfare le prescrizioni imposte dalla nuova normativa con un modesto incremento di armatura; ciò è dovuto anche al fatto che, per motivi tecnologici, nell'analisi alle TA con la normativa previgente, l'edificio dispone di adeguati margini di sicurezza nei confronti delle verifiche di resistenza. Complessivamente risulta che la tipologia strutturale, le geometrie e la destinazione d'uso dell'edificio sono compatibili con la nuova norma. In particolare l'edificio risulta verificato con un'analisi statica equivalente in classe di duttilità bassa a patto di considerare un incremento di armatura complessiva pari al 2.15% in peso rispetto all'armatura di riferimento. Utilizzando l'analisi dinamica modale si può considerare la struttura a norma con un incremento di armatura limitato allo 0.82%. Risulta, invece, controproducente l'analisi in classe di duttilità alta: infatti l'elevato quantitativo di acciaio preso a riferimento nelle travi non è congruente con il principio di gerarchia delle resistenze. La normativa penalizza la nostra struttura in quanto le travi hanno momenti ultimi elevati rispetto a quelli dei pilastri; pertanto, per avere un edificio "duatile" più che rinforzare le travi si dovrebbero indebolire i pilastri.

L'edificio strategico, invece, risulta incompatibile con la nuova norma. In effetti già nell'analisi S1 col DM '96 emerge come alcuni elementi, le travi corte tra i nuclei, siano al limite: i modesti valori dei coefficienti di sicurezza indicano tassi di lavoro elevati, sebbene rispettosi delle verifiche. Nell'ambito della nuova norma le analisi statiche non consentirebbero l'esito positivo delle verifiche, ammesso che possano essere utilizzate. Con l'analisi dinamica i setti e molte altre sezioni di travi e pilastri risultano verificati, ma con incrementi di armatura anche notevoli; rimane sempre poi l'esito negativo delle verifiche delle travi corte tra i nuclei. Se ne trae la necessità di variare non solo la geometria degli elementi, ma anche la loro disposizione modificando lo schema strutturale, per poter ottenere la destinazione d'uso strategica dell'edificio.

Per quanto riguarda le procedure di calcolo, si pone l'attenzione sulla regolarità strutturale che determina una differenza di sollecitazioni dell'ordine del 20% circa. La penalizzazione assegnata alle strutture "irregolari", concettualmente giusta da un punto di vista dell'ingegneria sismica, potrebbe risultare però eccessiva in alcuni casi inducendo i progettisti ad adeguarsi ad asettiche regolarità a detrimento del valore architettonico e funzionale degli edifici. La complessità dei metodi di calcolo e la quantità di dati da processare sono aumentate in misura notevolissima con l'introduzione della nuova normativa e l'imposizione del metodo di verifica agli stati limite. Le combinazioni di carico da analizzare nelle analisi statiche sono passate da 5 o 7 per il D.M.96 a 36 per l'Ordinanza 3274.

Inoltre, i progettisti sono costretti ad affidarsi completamente a codici di calcolo sempre più complessi, per lo più concepiti per eseguire analisi lineari; ciò, di fatto, riduce al minimo, se non annulla del tutto, la fase di controllo "sensibile" del progettista: diventa più difficile l'individuazione di errori progettuali e/o frutto di un uso improprio dei programmi automatici. La maggiore accuratezza nella modellazione delle strutture, conclamata come una delle positive conseguenze della introduzione delle nuove normative, è puramente illusoria se non verrà accompagnata dalla individuazione di controlli obbligatori, semplici e di carattere qualitativo, da eseguire a mano. In aggiunta, occorrerà procedere ad una rigorosa certificazione dei codici di calcolo commerciali da eseguire periodicamente a cura delle Università, su modelli strutturali campione, mediante confronti con codici di consolidata affidabilità.

BIBLIOGRAFIA

[1]

D.M.LL.PP. del 09/01/96, “Norme tecniche per il calcolo, l’esecuzione ed il collaudo delle strutture in c.a. normale e precompresso e per le strutture metalliche”.

[2]

D.M.LL.PP. del 16/01/96, “Criteri generali per la verifica di sicurezza delle costruzioni e dei carichi e dei sovraccarichi”.

[3]

D.M.LL.PP. del 16/01/96, “ Norme tecniche per le costruzioni in zona sismica”.

[4]

Circ. Min. LL.PP. 10-04-97 n° 65 - Istruzioni per l’applicazione delle “Norme tecniche per le costruzioni in zone sismiche” di cui al D.M. 16 gennaio 1996.

[5]

D.M. del 14/09/2005, “Norme tecniche per le costruzioni”.

[6]

O.P.C.M 3274/2003, “Primi elementi in materia di criteri generali per la classificazione sismica del territorio nazionale e di normative tecniche per le costruzioni in zona sismica”.

[7]

OPCM 3431/2005, “Ulteriori modifiche ed integrazioni all’OPCM 3274/03 – All.2: Norme tecniche per il progetto, la valutazione e l’adeguamento sismico degli edifici.

[8]

O.C.Zienkiewicz and R.L.Taylor, ”The Finite Element Method”, Fourth Edition, vol. 1 e 2, McGraw-Hill Book Company, 1989.

[9]

G. Romano, M. Romano, "An Algorithm of Fast Convergence for a Class of Unilateral Problems", Università di Napoli, Istituto di Scienza delle Costruzioni, Report n°280, 1978.

[10]

G. Romano, M. Romano, "The Numerical Performance of a New Iterative Method for Unilateral Problems in Structural Mechanics", Università di Napoli, Istituto di Scienza delle Costruzioni, Report n°281, 1978.

[11]

L. De Vivo, L. Rosati, "Ultimate Strength Analysis of Reinforced Concrete Sections subject to Axial Force and Biaxial Bending" – Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 166 (1998) pp.261-287

[12]

F.Marmo, "Algoritmi numerici per la verifica allo stato limite ultimo di sezioni in c.a. soggette a presso-flessione deviata"- Tesi di laurea 2004

[13]

E. Cosenza, G. Maddaloni, G. Magliulo, M. Pecce, R. Ramasco, (Dicembre 2005). "Progetto Antisismico di Edifici in Cemento Armato", IUSS Press.

[14]

L. Rosati, S. Sessa, (Giugno 2007). "Caratterizzazione ed impiego degli involucri della risposta sismica di modelli strutturali lineari" – XII Convegno Nazionale ANIDIS.

[15]

M. G. Sfakianakis, "Biaxial bending with axial force of reinforced, composite and repaired concrete sections of arbitrary shape by fiber model and computer graphics", Advances in Engineering Software 33 (2002) 227-242.

[16]

C. Memun, A Der Kiureghian, “Envelopes for seismic response vector. I: Theory” , J. of Struct.Engrg., vol 126 No 4, 467 – 474, 2000

[17]

C. Memun, A Der Kiureghian, “Envelopes for seismic response vector. II: Application” , J. of Struct.Engrg., vol 126 No 4, 475 – 481, 2000

[18]

C. Memun, “ Strategies for Identifying Critical Seismic Response Combinations”, Earthquake Spectra, 20 No 4, 1139 – 1165, 2004

[19]

A.K. Chopra, “ Dynamics of Structures” , Prentice Hall, 2000

[20]

E.L. Wilson, “ Dynamic Analysis using response spectrum seismic loading “, CSI, 204

[21]

E. Rosenblueth, H Contreras – Approximate design for multicomponent earthquakes – ASCE J. of Eng. Mech., Iss. 103, 895-911, 1977

[22]

L. Petrini, R. Pinho, G.M. Calvi, “Criteri di Progettazione Antisismica degli Edifici”, IUSS Press, Luglio 2004.

[23]

C. Pace, G. Menditto, “Metodologia semi-probabilistica di calcolo agli stati limite delle strutture in calcestruzzo armato”, Itec, 1979.

[24]

A. Gherzi, “Il cemento armato – Dalle tansioni ammissibili agli stati limite: un approccio unitario”, Flacovio Editore, 2005.

[25]

L. Rosati, F. de Benedictis, S. Sessa, (Luglio 2007) “Analisi comparativa di procedure di calcolo e verifica di edifici in c.a.”, Convegno in onore di Antonio La Tegola, Università di Catania.

APPENDICE

A.1. Coincidenza delle formule

Si nota facilmente che per $[\alpha_i \rightarrow 0]$ le due formule coincidono, infatti:

$$\text{ricordando che } \alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{i+1} = \alpha_i + \varepsilon_i,$$

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \left[\frac{\varepsilon_{i+1} \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{\alpha_i} - 1 \right] &= \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \left[\frac{(\alpha_i + \varepsilon_i) \ln (\alpha_i + \varepsilon_i) - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{\alpha_i} - 1 \right] = \\ &= \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha_i} \left[\alpha_i \ln (\alpha_i + \varepsilon_i) + \varepsilon_i \ln (\alpha_i + \varepsilon_i) - \varepsilon_i \ln \varepsilon_i - \alpha_i \right] = \\ &= \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha_i} \left\{ \alpha_i [\ln (\alpha_i + \varepsilon_i) - 1] + \varepsilon_i [\ln (\alpha_i + \varepsilon_i) - \ln \varepsilon_i] \right\} = \\ &= \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha_i} \left\{ \alpha_i [\ln (\alpha_i + \varepsilon_i) - 1] + \varepsilon_i \left[\ln \left(\frac{\alpha_i + \varepsilon_i}{\varepsilon_i} \right) \right] \right\} = \ln \varepsilon_i - 1 + \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \left\{ \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} \left[\ln \left(\frac{\alpha_i + \varepsilon_i}{\varepsilon_i} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Posto: } \frac{\alpha_i}{\varepsilon_i} = x \quad \alpha_i \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad x \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \ln \varepsilon_i - 1 + \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \left\{ \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} \left[\ln \left(\frac{\alpha_i + \varepsilon_i}{\varepsilon_i} \right) \right] \right\} &= \ln \varepsilon_i - 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \ln (x+1) \right] = \\ &= \ln \varepsilon_i - 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (x+1)}{x} = \ln \varepsilon_i - 1 + 1 = \ln \varepsilon_i \end{aligned}$$

A.2. Coincidenza delle formule

Si nota facilmente che per $[\alpha_i \rightarrow 0]$ le due formule coincidono. A tale scopo trasformiamo la relazione trovata ricordando che $\alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$, si ha:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\alpha_i} \left[\varepsilon_{i+1} \left(\frac{\varepsilon_{i+1} - 2\varepsilon_i}{\alpha_i} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i}{2} \right] = \\
 & = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\varepsilon_{i+1}^2 - 2\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}}{\alpha_i^2} \right) \ln (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i + \varepsilon_i) + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i^2} \ln \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i - 2\varepsilon_i}{2\alpha_i} \right] = \\
 & = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\varepsilon_{i+1}^2 - \varepsilon_i^2 + \varepsilon_i^2 - 2\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}}{\alpha_i^2} \right) \ln (\alpha_i + \varepsilon_i) + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i^2} \ln \varepsilon_i - \frac{\alpha_i - 2\varepsilon_i}{2\alpha_i} \right] = \\
 & = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)^2 - \varepsilon_i^2}{\alpha_i^2} \right) \ln (\alpha_i + \varepsilon_i) + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i^2} \ln \varepsilon_i + \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} - \frac{1}{2} \right] = \\
 & = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\alpha_i^2}{\alpha_i^2} - \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i^2} \right) \ln (\alpha_i + \varepsilon_i) + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i^2} \ln \varepsilon_i + \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} - \frac{1}{2} \right] = \\
 & = \frac{1}{2} \left[\ln (\alpha_i + \varepsilon_i) - \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i^2} \ln (\alpha_i + \varepsilon_i) + \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i^2} \ln \varepsilon_i + \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} - \frac{1}{2} \right] = \\
 & = \frac{1}{2} \left[\ln (\alpha_i + \varepsilon_i) - \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i^2} \ln \left(\frac{\alpha_i + \varepsilon_i}{\varepsilon_i} \right) + \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} - \frac{1}{2} \right]
 \end{aligned}$$

A questo punto calcoliamo il limite per $\alpha_i \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[\ln (\alpha_i + \varepsilon_i) - \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i^2} \ln \left(\frac{\alpha_i + \varepsilon_i}{\varepsilon_i} \right) + \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} - \frac{1}{2} \right] = \\
 & = \frac{1}{2} \ln \varepsilon_i - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \left[\frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i^2} \ln \left(\frac{\alpha_i + \varepsilon_i}{\varepsilon_i} \right) - \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} \right]
 \end{aligned}$$

Dobbiamo quindi calcolare $\left[\lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i^2} \ln \left(\frac{\alpha_i + \varepsilon_i}{\varepsilon_i} \right) - \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} \right]$

posto: $\frac{\alpha_i}{\varepsilon_i} = x \quad \alpha_i \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad x \rightarrow 0$

$$\lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i^2} \ln \left(\frac{\alpha_i + \varepsilon_i}{\varepsilon_i} \right) - \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln(x+1) - \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - x}{x^2}$$

Applicando la regola di De L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+1)} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x - 1}{2x(x+1)} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(x+1)} = -\frac{1}{2}$$

Sostituendo tale valore le due formule coincidono, cioè:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[\ln(\alpha_i + \varepsilon_i) - \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i^2} \ln \left(\frac{\alpha_i + \varepsilon_i}{\varepsilon_i} \right) + \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} - \frac{1}{2} \right] = \\ = \frac{1}{2} \ln \varepsilon_i - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \left[\frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i^2} \ln \left(\frac{\alpha_i + \varepsilon_i}{\varepsilon_i} \right) - \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} \right] = \frac{1}{2} \ln \varepsilon_i - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln \varepsilon_i \end{aligned}$$

A.3. Coincidenza delle formule

Si nota facilmente che per $[\alpha_i \rightarrow 0]$ le due formule coincidono, infatti:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha_i^2} \left[\frac{1}{\alpha_i} \left(\frac{\alpha_i^3 + \varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_{i+1} - \frac{\varepsilon_i^3}{3} \ln \varepsilon_i \right) - \frac{2\alpha_i^2 - 3\varepsilon_i \alpha_i + 6\varepsilon_i^2}{18} \right] = \\ \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \frac{1}{3\alpha_i^3} \left[(\alpha_i^3 + \varepsilon_i^3) \ln \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i^3 \ln \varepsilon_i - \frac{2\alpha_i^3 - 3\varepsilon_i \alpha_i^2 + 6\varepsilon_i^2 \alpha_i}{6} \right] = \\ \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \frac{1}{3\alpha_i^3} \left[\alpha_i^3 \ln(\alpha_i + \varepsilon_i) + \varepsilon_i^3 \ln \left(\frac{\alpha_i + \varepsilon_i}{\varepsilon_i} \right) - \frac{2\alpha_i^3 - 3\alpha_i^2 \varepsilon_i + 6\alpha_i \varepsilon_i^2}{6} \right] = \\ = \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \frac{\alpha_i^3 \ln(\alpha_i + \varepsilon_i)}{3\alpha_i^3} + \frac{\varepsilon_i^3}{3\alpha_i^3} \ln \left(\frac{\alpha_i + \varepsilon_i}{\varepsilon_i} \right) - \frac{2\alpha_i^3}{18\alpha_i^3} + \frac{3\alpha_i^2 \varepsilon_i}{18\alpha_i^3} - \frac{6\alpha_i \varepsilon_i^2}{18\alpha_i^3} = \\ = \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \frac{\ln(\alpha_i + \varepsilon_i)}{3} + \frac{\varepsilon_i^3}{3\alpha_i^3} \ln \left(\frac{\alpha_i + \varepsilon_i}{\varepsilon_i} \right) - \frac{1}{9} + \frac{\varepsilon_i}{6\alpha_i} - \frac{\varepsilon_i^2}{3\alpha_i^2} = \\ = \frac{\ln \varepsilon_i}{3} - \frac{1}{9} + \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \left[\frac{\varepsilon_i^3}{3\alpha_i^3} \ln \left(\frac{\alpha_i + \varepsilon_i}{\varepsilon_i} \right) + \frac{\varepsilon_i}{6\alpha_i} - \frac{\varepsilon_i^2}{3\alpha_i^2} \right] = \end{aligned}$$

Dobbiamo quindi calcolare $\lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \left[\frac{\varepsilon_i^3}{3\alpha_i^3} \ln \left(\frac{\alpha_i + \varepsilon_i}{\varepsilon_i} \right) + \frac{\varepsilon_i}{6\alpha_i} - \frac{\varepsilon_i^2}{3\alpha_i^2} \right]$

Posto: $\frac{\alpha_i}{\varepsilon_i} = x \quad \alpha_i \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \left[\frac{\varepsilon_i^3}{3\alpha_i^3} \ln \left(\frac{\alpha_i + \varepsilon_i}{\varepsilon_i} \right) + \frac{\varepsilon_i}{6\alpha_i} - \frac{\varepsilon_i^2}{3\alpha_i^2} \right] &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \ln(x+1) + \frac{1}{2x} - \frac{1}{x^2} = \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(x+1) + x^2 - 2x}{2x^3} \end{aligned}$$

Applicando la regola di De L'Hôpital:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(x+1) + x^2 - 2x}{2x^3} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{(x+1)} + 2x - 2}{6x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + 2x(x+1) - 2(x+1)}{6x^2(x+1)} = \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + 2x^2 + 2x - 2x - 2}{6x^2(x+1)} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(x+1)} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Sostituendo tale valore le due formule coincidono, cioè:

$$\lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \frac{1}{3\alpha_i^3} \left[\alpha_i^3 \ln(\alpha_i + \varepsilon_i) + \varepsilon_i^3 \ln\left(\frac{\alpha_i + \varepsilon_i}{\varepsilon_i}\right) - \frac{2\alpha_i^3 - 3\alpha_i^2 \varepsilon_i + 6\alpha_i \varepsilon_i^2}{6} \right] =$$

$$= \frac{\ln \varepsilon_i}{3} - \frac{1}{9} + \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \left[\frac{\varepsilon_i^3}{3\alpha_i^3} \ln\left(\frac{\alpha_i + \varepsilon_i}{\varepsilon_i}\right) + \frac{\varepsilon_i}{6\alpha_i} - \frac{\varepsilon_i^2}{3\alpha_i^2} \right] = \frac{\ln \varepsilon_i}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{\ln \varepsilon_i}{3}$$

A.4. Coincidenza delle formule

Si nota facilmente che per $[\alpha_i \rightarrow 0]$ le due formule precedenti coincidono. A tale scopo trasformiamo la relazione trovata ricordando che $\alpha_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$, si ha:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\alpha_i^2} \left[\varepsilon_{i+1}^2 \left(\frac{\varepsilon_{i+1}}{3} - \frac{\varepsilon_i}{2} \right) \ln \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon_i^3}{6} \ln \varepsilon_i - \frac{5}{36} \varepsilon_i^3 - \varepsilon_{i+1}^2 \left(\frac{\varepsilon_{i+1}}{9} - \frac{\varepsilon_i}{4} \right) \right] = \\
 & = \left(\frac{\varepsilon_{i+1}^3}{3\alpha_i^2} - \frac{\varepsilon_{i+1}^2 \varepsilon_i}{2\alpha_i^2} \right) \ln(\varepsilon_{i+1} + \varepsilon_i - \varepsilon_i) + \frac{\varepsilon_i^3}{6\alpha_i^2} \ln \varepsilon_i - \frac{5}{36\alpha_i^2} \varepsilon_i^3 - \frac{\varepsilon_{i+1}^2}{\alpha_i^2} \left(\frac{4\varepsilon_{i+1} - 9\varepsilon_i}{36} \right) = \\
 & = \left(\frac{2\varepsilon_{i+1}^3 - 3\varepsilon_{i+1}^2 \varepsilon_i}{6\alpha_i^2} \right) \ln(\alpha_i + \varepsilon_i) + \frac{\varepsilon_i^3}{6\alpha_i^2} \ln \varepsilon_i - \frac{5}{36\alpha_i^2} \varepsilon_i^3 - \frac{\varepsilon_{i+1}^2}{36\alpha_i^2} (4\varepsilon_{i+1} - 9\varepsilon_i) = \\
 & = \left(\frac{2\varepsilon_{i+1}^3 + 6\varepsilon_i^2 \varepsilon_{i+1} - 6\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2 - 2\varepsilon_i^3 - \varepsilon_i^3 + 3\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2 + 3\varepsilon_i^3 - 6\varepsilon_i^2 \varepsilon_{i+1}}{6\alpha_i^2} \right) \ln(\alpha_i + \varepsilon_i) + \\
 & \quad + \frac{\varepsilon_i^3}{6\alpha_i^2} \ln \varepsilon_i - \frac{5\varepsilon_i^3 + 4\varepsilon_{i+1}^3 - 9\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2}{36\alpha_i^2} = \\
 & = \left\{ \left[\frac{2(\varepsilon_{i+1}^3 + 3\varepsilon_i^2 \varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2 - \varepsilon_i^3) - \varepsilon_i^3 + 3\varepsilon_i(\varepsilon_{i+1}^2 + \varepsilon_i^2 - 2\varepsilon_i \varepsilon_{i+1})}{6\alpha_i^2} \right] \ln(\alpha_i + \varepsilon_i) + \frac{\varepsilon_i^3}{6\alpha_i^2} \ln \varepsilon_i + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{9\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2 - 5\varepsilon_i^3 - 4\varepsilon_{i+1}^3 + 4\varepsilon_i^3 - 4\varepsilon_i^3 + 12\varepsilon_i^2 \varepsilon_{i+1} - 12\varepsilon_i^2 \varepsilon_{i+1} + 3\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2 - 3\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2}{36\alpha_i^2} \right\} = \\
 & = \left\{ \left[\frac{2(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)^3 - \varepsilon_i^3 + 3\varepsilon_i(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)^2}{6\alpha_i^2} \right] \ln(\alpha_i + \varepsilon_i) + \frac{\varepsilon_i^3}{6\alpha_i^2} \ln \varepsilon_i + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{6\varepsilon_i^2 \varepsilon_{i+1} - 6\varepsilon_i^3 - 4\varepsilon_{i+1}^3 - 12\varepsilon_i^2 \varepsilon_{i+1} + 12\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2 + 4\varepsilon_i^3 - 3\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2 - 3\varepsilon_i^3 + 6\varepsilon_i^2 \varepsilon_{i+1}}{36\alpha_i^2} \right\} = \\
 & = \left[\left(\frac{2\alpha_i^3 - \varepsilon_i^3 + 3\varepsilon_i \alpha_i^2}{6\alpha_i^2} \right) \ln(\alpha_i + \varepsilon_i) + \frac{\varepsilon_i^3}{6\alpha_i^2} \ln \varepsilon_i + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{6\varepsilon_i^2(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i) - 4(\varepsilon_{i+1}^3 + 3\varepsilon_i^2 \varepsilon_{i+1} - 3\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}^2 - \varepsilon_i^3) - 3\varepsilon_i(\varepsilon_{i+1}^2 - 2\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} + \varepsilon_i^2)}{36\alpha_i^2} \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\alpha_i}{3} - \frac{\varepsilon_i^3}{6\alpha_i^2} + \frac{\varepsilon_i}{2} \right) \ln(\alpha_i + \varepsilon_i) + \frac{\varepsilon_i^3}{6\alpha_i^2} \ln \varepsilon_i + \frac{6\varepsilon_i^2(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i) - 4(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)^3 - 3\varepsilon_i(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)^2}{36\alpha_i^2} = \\
&= \left(\frac{\alpha_i}{3} - \frac{\varepsilon_i^3}{6\alpha_i^2} + \frac{\varepsilon_i}{2} \right) \ln(\alpha_i + \varepsilon_i) + \frac{\varepsilon_i^3}{6\alpha_i^2} \ln \varepsilon_i + \frac{6\varepsilon_i^2\alpha_i - 4\alpha_i^3 - 3\varepsilon_i\alpha_i^2}{36\alpha_i^2} = \\
&= \left(\frac{\alpha_i}{3} - \frac{\varepsilon_i^3}{6\alpha_i^2} + \frac{\varepsilon_i}{2} \right) \ln(\alpha_i + \varepsilon_i) + \frac{\varepsilon_i^3}{6\alpha_i^2} \ln \varepsilon_i + \frac{\varepsilon_i^2}{6\alpha_i} - \frac{\alpha_i}{9} - \frac{\varepsilon_i}{12} =
\end{aligned}$$

A questo punto calcoliamo il limite per $\alpha_i \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha_i}{3} - \frac{\varepsilon_i^3}{6\alpha_i^2} + \frac{\varepsilon_i}{2} \right) \ln(\alpha_i + \varepsilon_i) + \frac{\varepsilon_i^3}{6\alpha_i^2} \ln \varepsilon_i + \frac{\varepsilon_i^2}{6\alpha_i} - \frac{\alpha_i}{9} - \frac{\varepsilon_i}{12} = \\
&= \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha_i}{3} + \frac{\varepsilon_i}{2} \right) \ln(\alpha_i + \varepsilon_i) - \frac{\varepsilon_i^3}{6\alpha_i^2} \ln(\alpha_i + \varepsilon_i) + \frac{\varepsilon_i^3}{6\alpha_i^2} \ln \varepsilon_i + \frac{\varepsilon_i^2}{6\alpha_i} - \frac{\alpha_i}{9} - \frac{\varepsilon_i}{12} = \\
&= \frac{\varepsilon_i}{2} \ln(\alpha_i + \varepsilon_i) - \frac{\varepsilon_i}{12} - \frac{\varepsilon_i}{6} \left[\lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i^2} \ln \left(\frac{\alpha_i + \varepsilon_i}{\varepsilon_i} \right) + \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} \right]
\end{aligned}$$

Il $\left[\lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i^2} \ln \left(\frac{\alpha_i + \varepsilon_i}{\varepsilon_i} \right) + \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} \right]$ è stato già calcolato e vale $\left[-\frac{1}{2} \right]$, per cui sostituendo le

due formule coincidono, infatti:

$$\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon_i}{2} \ln(\alpha_i + \varepsilon_i) - \frac{\varepsilon_i}{12} - \frac{\varepsilon_i}{6} \left[\lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_i^2} \ln \left(\frac{\alpha_i + \varepsilon_i}{\varepsilon_i} \right) + \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} \right] = \frac{\varepsilon_i}{2} \ln(\alpha_i + \varepsilon_i) - \frac{\varepsilon_i}{12} - \frac{\varepsilon_i}{6} \left(-\frac{1}{2} \right) = \\
&= \frac{\varepsilon_i}{2} \ln(\alpha_i + \varepsilon_i)
\end{aligned}$$

- Sezione **30x30**

- $\rho_s = 1\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	1
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	2
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	3
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	4
- $\rho_{sx} = 0,500; \rho_{sy} = 0,000$	5
- $\rho_s = 2\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	6
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	7
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	8
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	9
- $\rho_{sx} = 0,500; \rho_{sy} = 0,000$	10
- $\rho_s = 3\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	11
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	12
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	13
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	14
- $\rho_{sx} = 0,500; \rho_{sy} = 0,000$	15
- $\rho_s = 4\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	16
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	17
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	18
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	19
- $\rho_{sx} = 0,500; \rho_{sy} = 0,000$	20

- Sezione **30x40**

- $\rho_s = 1\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	21
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	22
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	23
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	24
- $\rho_s = 2\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	25
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	26
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	27
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	28
- $\rho_s = 3\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	29
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	30
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	31
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	32
- $\rho_s = 4\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	33
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	34
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	35
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	36

- Sezione **30x50**

- $\rho_s = 1\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	37
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	38
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	39
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	40
- $\rho_s = 2\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	41
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	42
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	43
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	44
- $\rho_s = 3\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	45
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	46
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	47
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	48
- $\rho_s = 4\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	49
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	50
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	51
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	52

- Sezione **30x60**

- $\rho_s = 1\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	53
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	54
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	55
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	56
- $\rho_s = 2\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	57
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	58
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	59
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	60
- $\rho_s = 3\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	61
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	62
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	63
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	64
- $\rho_s = 4\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	65
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	66
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	67
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	68

- Sezione **30x70**

- $\rho_s = 1\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	69
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	70
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	71
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	72
- $\rho_s = 2\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	73
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	74
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	75
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	76
- $\rho_s = 3\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	77
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	78
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	79
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	80
- $\rho_s = 4\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	81
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	82
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	83
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	84

- Sezione **30x80**

- $\rho_s = 1\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	85
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	86
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	87
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	88
- $\rho_s = 2\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	89
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	90
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	91
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	92
- $\rho_s = 3\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	93
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	94
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	95
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	96
- $\rho_s = 4\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	97
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	98
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	99
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	100

- Sezione **30x90**

- $\rho_s = 1\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	101
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	102
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	103
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	104
- $\rho_s = 2\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	105
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	106
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	107
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	108
- $\rho_s = 3\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	109
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	110
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	111
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	112
- $\rho_s = 4\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	113
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	114
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	115
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	116

- Sezione **30x100**

- $\rho_s = 1\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	117
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	118
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	119
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	120
- $\rho_s = 2\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	121
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	122
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	123
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	124
- $\rho_s = 3\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	125
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	126
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	127
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	128
- $\rho_s = 4\%$	
- $\rho_{sx} = 0,000; \rho_{sy} = 0,500$	129
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	130
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	131
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	132

- Sezione **40x40**

- $\rho_s = 1\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	133
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	134
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	135
- $\rho_s = 2\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	136
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	137
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	138
- $\rho_s = 3\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	139
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	140
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	141
- $\rho_s = 4\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	142
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	143
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	144

- Sezione **40x50**

-	$\rho_s = 1\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	145
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	146
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	147
-	$\rho_s = 2\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	148
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	149
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	150
-	$\rho_s = 3\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	151
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	152
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	153
-	$\rho_s = 4\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	154
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	155
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	156

- Sezione **40x60**

-	$\rho_s = 1\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	157
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	158
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	159
-	$\rho_s = 2\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	160
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	161
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	162
-	$\rho_s = 3\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	163
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	164
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	165
-	$\rho_s = 4\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	166
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	167
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	168

- Sezione **40x70**

-	$\rho_s = 1\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	169
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	170
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	171
-	$\rho_s = 2\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	172
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	173
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	174
-	$\rho_s = 3\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	175
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	176
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	177
-	$\rho_s = 4\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	178
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	179
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	180

- Sezione **40x80**

- $\rho_s = 1\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	181
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	182
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	183
- $\rho_s = 2\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	184
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	185
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	186
- $\rho_s = 3\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	187
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	188
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	189
- $\rho_s = 4\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	190
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	191
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	192

- Sezione **40x90**

- $\rho_s = 1\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	193
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	194
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	195
- $\rho_s = 2\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	196
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	197
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	198
- $\rho_s = 3\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	199
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	200
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	201
- $\rho_s = 4\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	202
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	203
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	204

- Sezione **40x100**

-	$\rho_s = 1\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	205
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	206
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	207
-	$\rho_s = 2\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	208
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	209
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	210
-	$\rho_s = 3\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	211
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	212
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	213
-	$\rho_s = 4\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	214
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	215
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	216

- Sezione **40x110**

-	$\rho_s = 1\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	217
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	218
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	219
-	$\rho_s = 2\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	220
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	221
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	222
-	$\rho_s = 3\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	223
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	224
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	225
-	$\rho_s = 4\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	226
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	227
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	228

- Sezione **40x120**

- $\rho_s = 1\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	229
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	230
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	231
- $\rho_s = 2\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	232
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	233
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	234
- $\rho_s = 3\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	235
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	236
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	237
- $\rho_s = 4\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	238
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	239
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	240

- Sezione **40x130**

-	$\rho_s = 1\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	241
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	242
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	243
-	$\rho_s = 2\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	244
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	245
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	246
-	$\rho_s = 3\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	247
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	248
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	249
-	$\rho_s = 4\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	250
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	251
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	252

- Sezione **50x50**

-	$\rho_s = 1\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	253
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	254
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	255
-	$\rho_s = 2\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	256
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	257
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	258
-	$\rho_s = 3\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	259
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	260
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	261
-	$\rho_s = 4\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	262
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	263
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	264

- Sezione **50x60**

-	$\rho_s = 1\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	265
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	266
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	267
-	$\rho_s = 2\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	268
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	269
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	270
-	$\rho_s = 3\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	271
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	272
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	273
-	$\rho_s = 4\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	274
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	275
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	276

- Sezione **50x70**

-	$\rho_s = 1\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	277
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	278
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	279
-	$\rho_s = 2\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	280
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	281
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	282
-	$\rho_s = 3\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	283
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	284
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	285
-	$\rho_s = 4\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	286
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	287
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	288

- Sezione **50x80**

- $\rho_s = 1\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	289
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	290
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	291
- $\rho_s = 2\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	292
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	293
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	294
- $\rho_s = 3\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	295
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	296
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	297
- $\rho_s = 4\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	298
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	299
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	300

- Sezione **50x90**

- $\rho_s = 1\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	301
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	302
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	303
- $\rho_s = 2\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	304
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	305
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	306
- $\rho_s = 3\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	307
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	308
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	309
- $\rho_s = 4\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	310
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	311
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	312

- Sezione **50x100**

-	$\rho_s = 1\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	313
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	314
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	315
-	$\rho_s = 2\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	316
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	317
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	318
-	$\rho_s = 3\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	319
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	320
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	321
-	$\rho_s = 4\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	322
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	323
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	324

- Sezione **50x110**

-	$\rho_s = 1\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	325
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	326
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	327
-	$\rho_s = 2\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	328
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	329
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	330
-	$\rho_s = 3\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	331
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	332
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	333
-	$\rho_s = 4\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	334
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	335
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	336

- Sezione **50x120**

- $\rho_s = 1\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	337
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	338
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	339
- $\rho_s = 2\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	340
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	341
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	342
- $\rho_s = 3\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	343
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	344
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	345
- $\rho_s = 4\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	346
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	347
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	348

- Sezione **50x130**

-	$\rho_s = 1\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	349
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	350
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	351
-	$\rho_s = 2\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	352
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	353
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	354
-	$\rho_s = 3\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	355
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	356
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	357
-	$\rho_s = 4\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	358
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	359
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	360

- Sezione **50x140**

- $\rho_s = 1\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	361
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	362
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	363
- $\rho_s = 2\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	364
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	365
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	366
- $\rho_s = 3\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	367
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	368
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	369
- $\rho_s = 4\%$	
- $\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	370
- $\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	371
- $\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	372

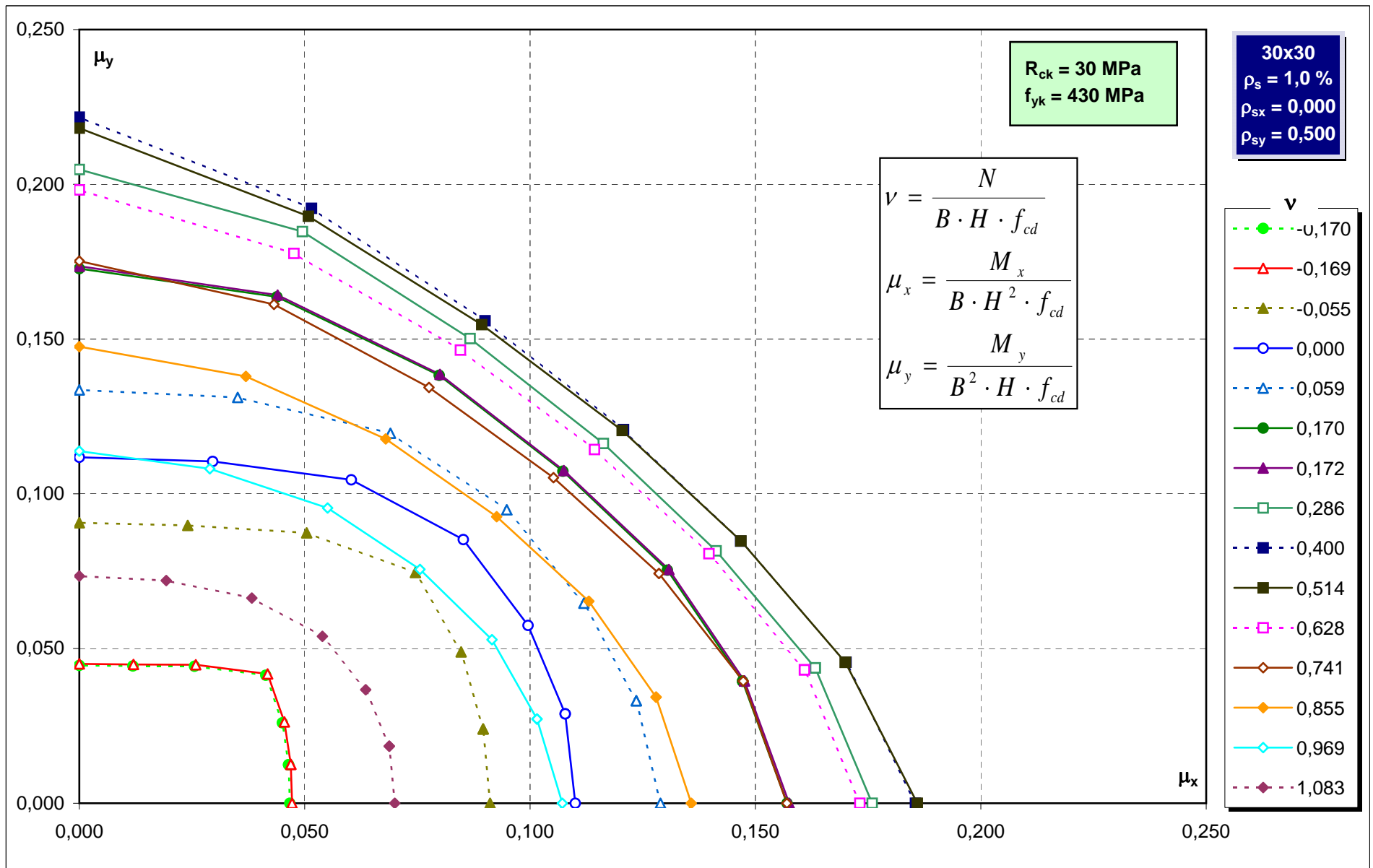
- Sezione **50x150**

-	$\rho_s = 1\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	373
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	374
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	375
-	$\rho_s = 2\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	376
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	377
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	378
-	$\rho_s = 3\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	379
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	380
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	381
-	$\rho_s = 4\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	382
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	383
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	384

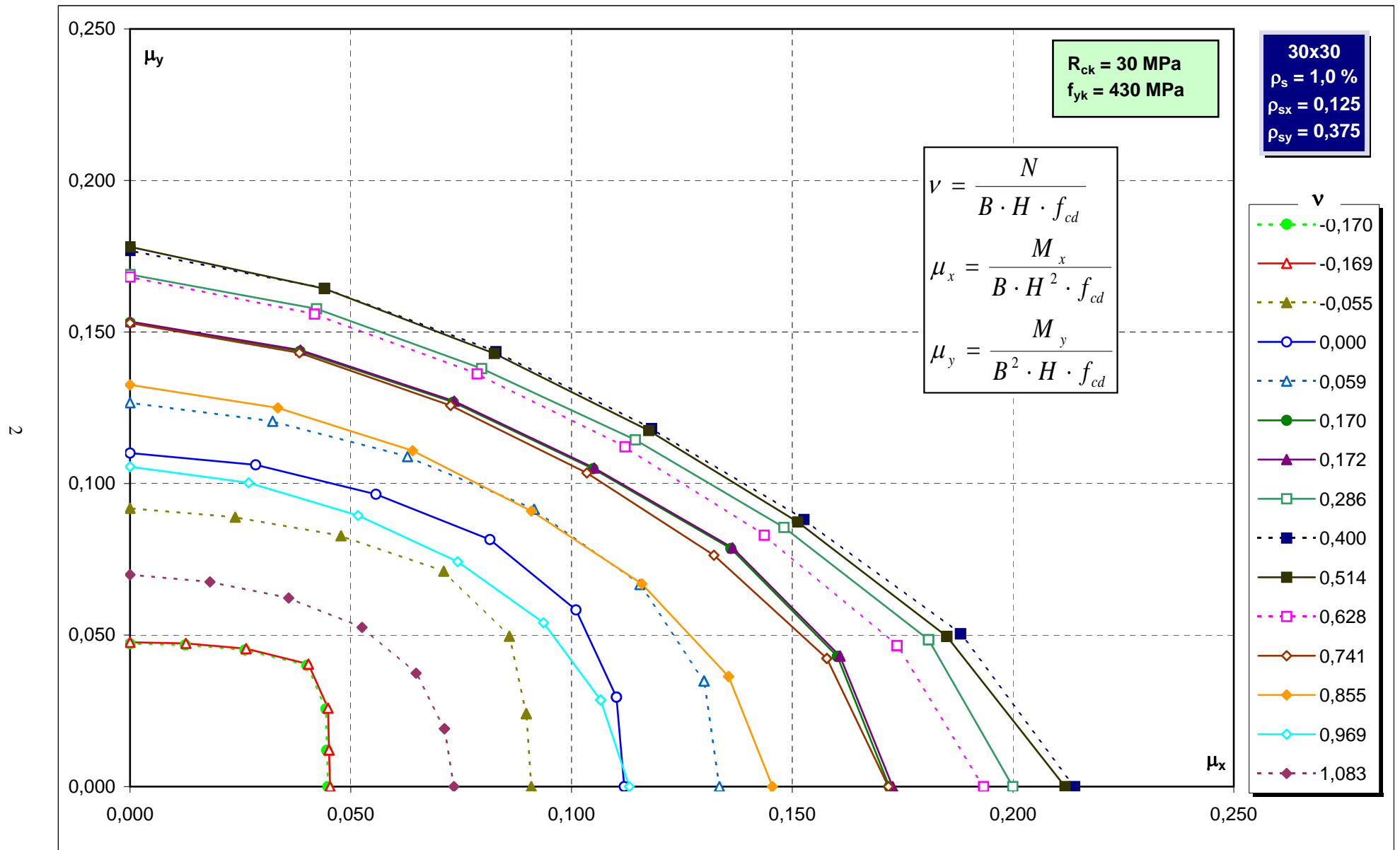
- Sezione **50x160**

-	$\rho_s = 1\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	385
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	386
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	387
-	$\rho_s = 2\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	388
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	389
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	390
-	$\rho_s = 3\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	391
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	392
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	393
-	$\rho_s = 4\%$	
-	$\rho_{sx} = 0,125; \rho_{sy} = 0,375$	394
-	$\rho_{sx} = 0,250; \rho_{sy} = 0,250$	395
-	$\rho_{sx} = 0,375; \rho_{sy} = 0,125$	396

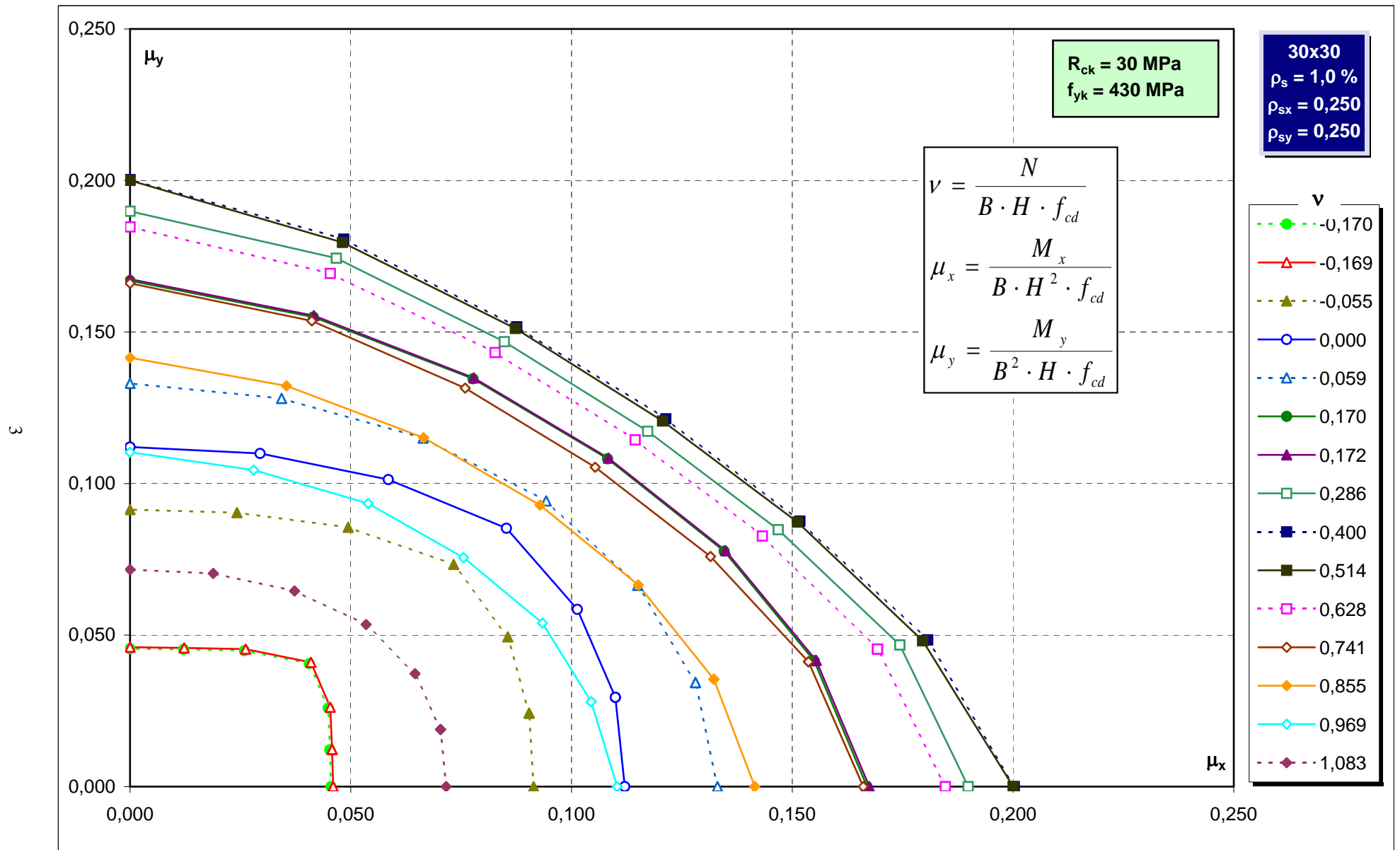
Abachi di verifica



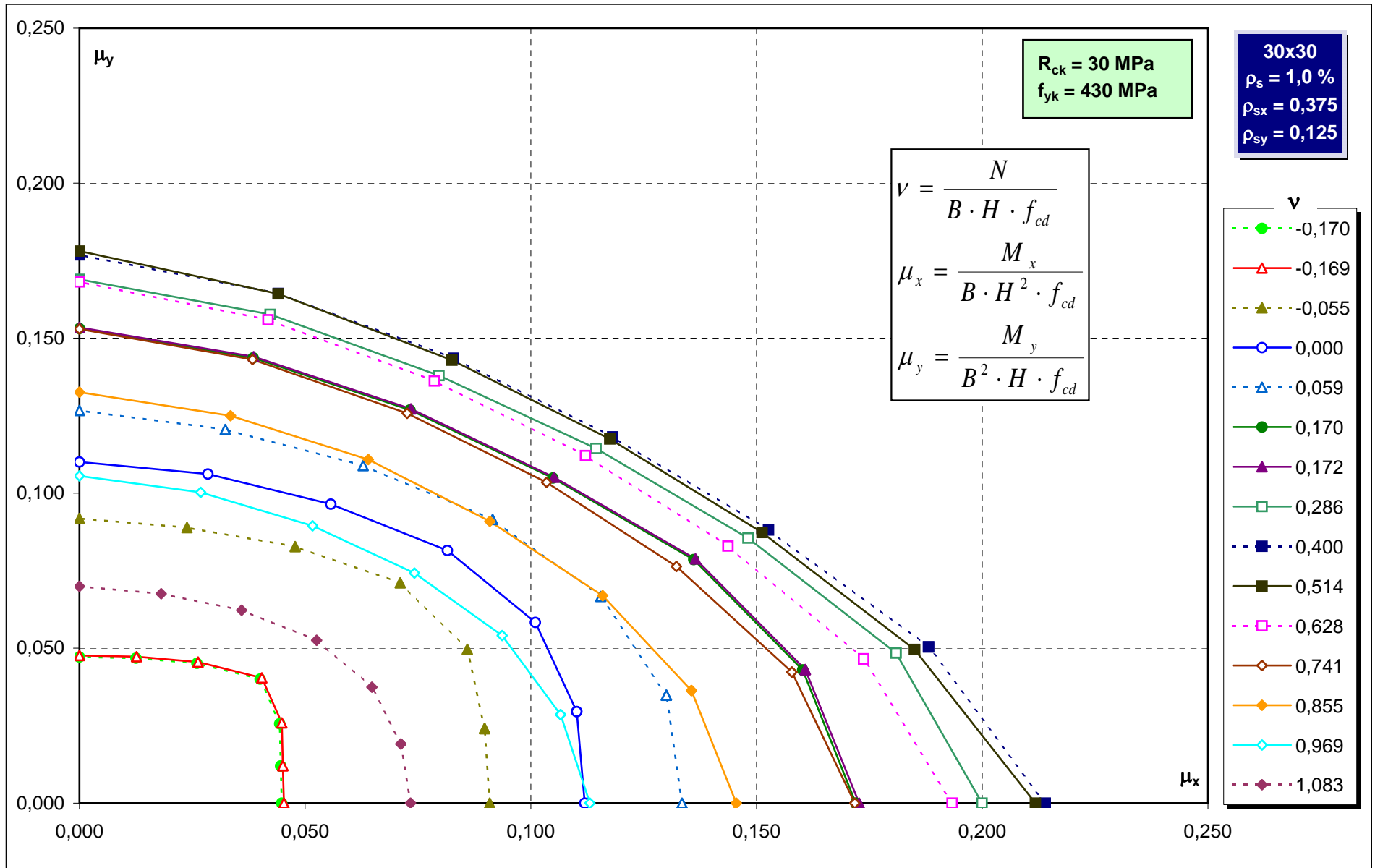
Abachi di verifica



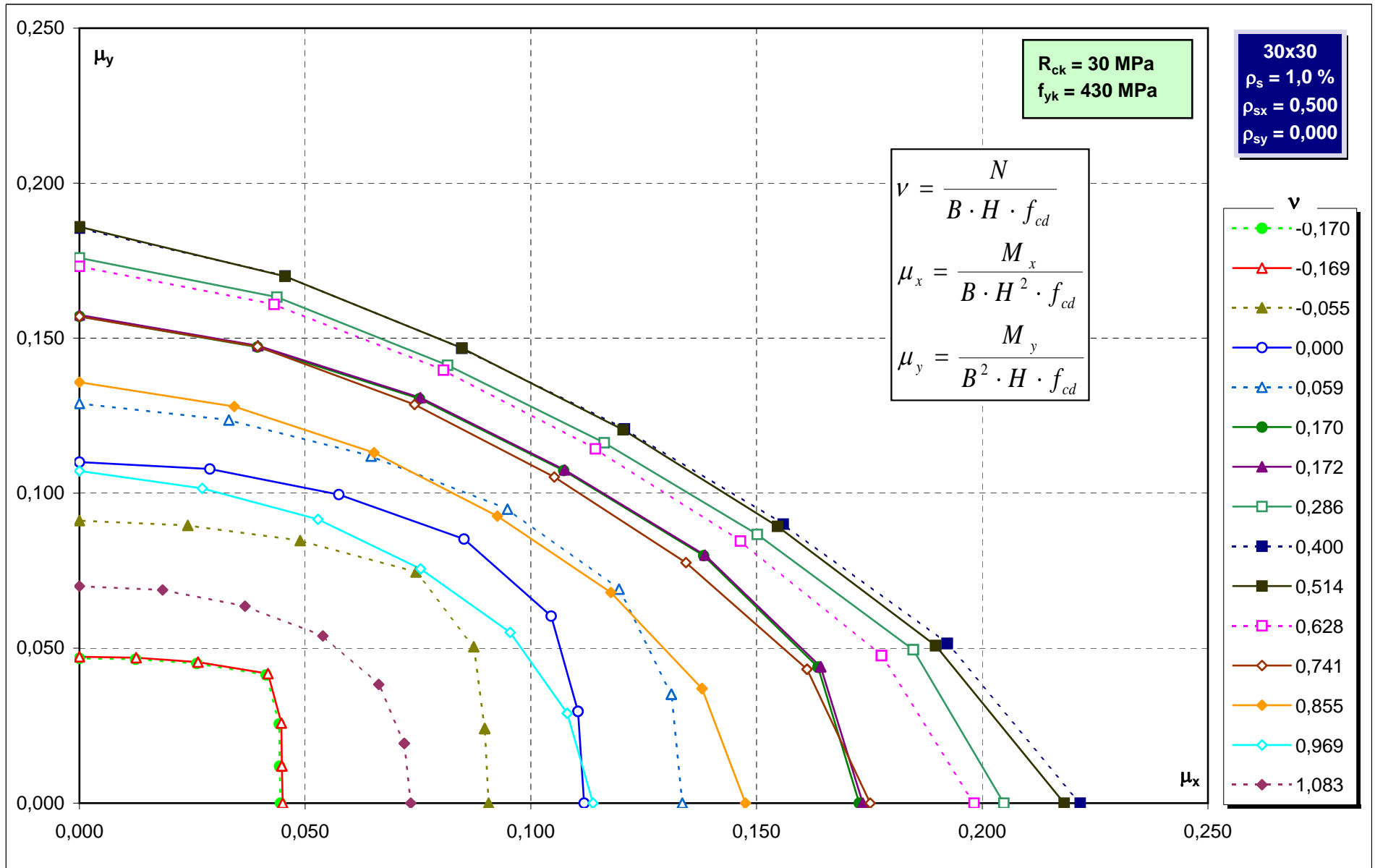
Abachi di verifica



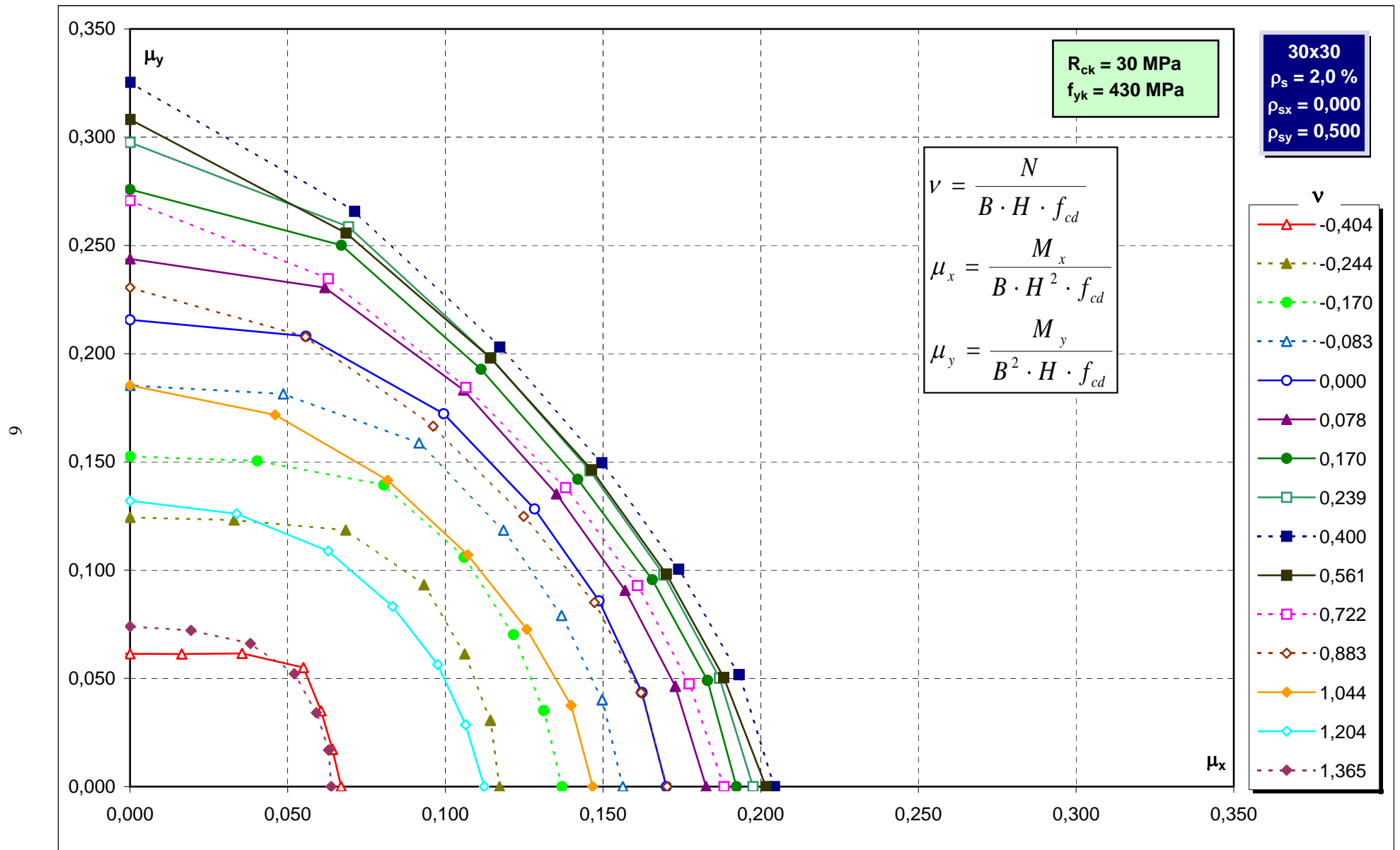
Abachi di verifica



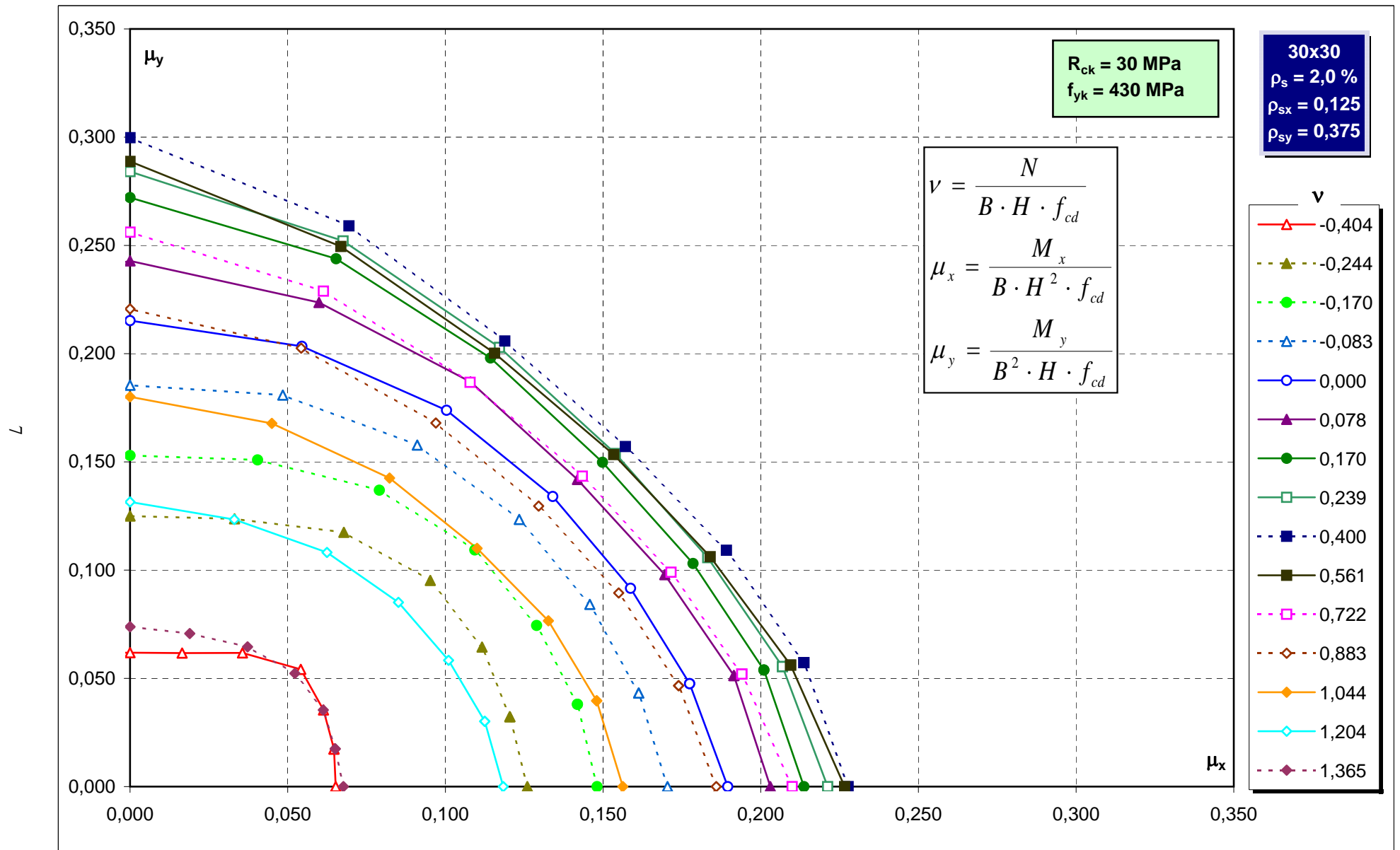
Abachi di verifica



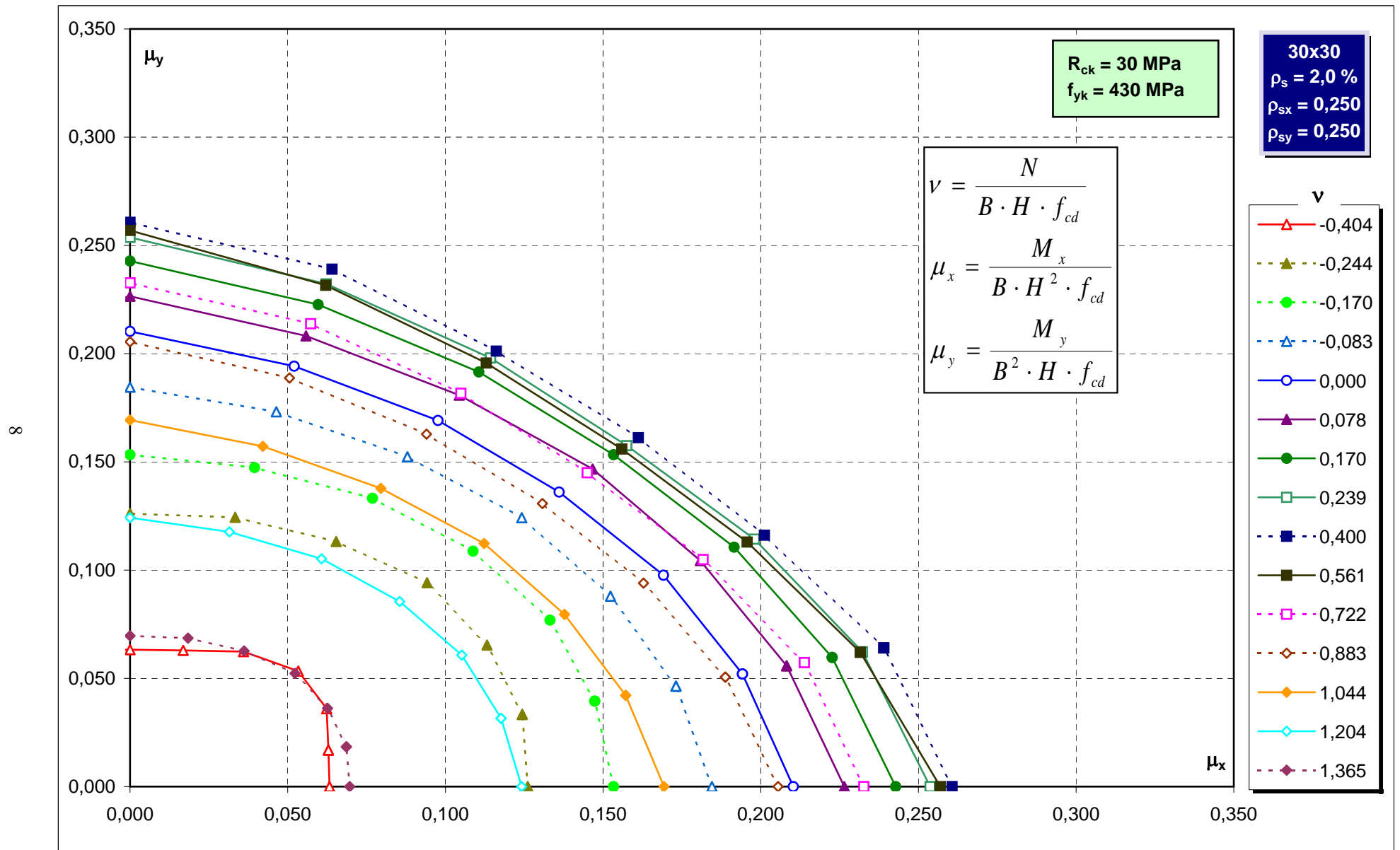
Abachi di verifica



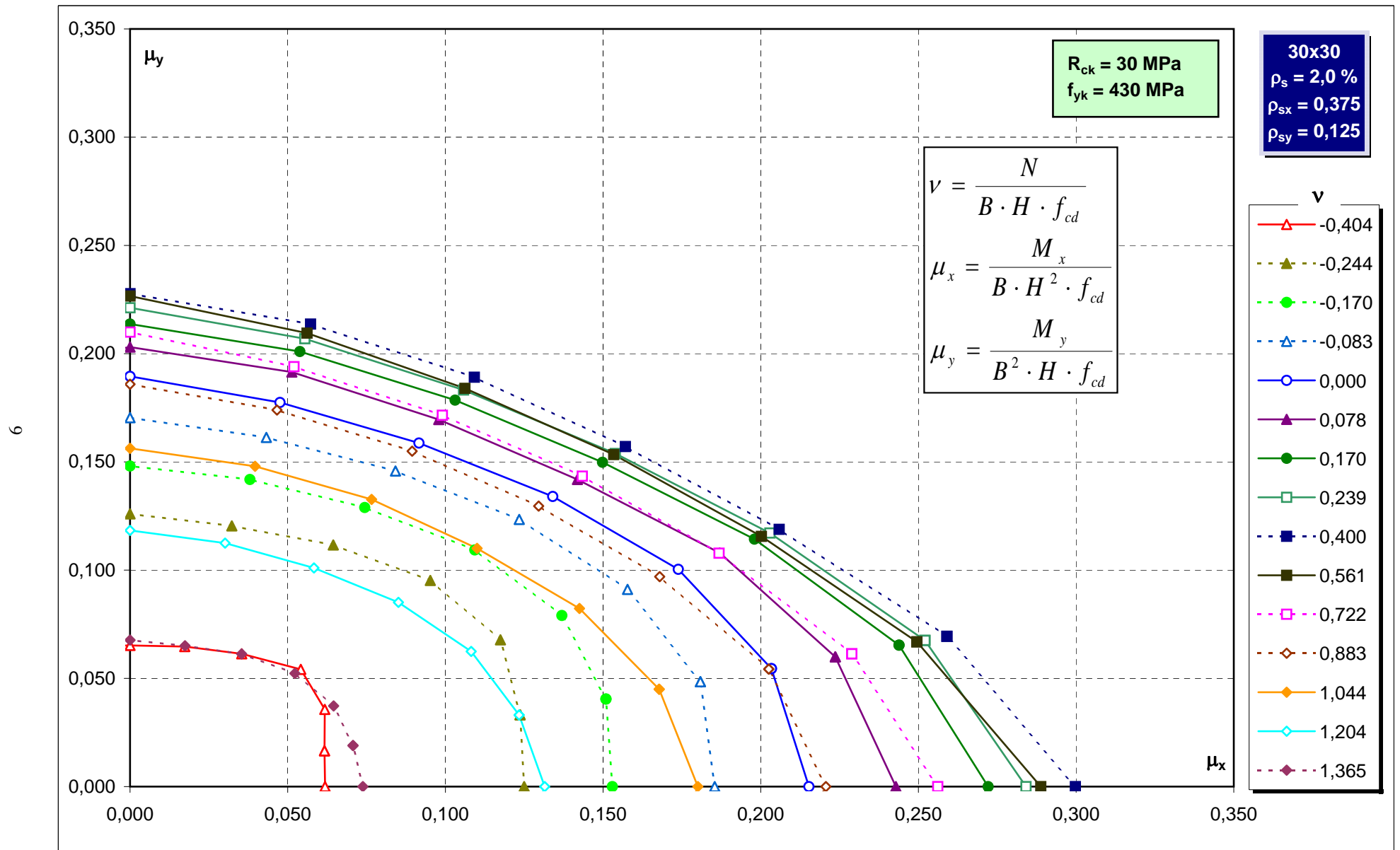
Abachi di verifica



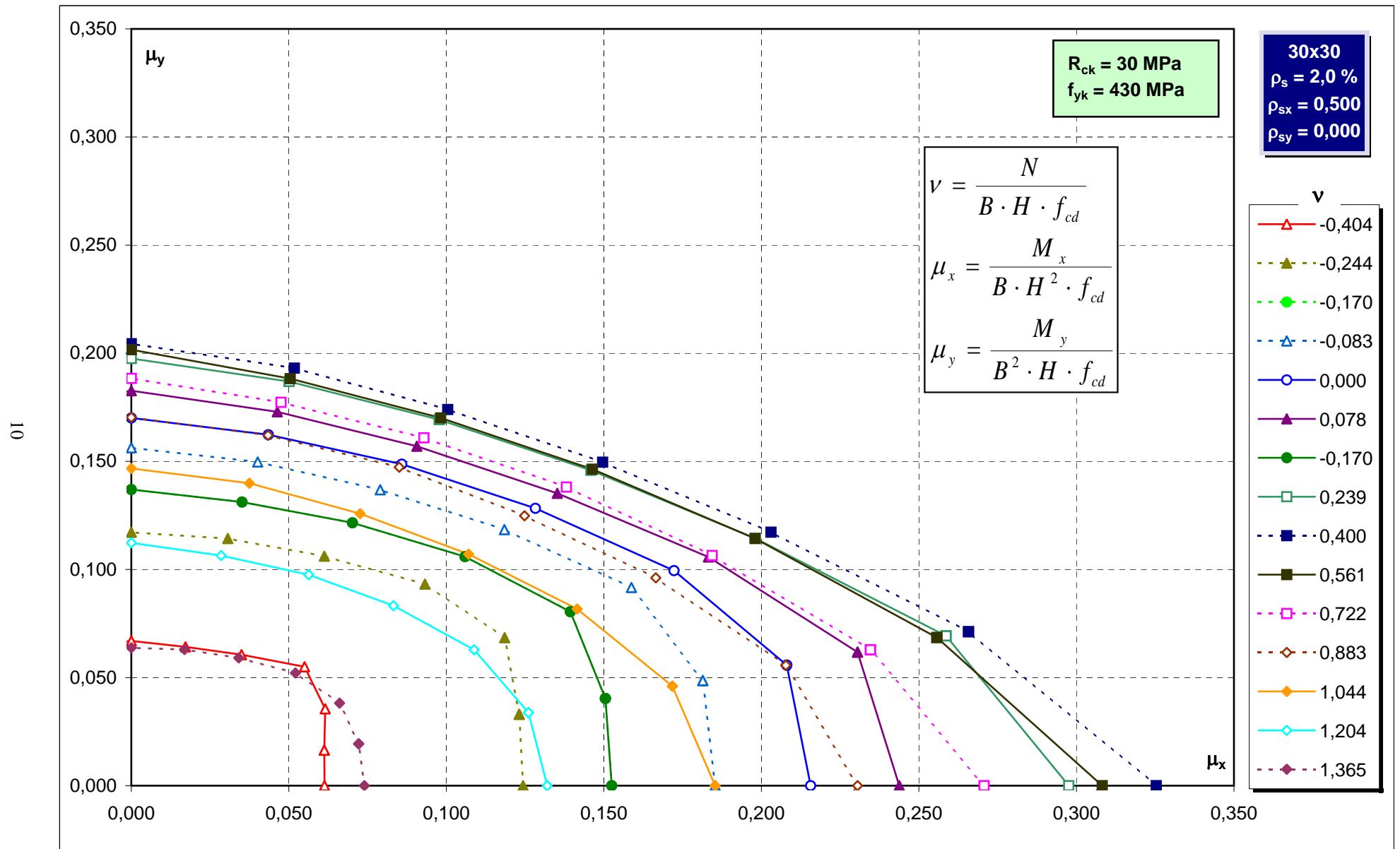
Abachi di verifica



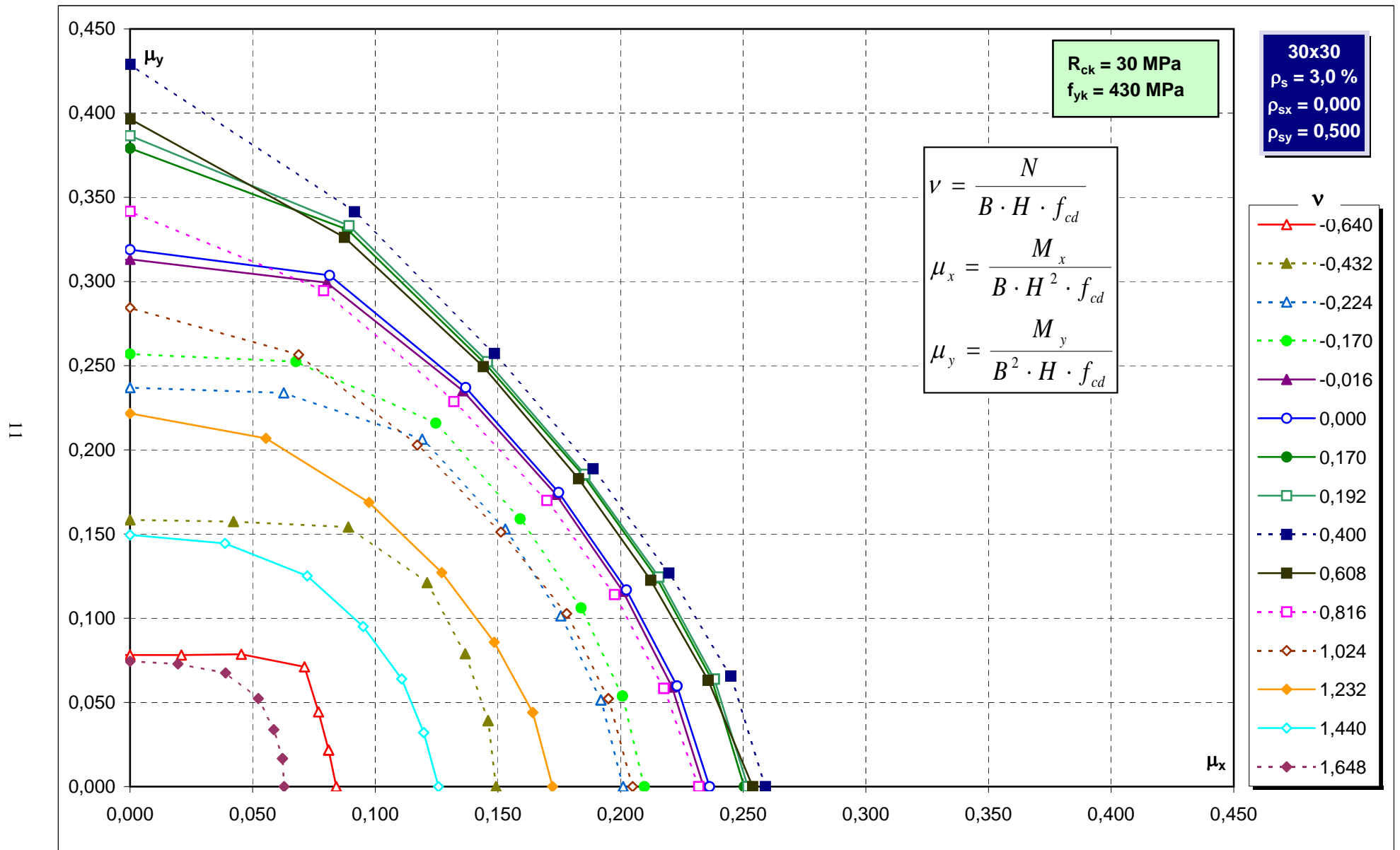
Abachi di verifica



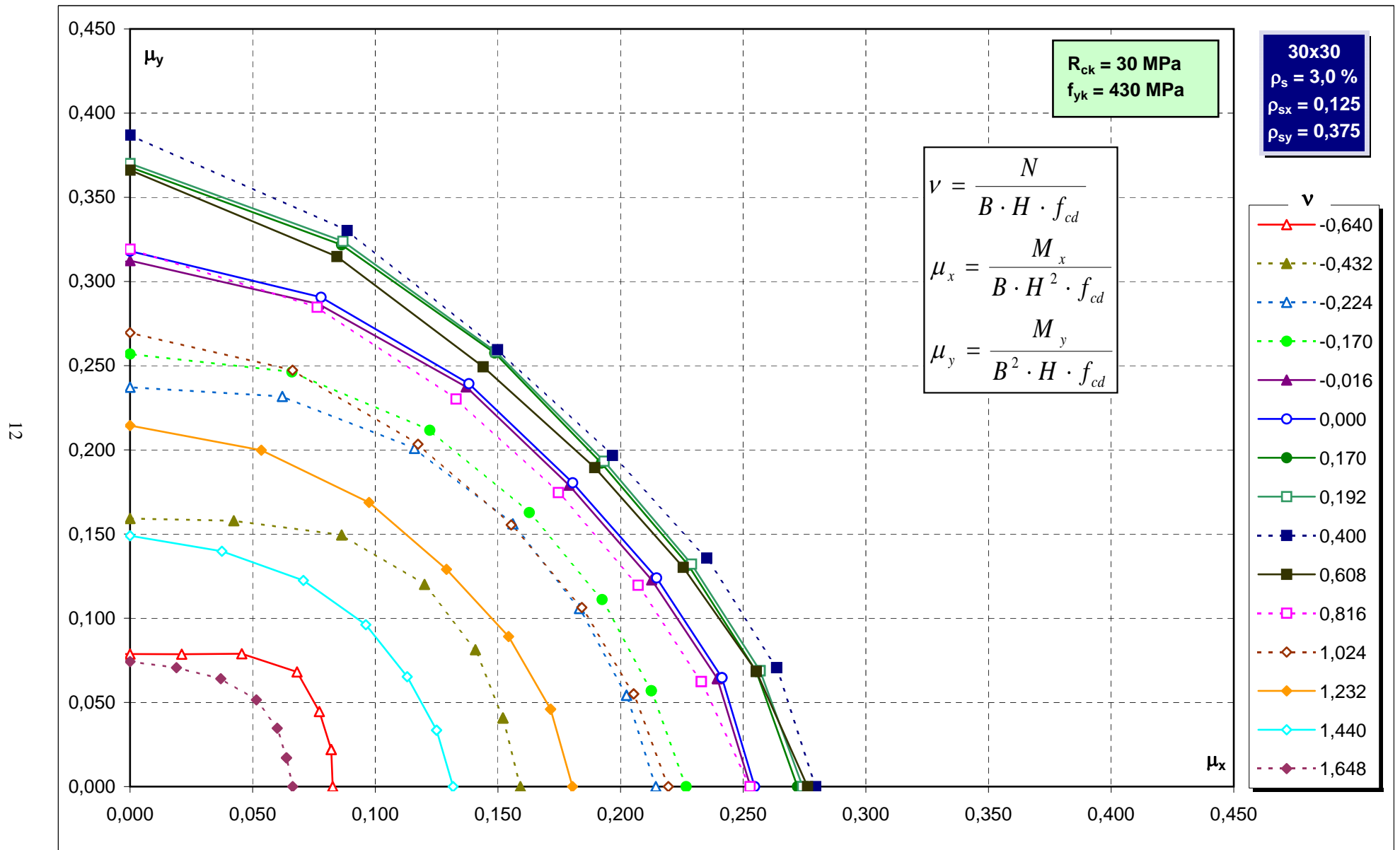
Abachi di verifica



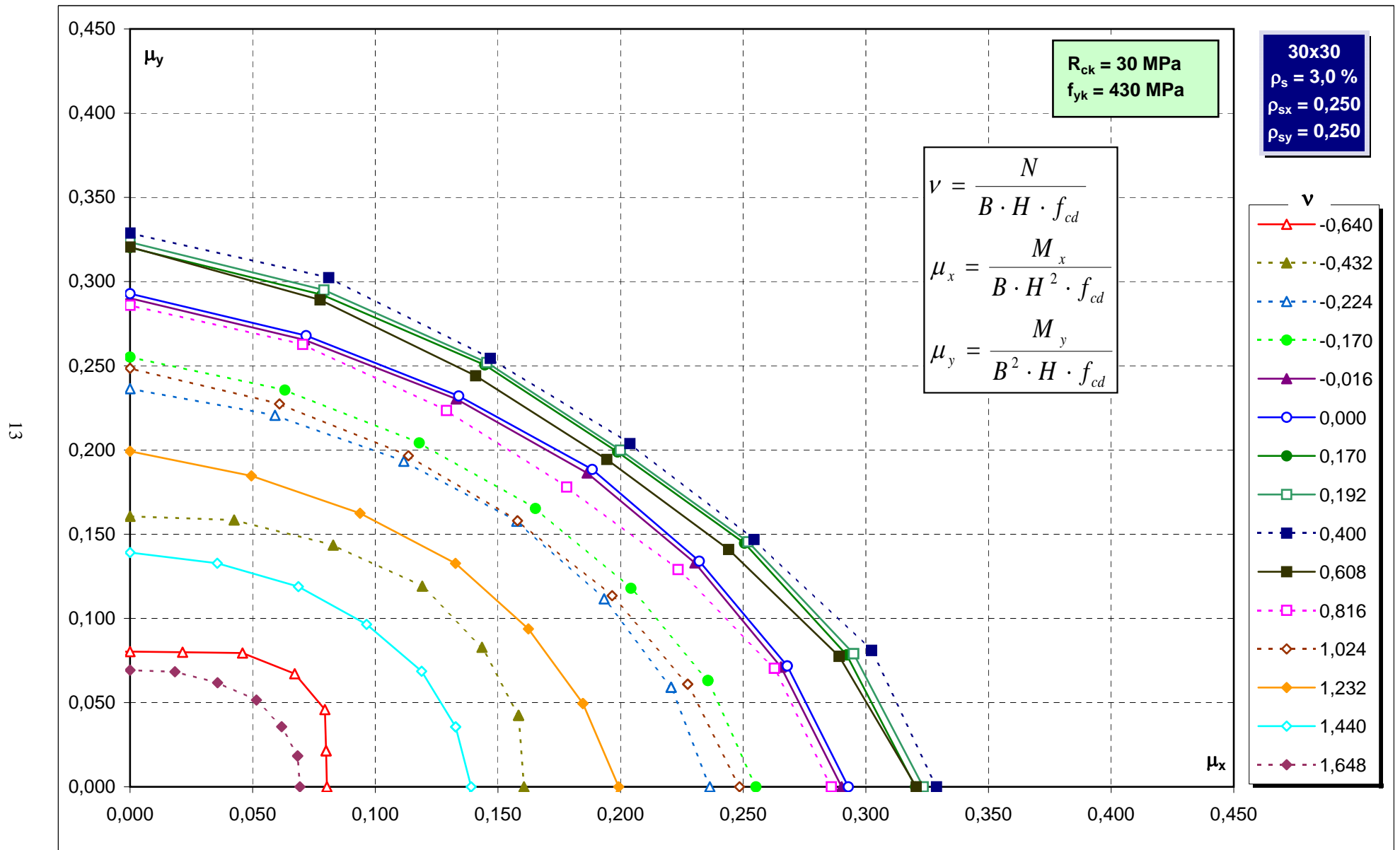
Abachi di verifica



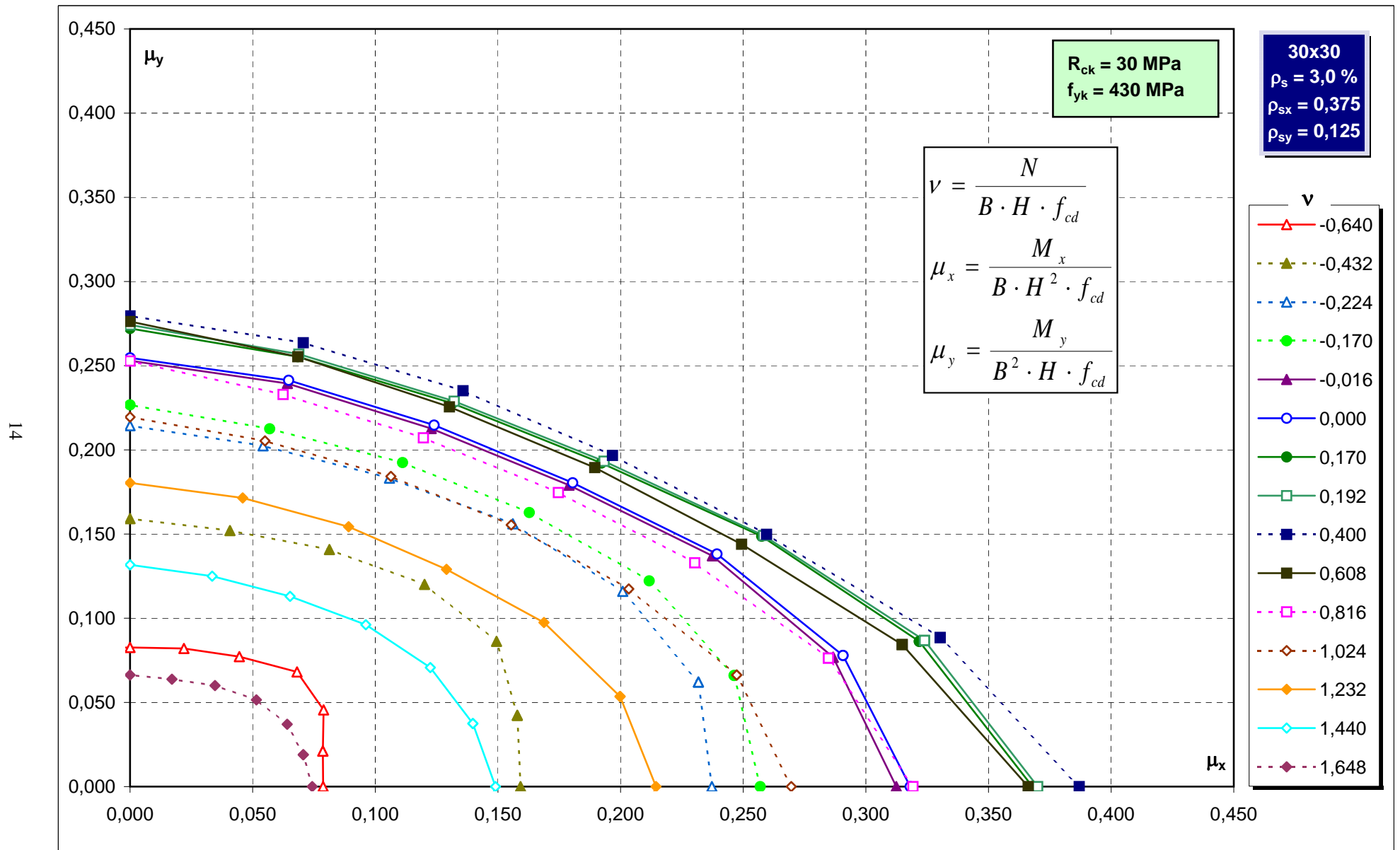
Abachi di verifica



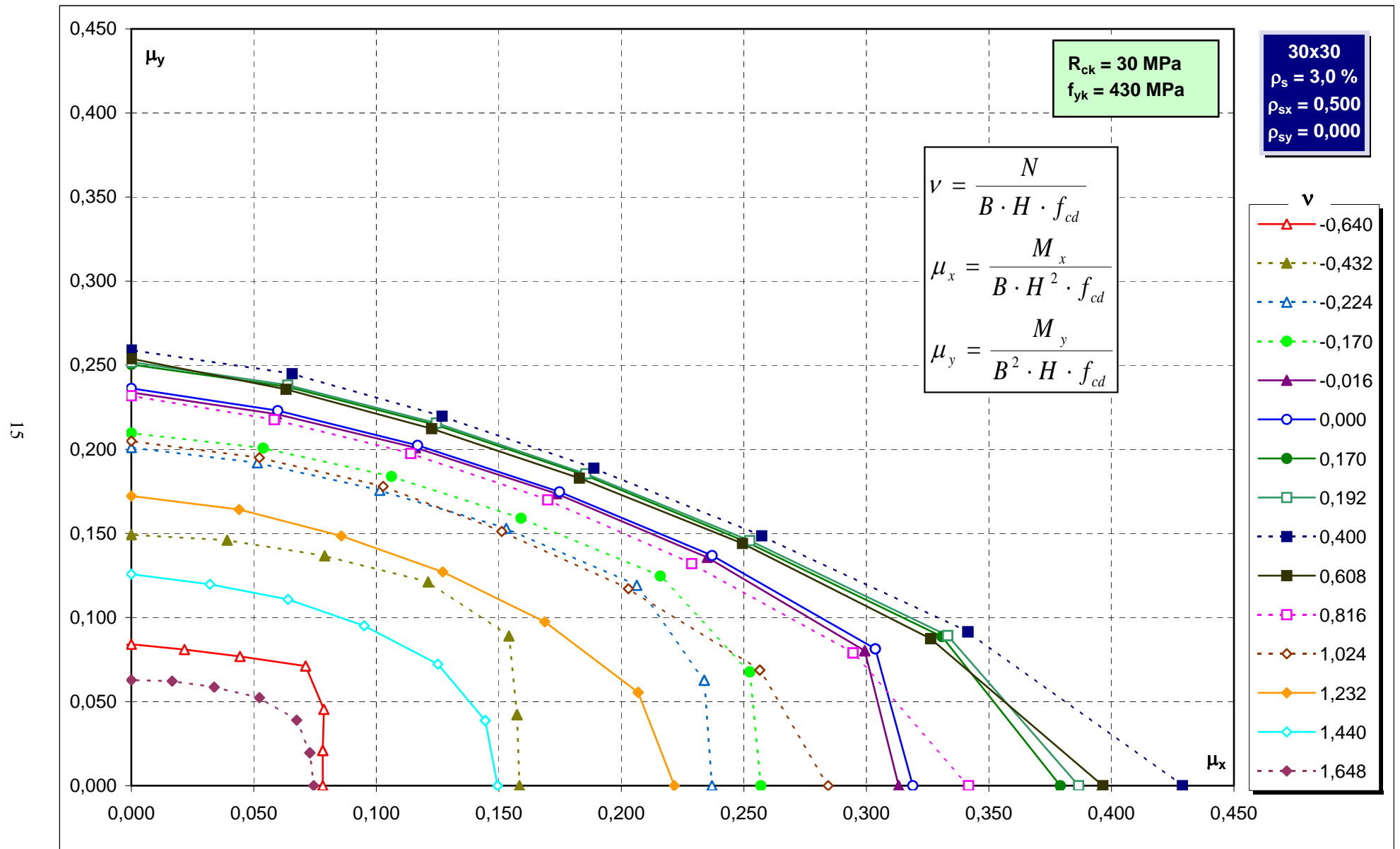
Abachi di verifica



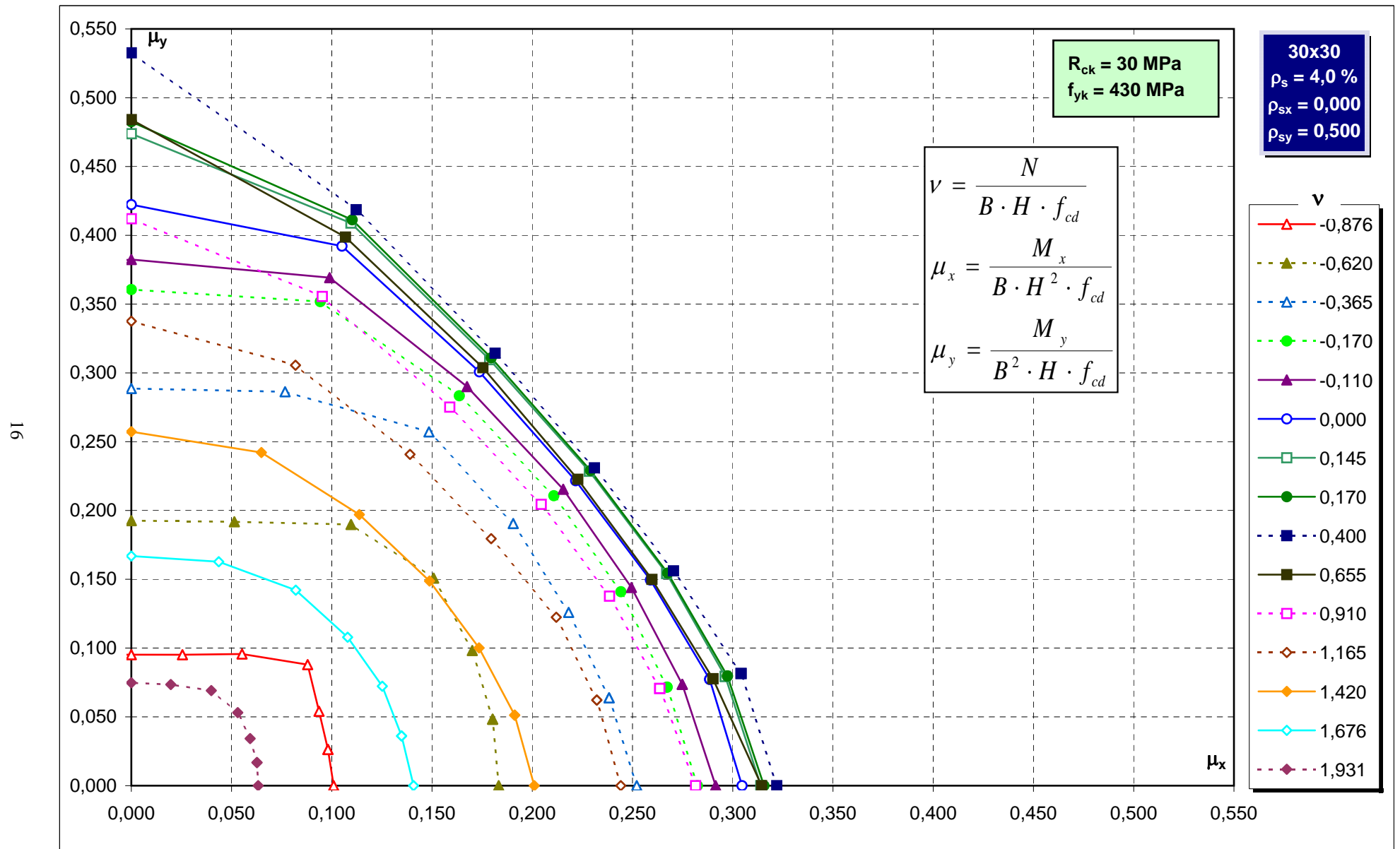
Abachi di verifica



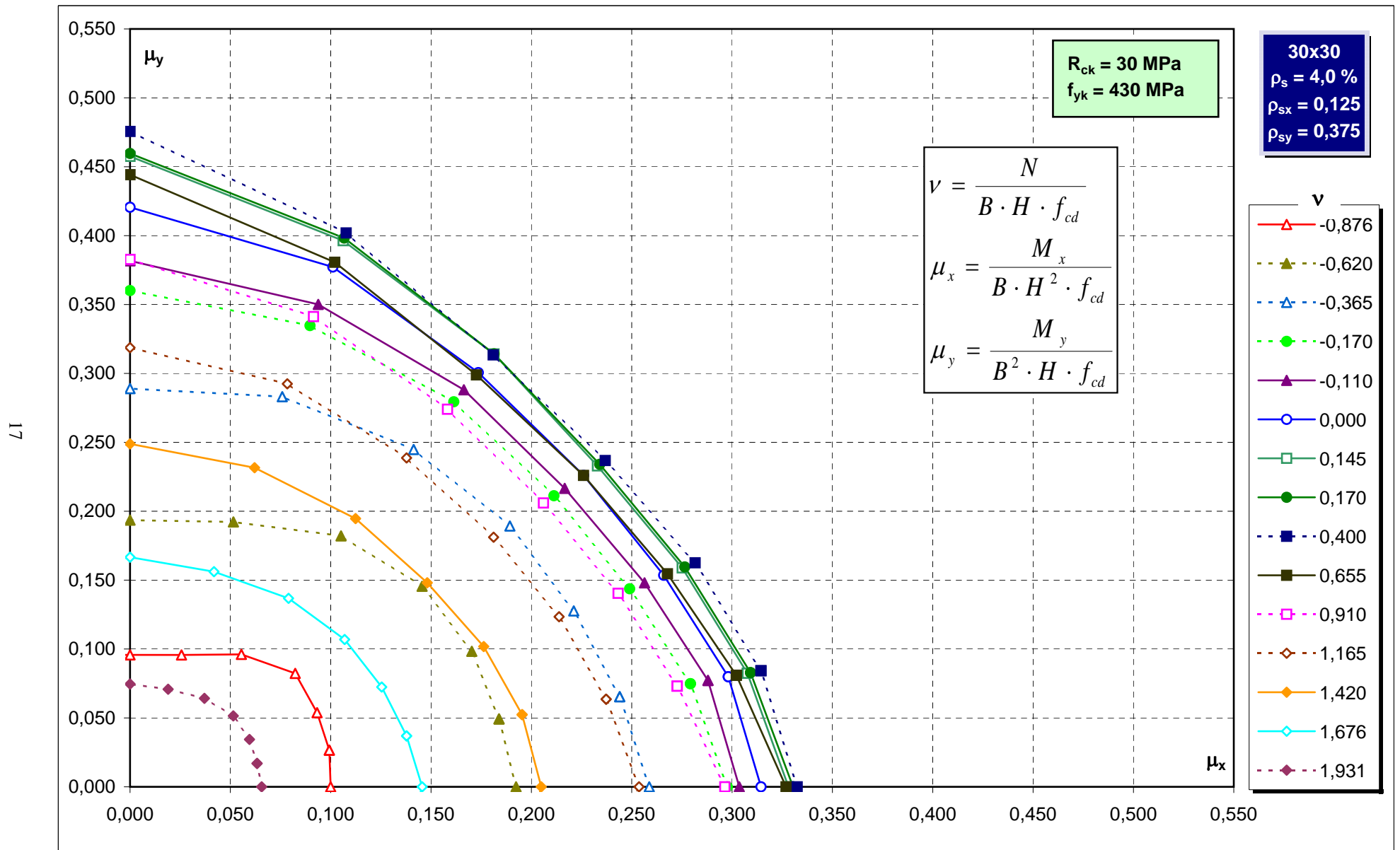
Abachi di verifica



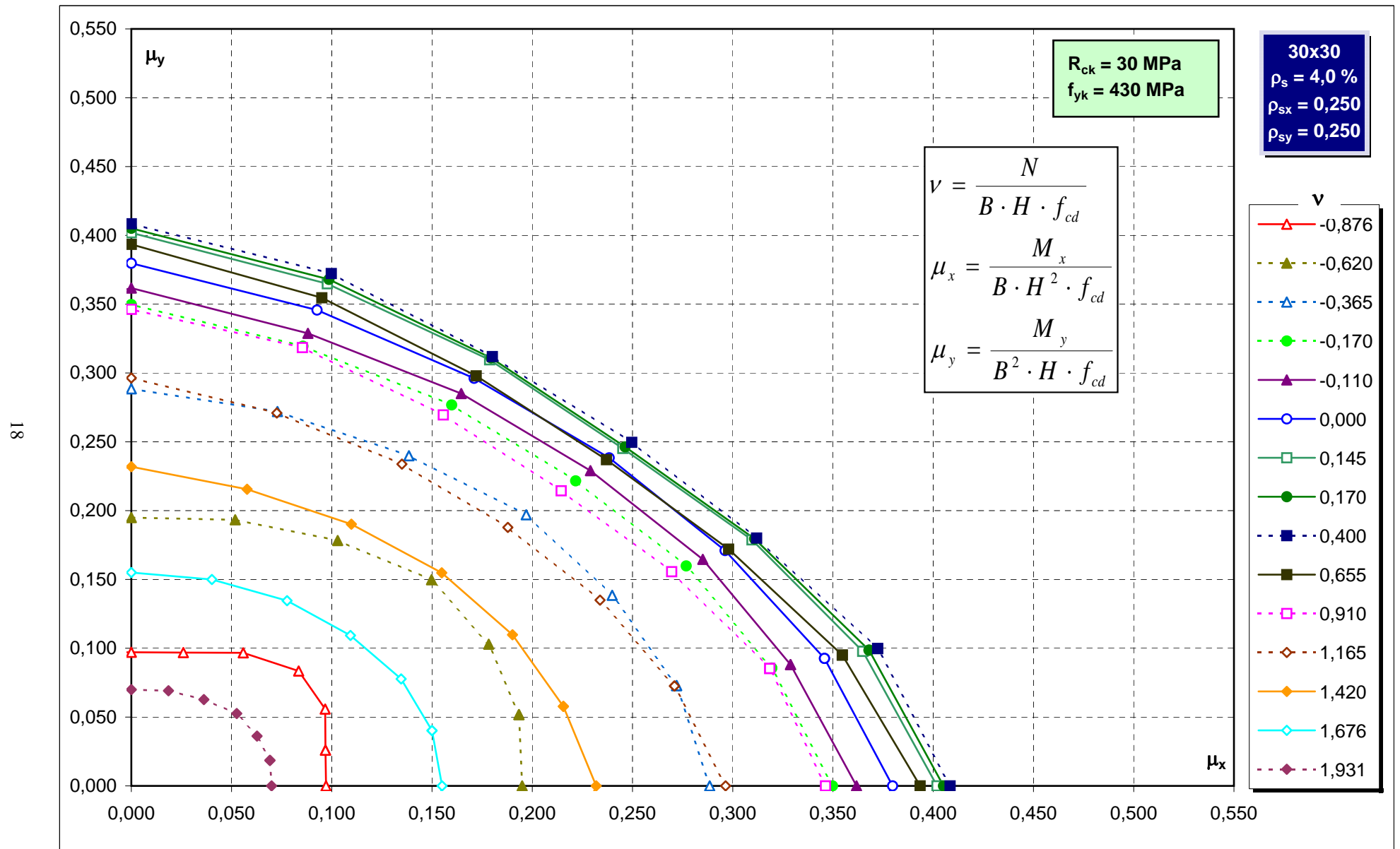
Abachi di verifica



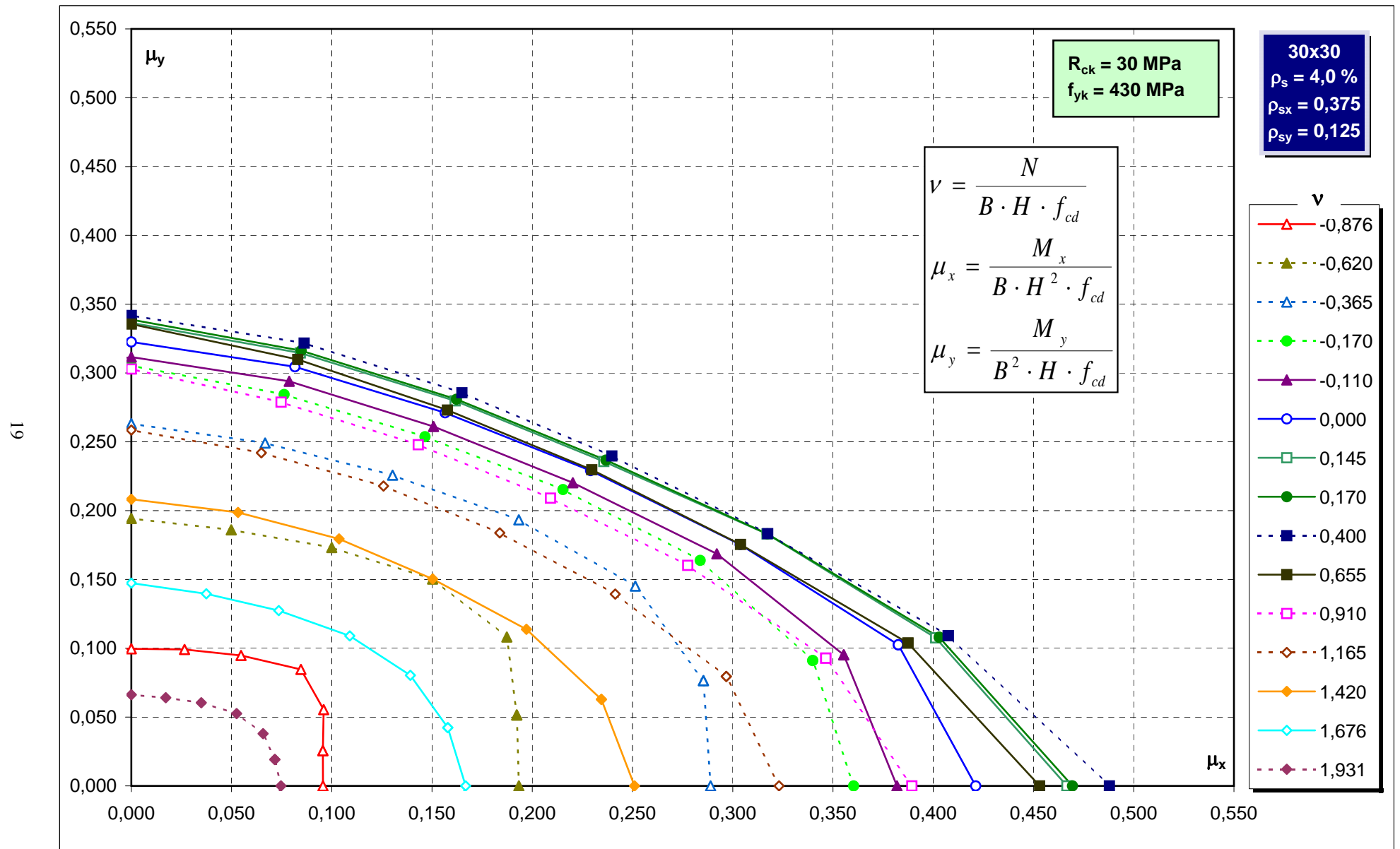
Abachi di verifica



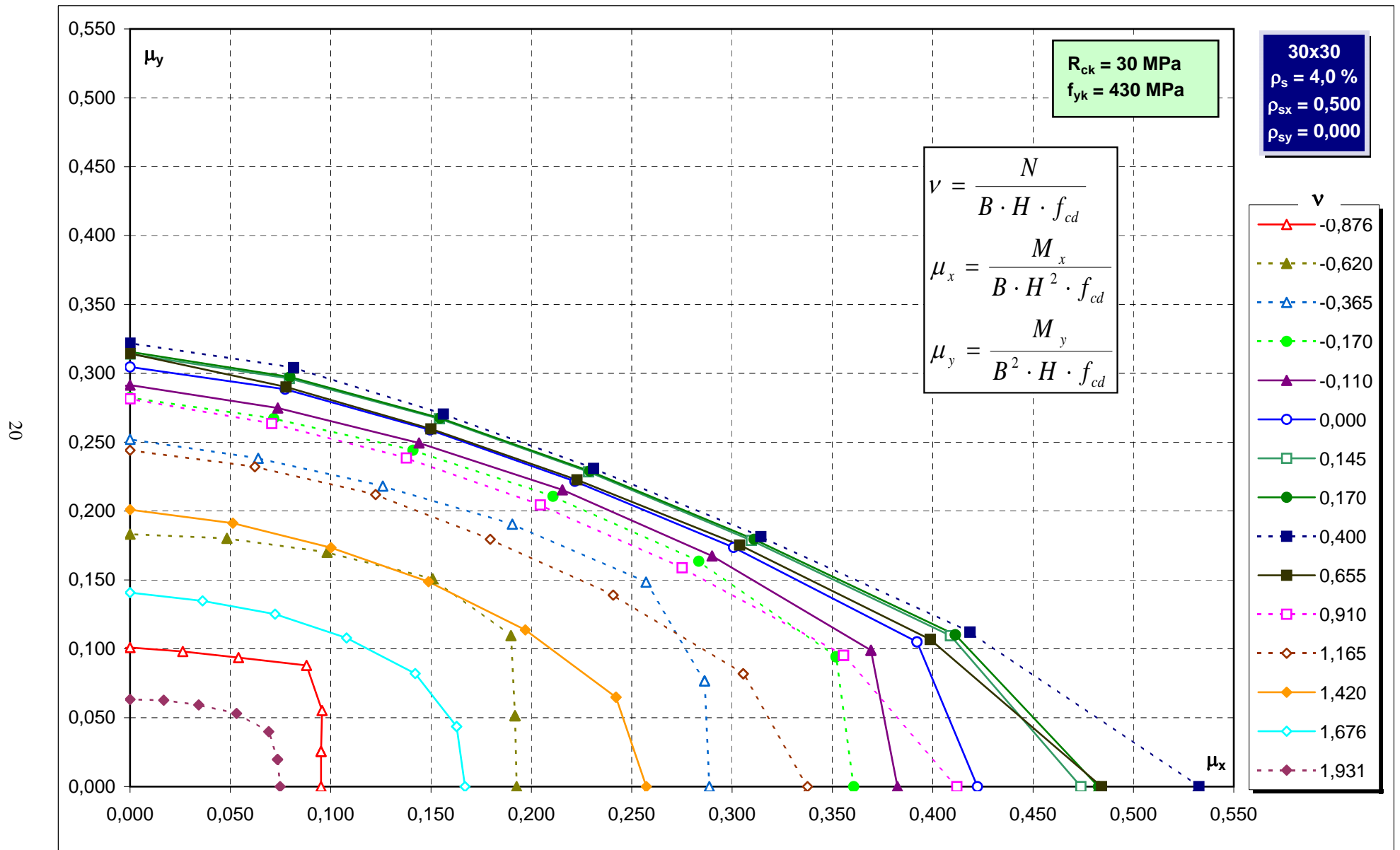
Abachi di verifica



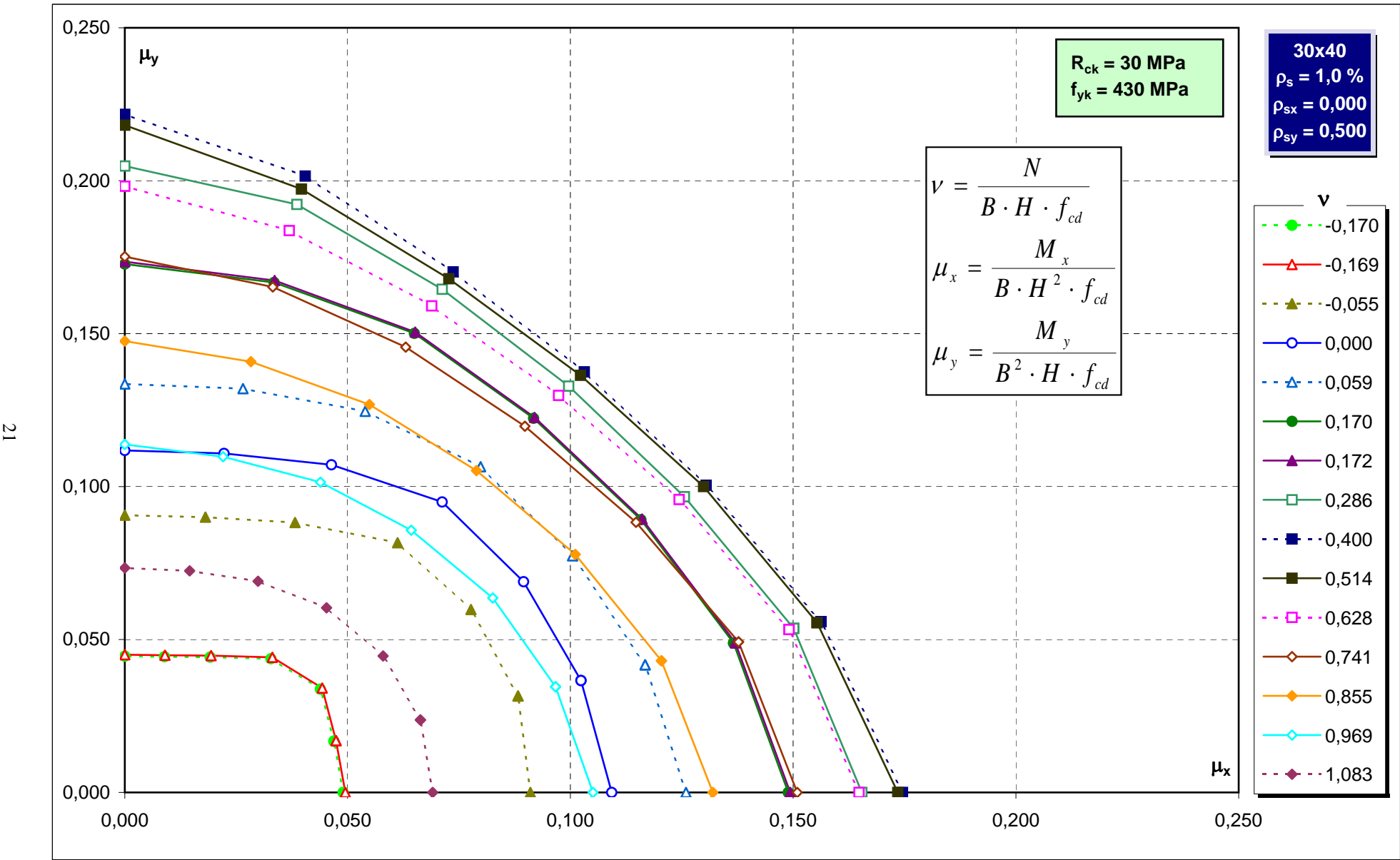
Abachi di verifica



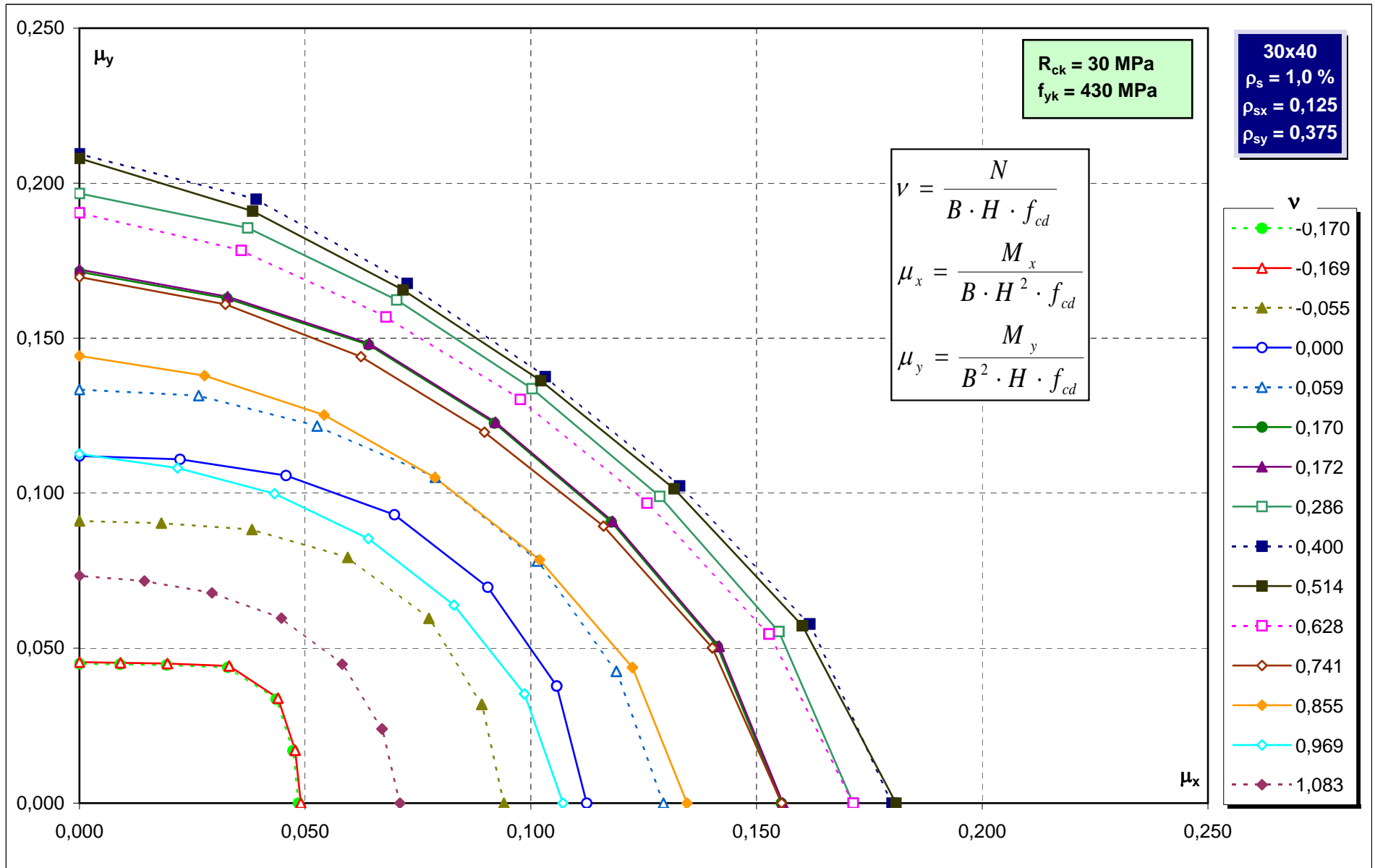
Abachi di verifica



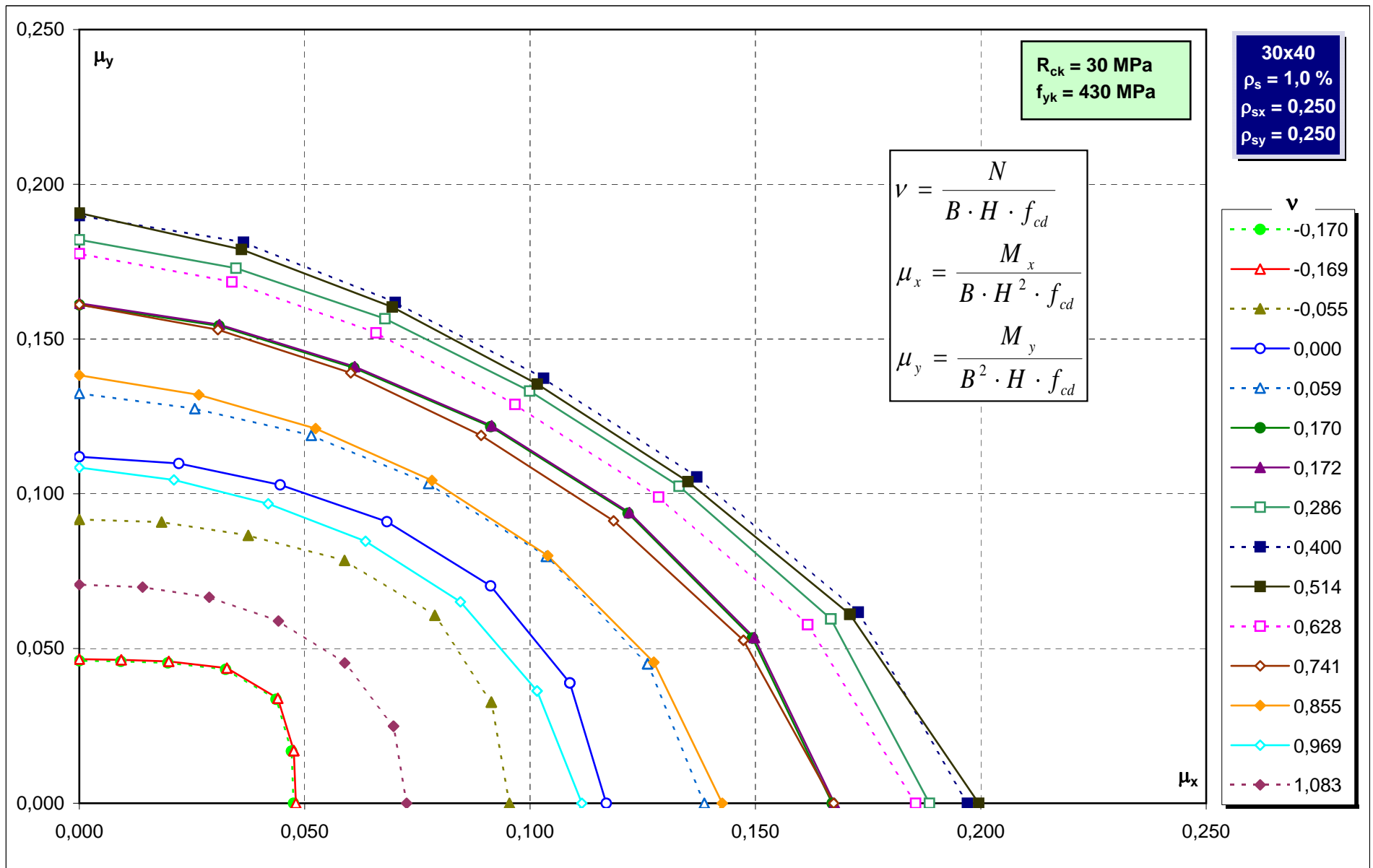
Abachi di verifica



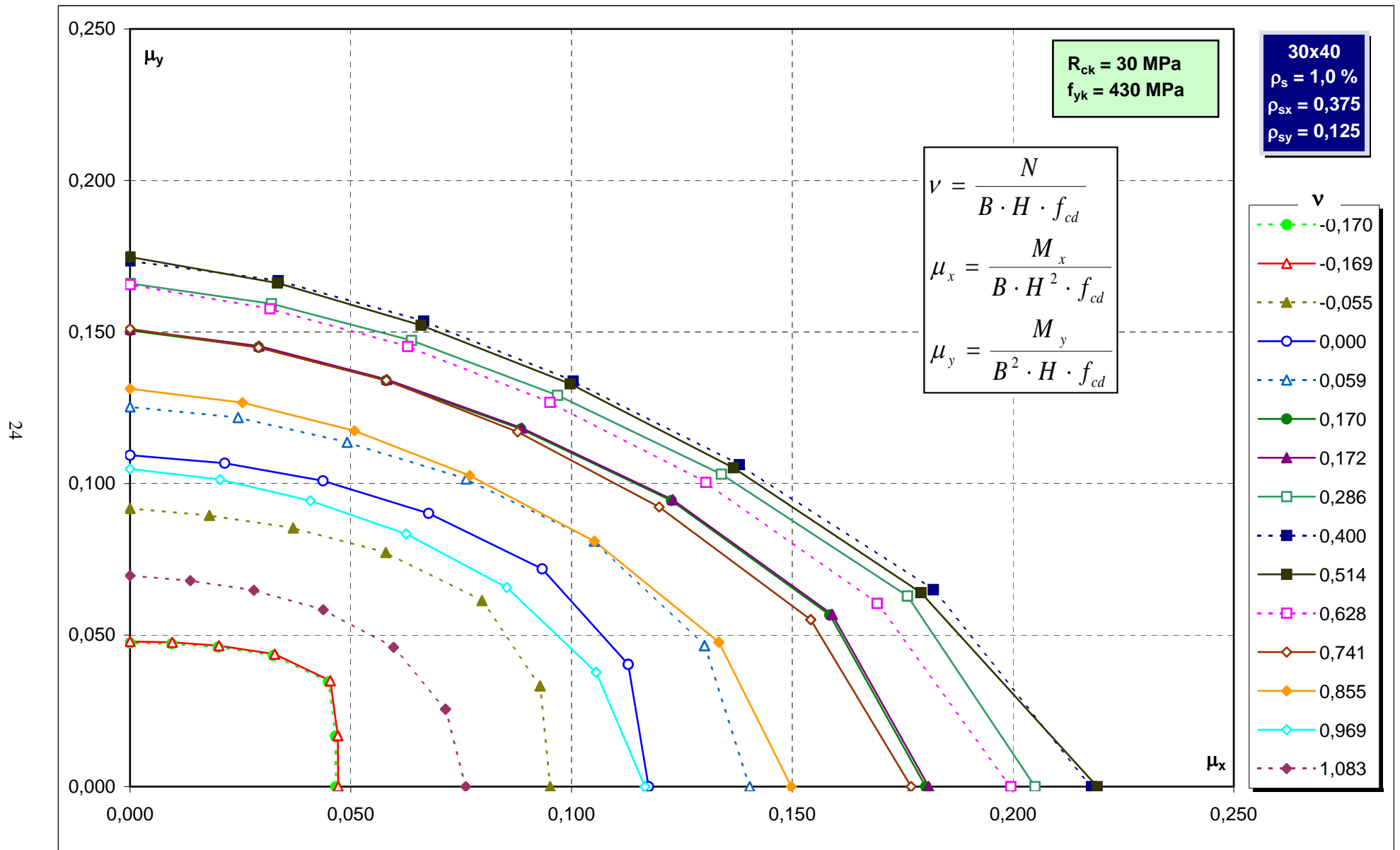
Abachi di verifica



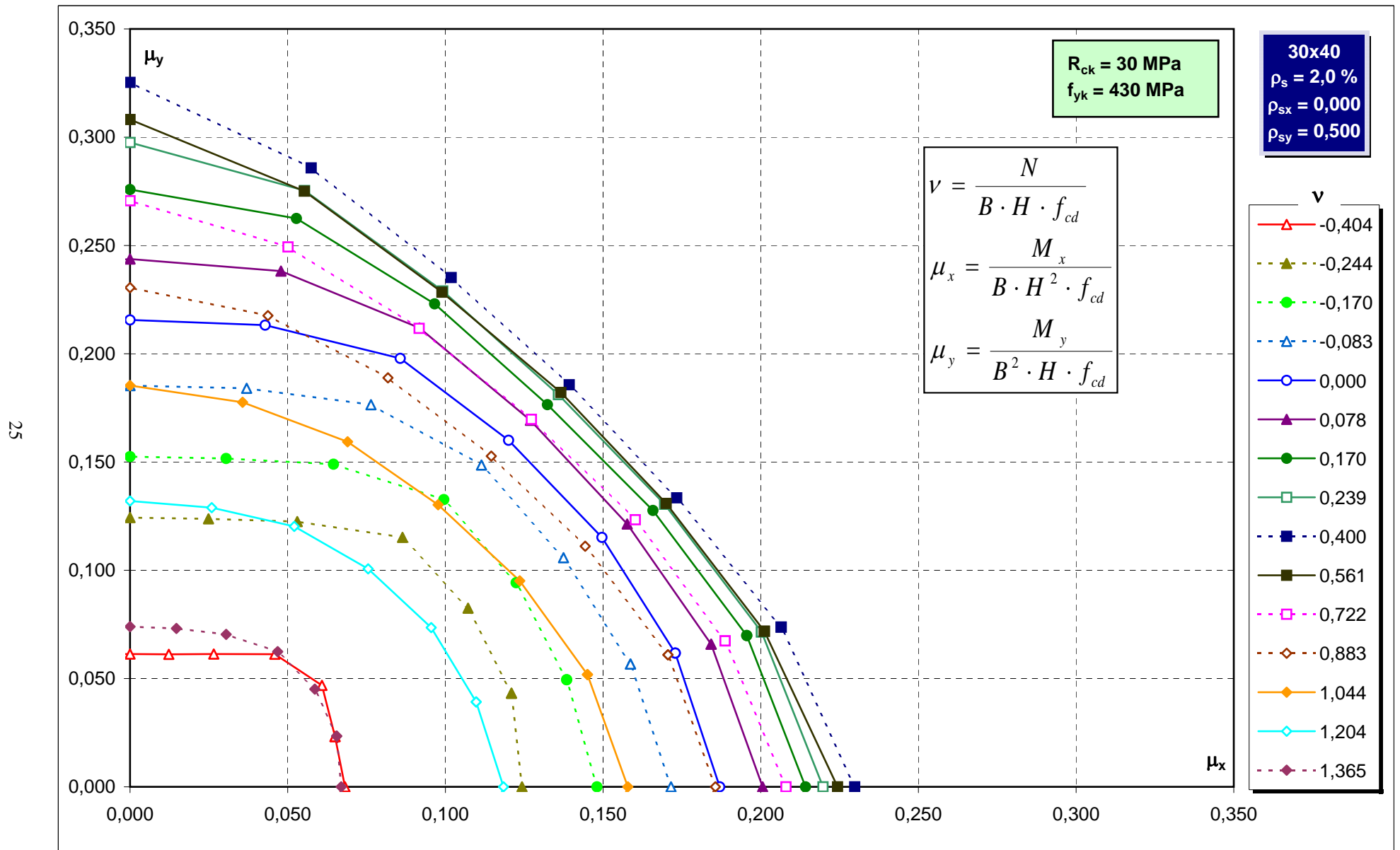
Abachi di verifica



Abachi di verifica

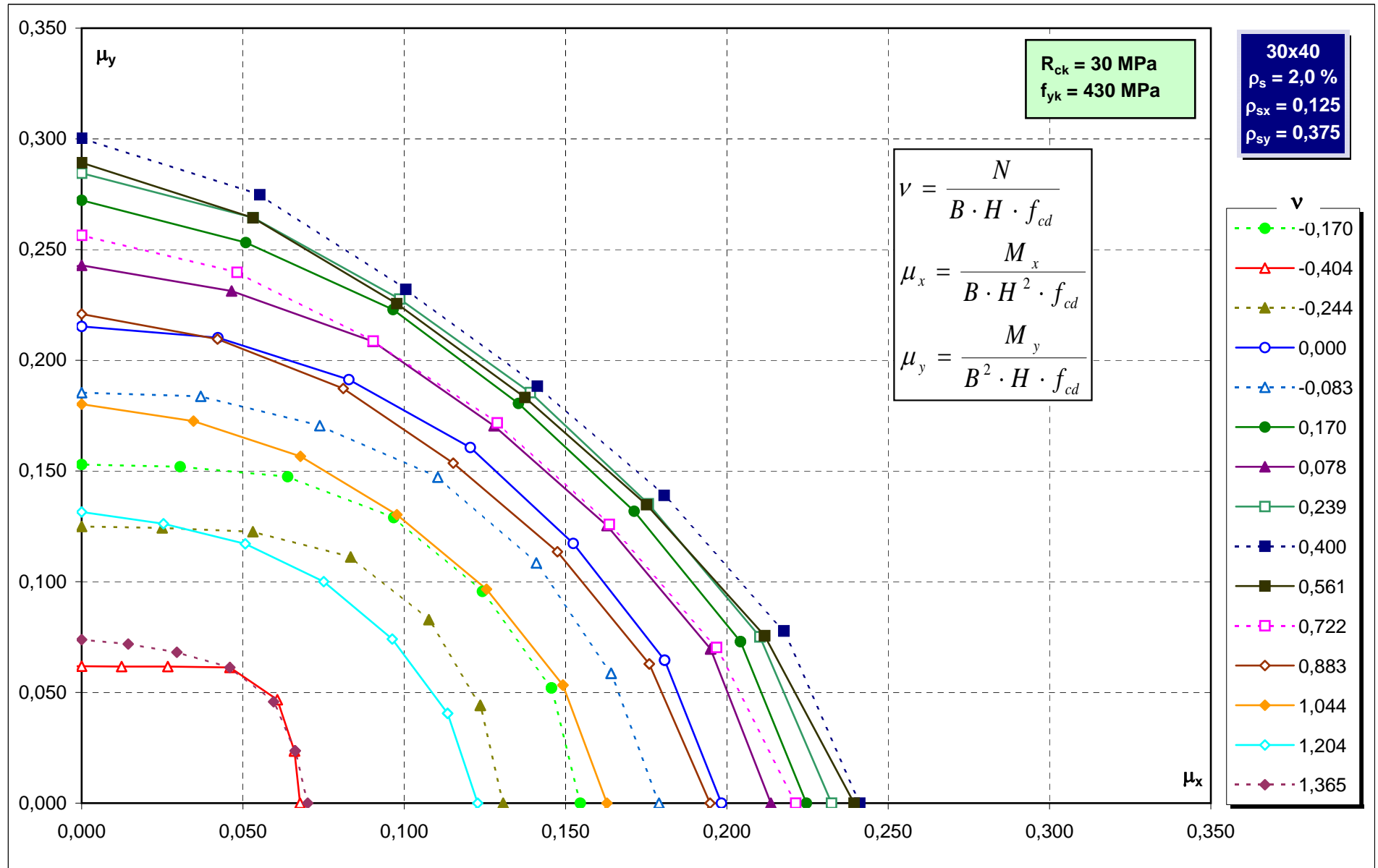


Abachi di verifica

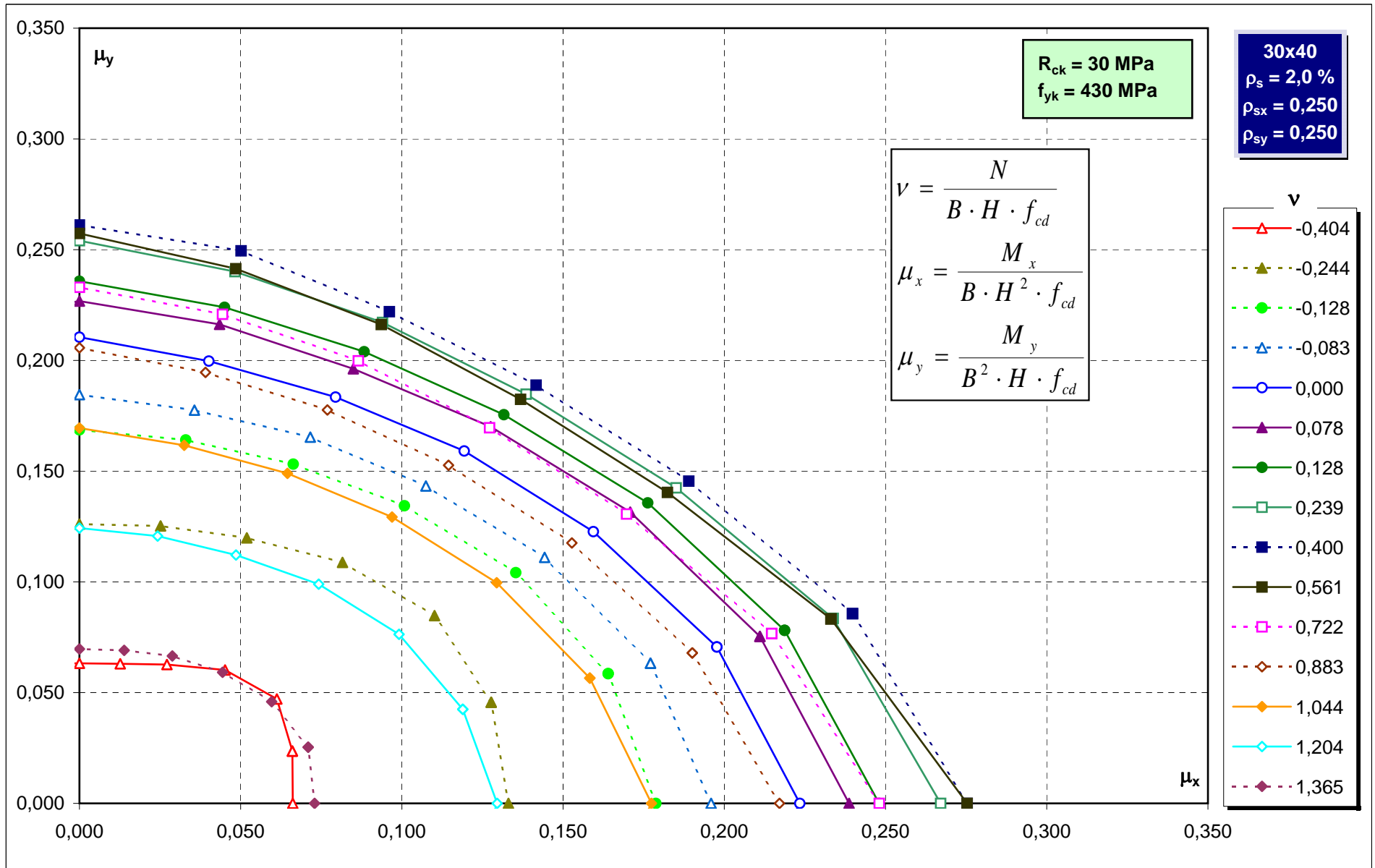


Abachi di verifica

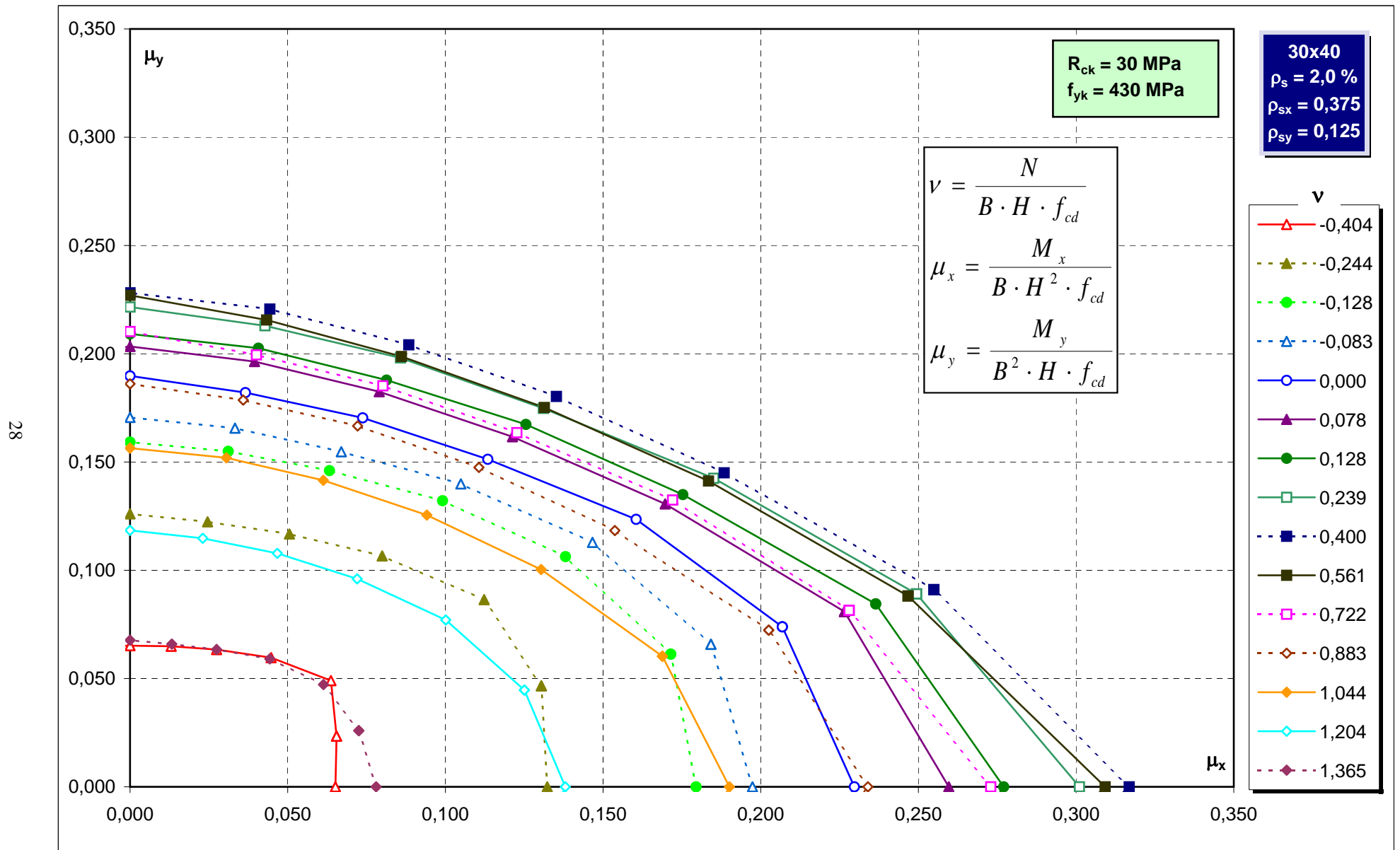
26



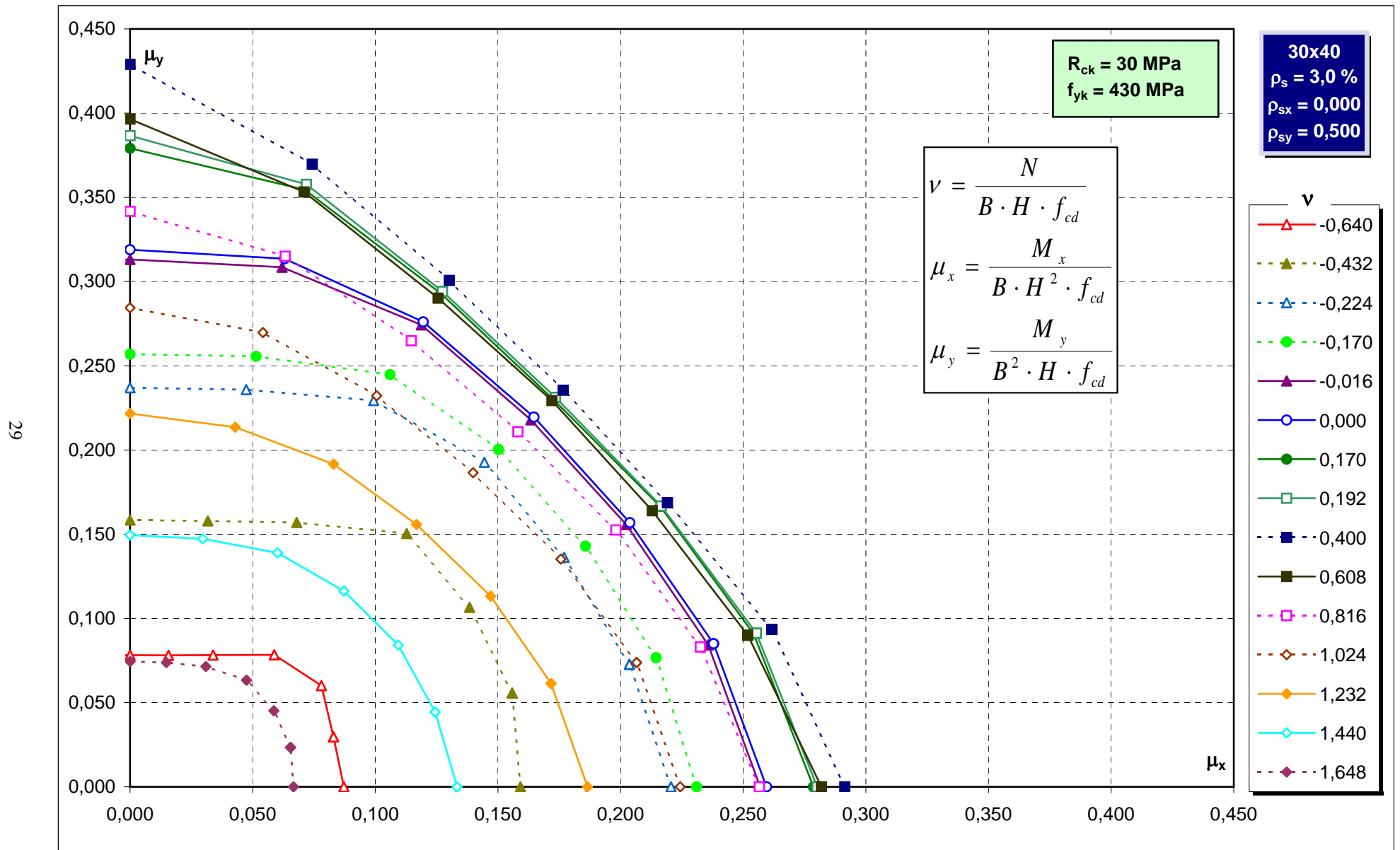
Abachi di verifica



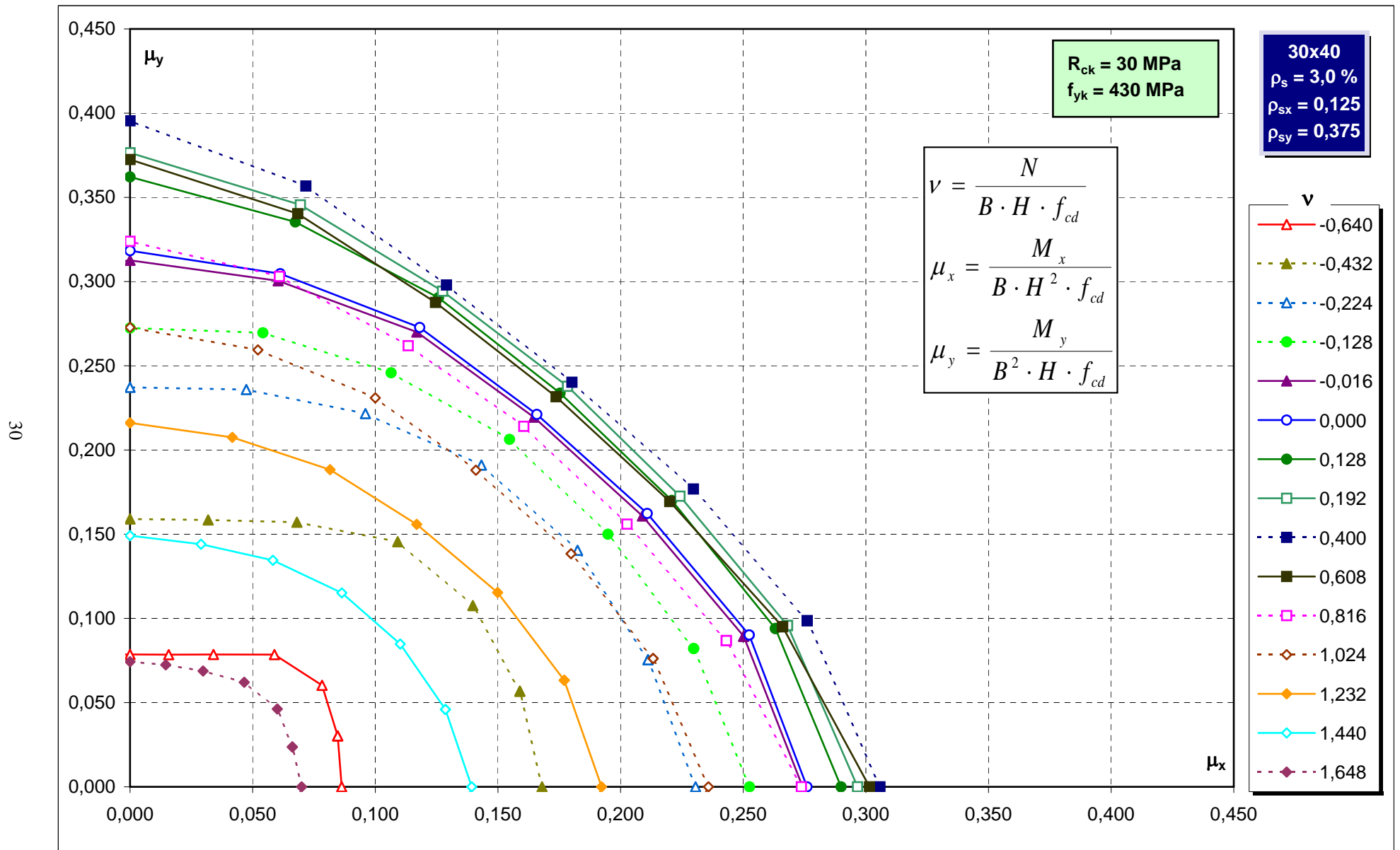
Abachi di verifica



Abachi di verifica

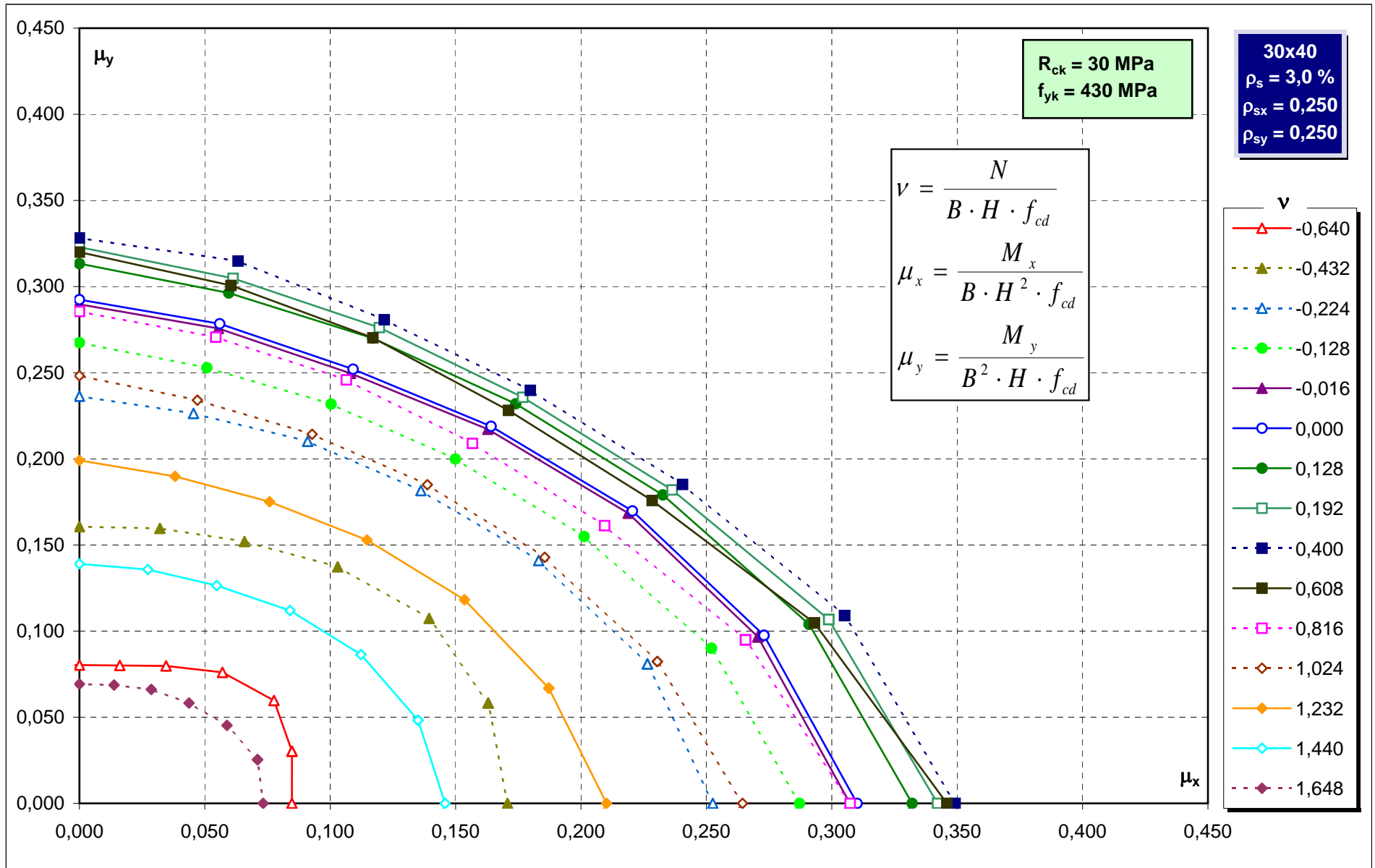


Abachi di verifica

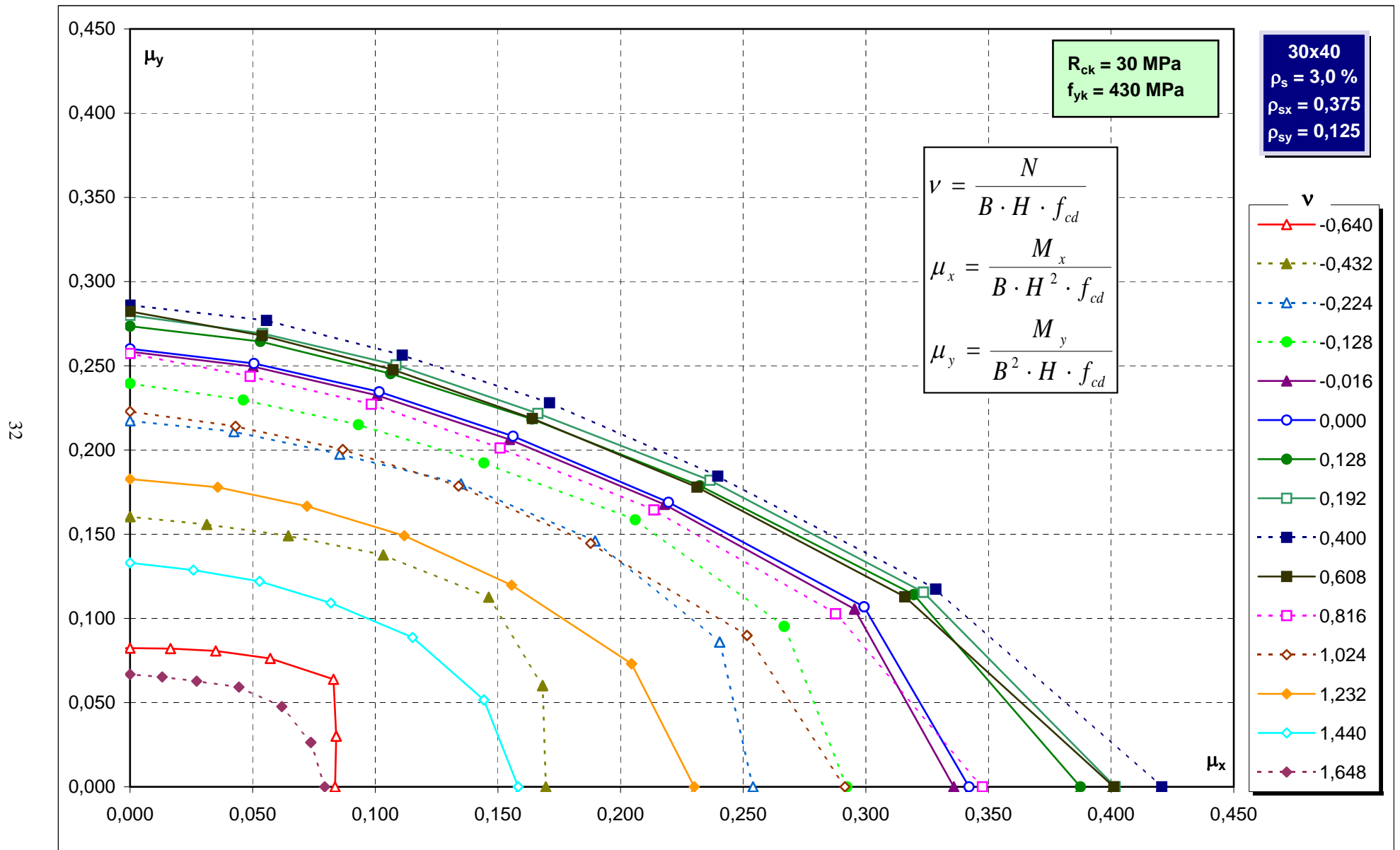


Abachi di verifica

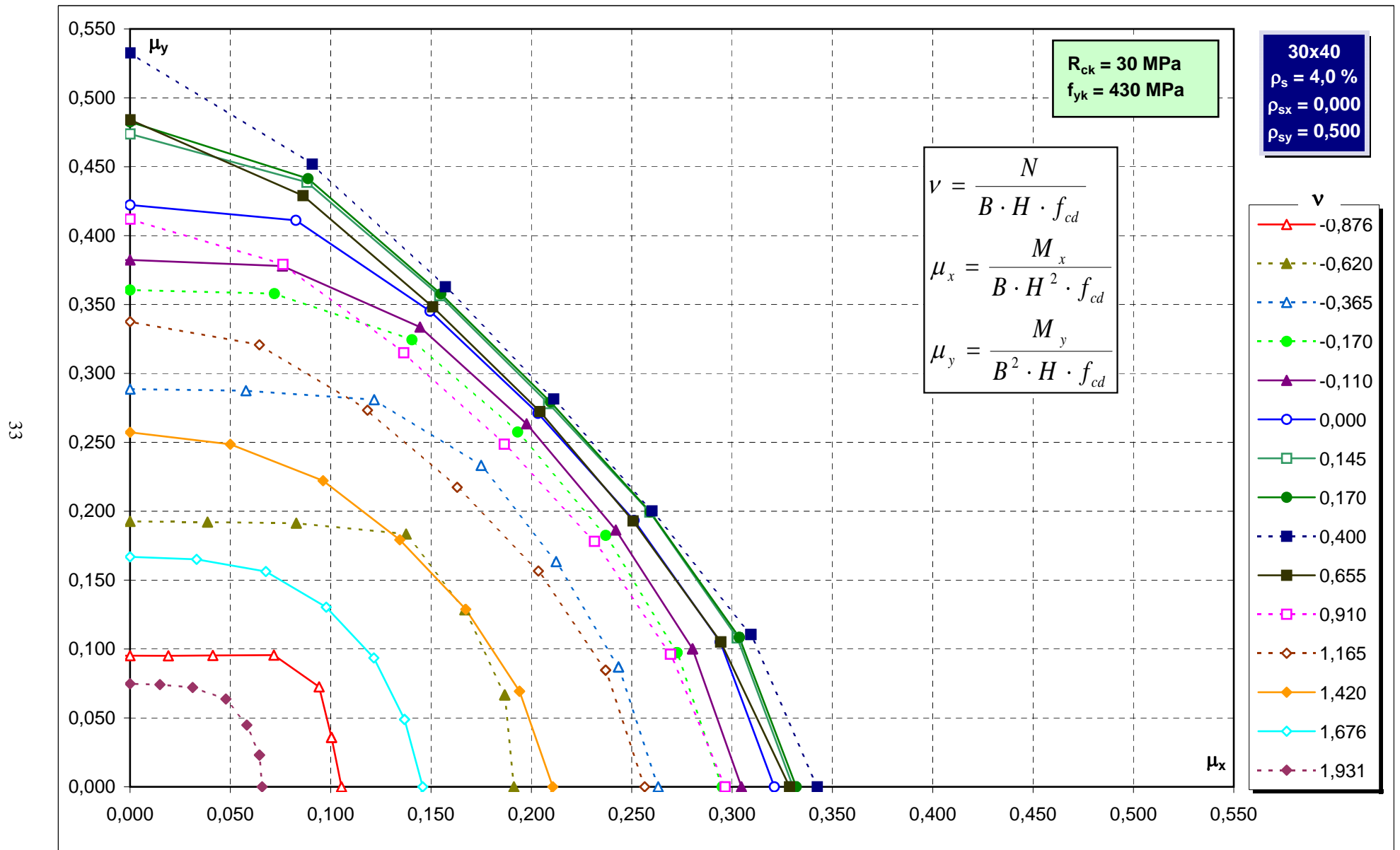
31



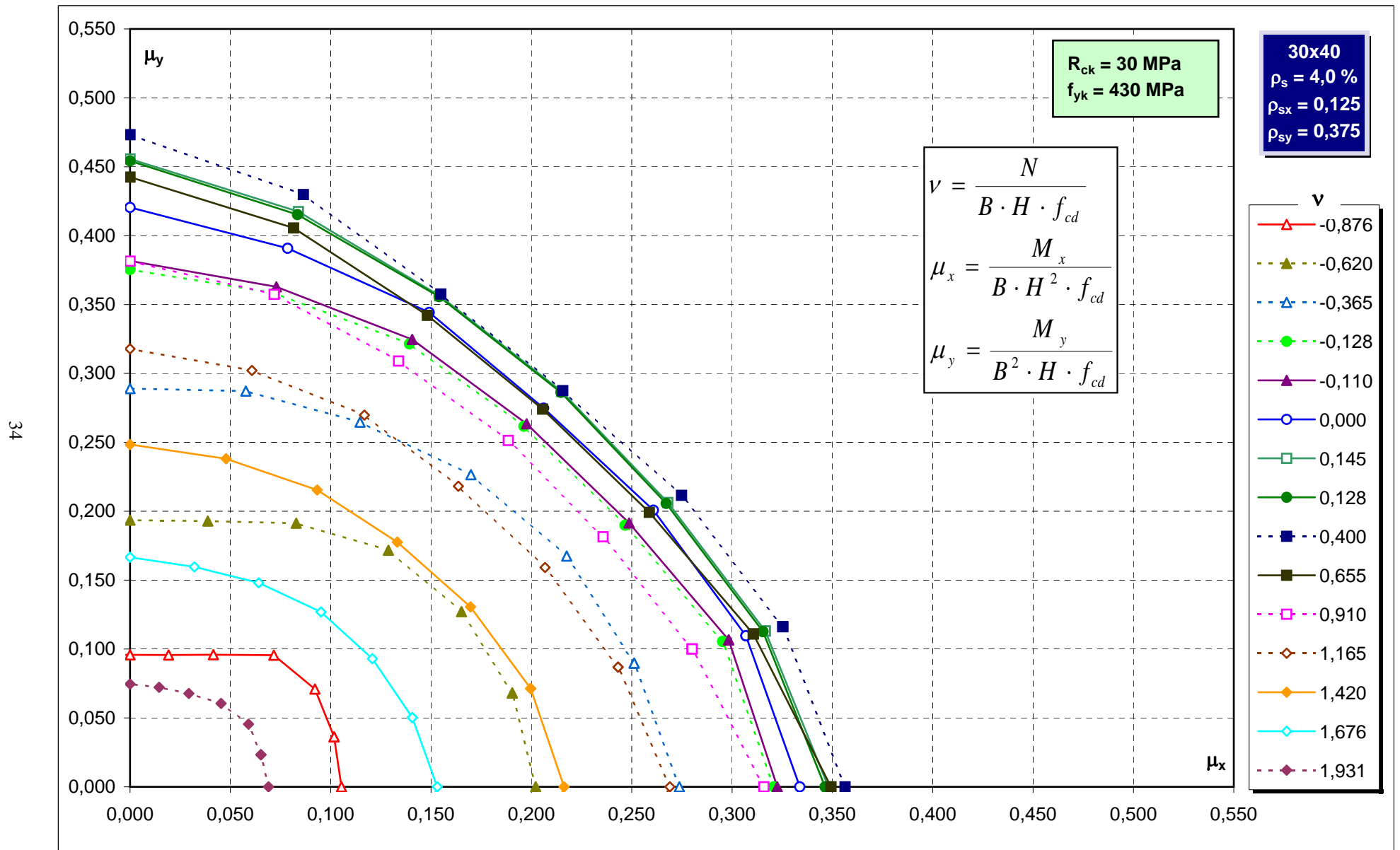
Abachi di verifica



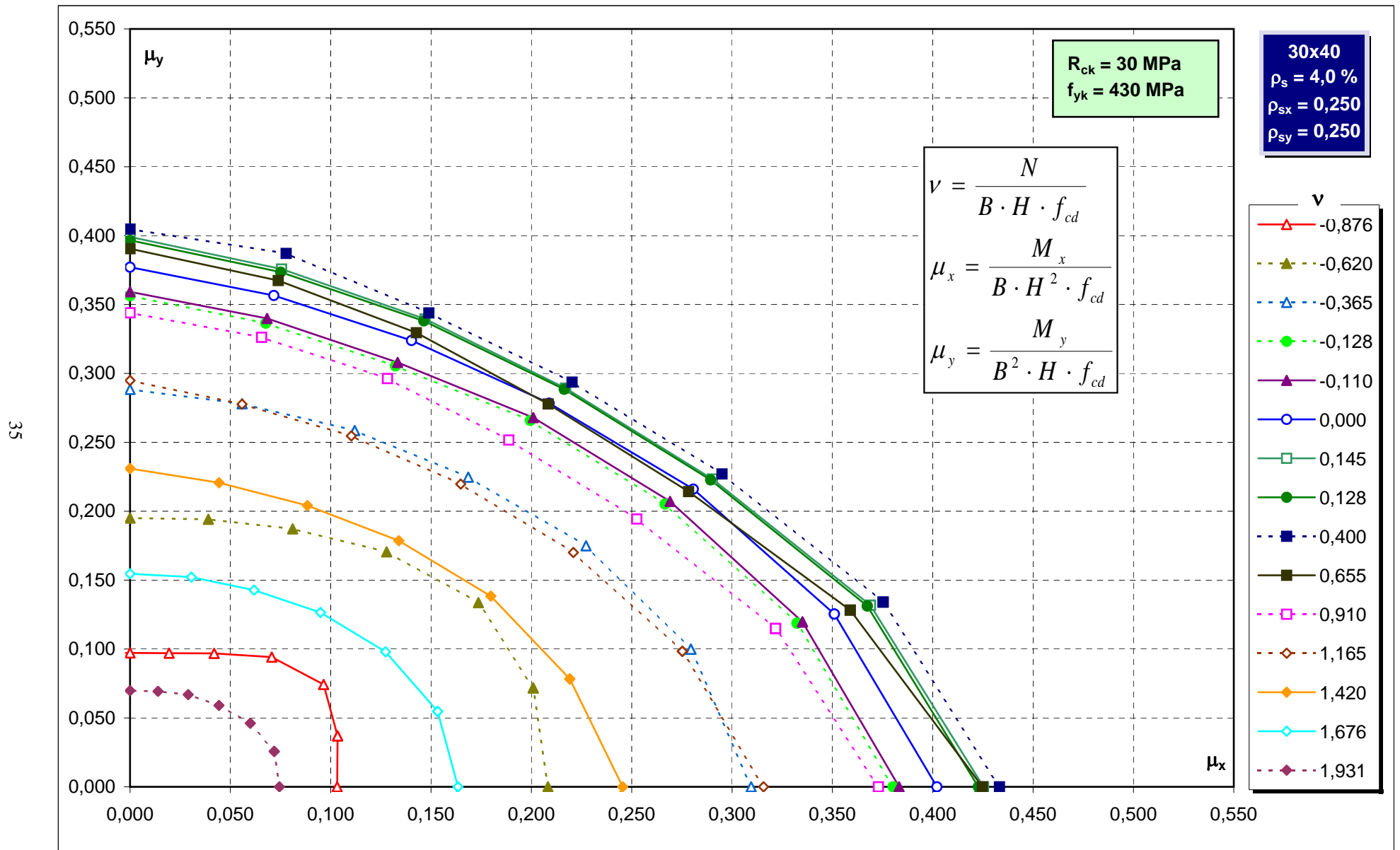
Abachi di verifica



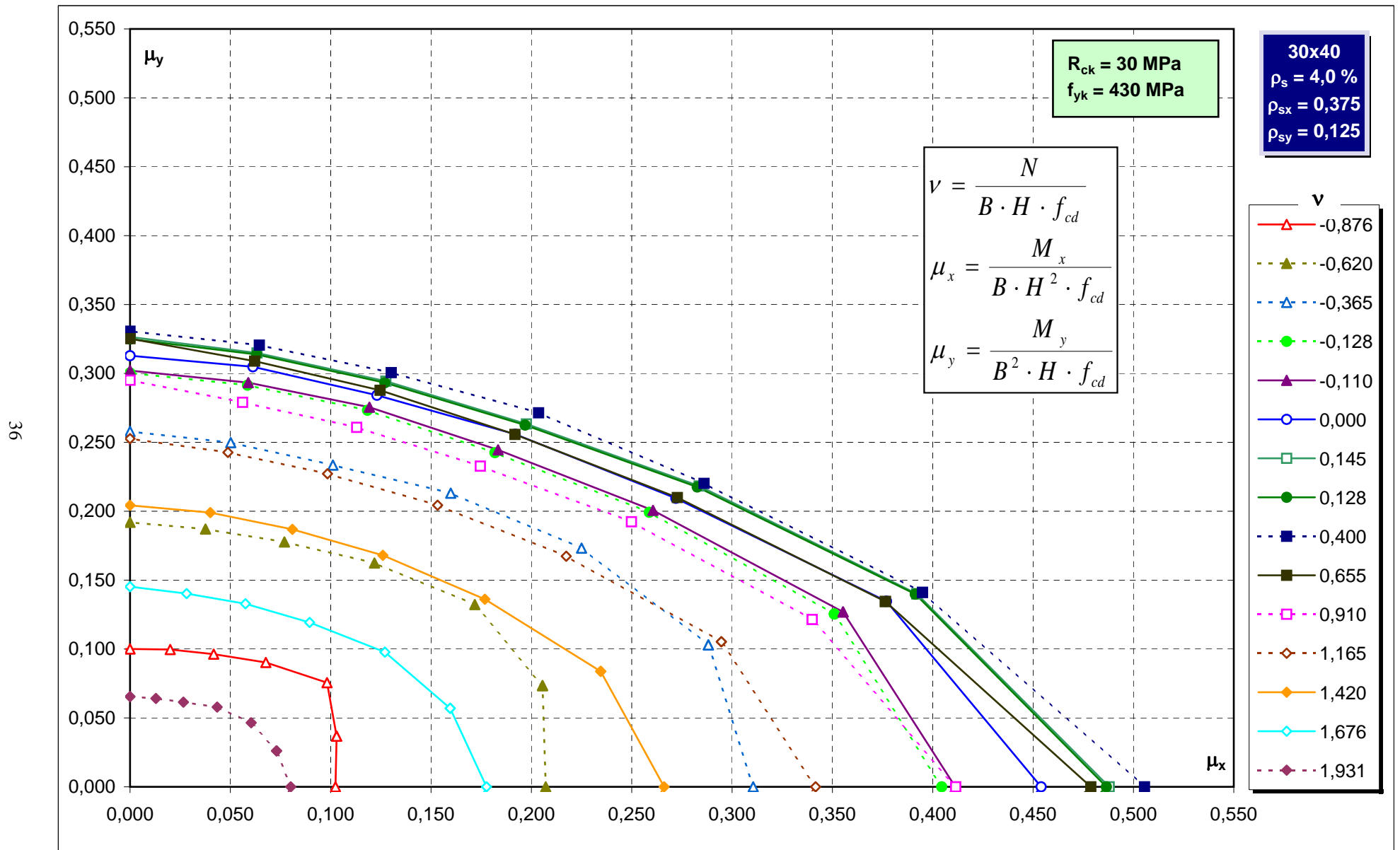
Abachi di verifica



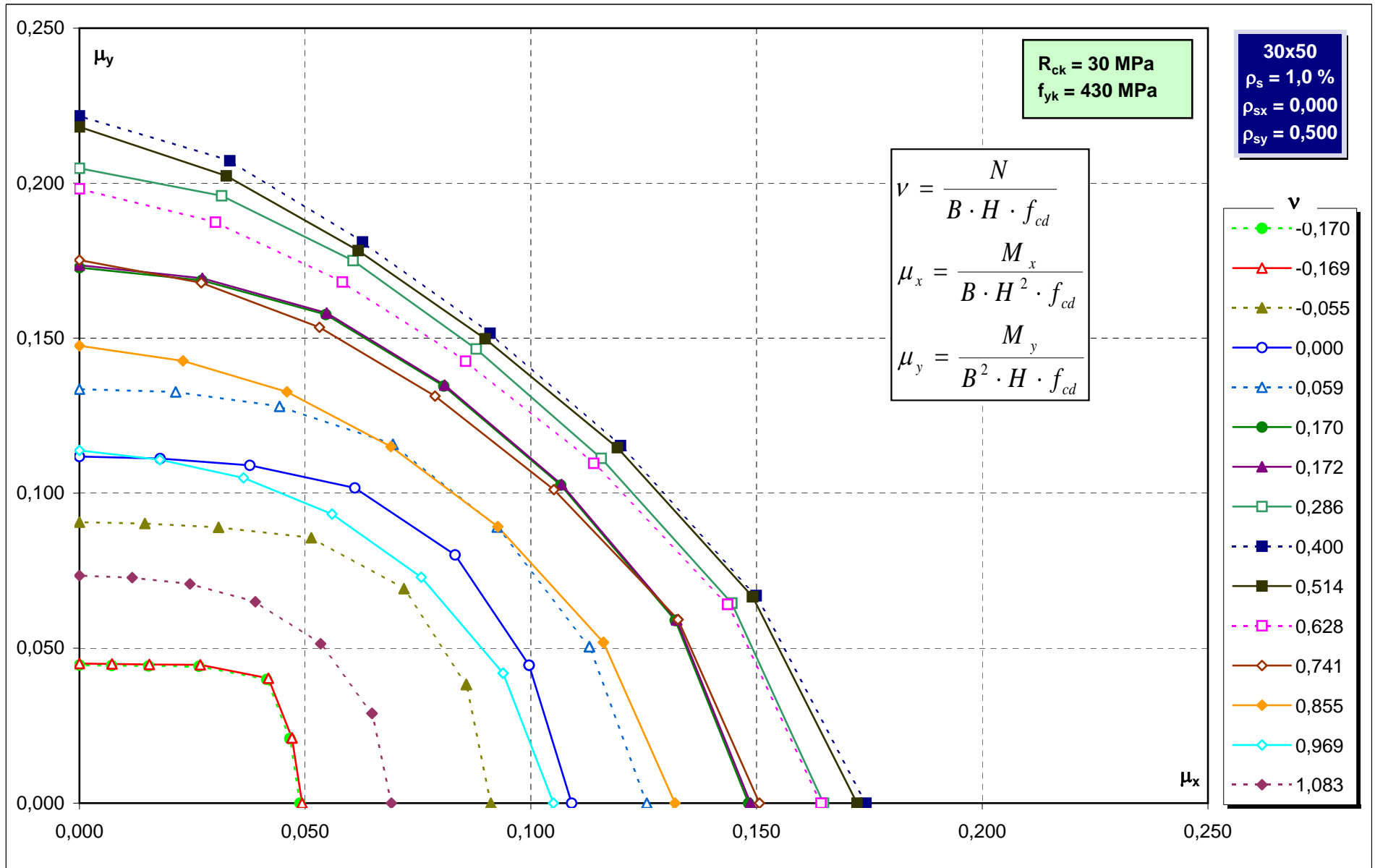
Abachi di verifica



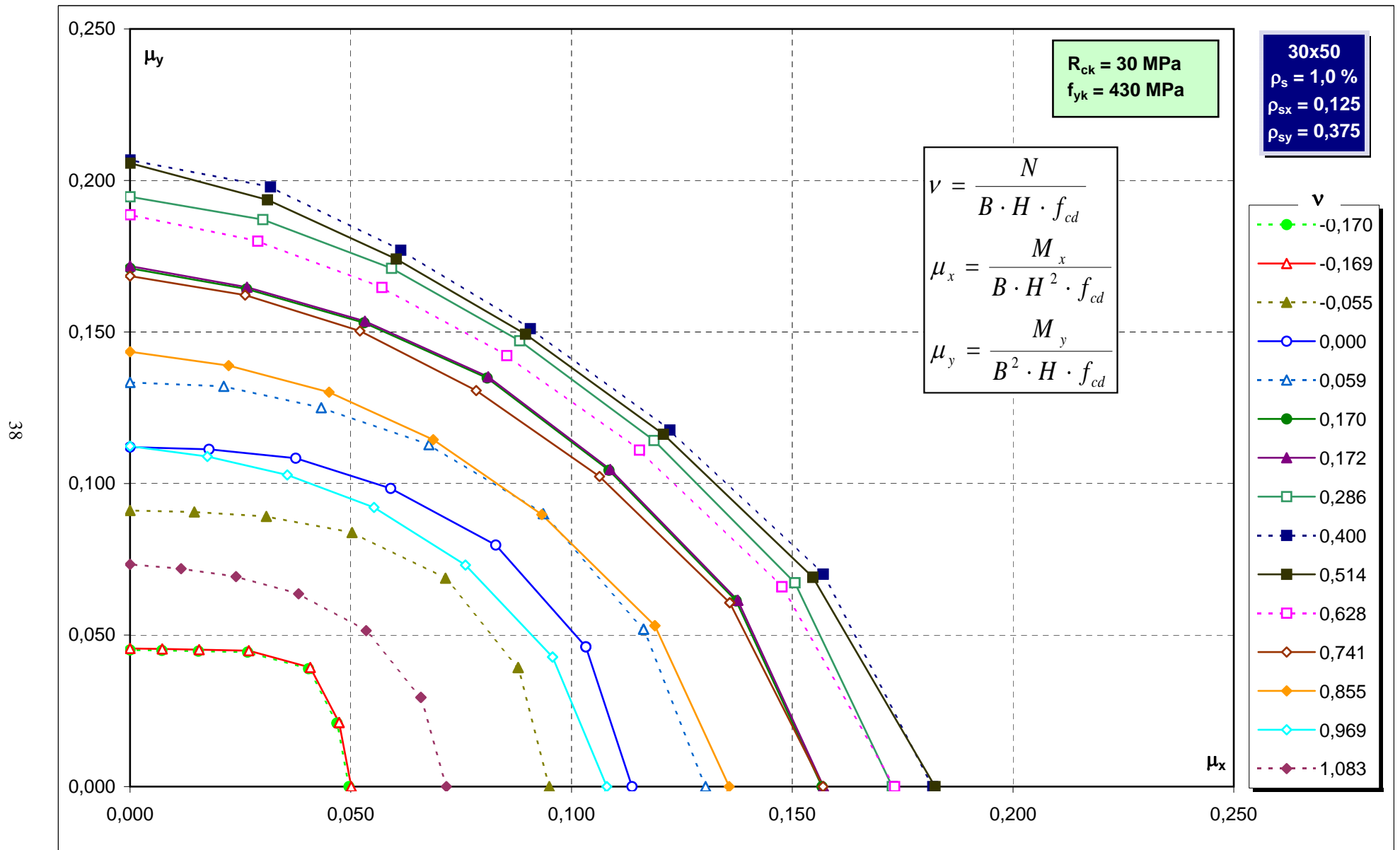
Abachi di verifica



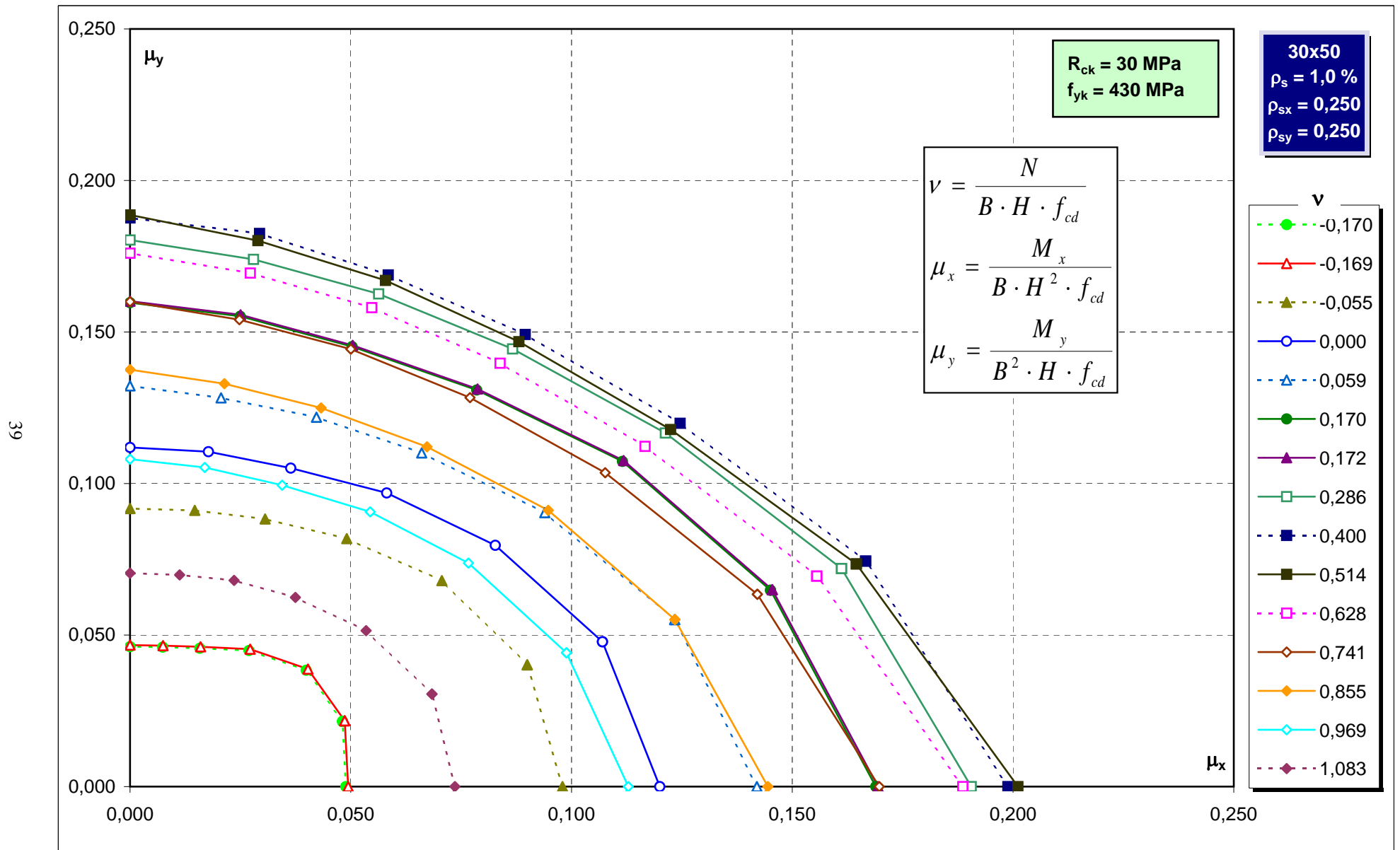
Abachi di verifica



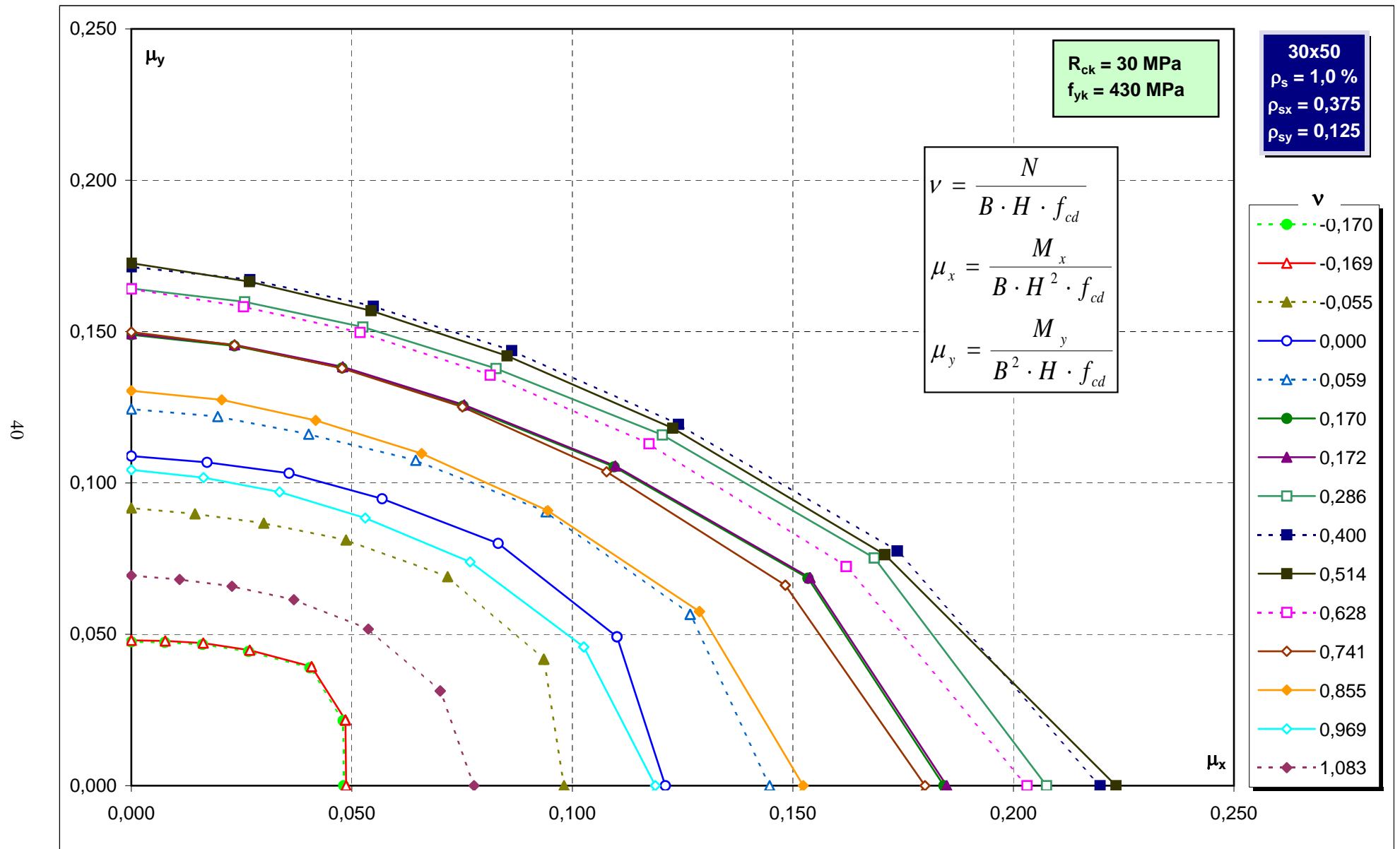
Abachi di verifica



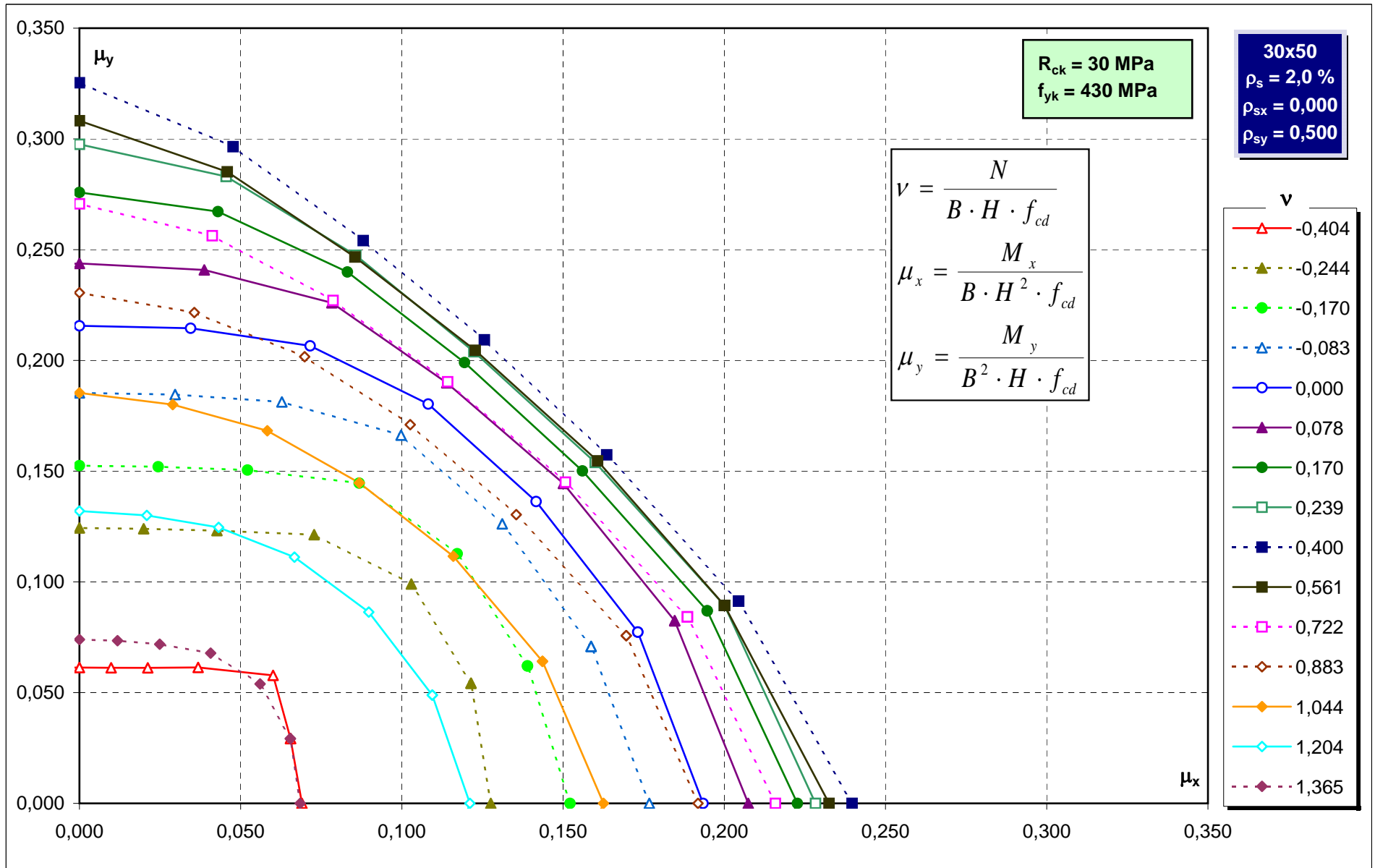
Abachi di verifica



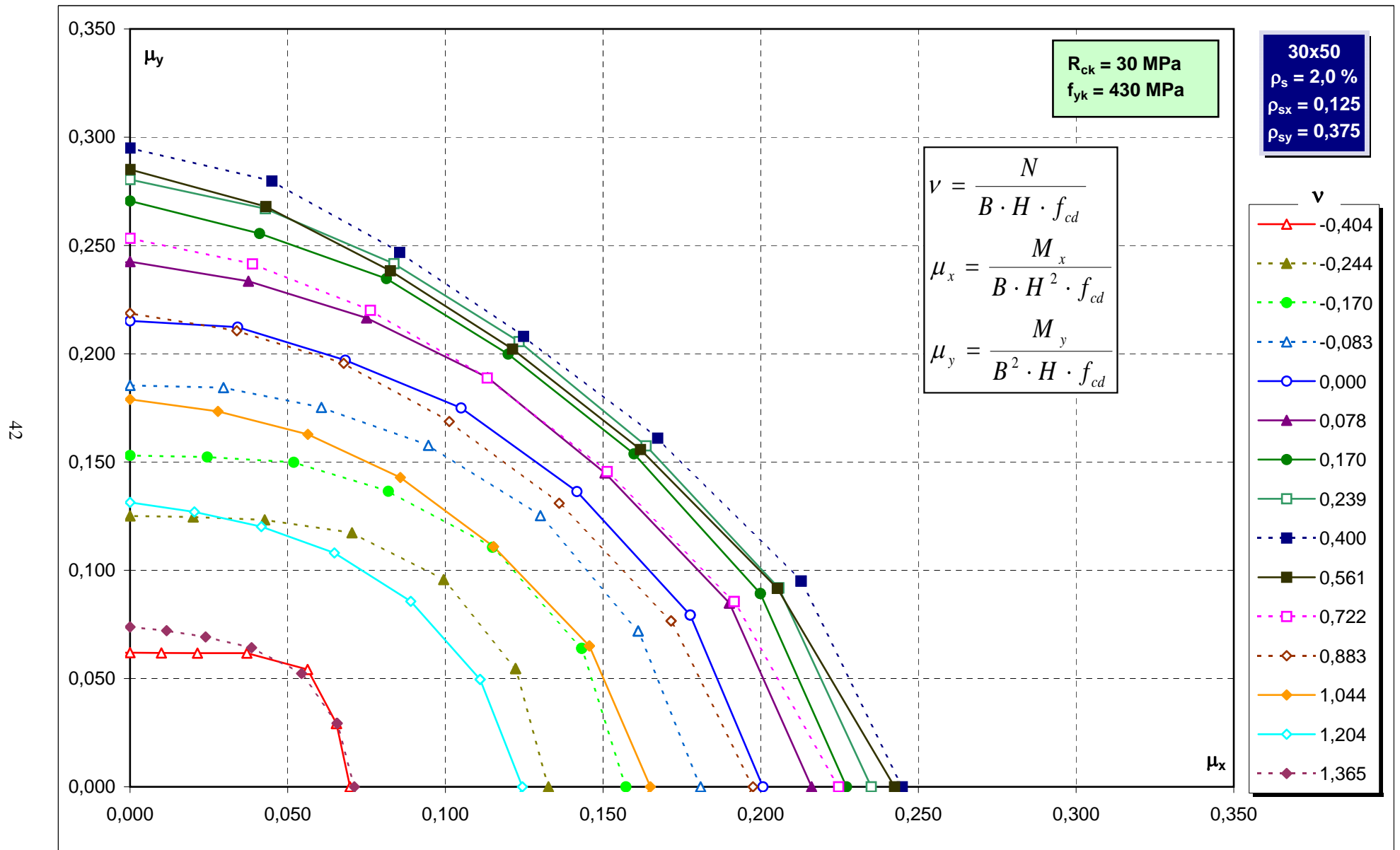
Abachi di verifica



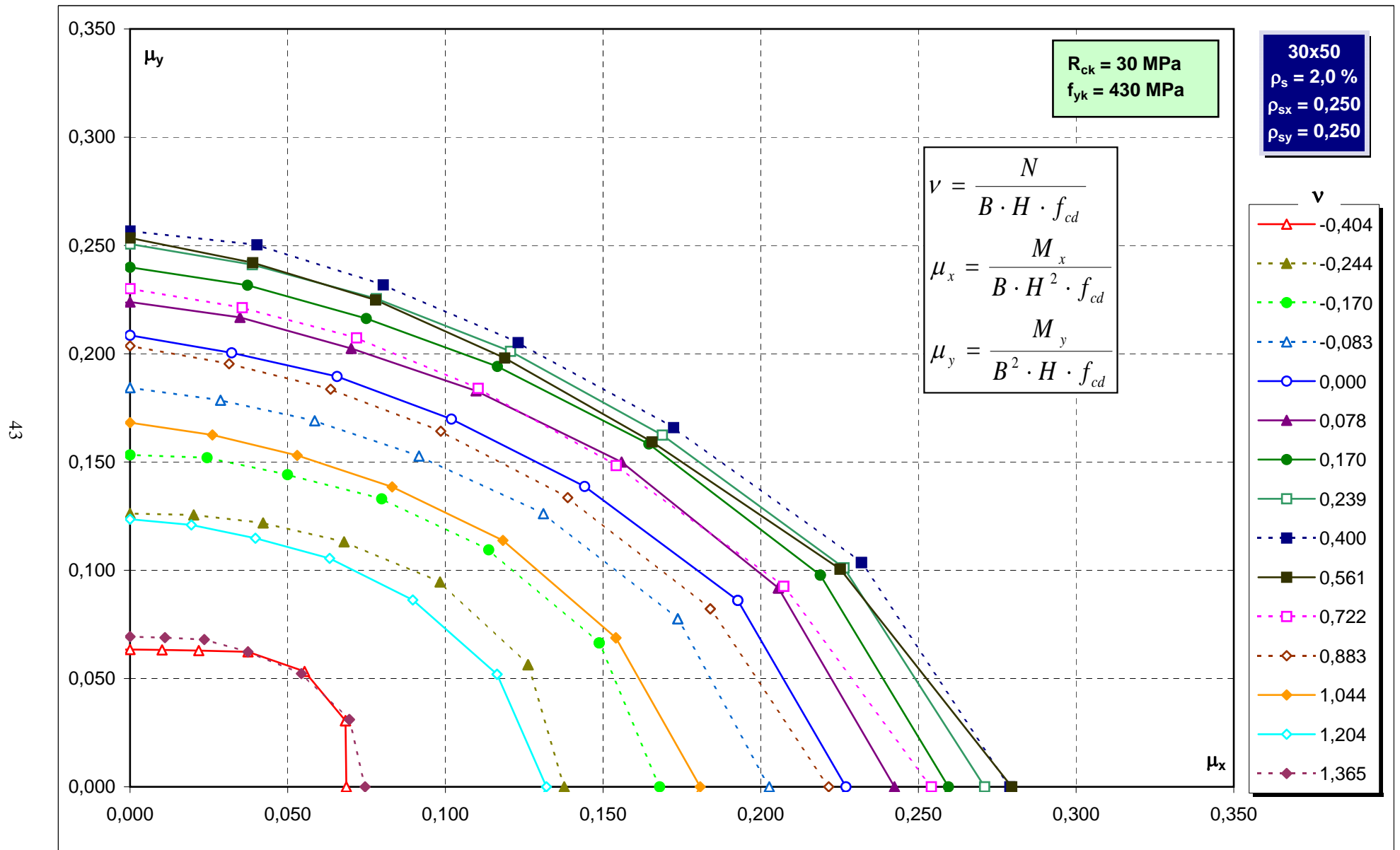
Abachi di verifica



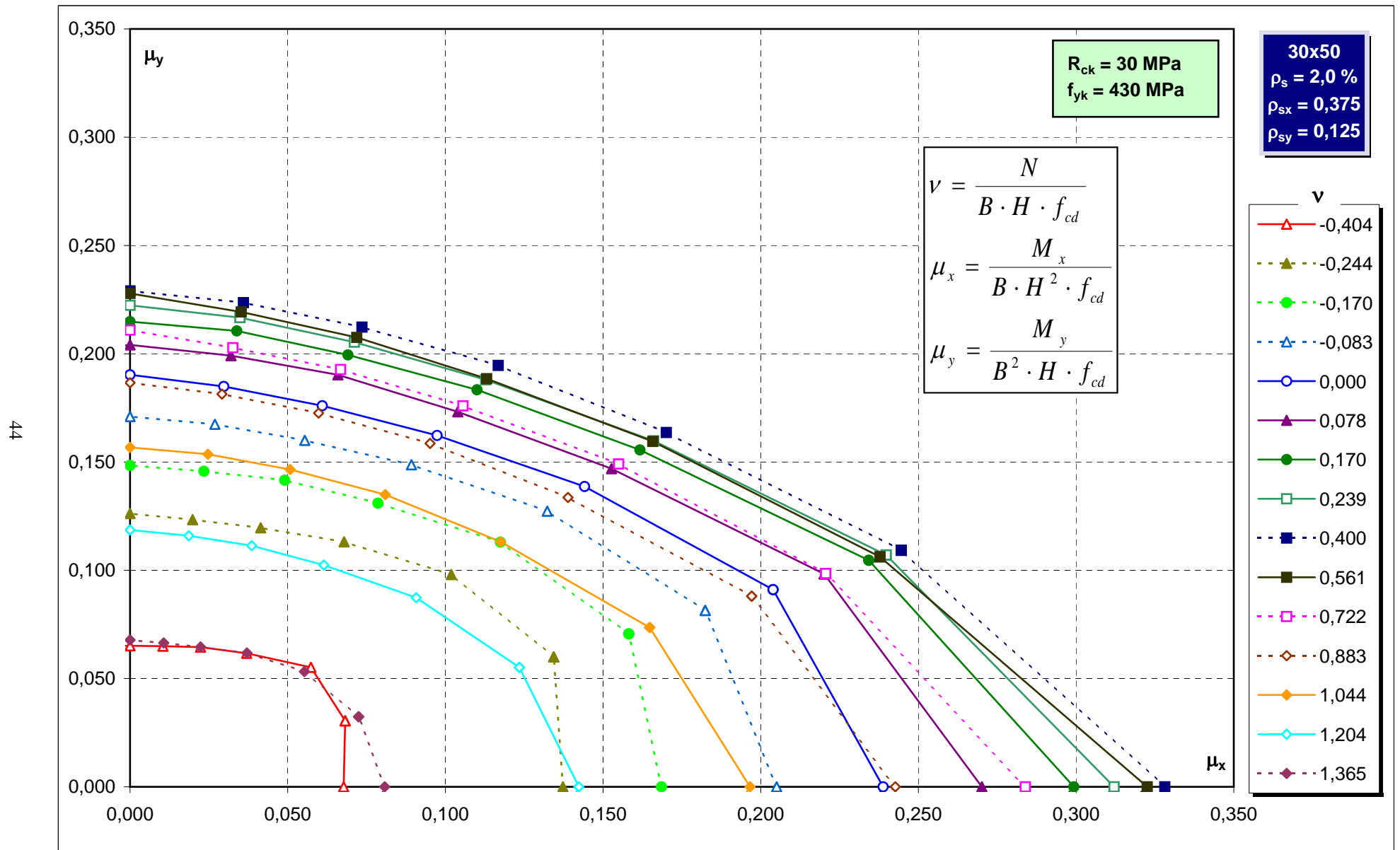
Abachi di verifica



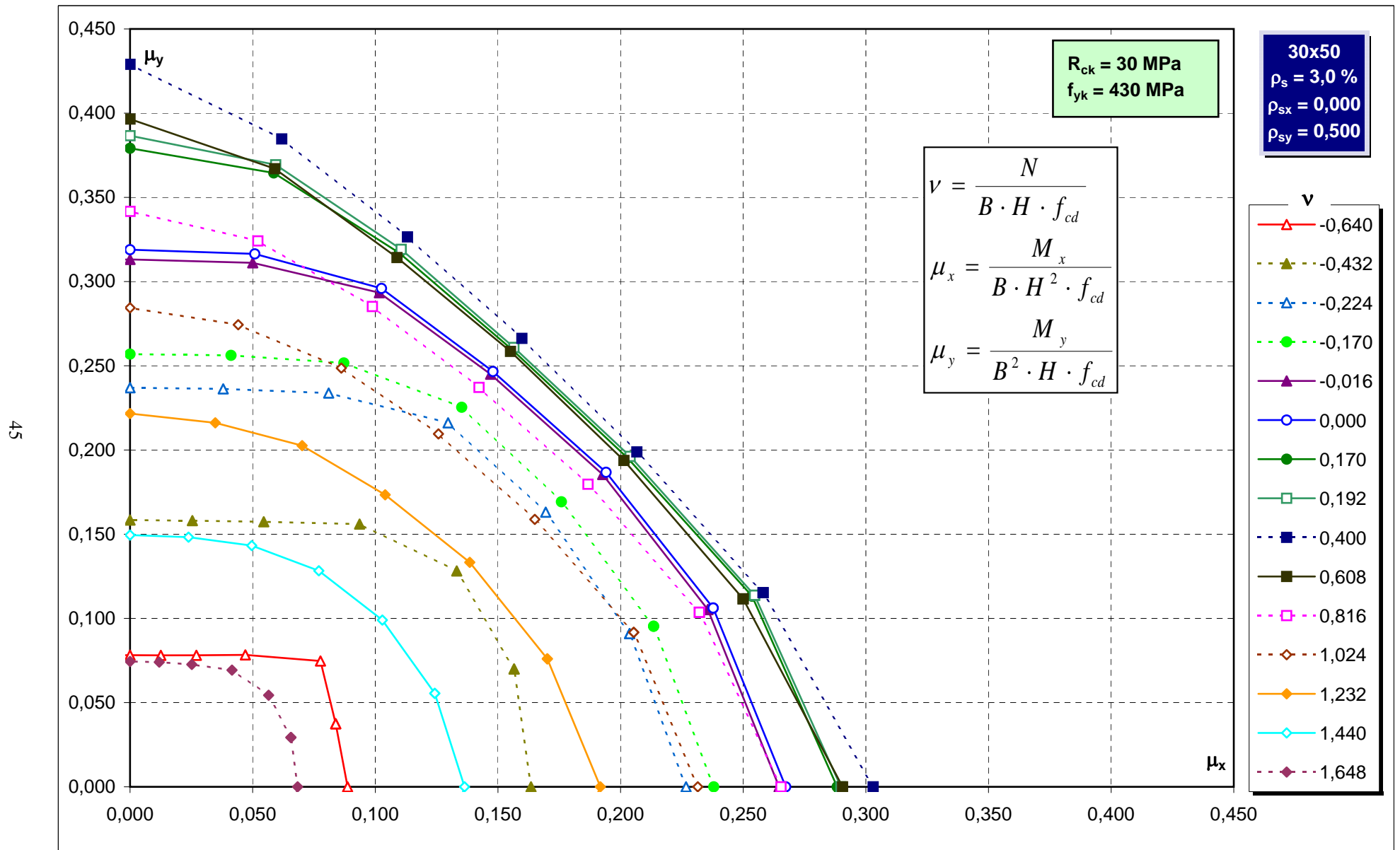
Abachi di verifica



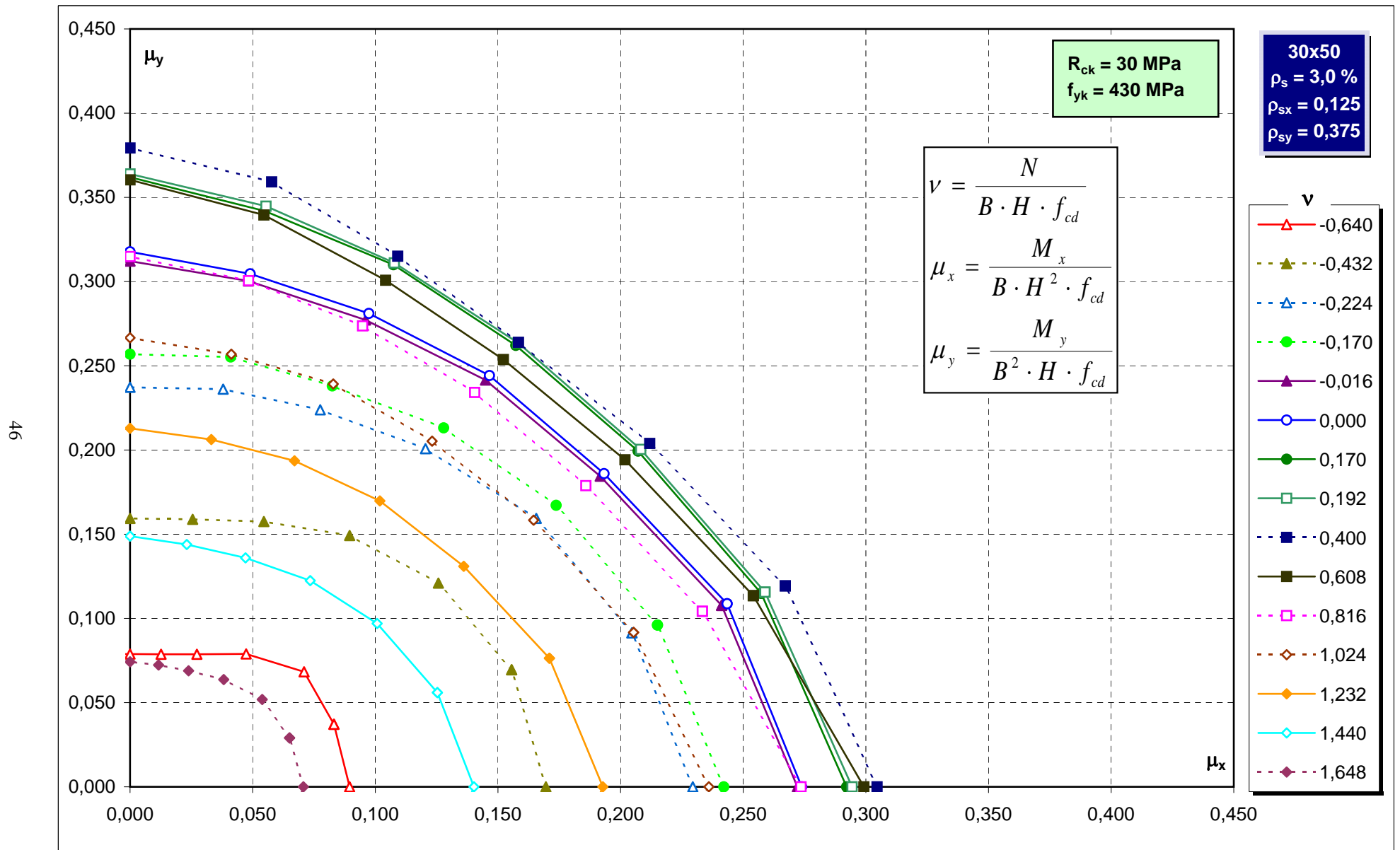
Abachi di verifica



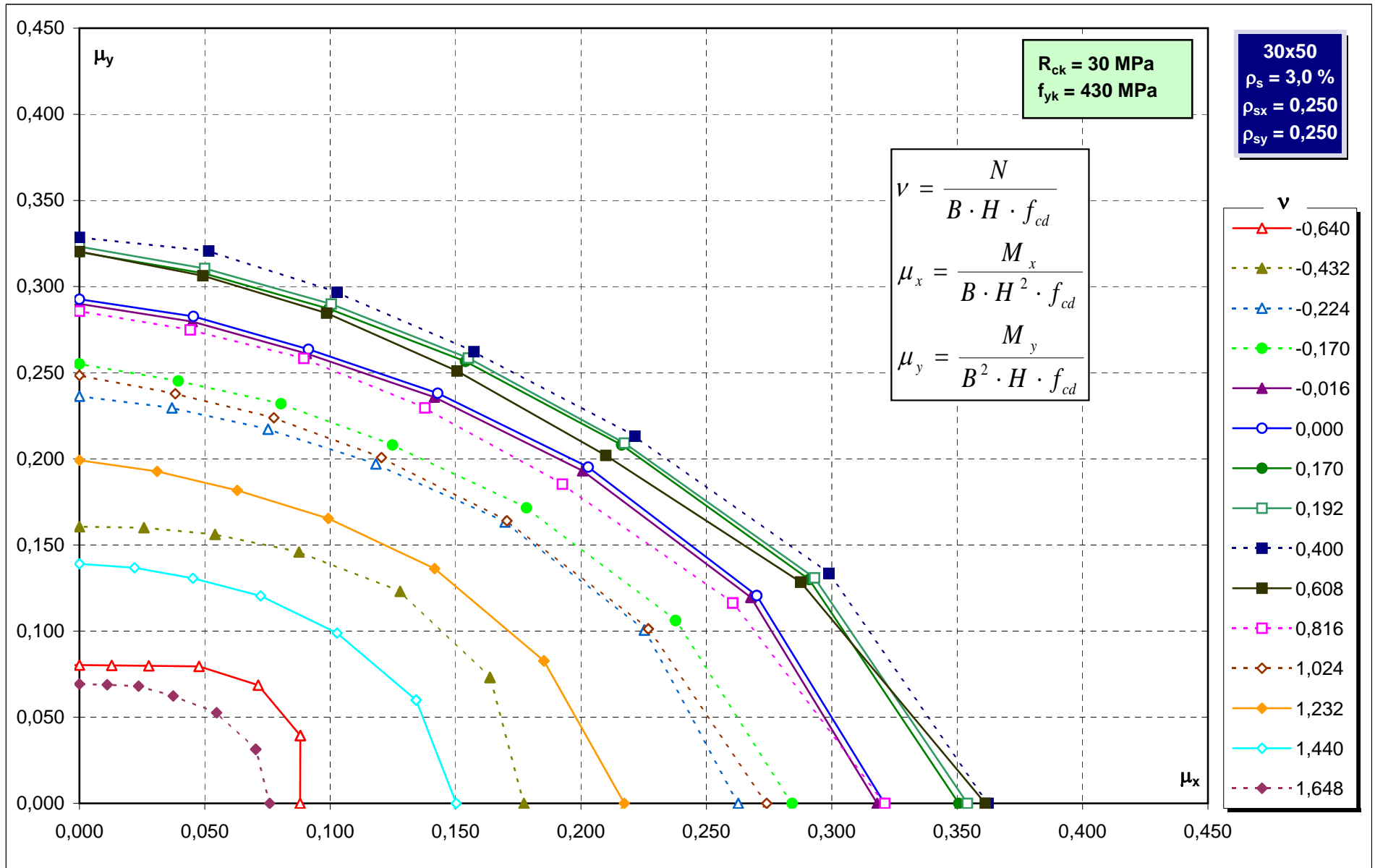
Abachi di verifica



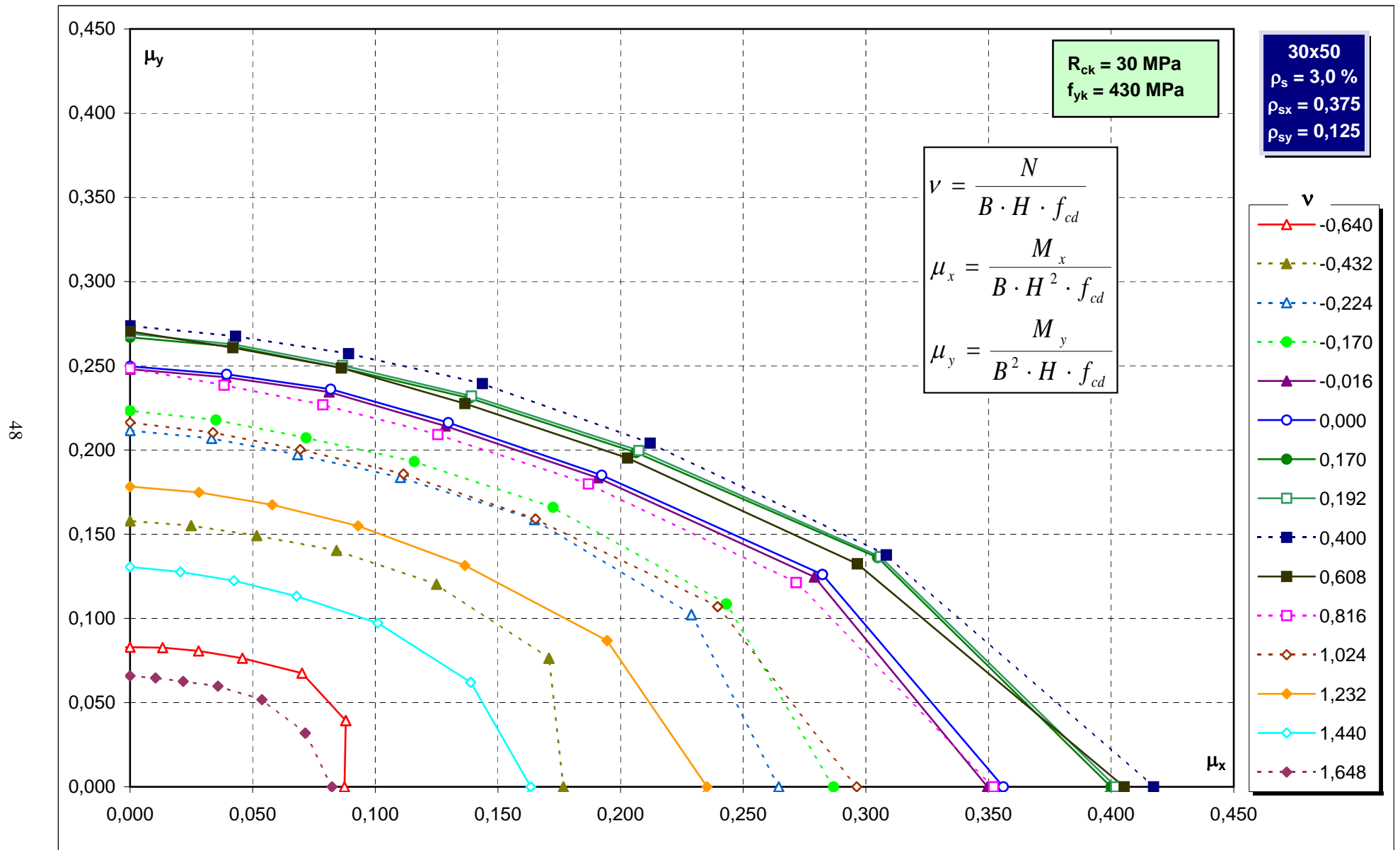
Abachi di verifica



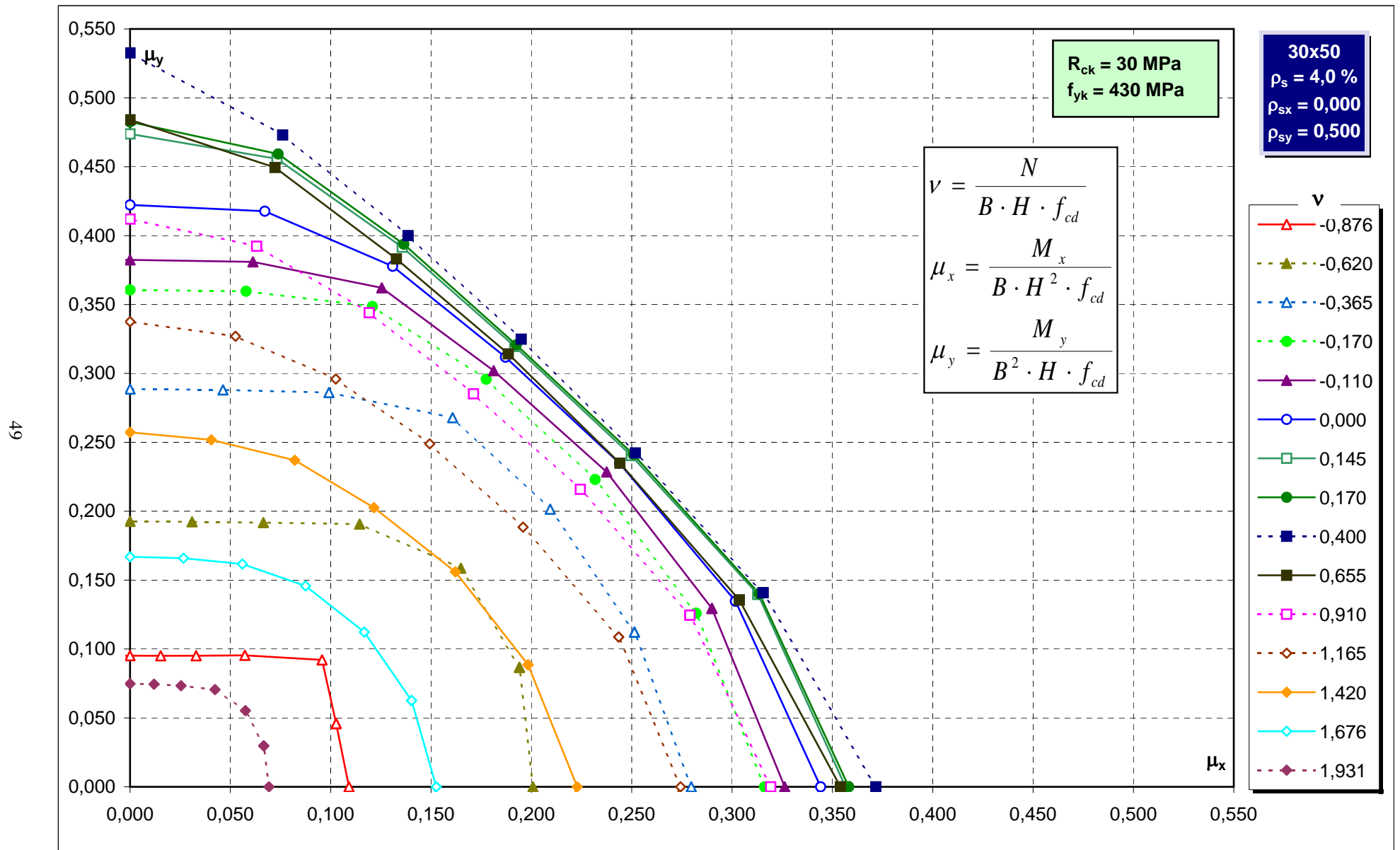
Abachi di verifica



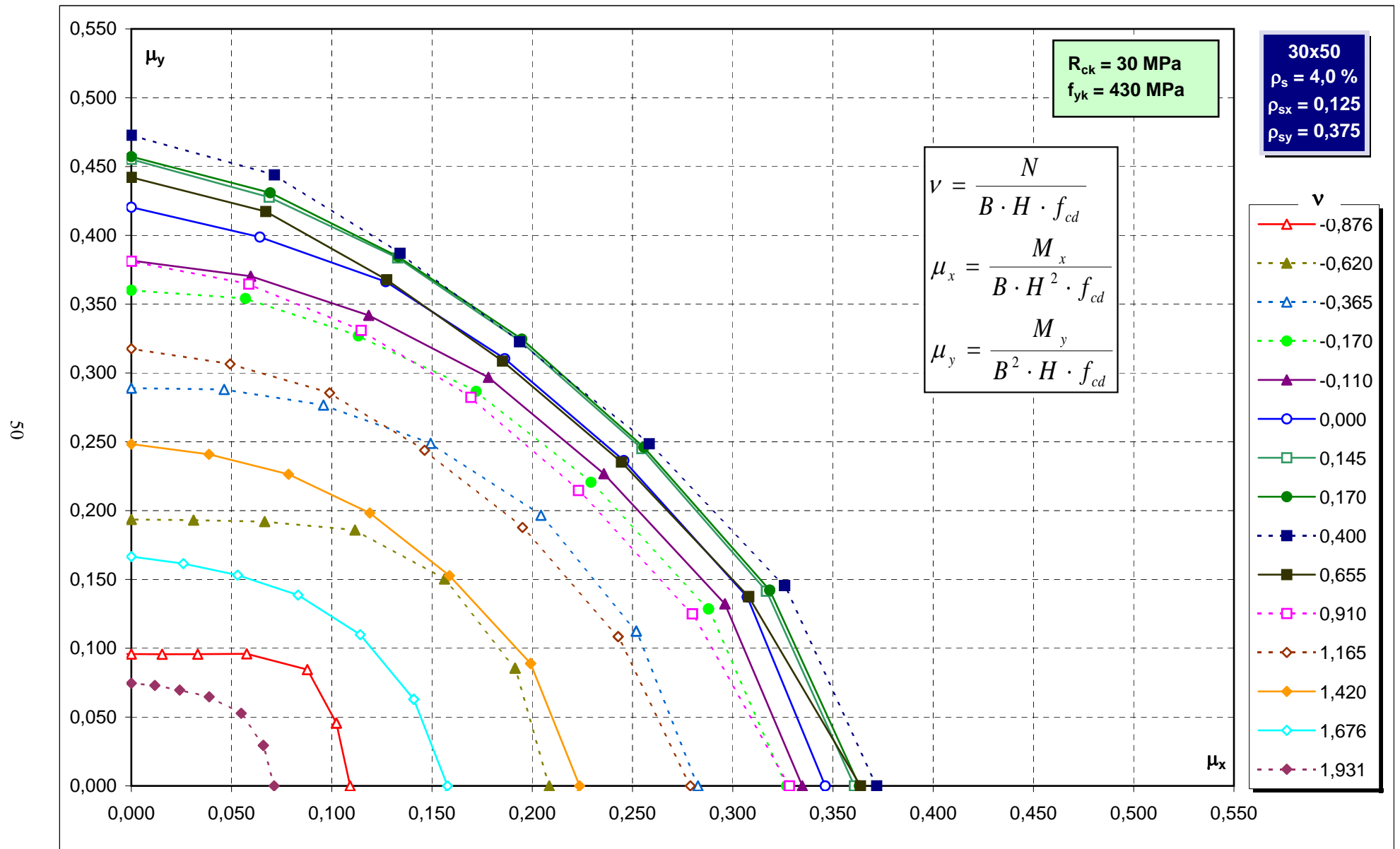
Abachi di verifica



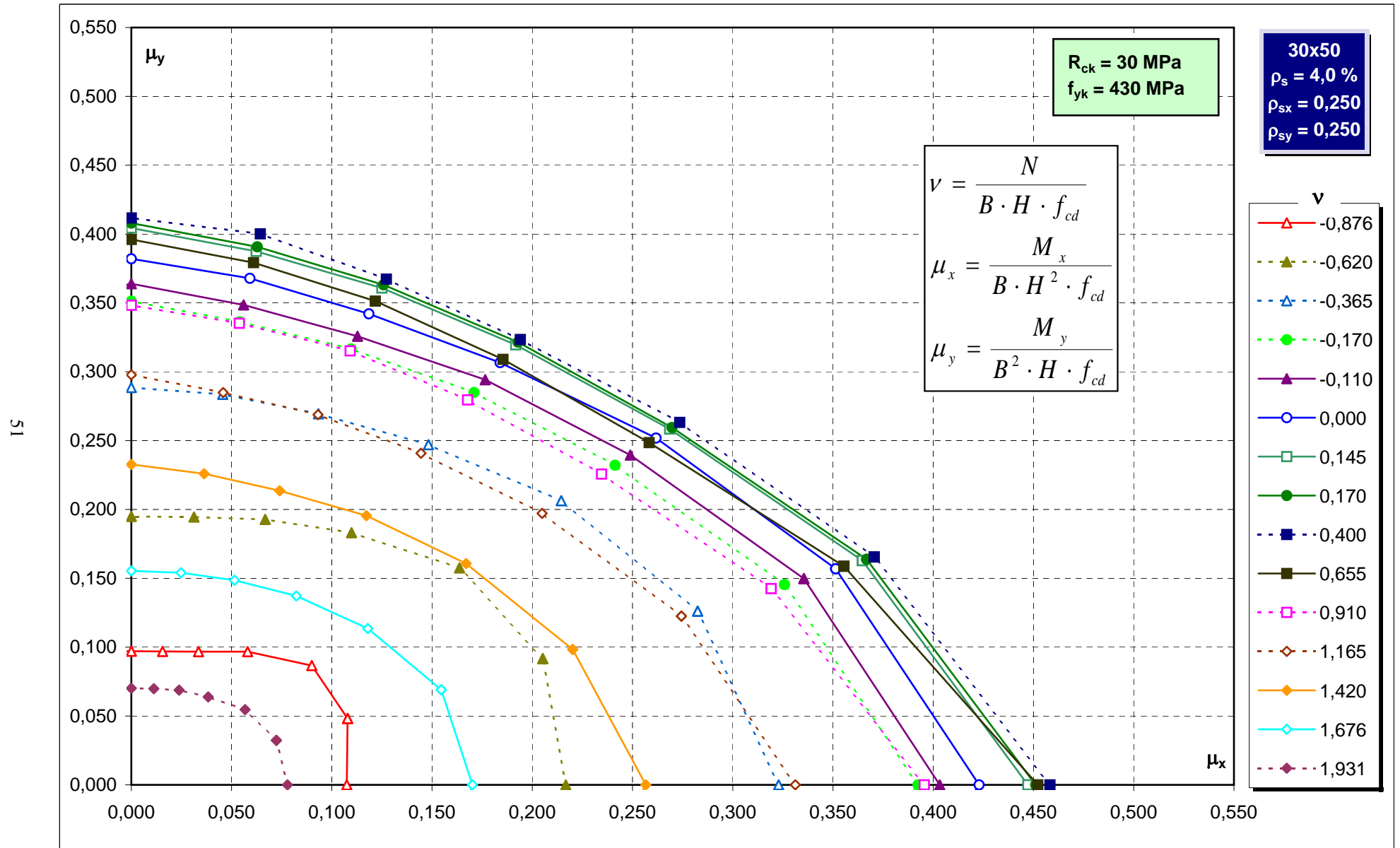
Abachi di verifica



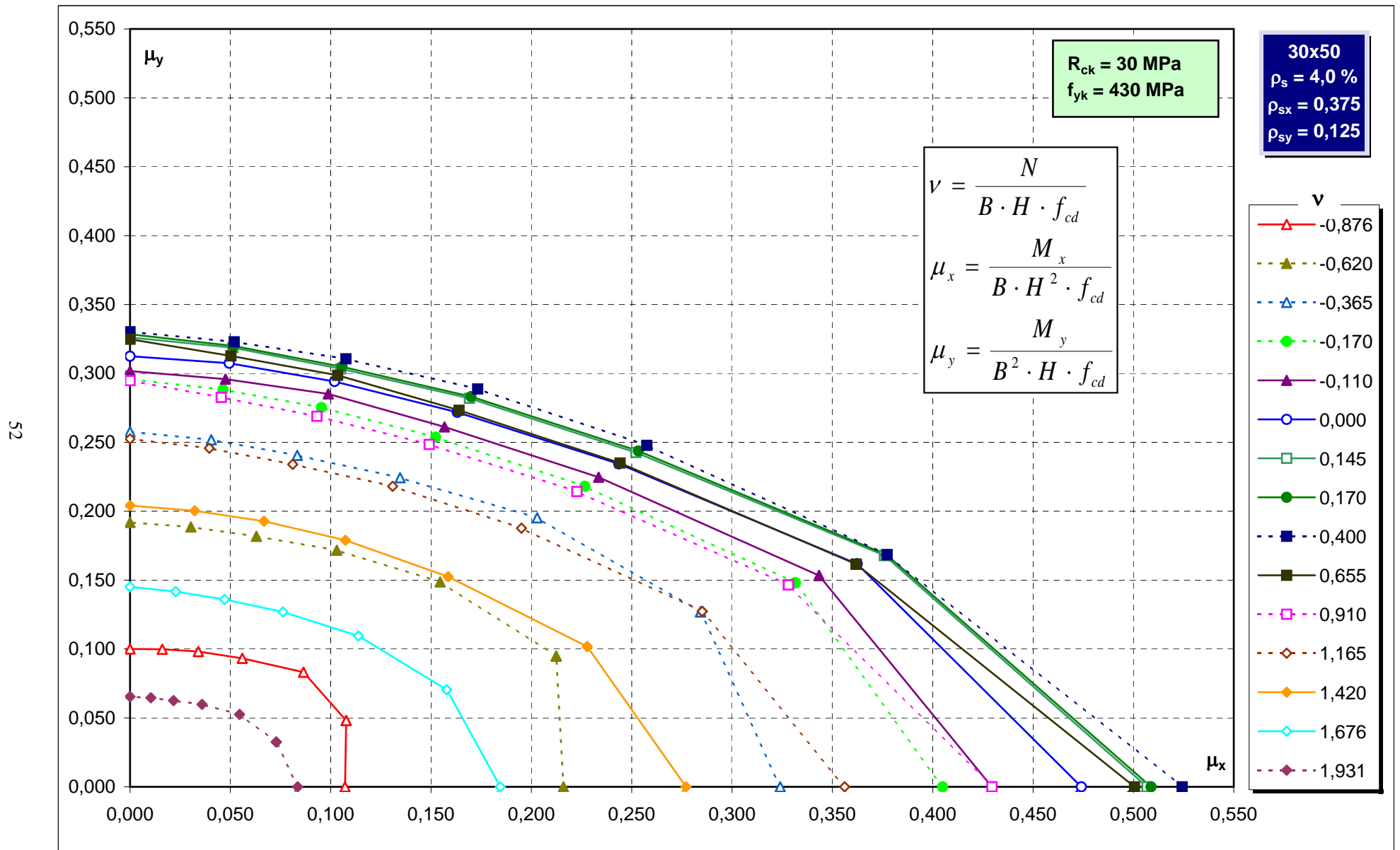
Abachi di verifica



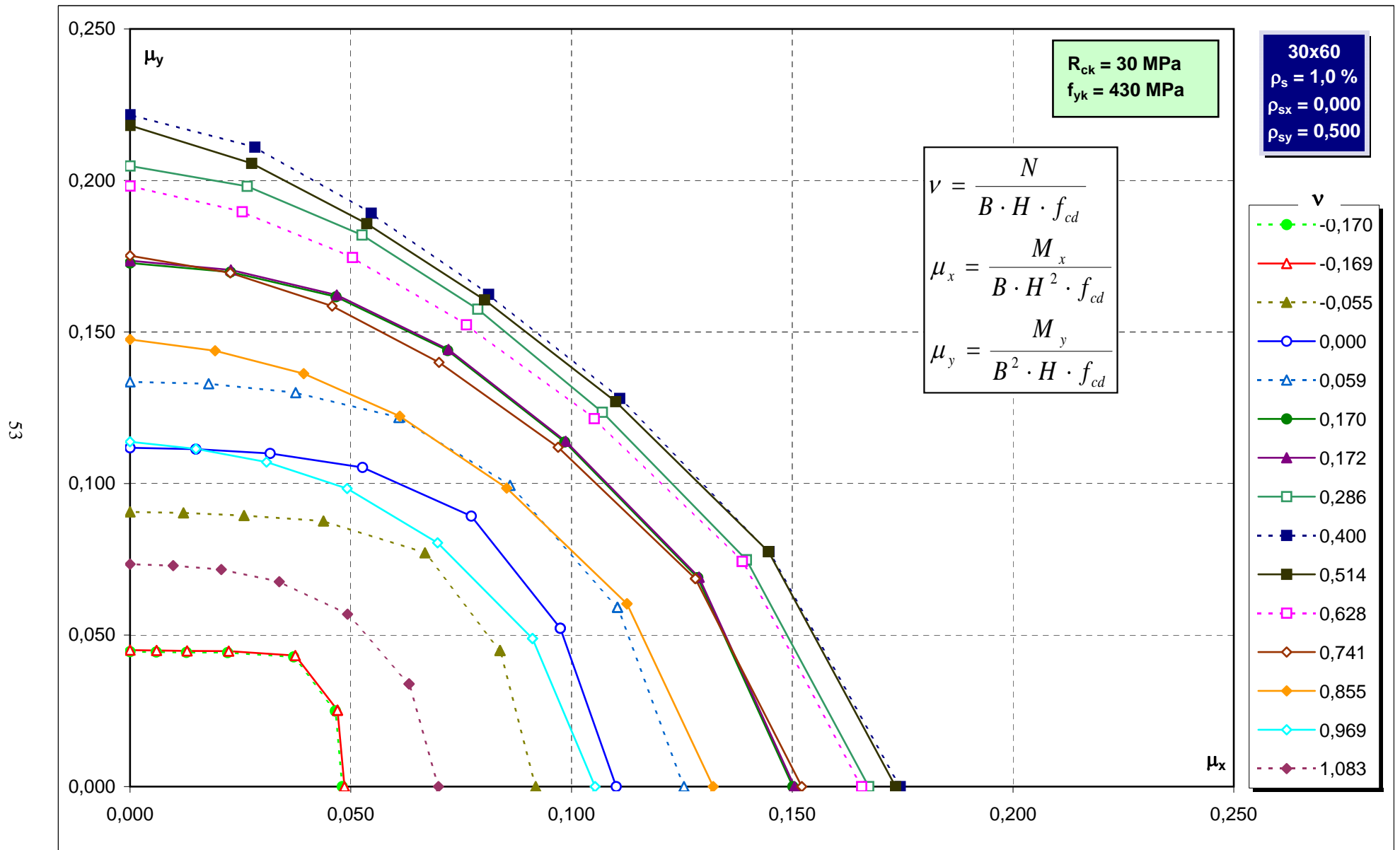
Abachi di verifica



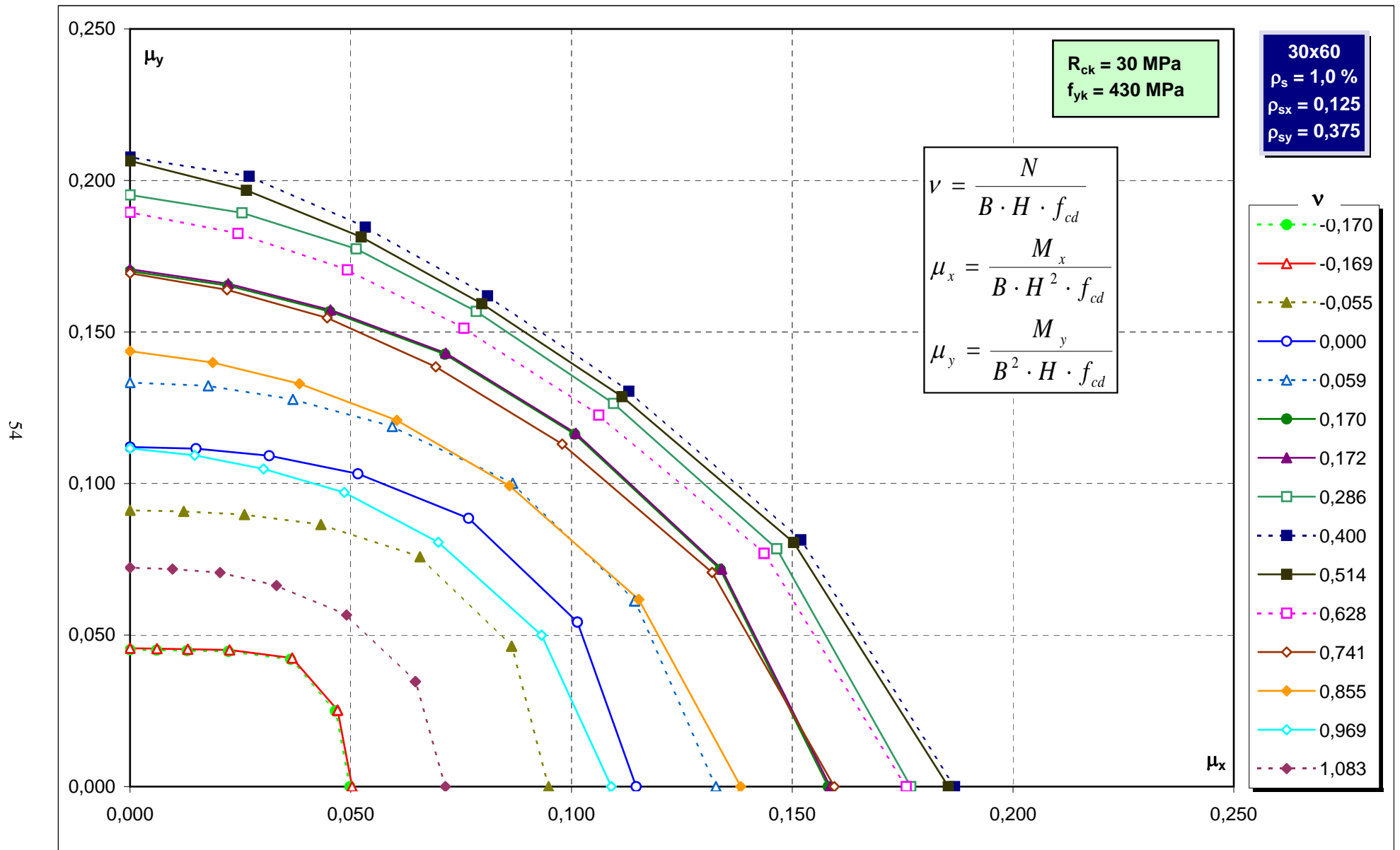
Abachi di verifica



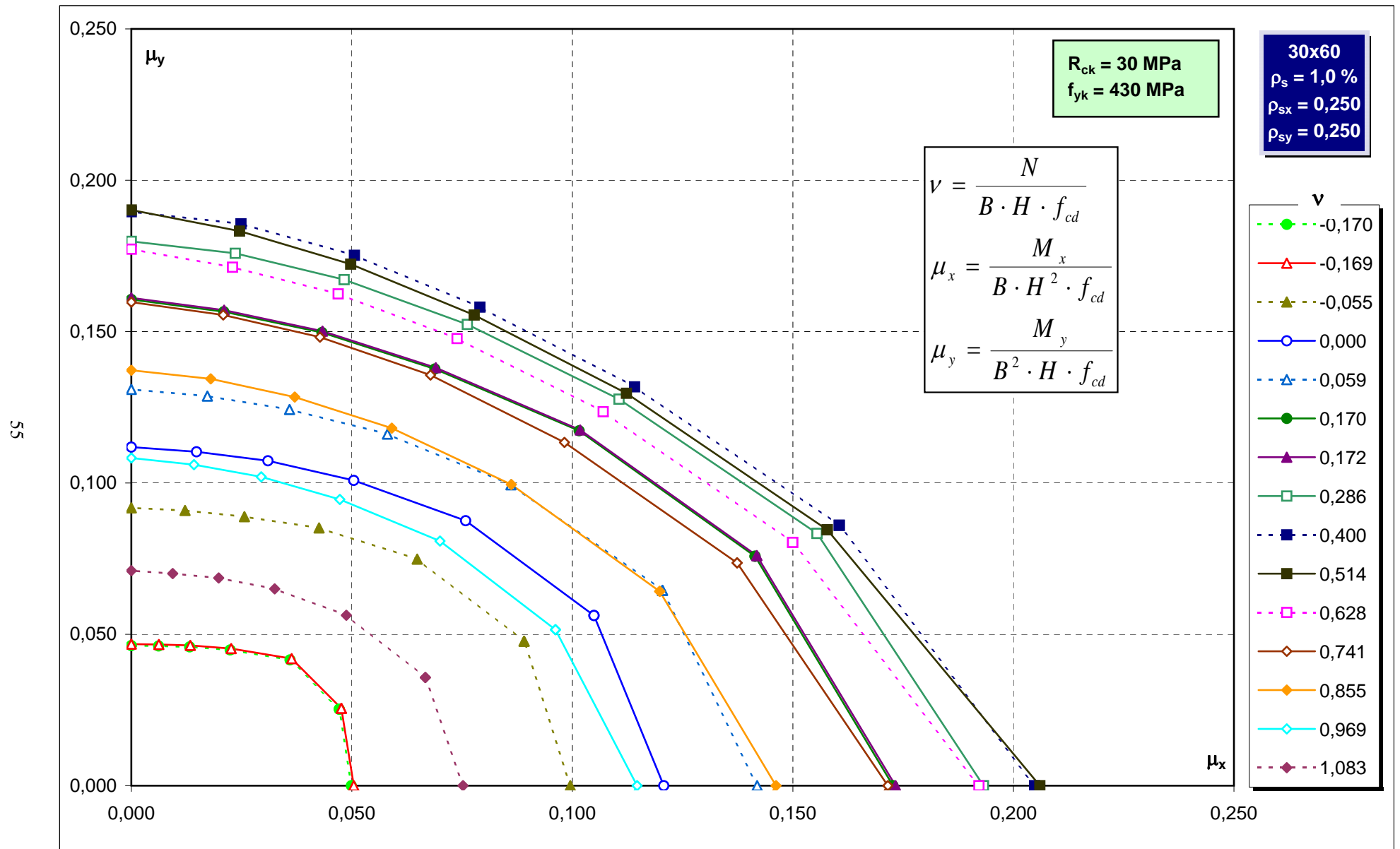
Abachi di verifica



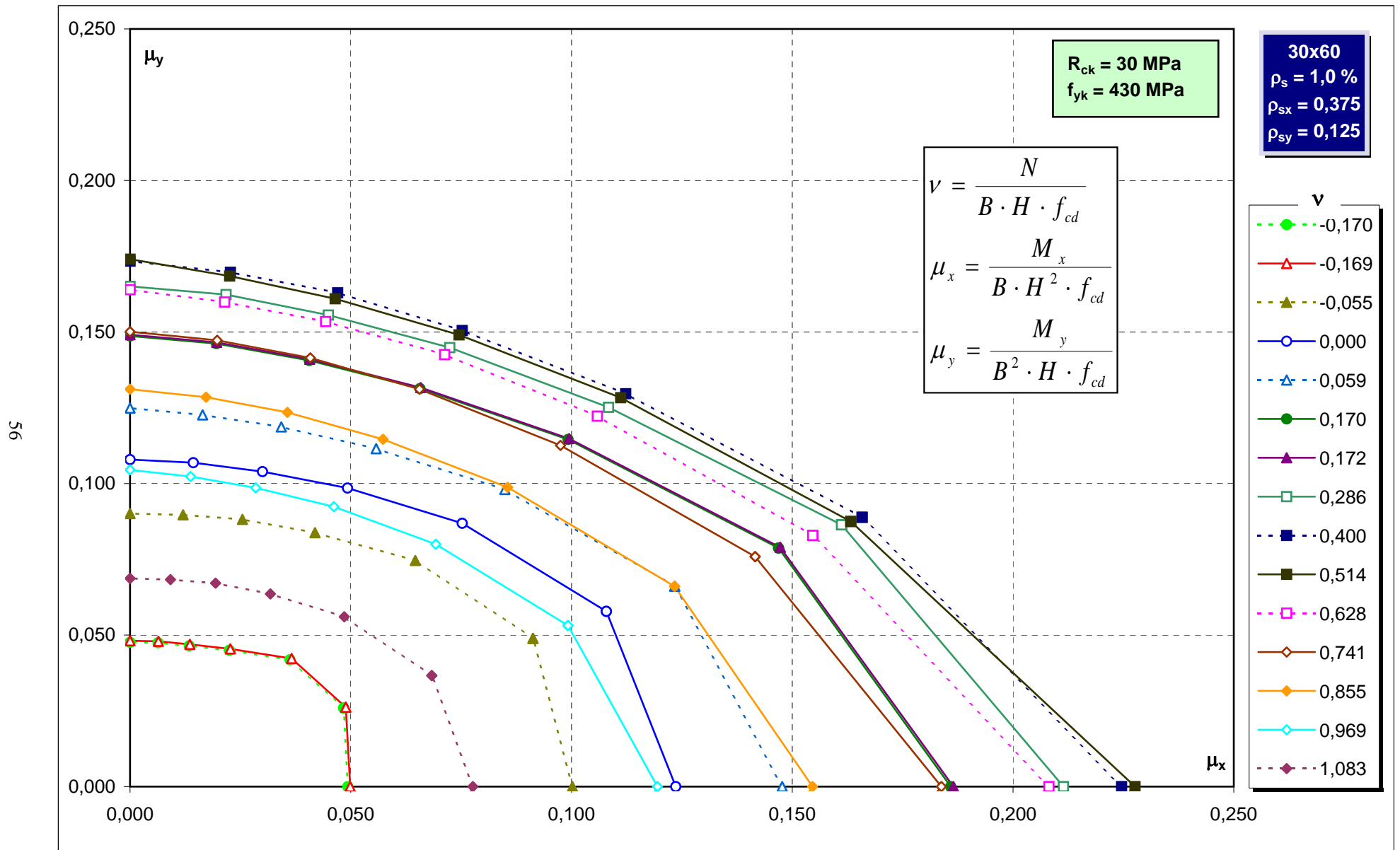
Abachi di verifica



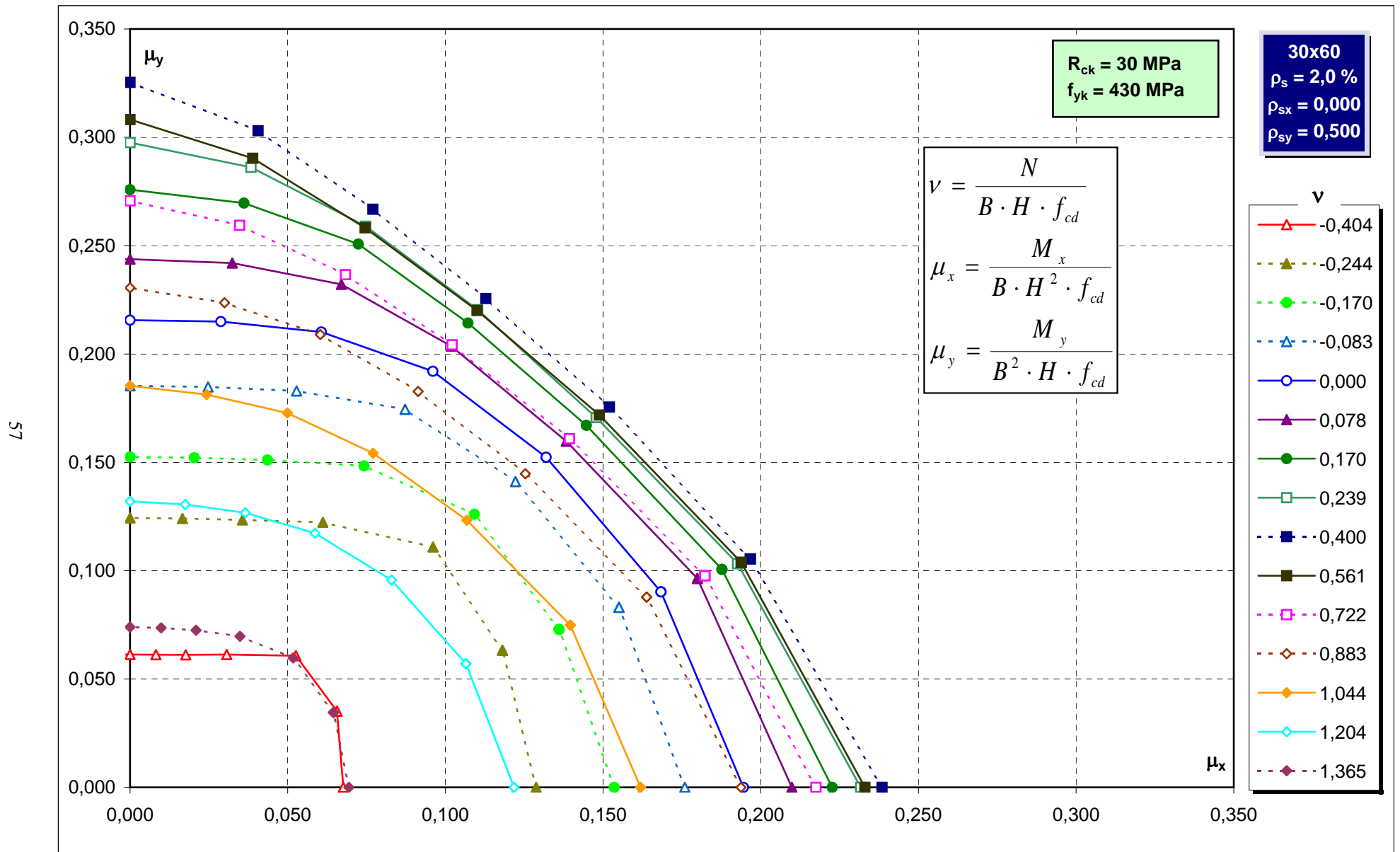
Abachi di verifica



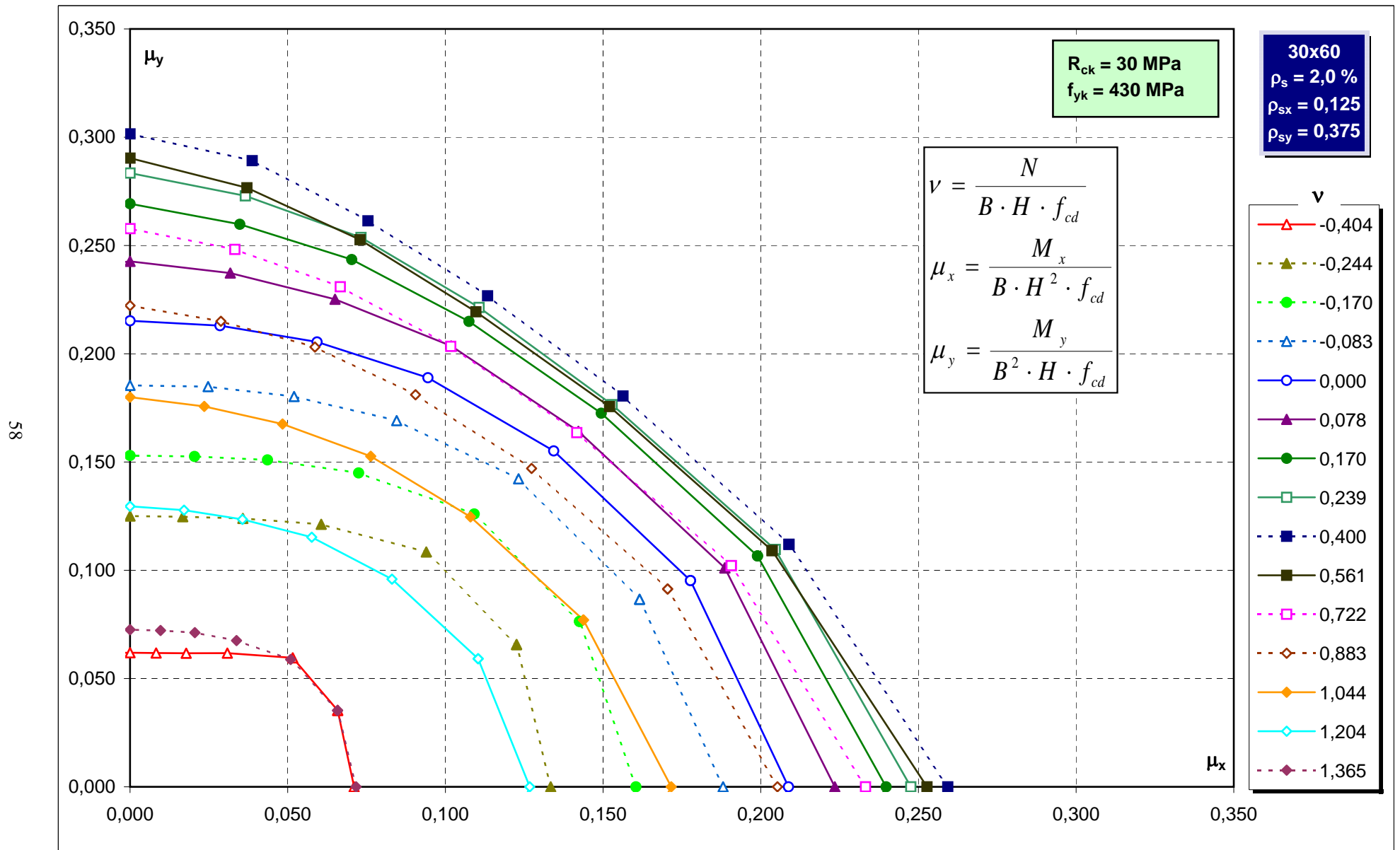
Abachi di verifica



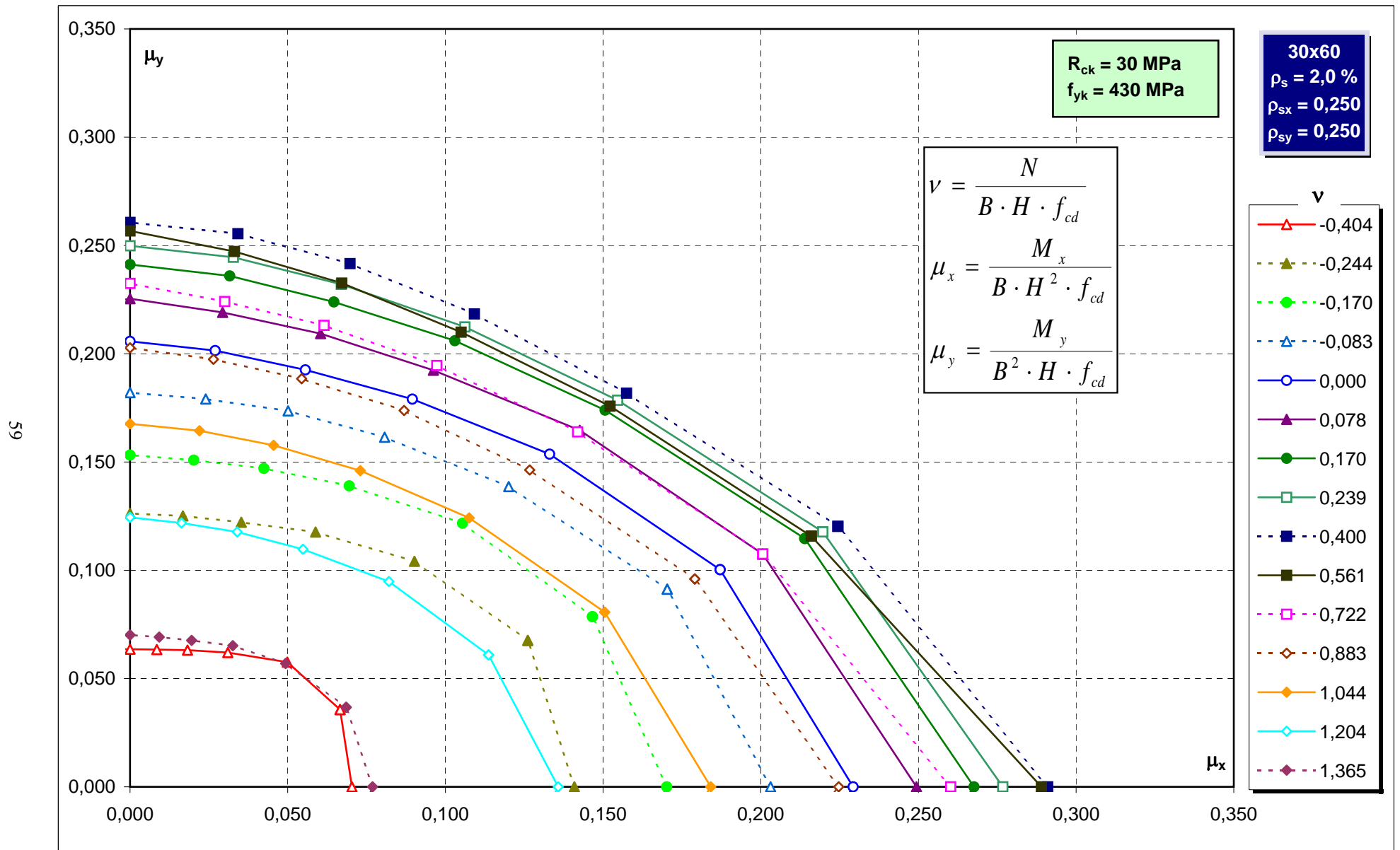
Abachi di verifica



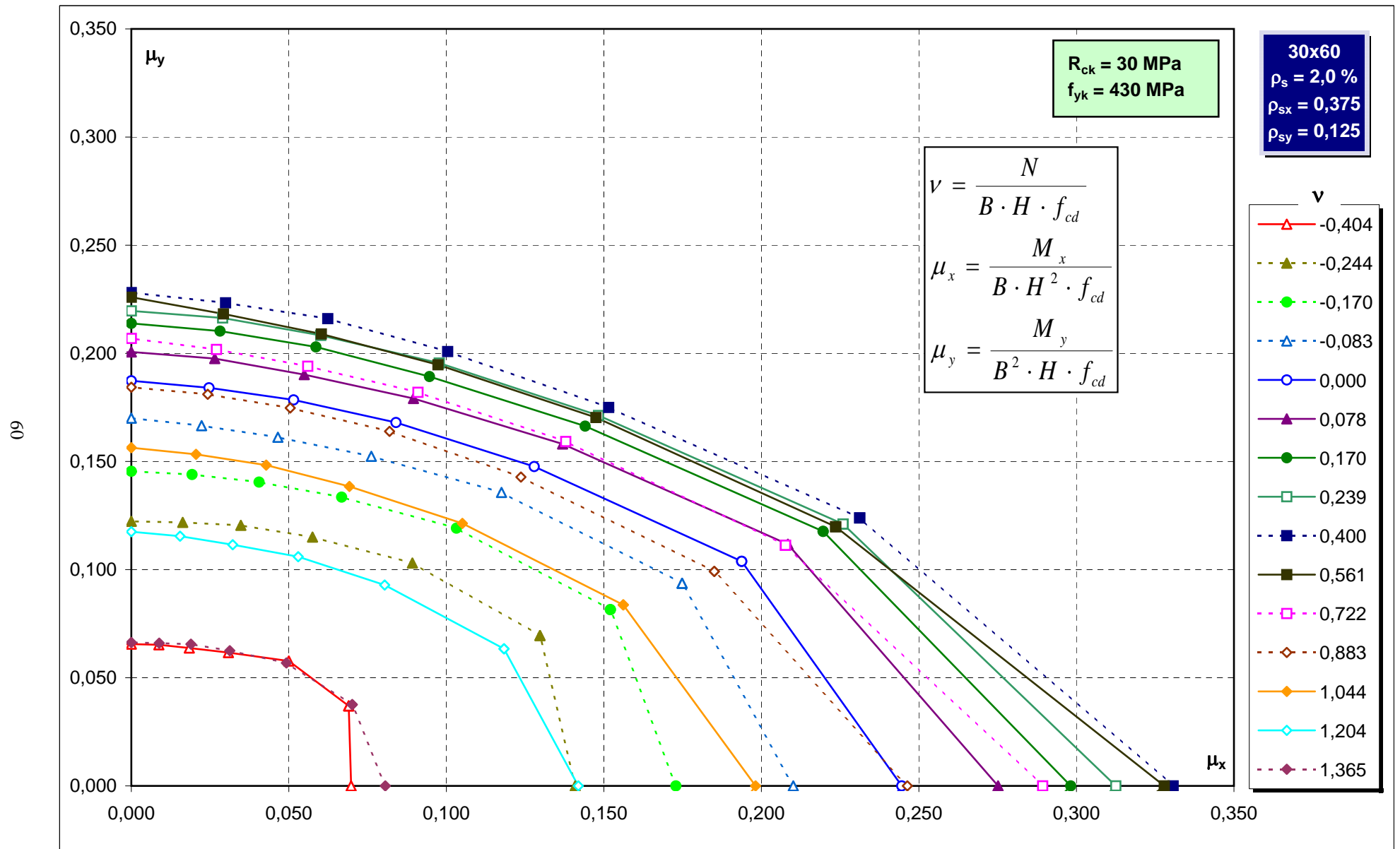
Abachi di verifica



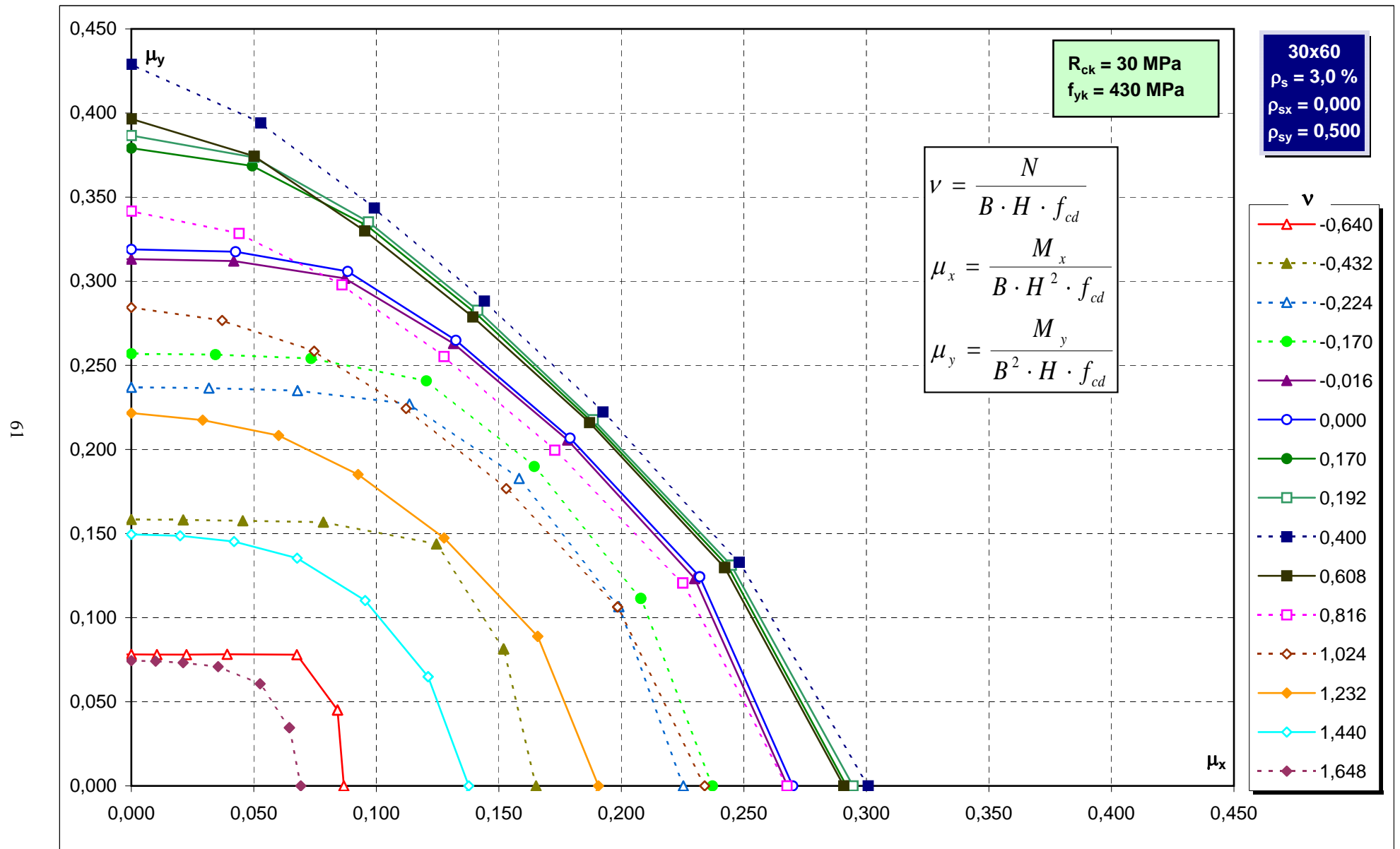
Abachi di verifica



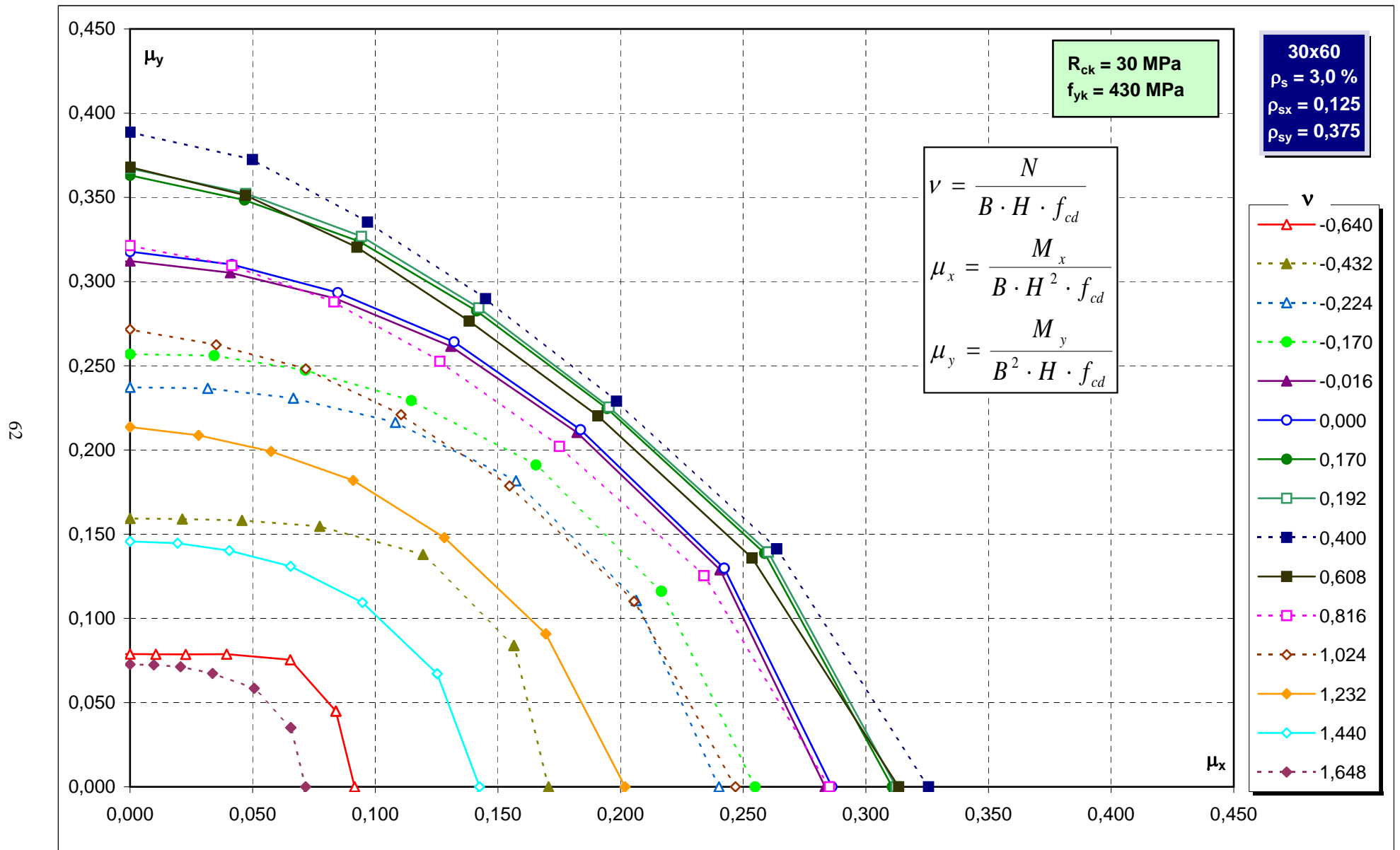
Abachi di verifica



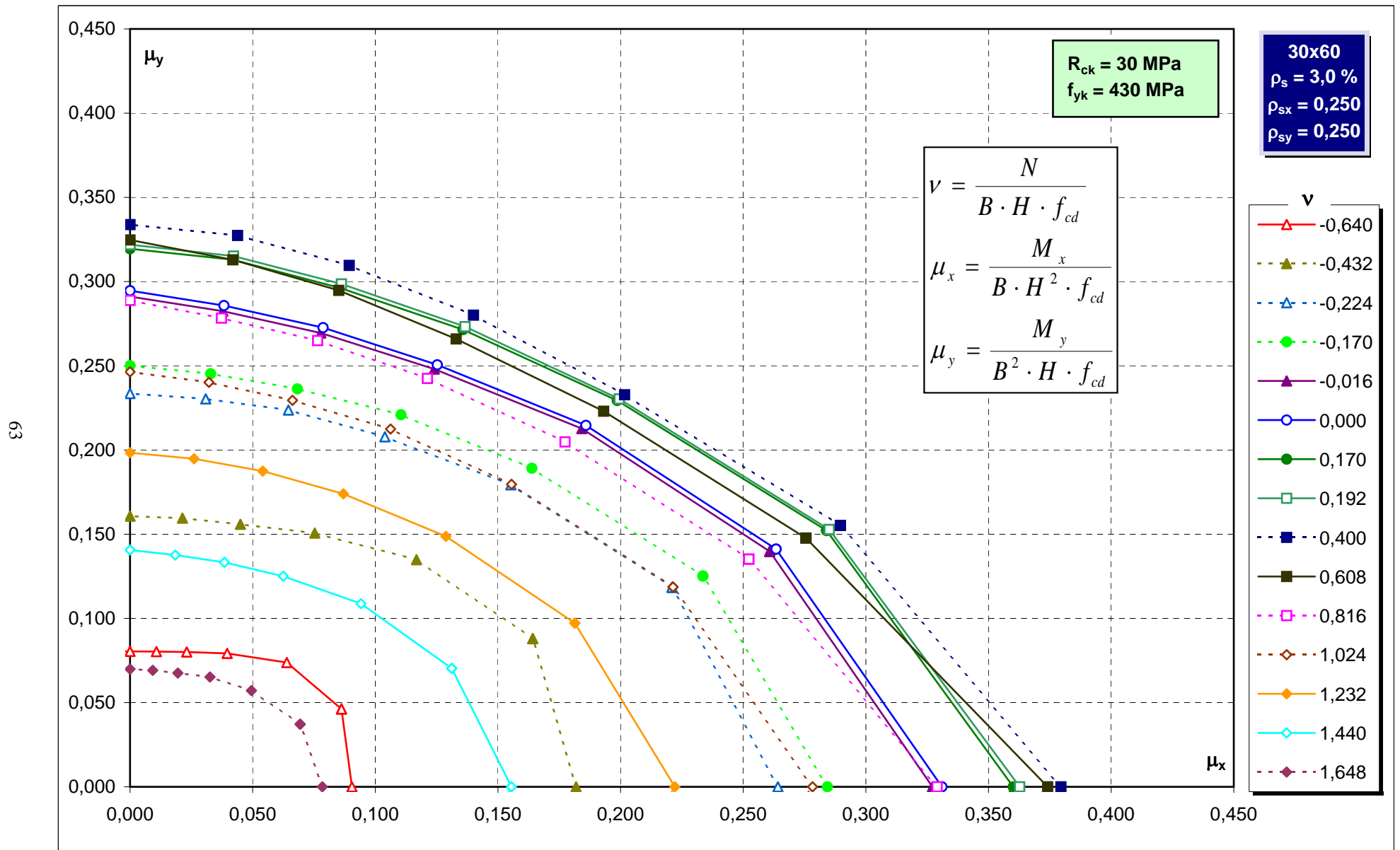
Abachi di verifica



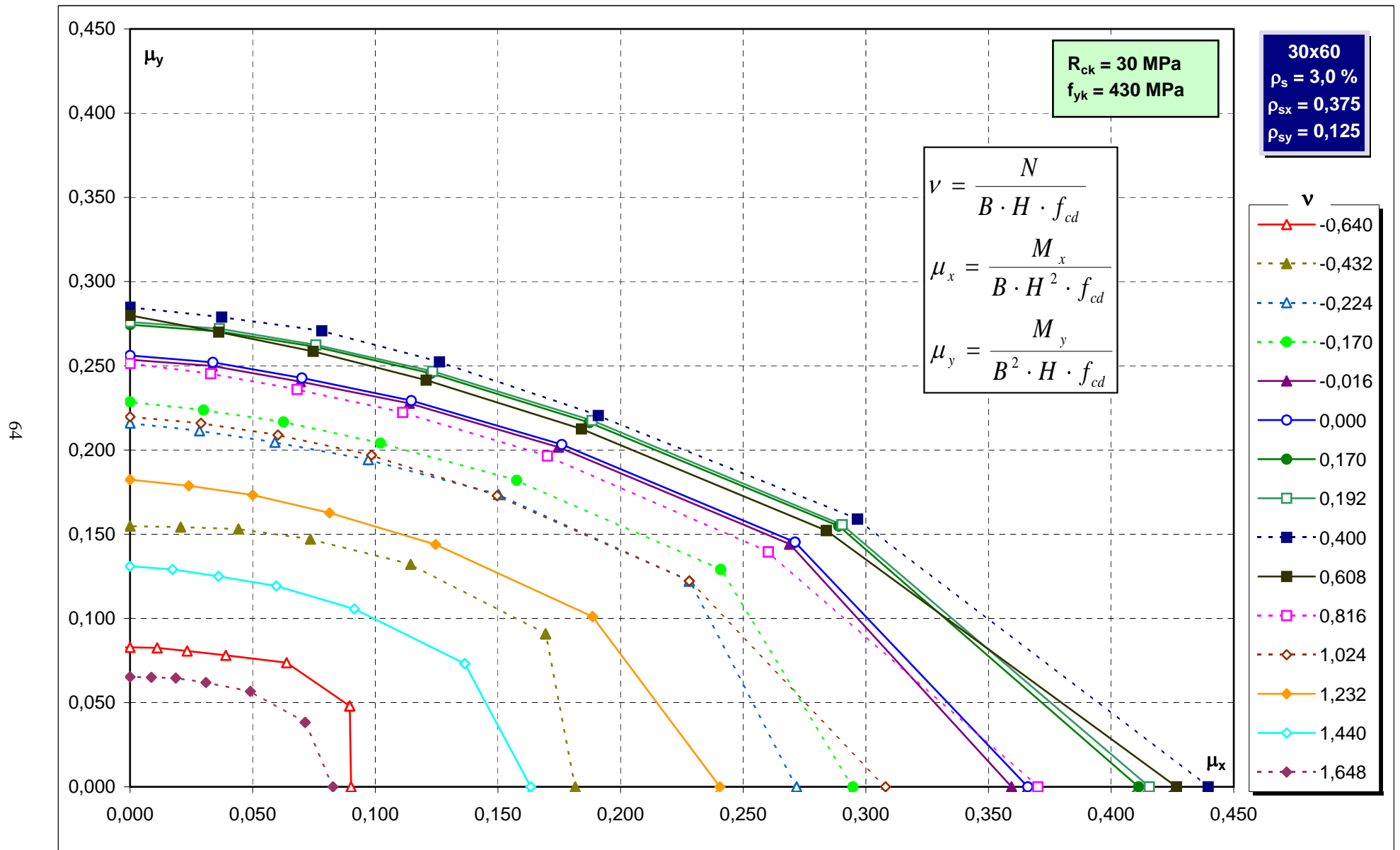
Abachi di verifica



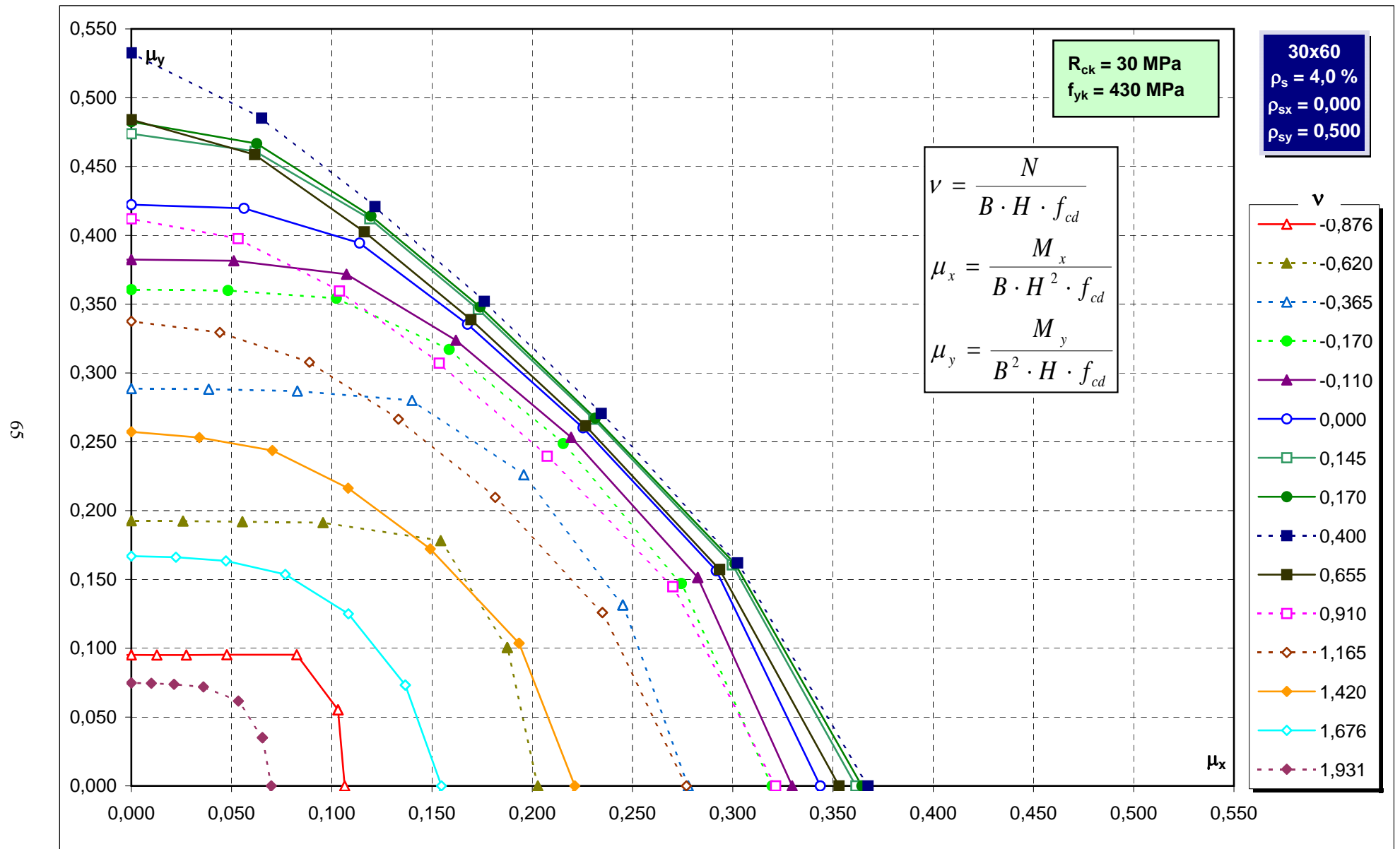
Abachi di verifica



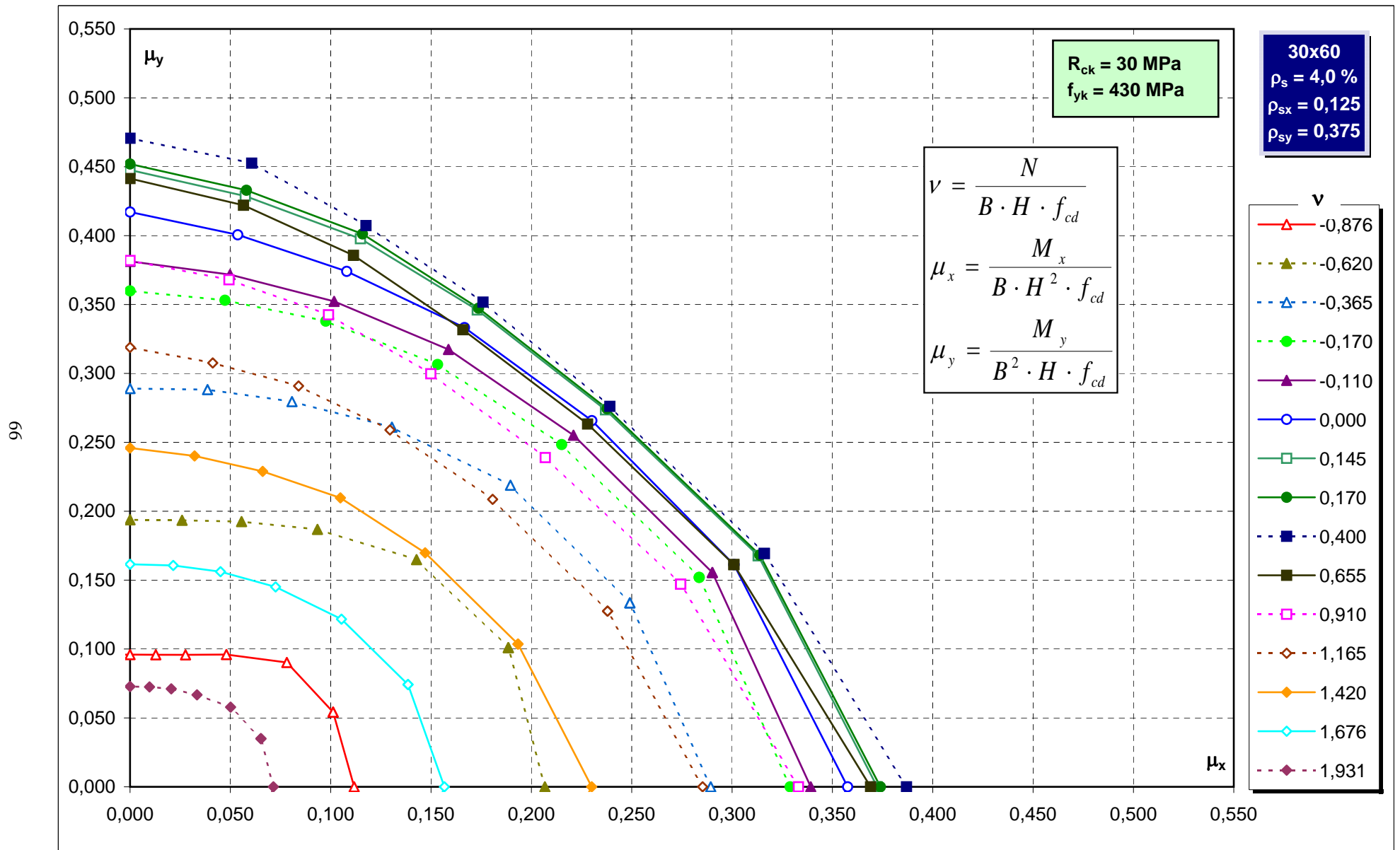
Abachi di verifica



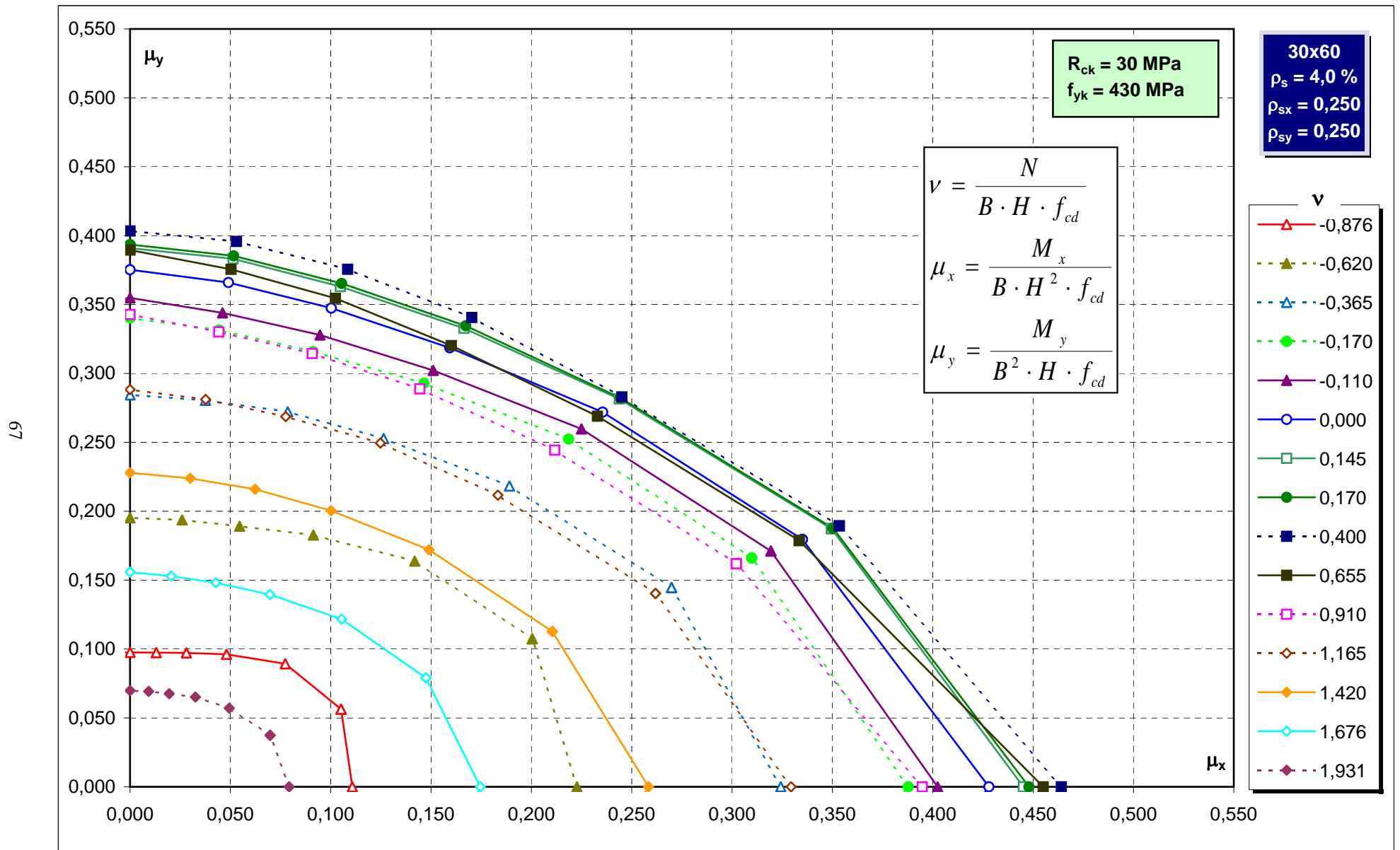
Abachi di verifica



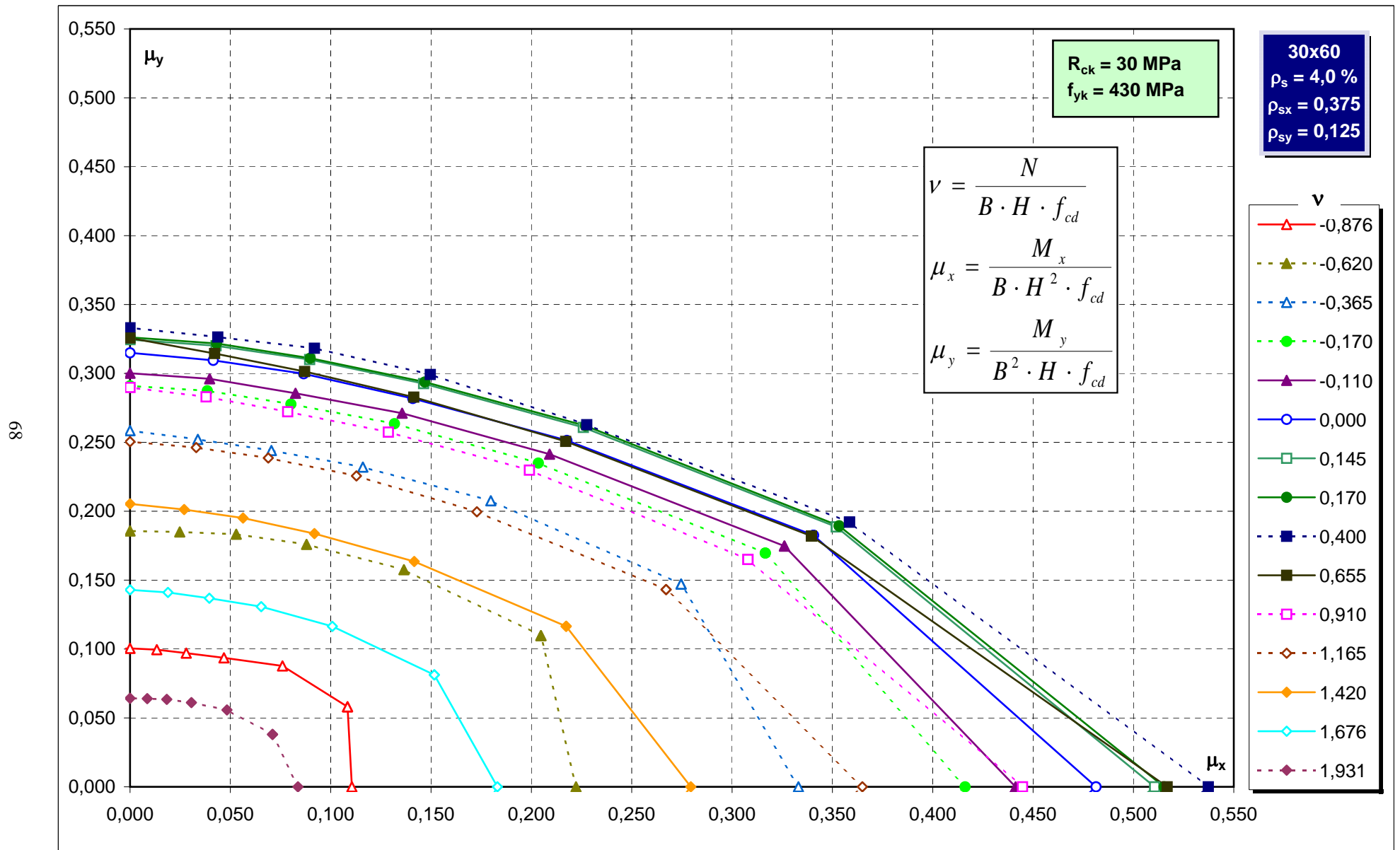
Abachi di verifica



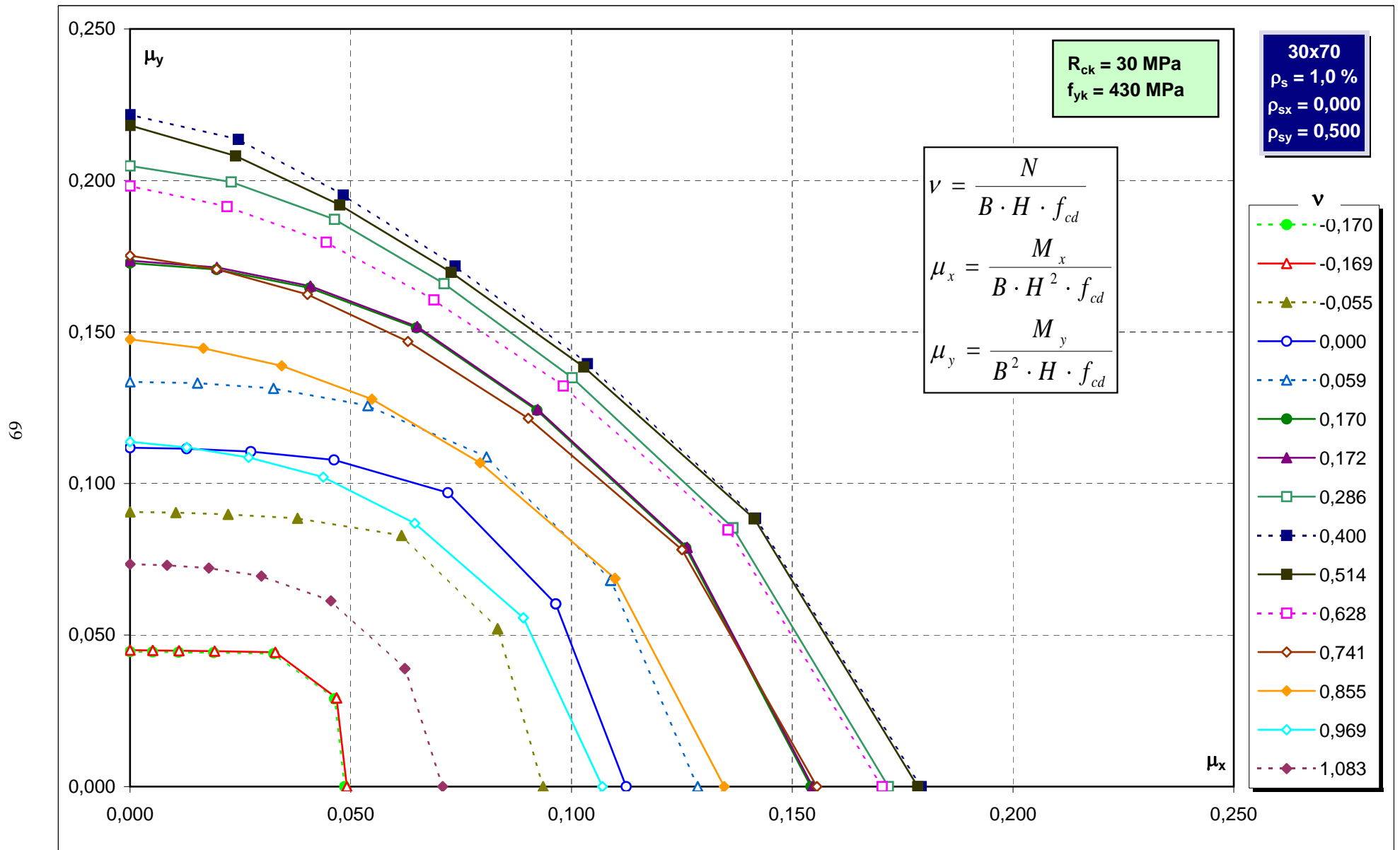
Abachi di verifica



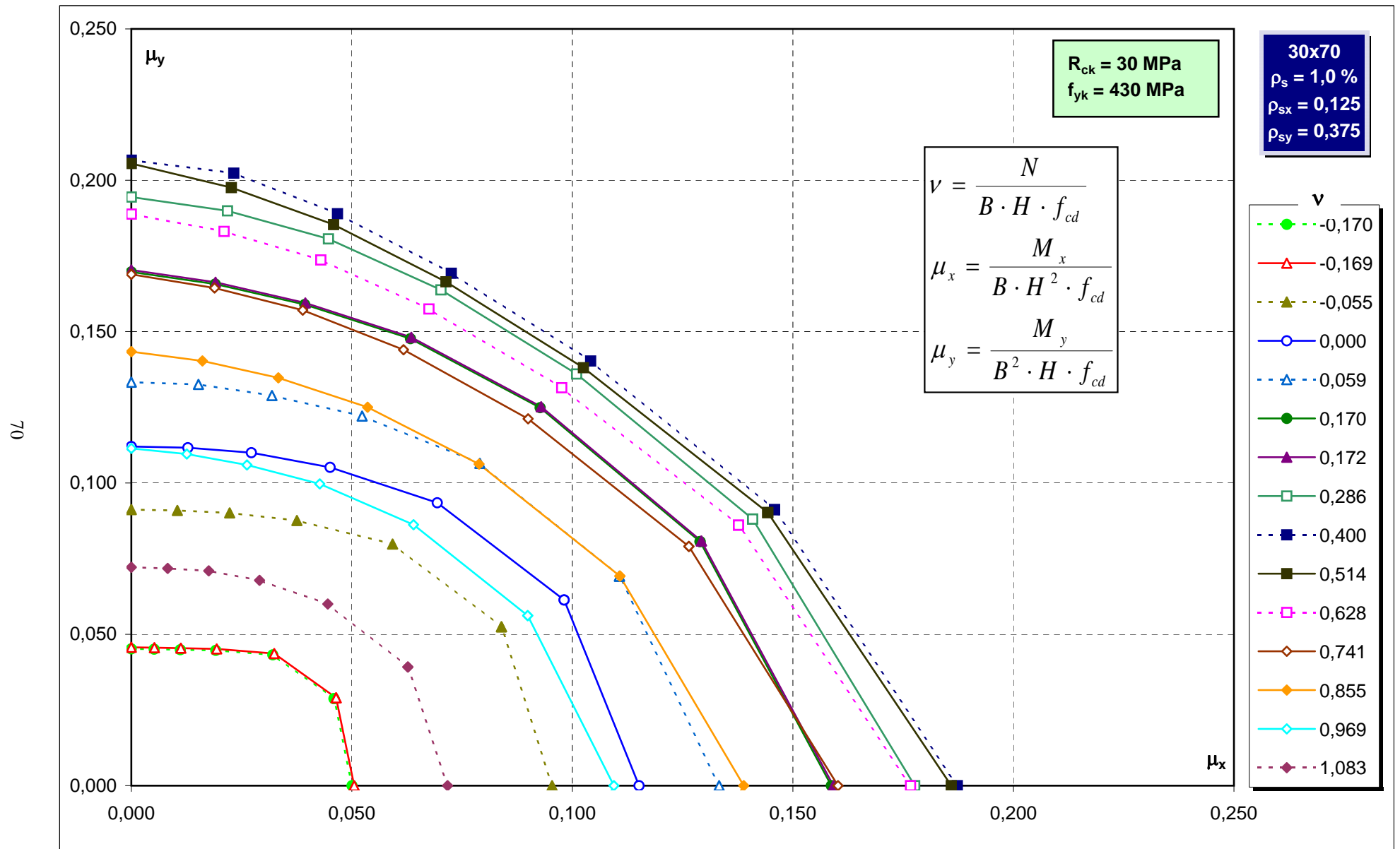
Abachi di verifica



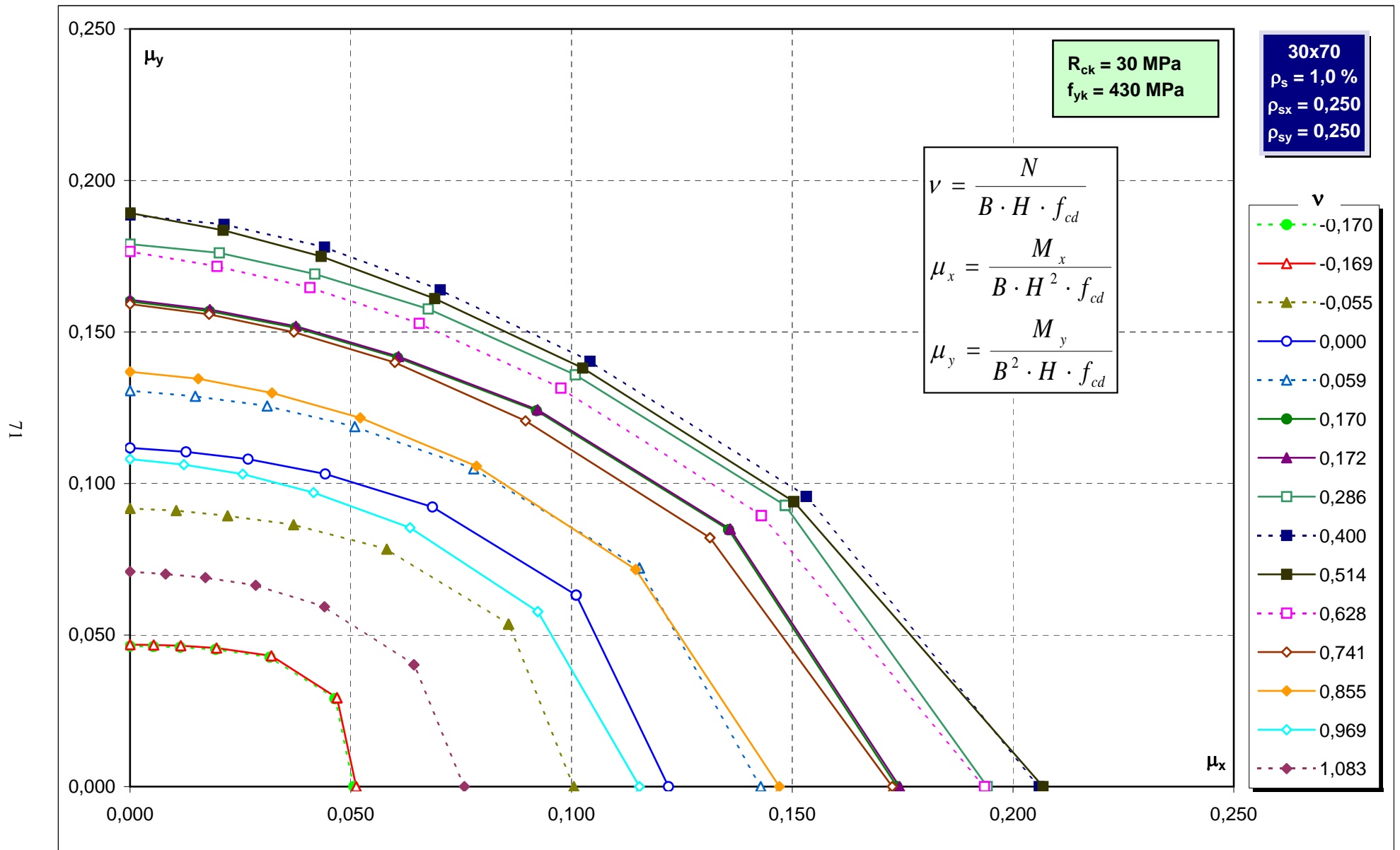
Abachi di verifica



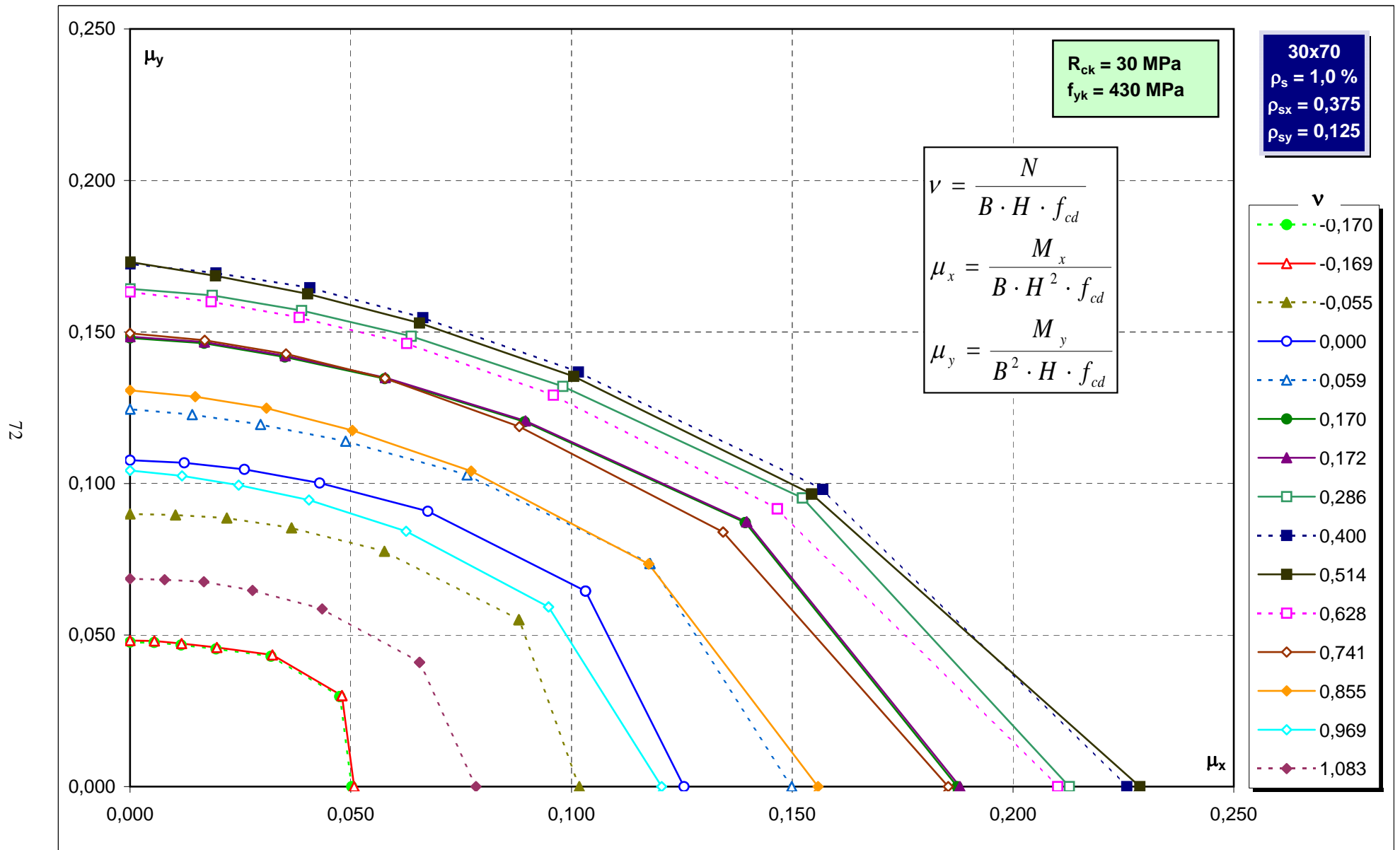
Abachi di verifica



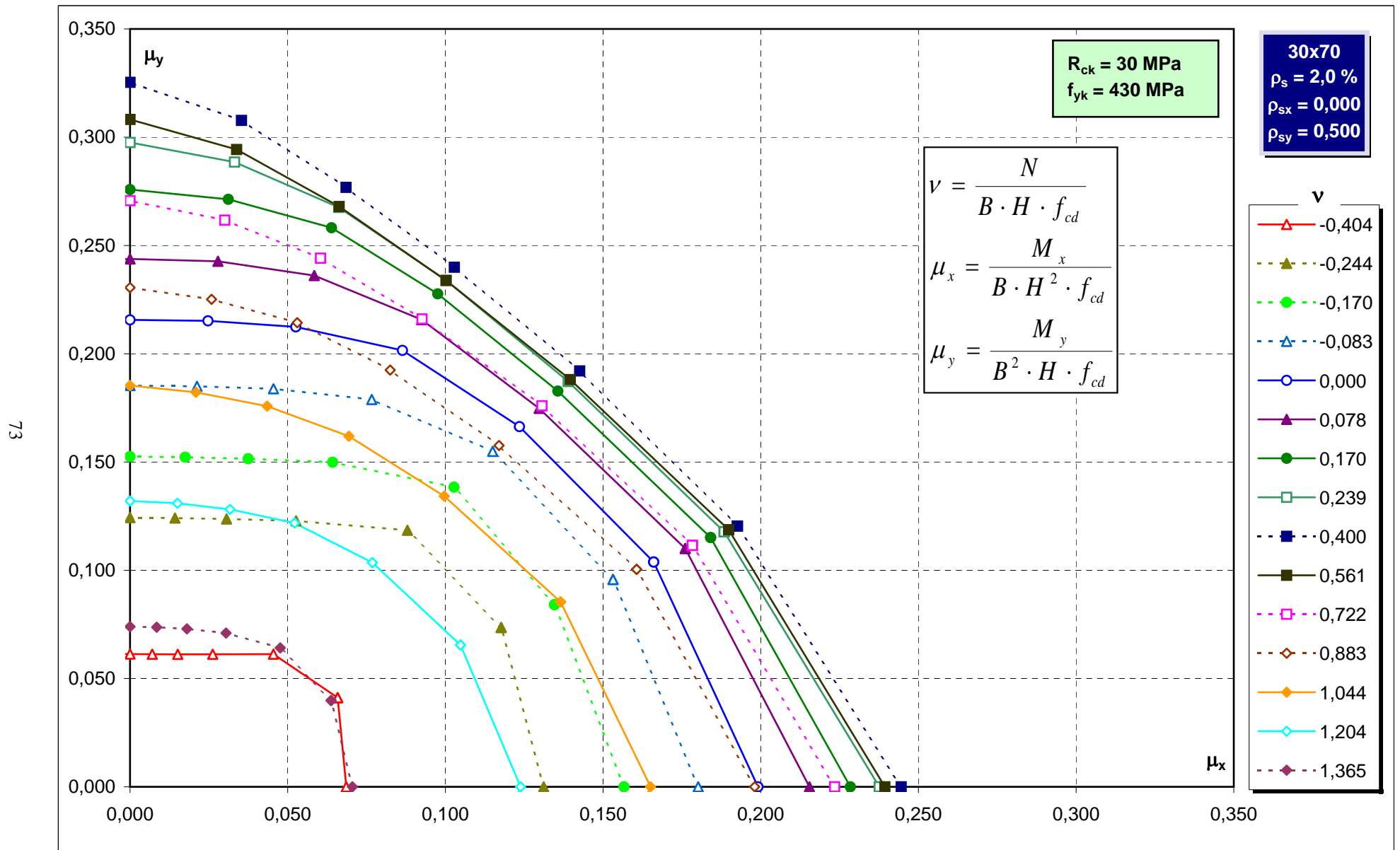
Abachi di verifica



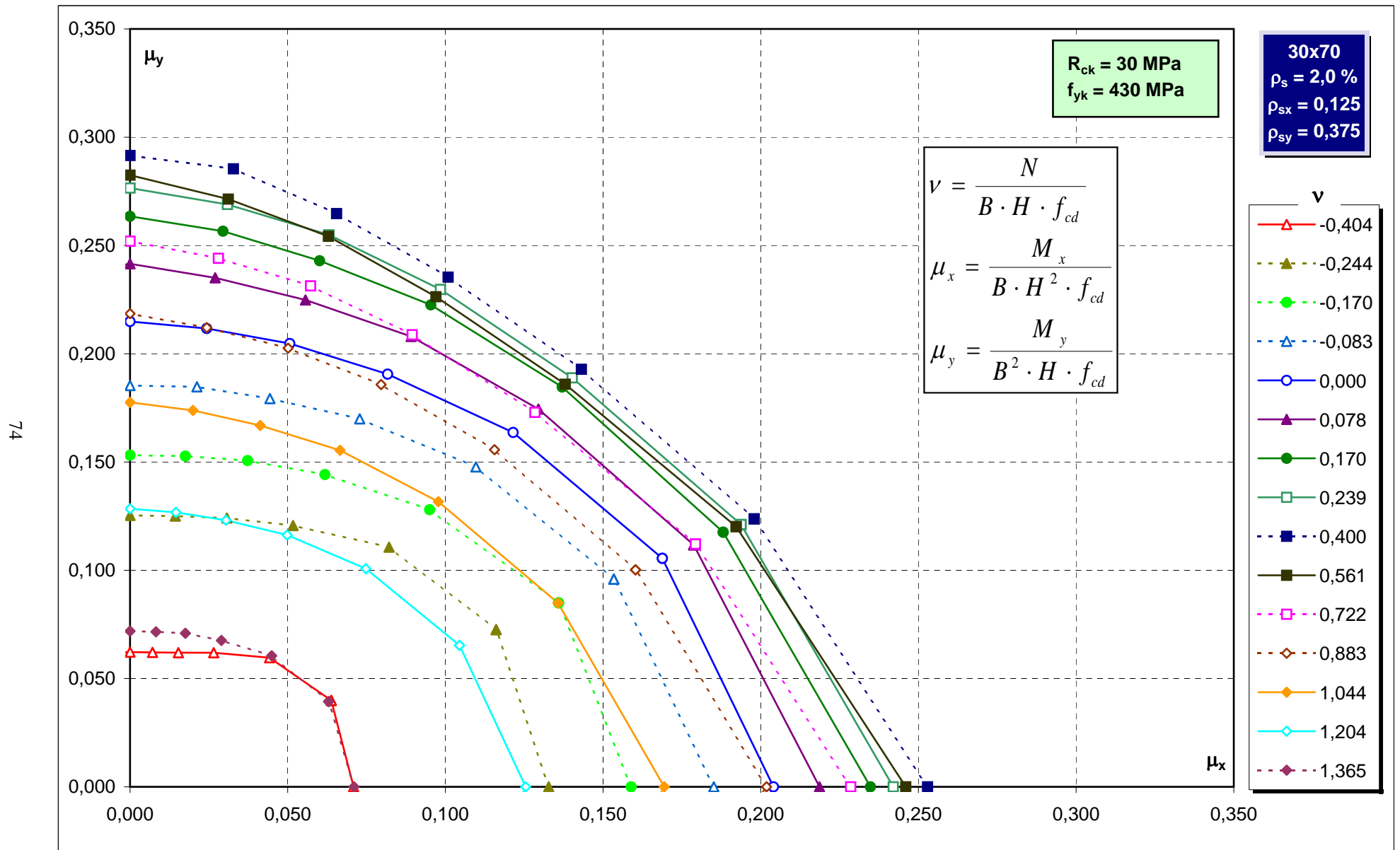
Abachi di verifica



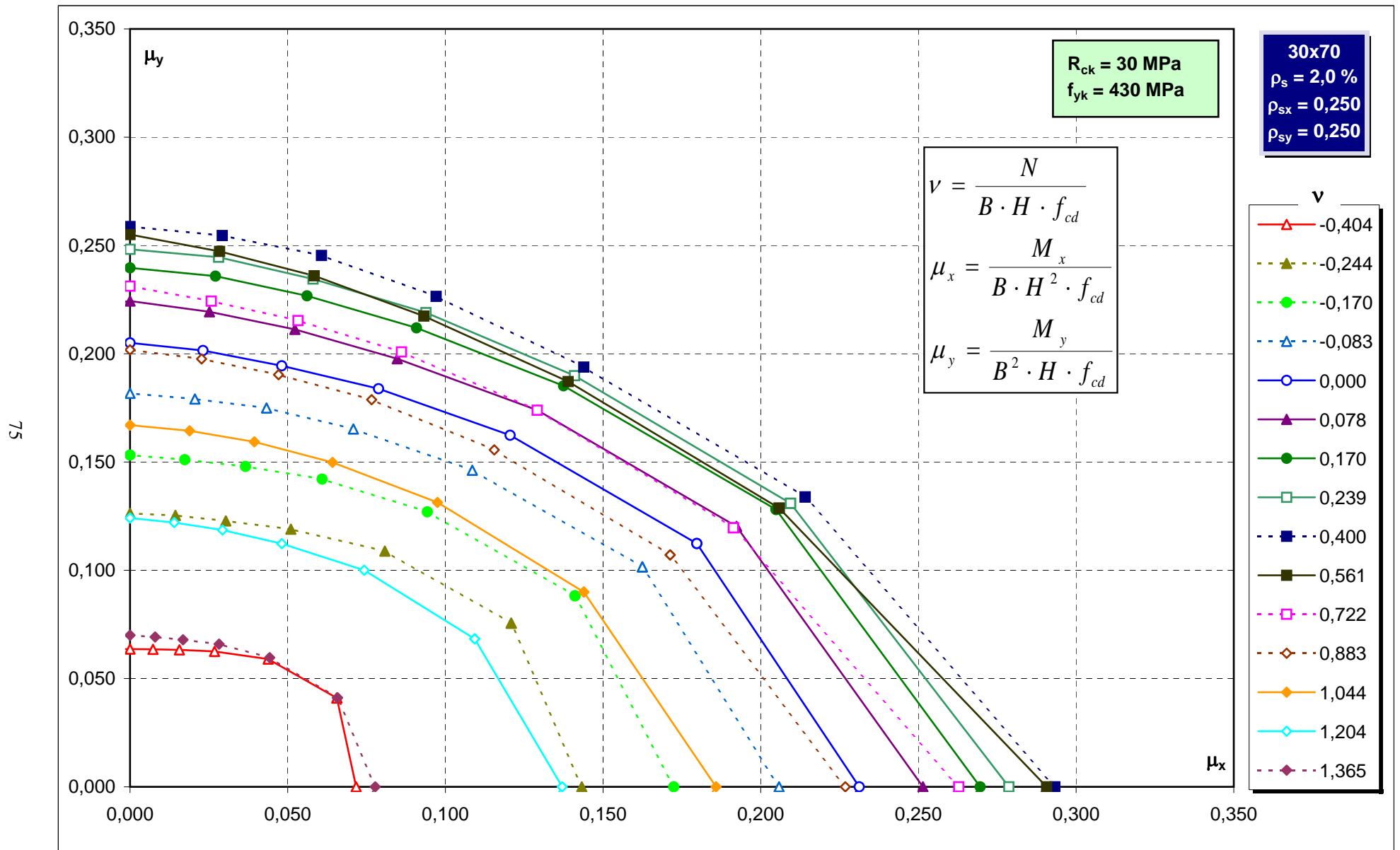
Abachi di verifica



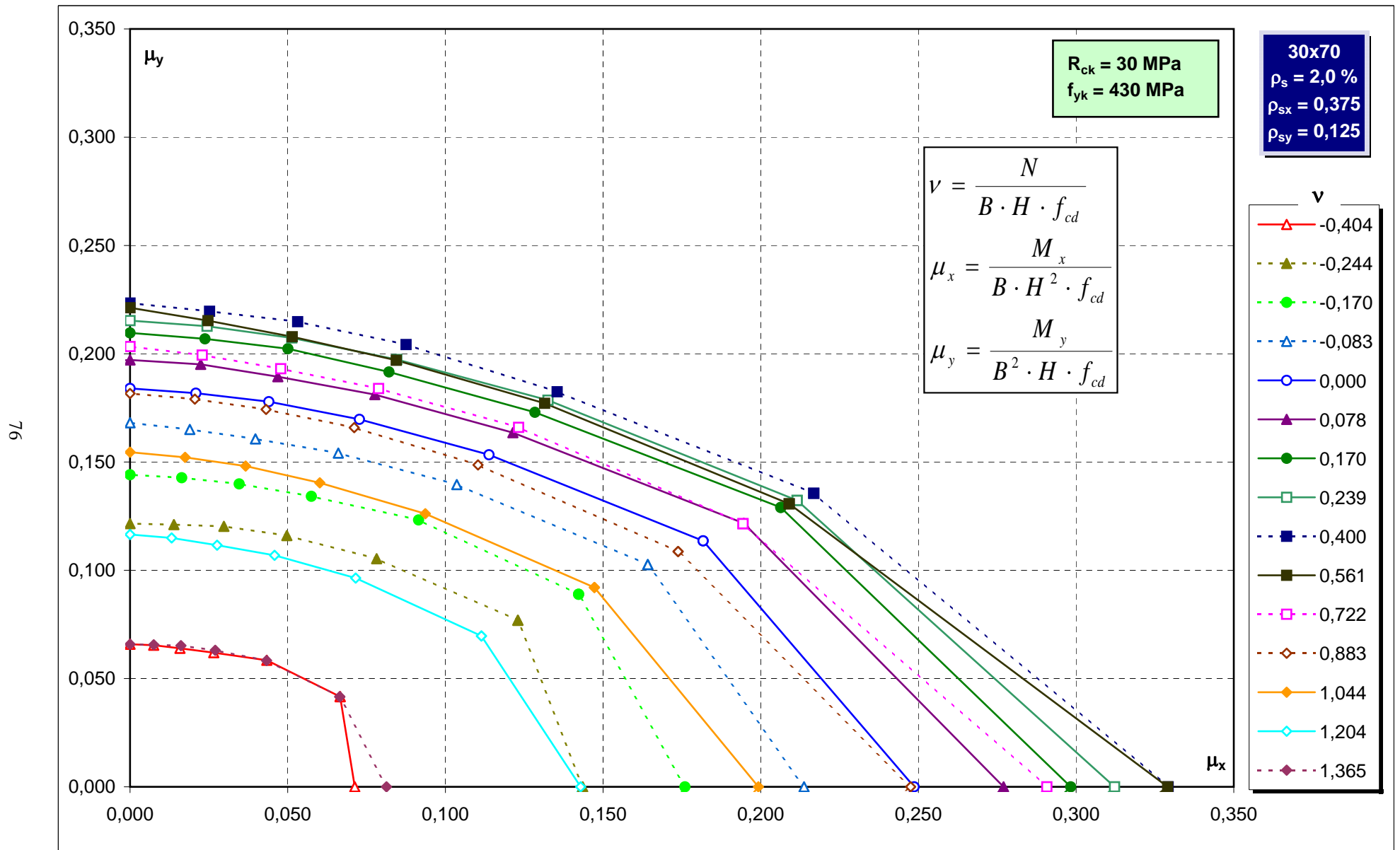
Abachi di verifica



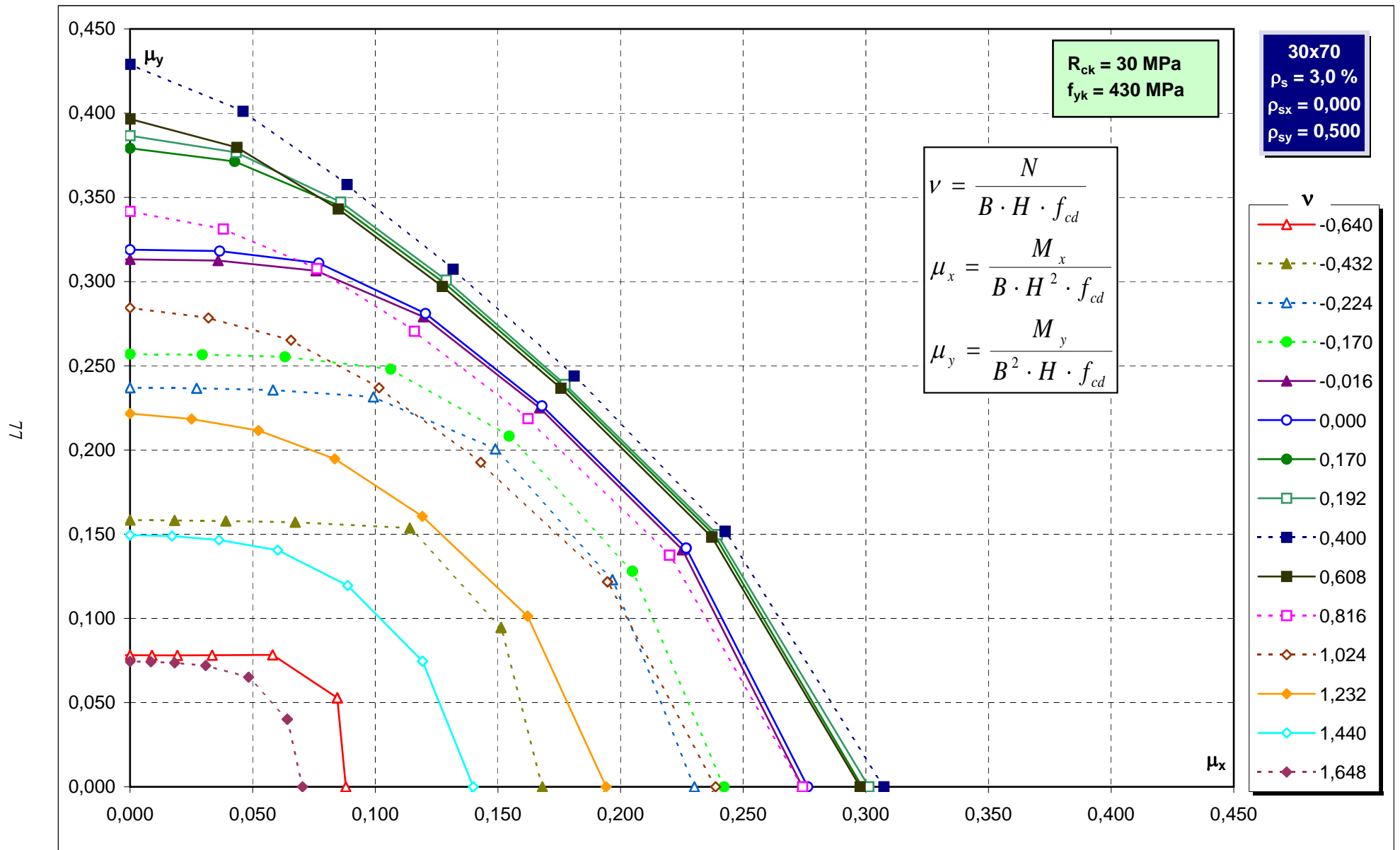
Abachi di verifica



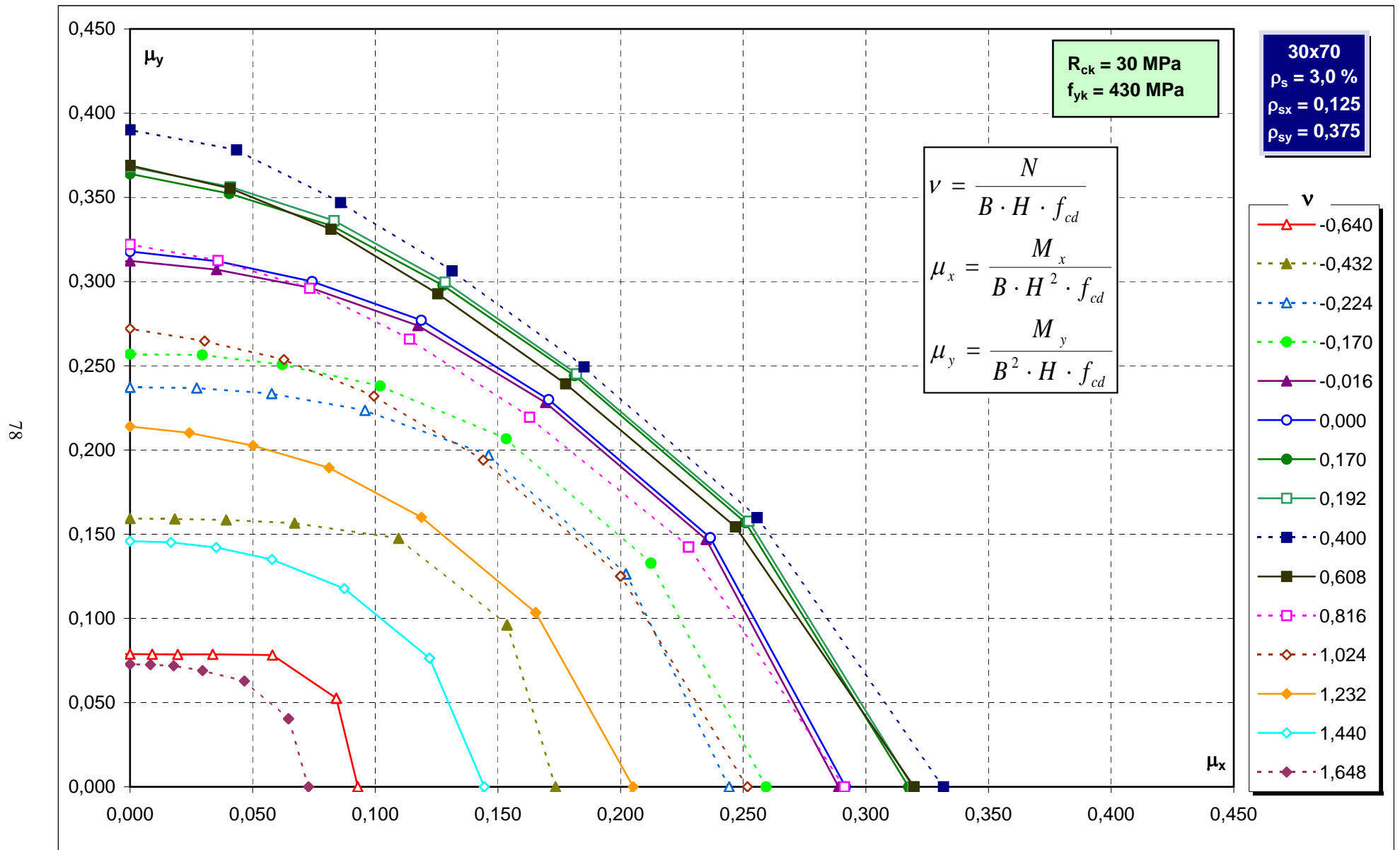
Abachi di verifica



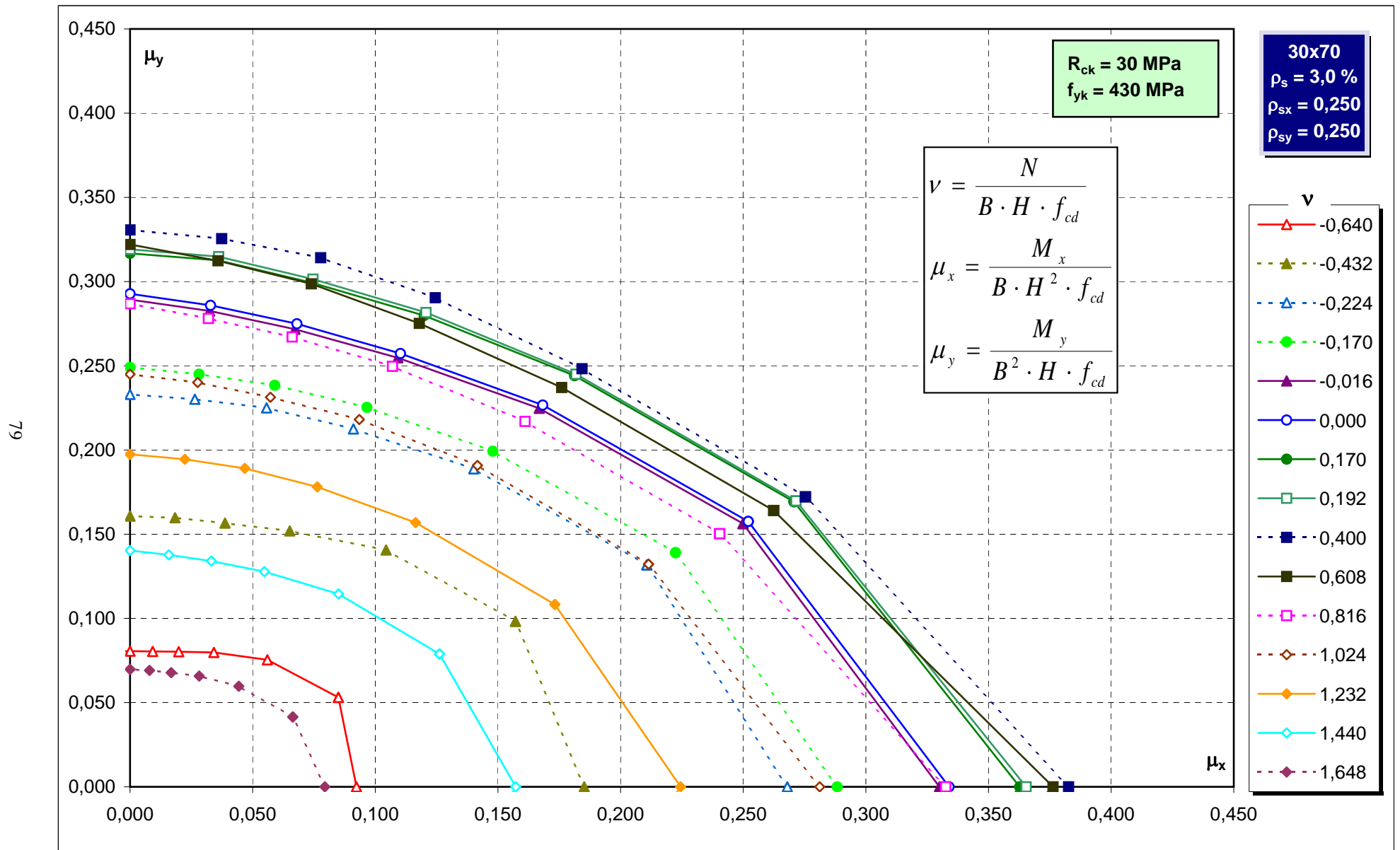
Abachi di verifica



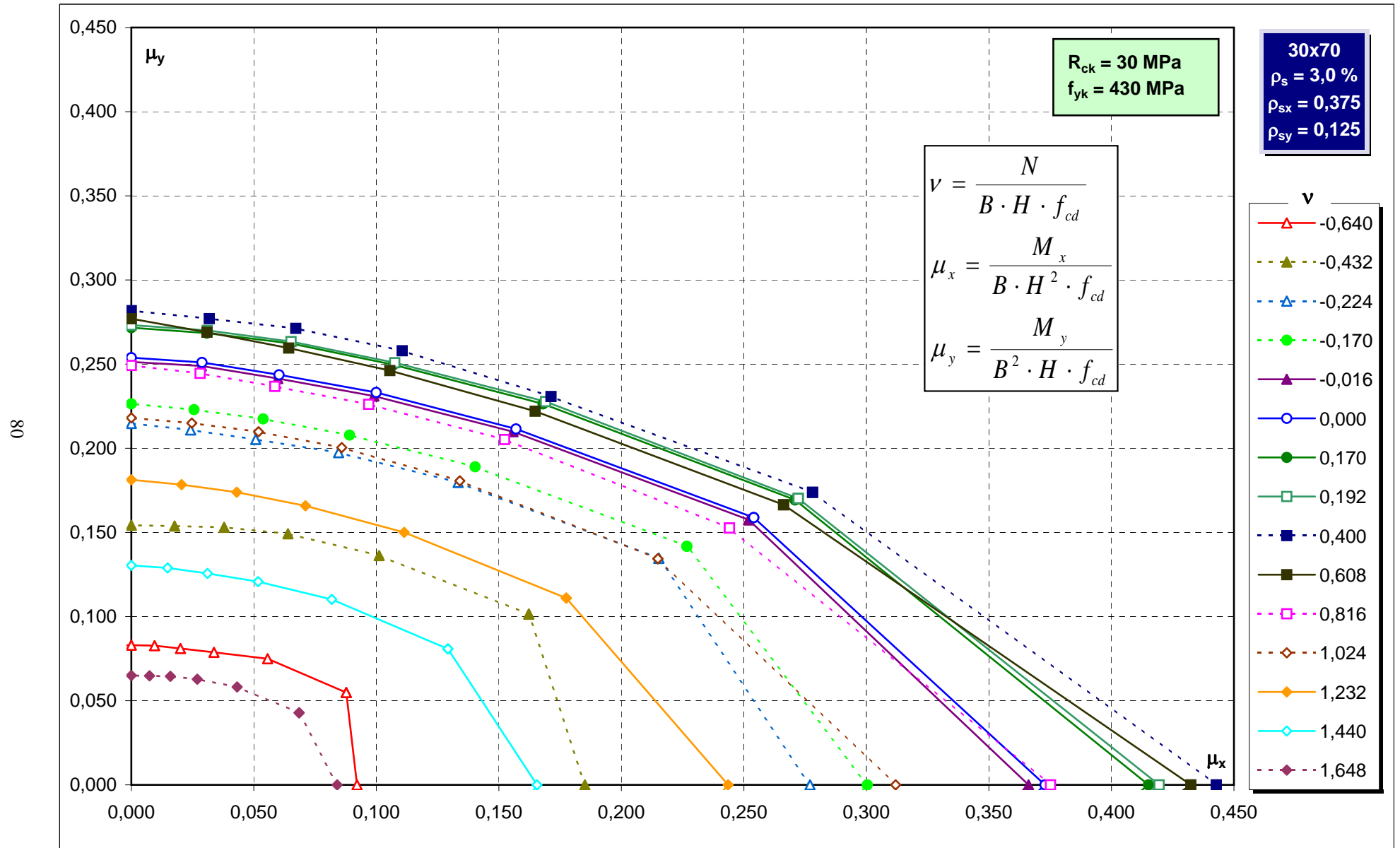
Abachi di verifica



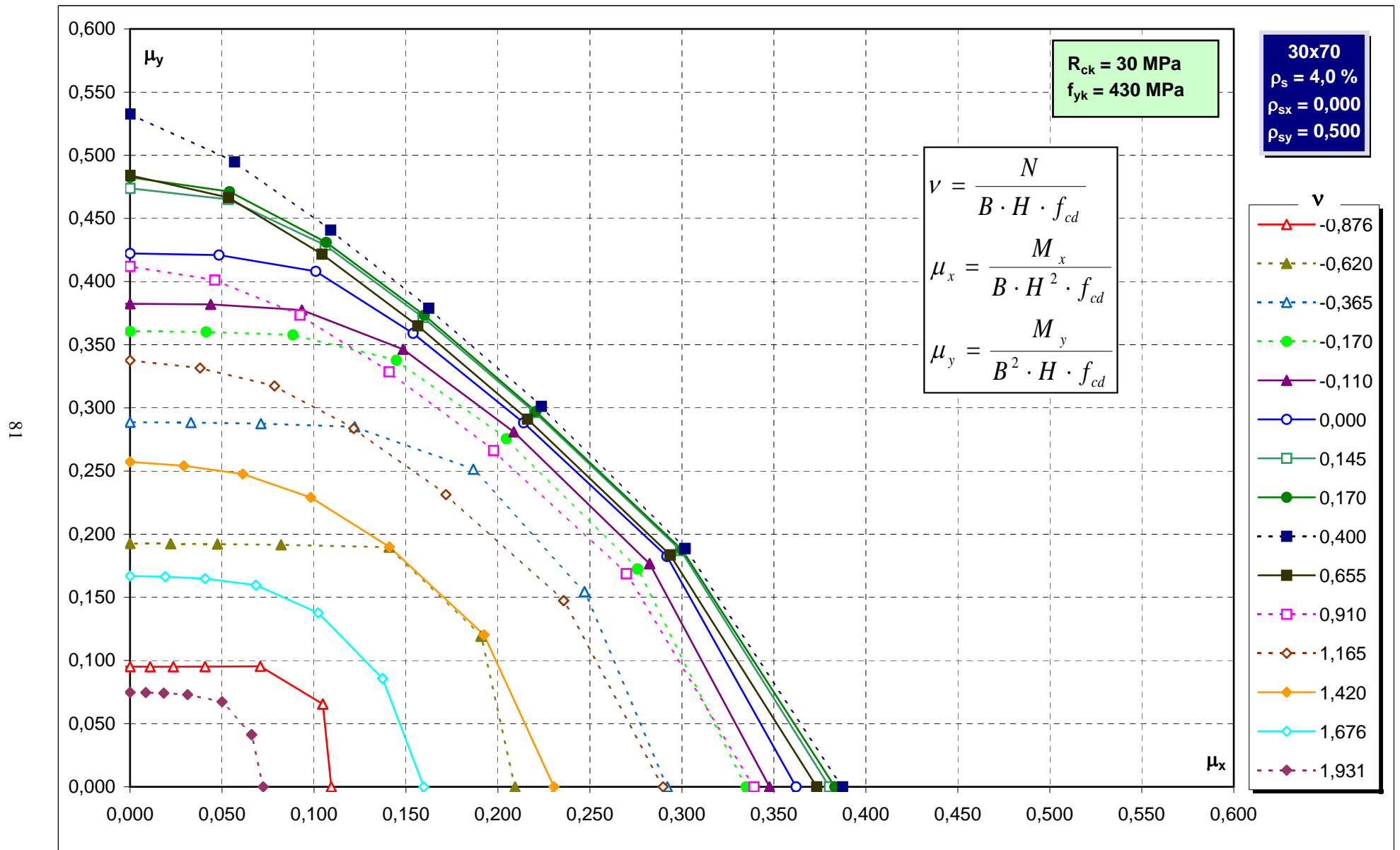
Abachi di verifica



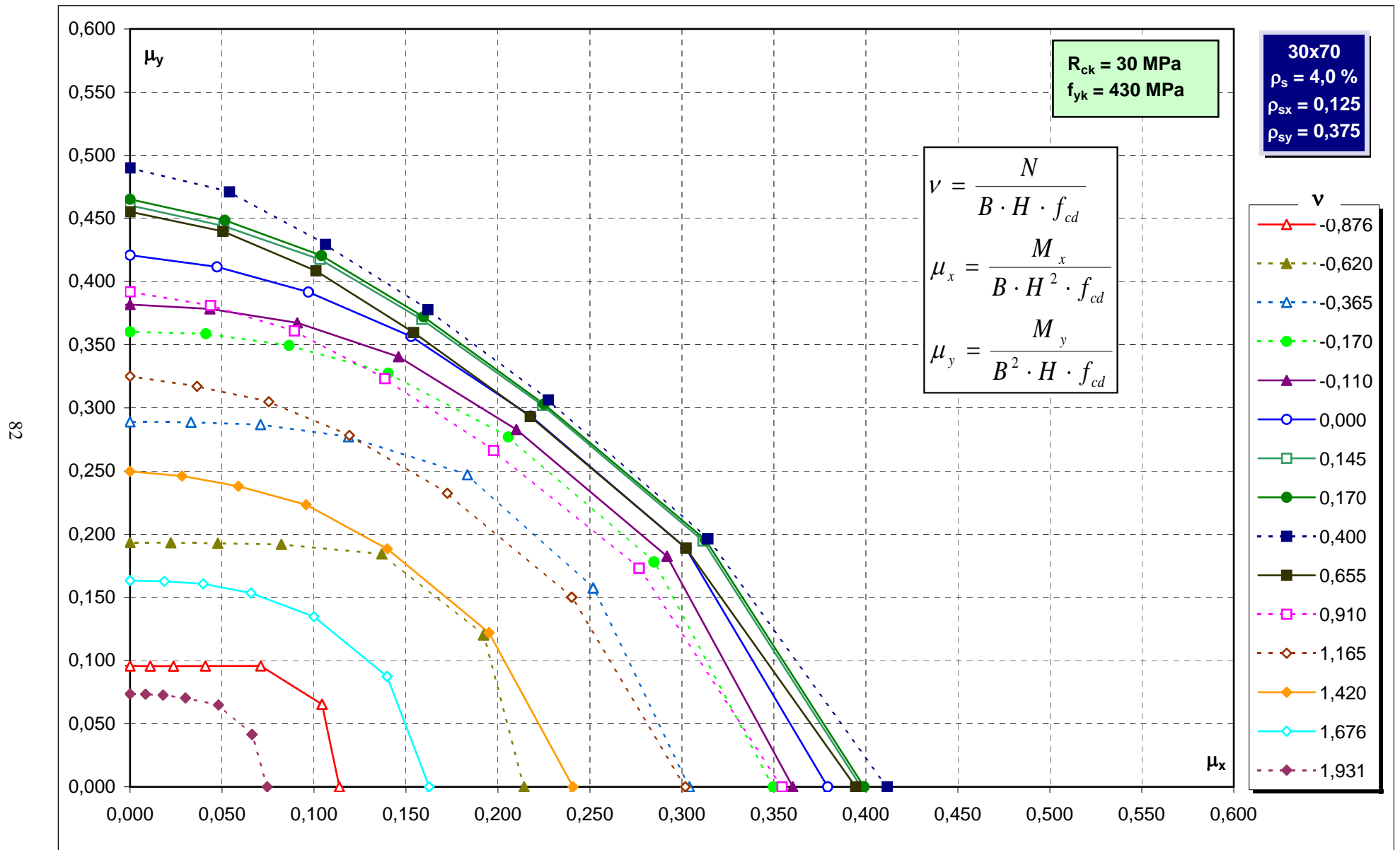
Abachi di verifica



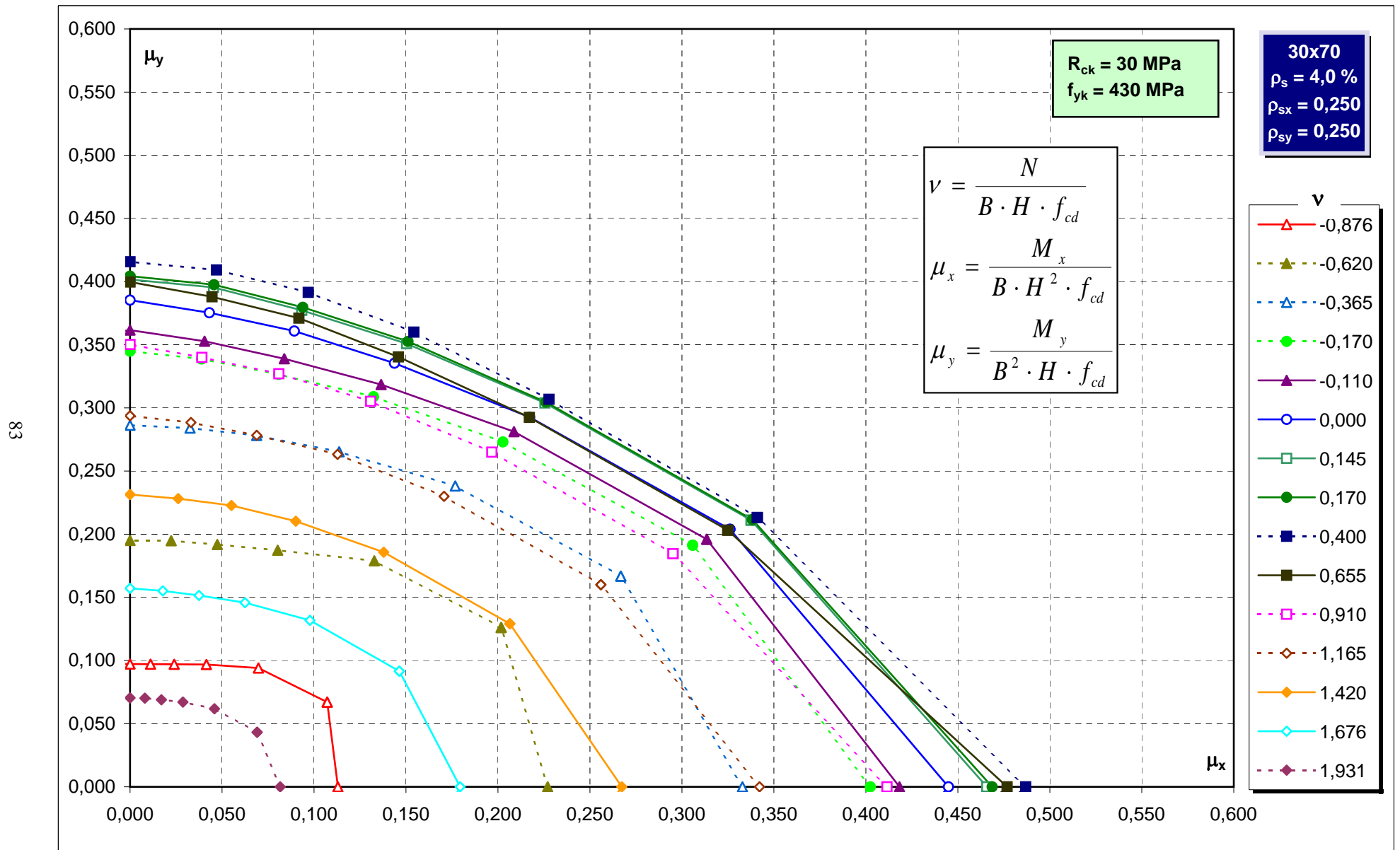
Abachi di verifica



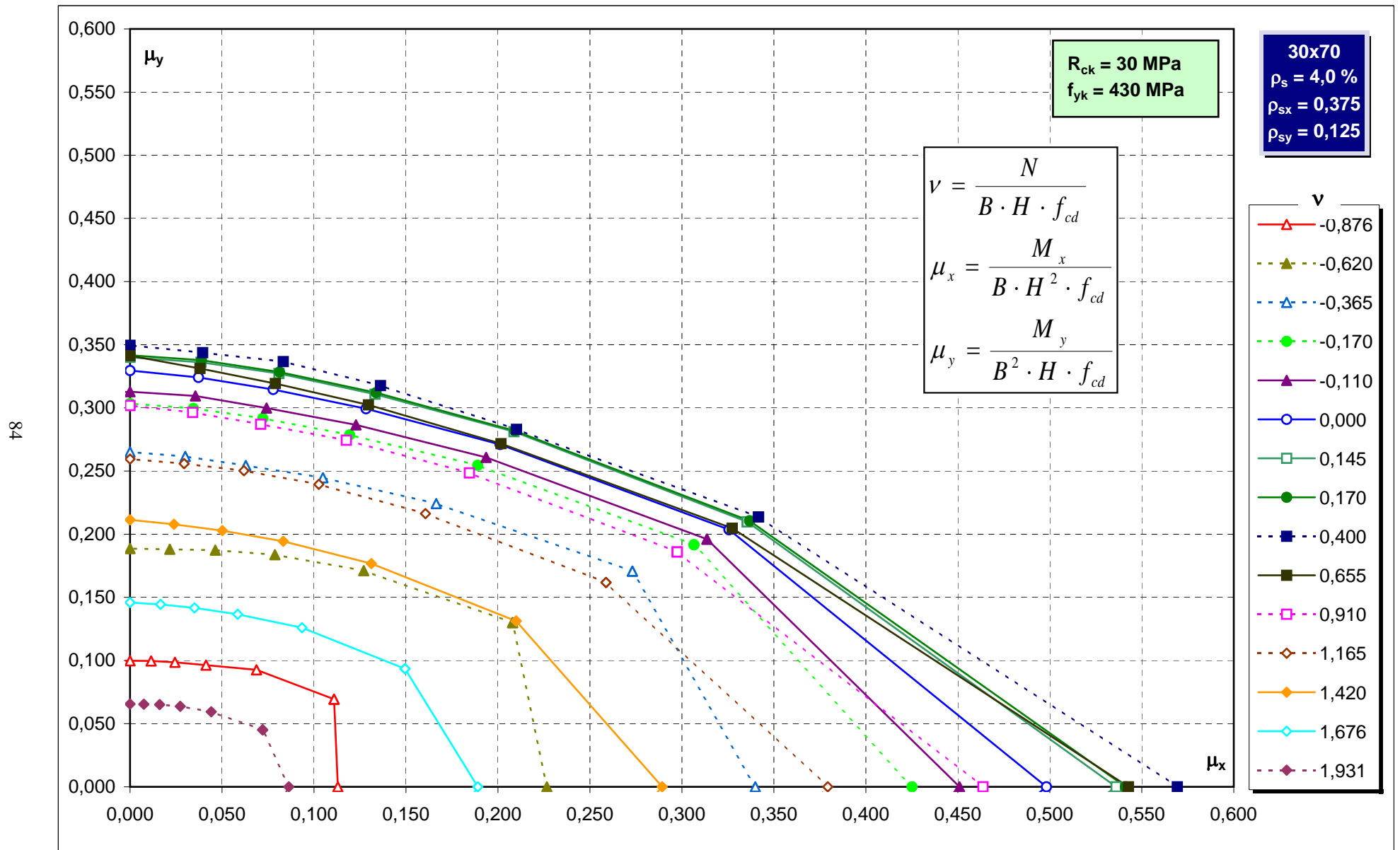
Abachi di verifica



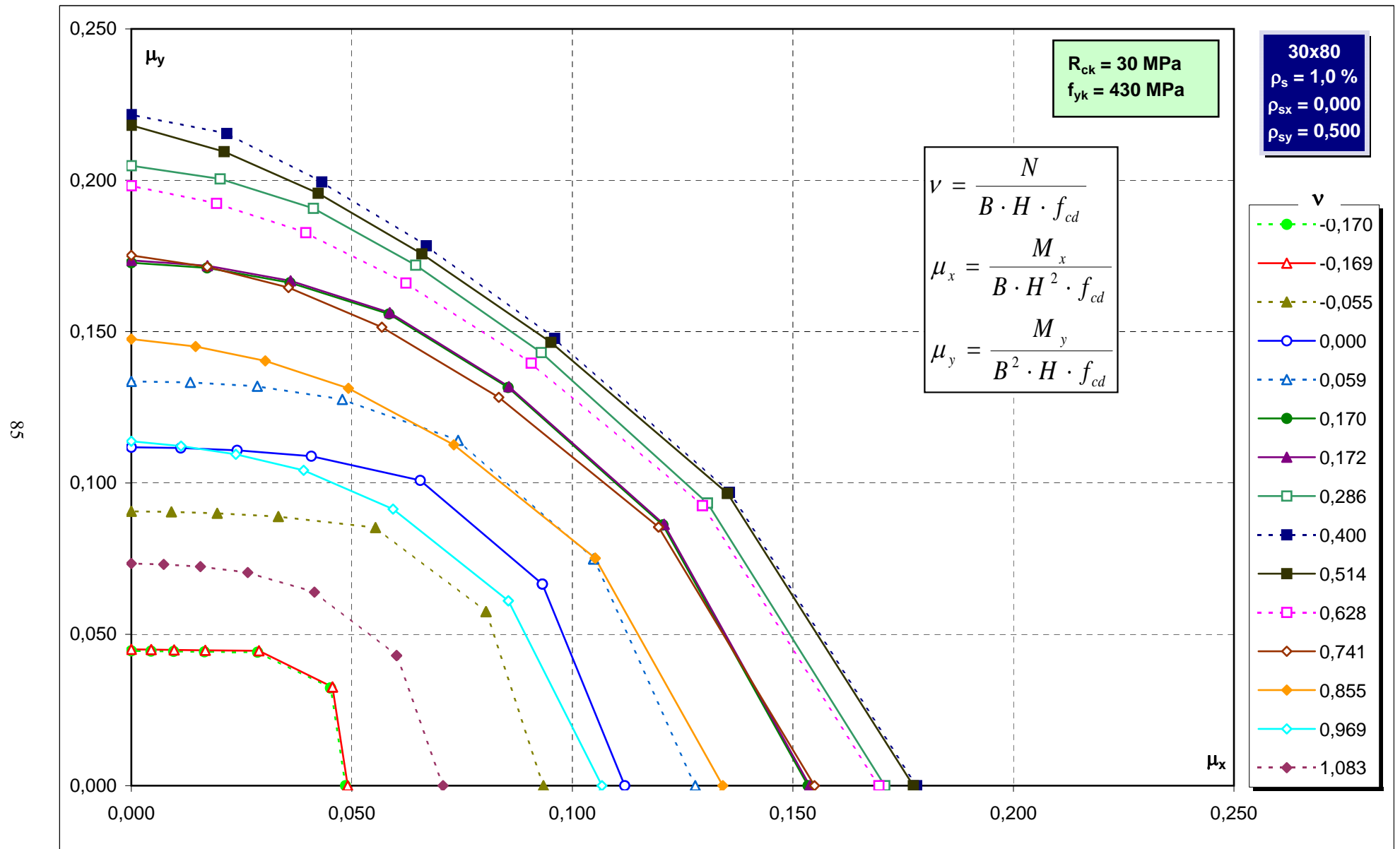
Abachi di verifica



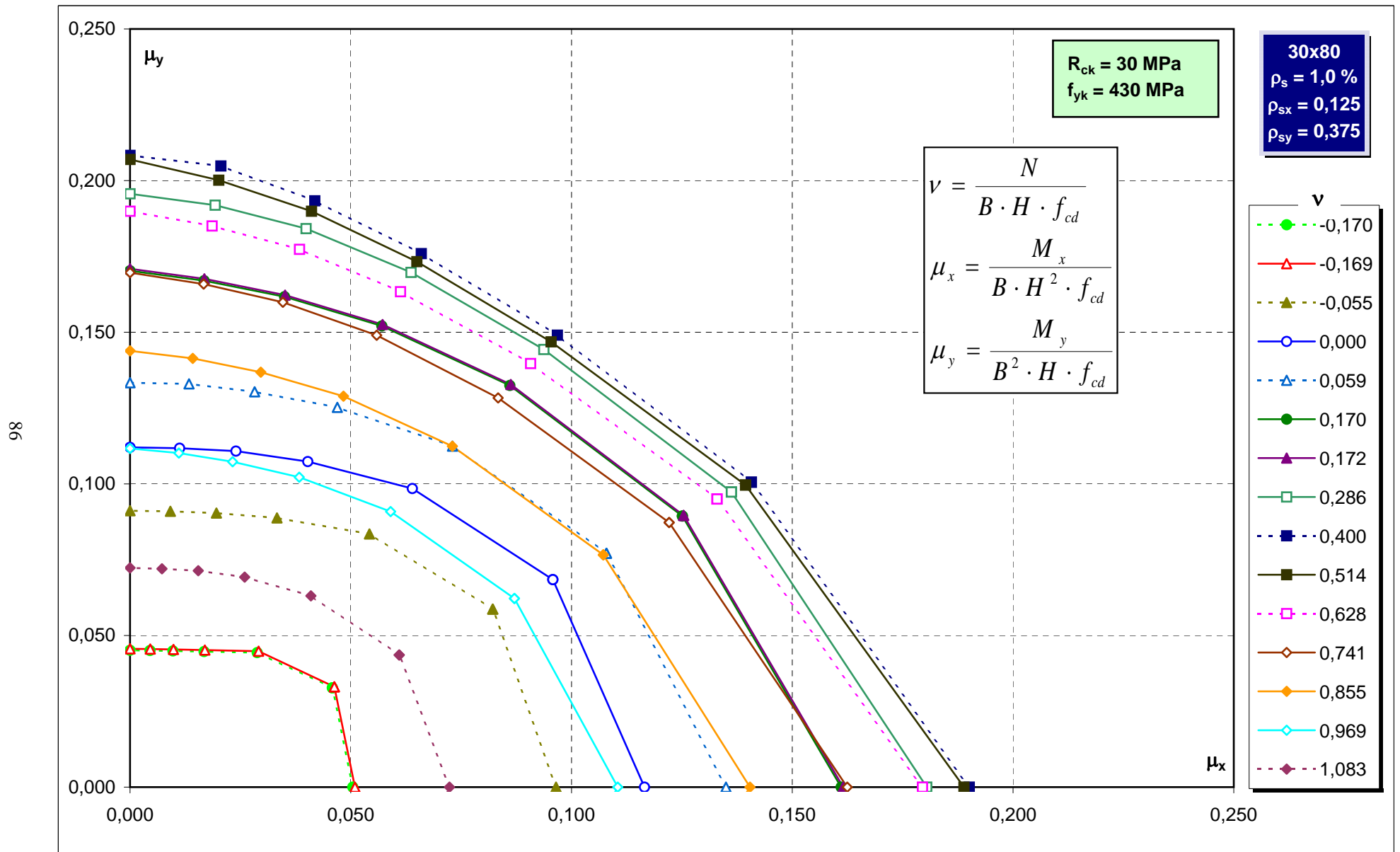
Abachi di verifica



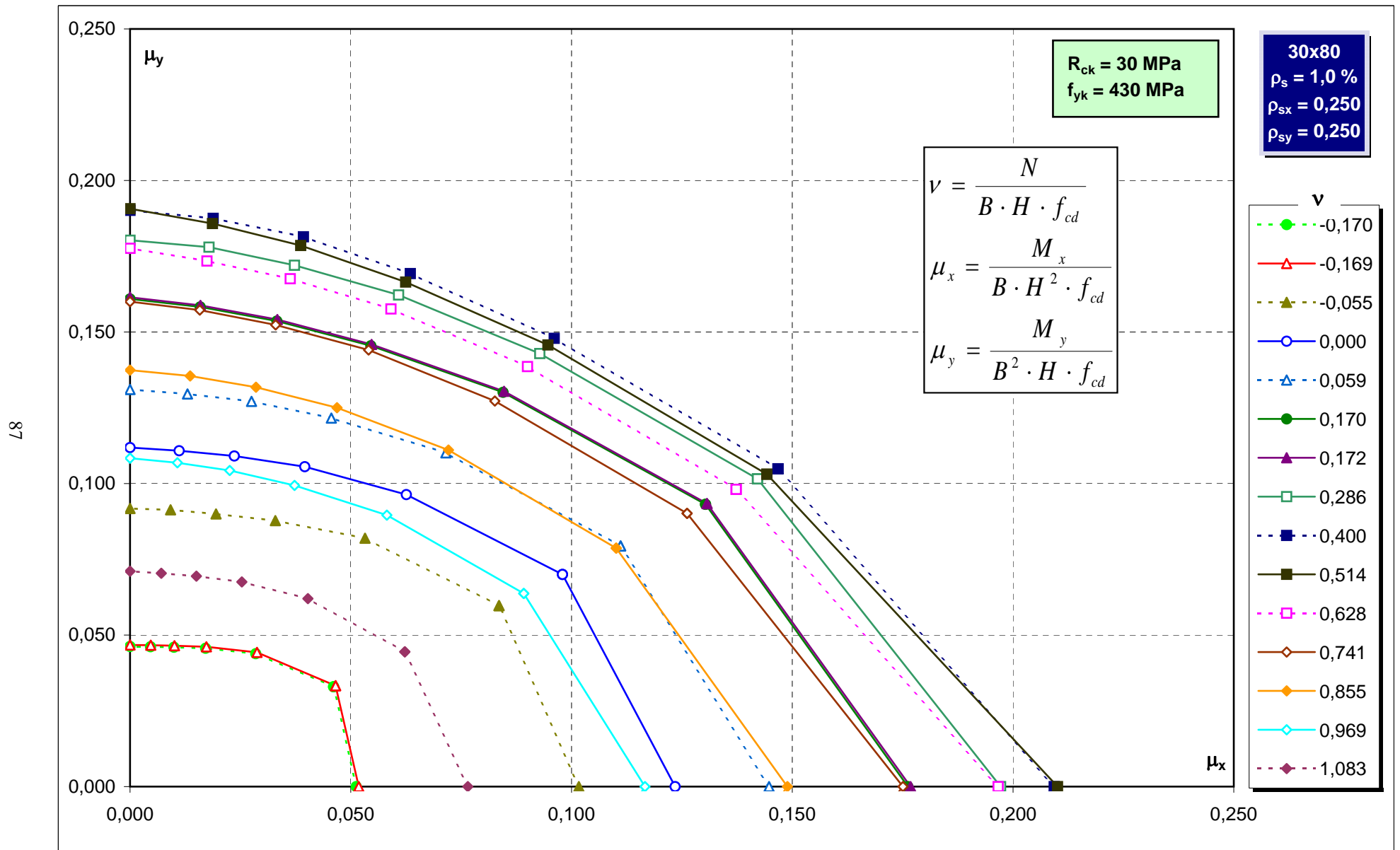
Abachi di verifica



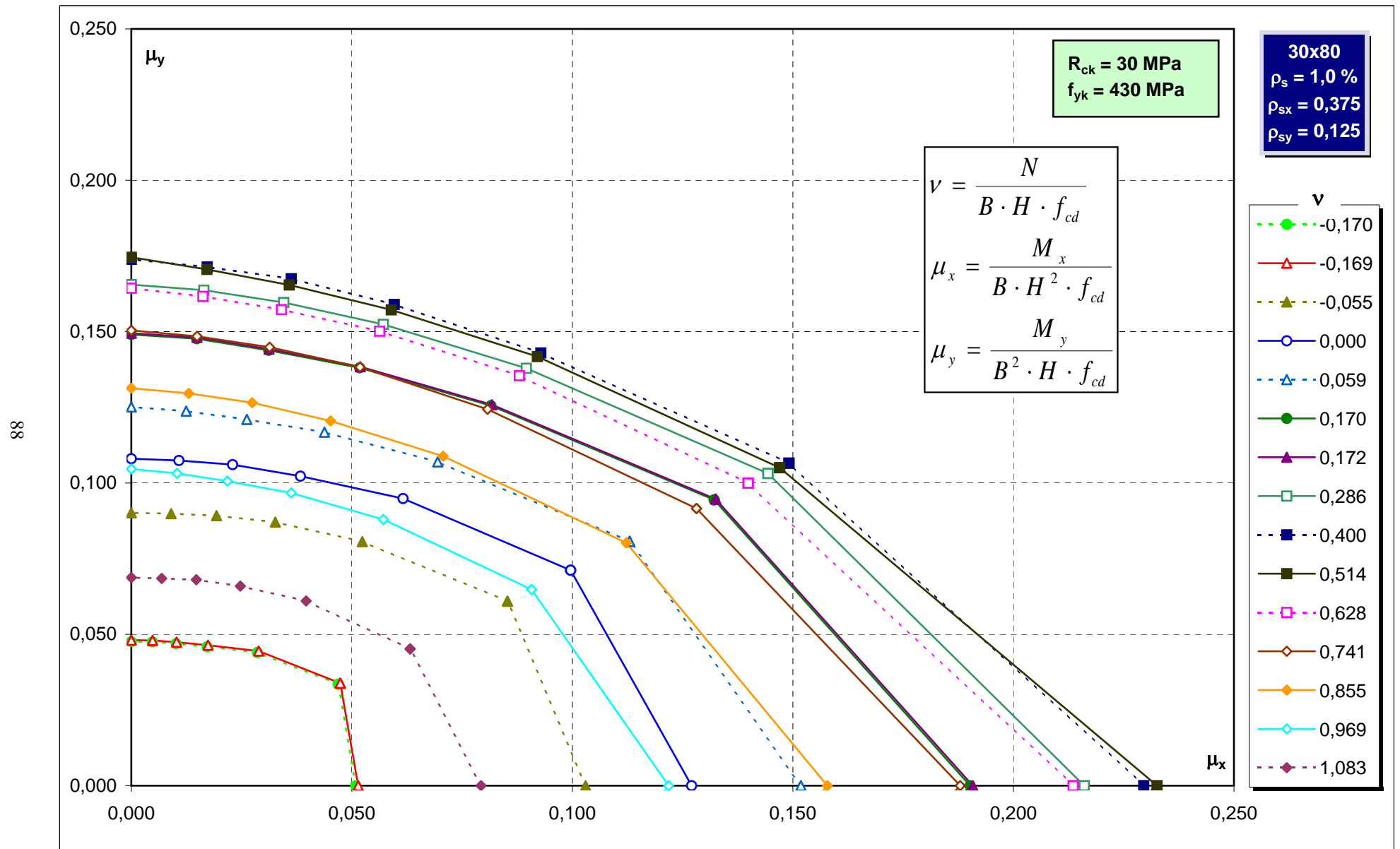
Abachi di verifica



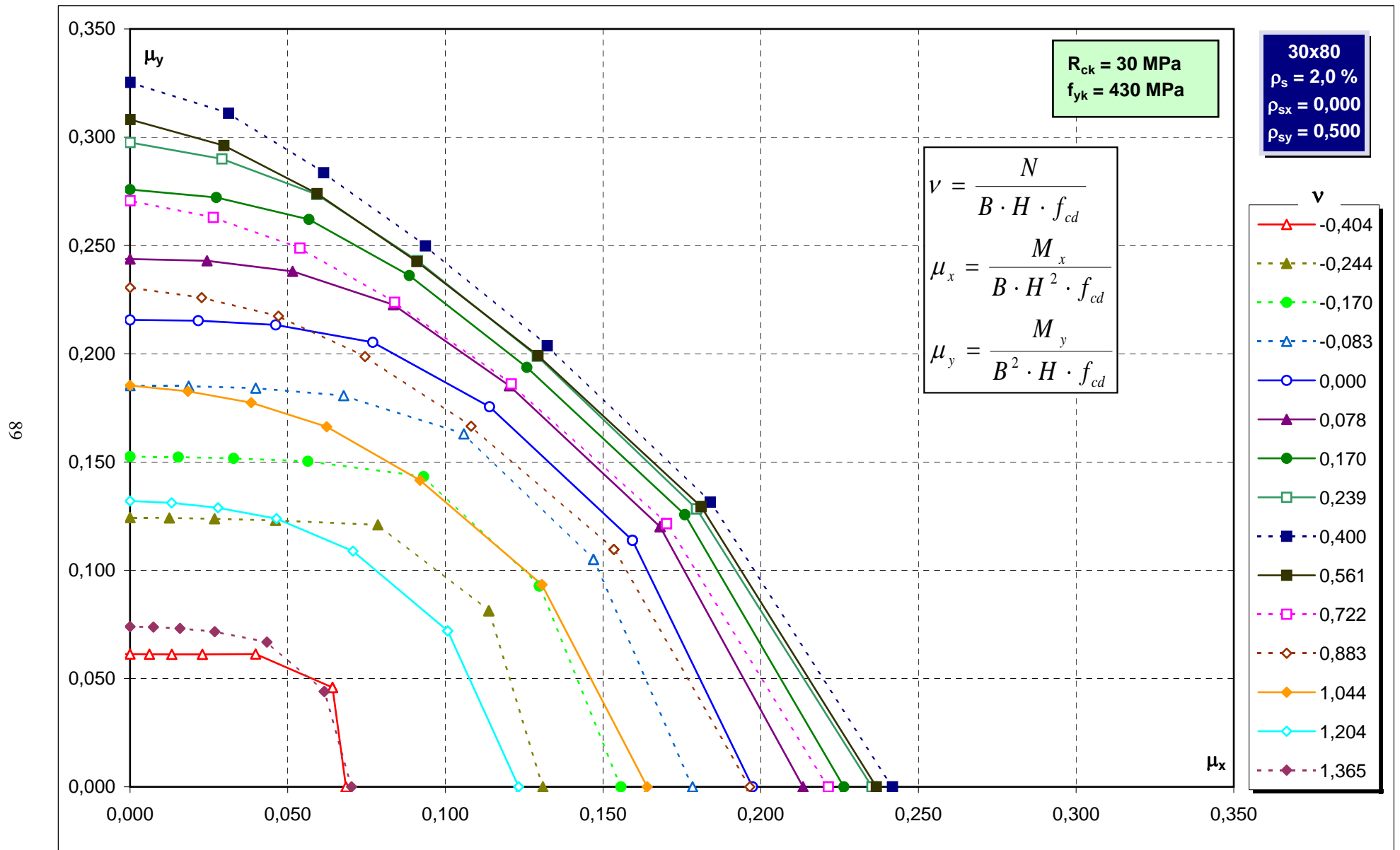
Abachi di verifica



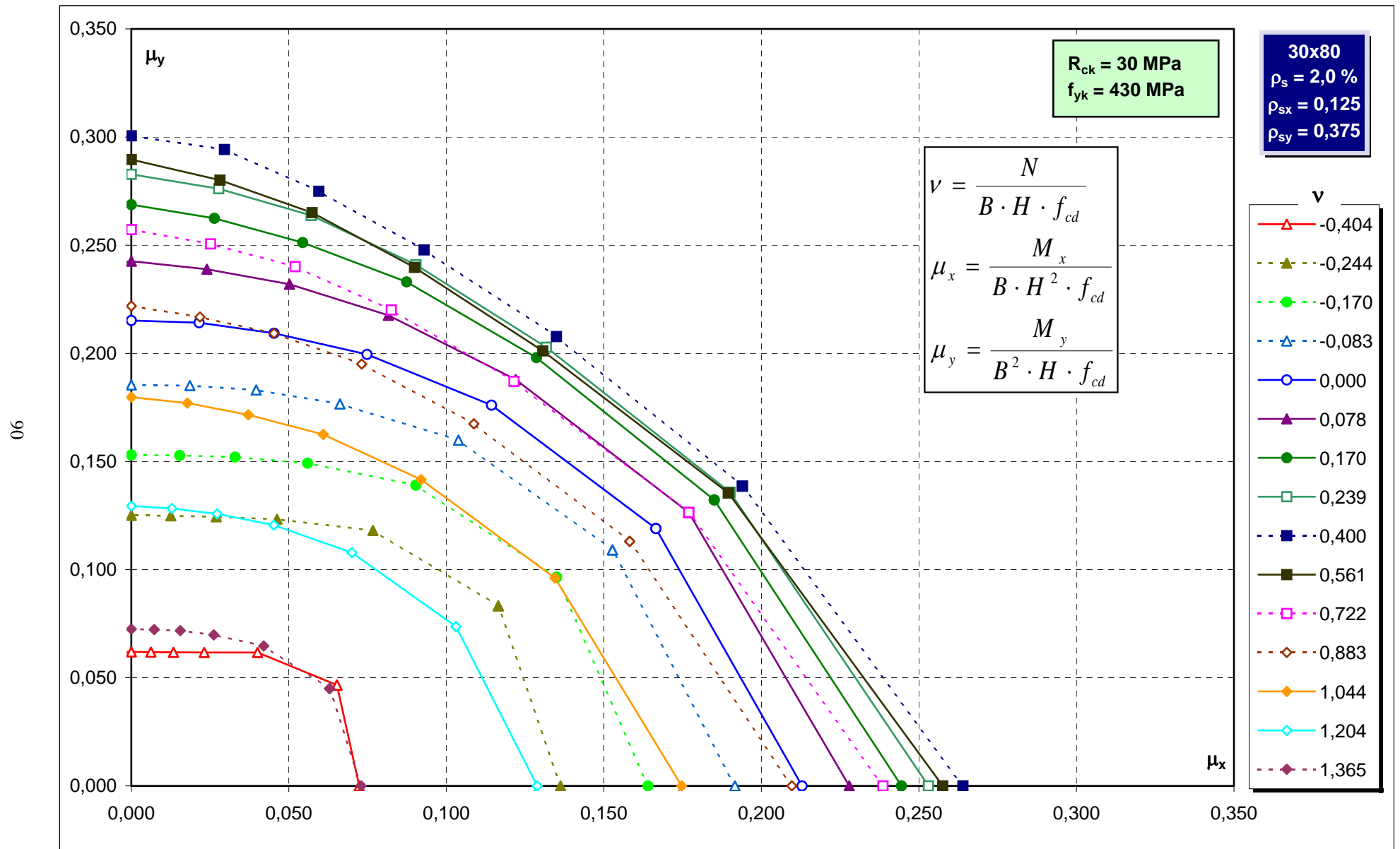
Abachi di verifica



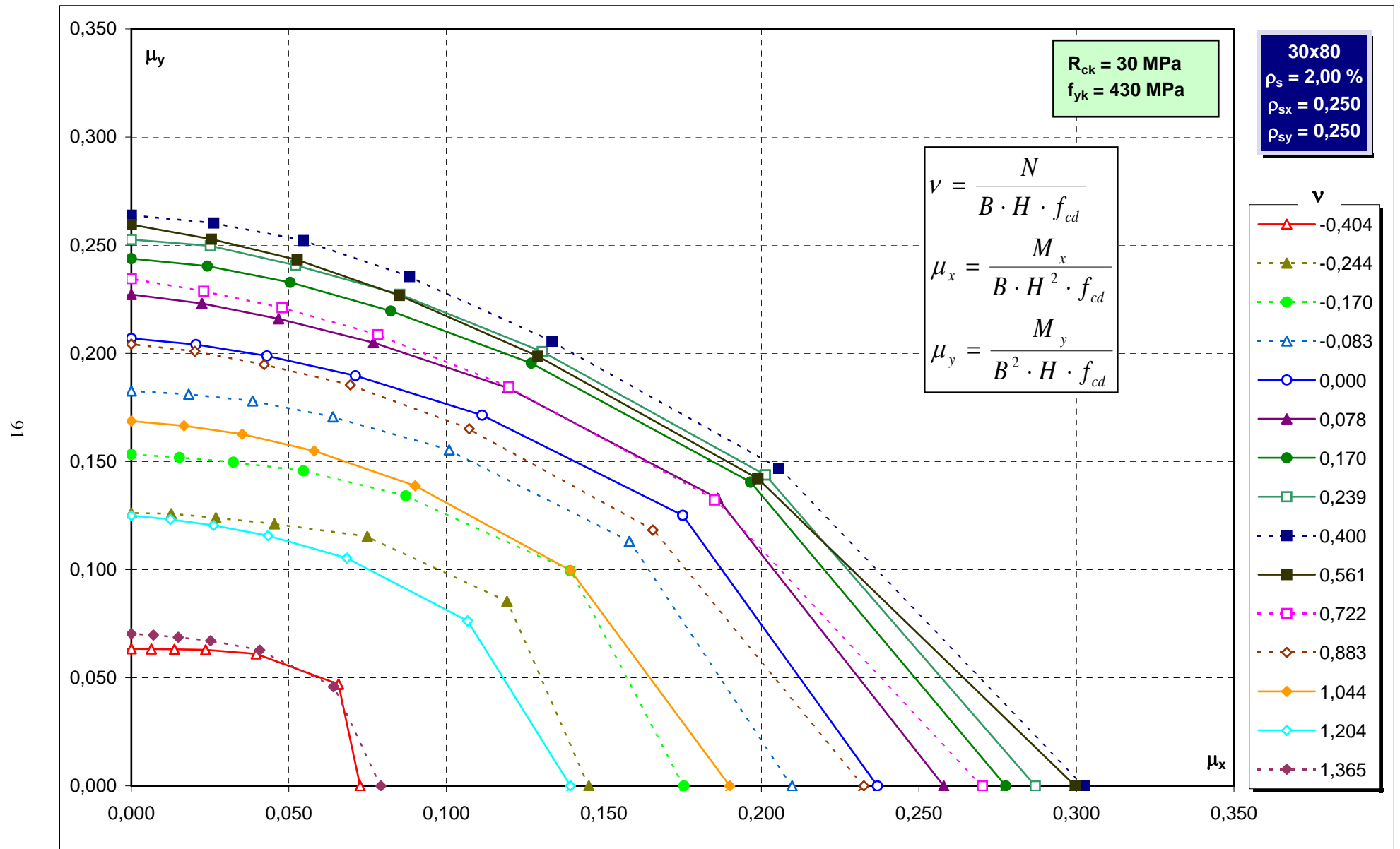
Abachi di verifica



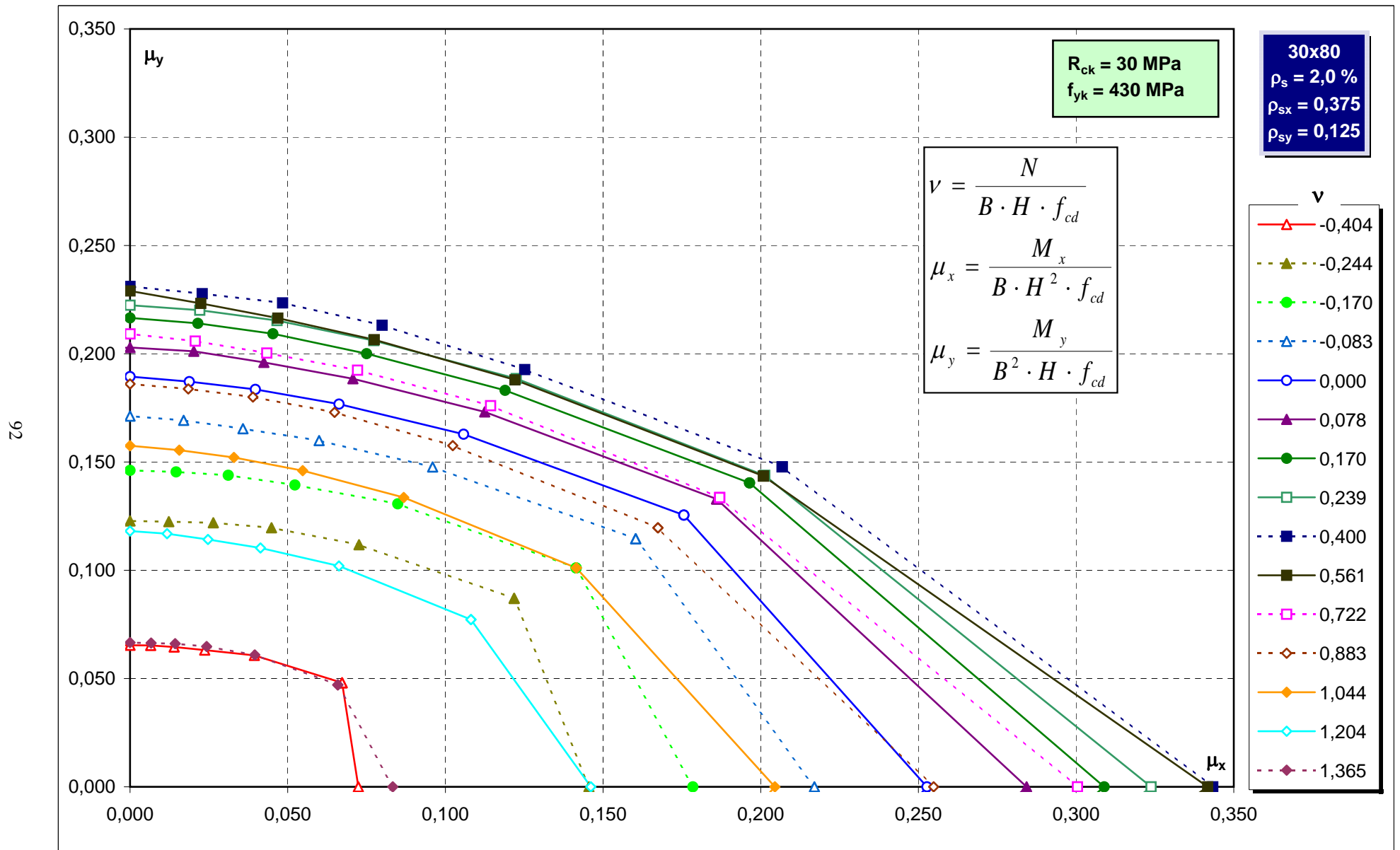
Abachi di verifica



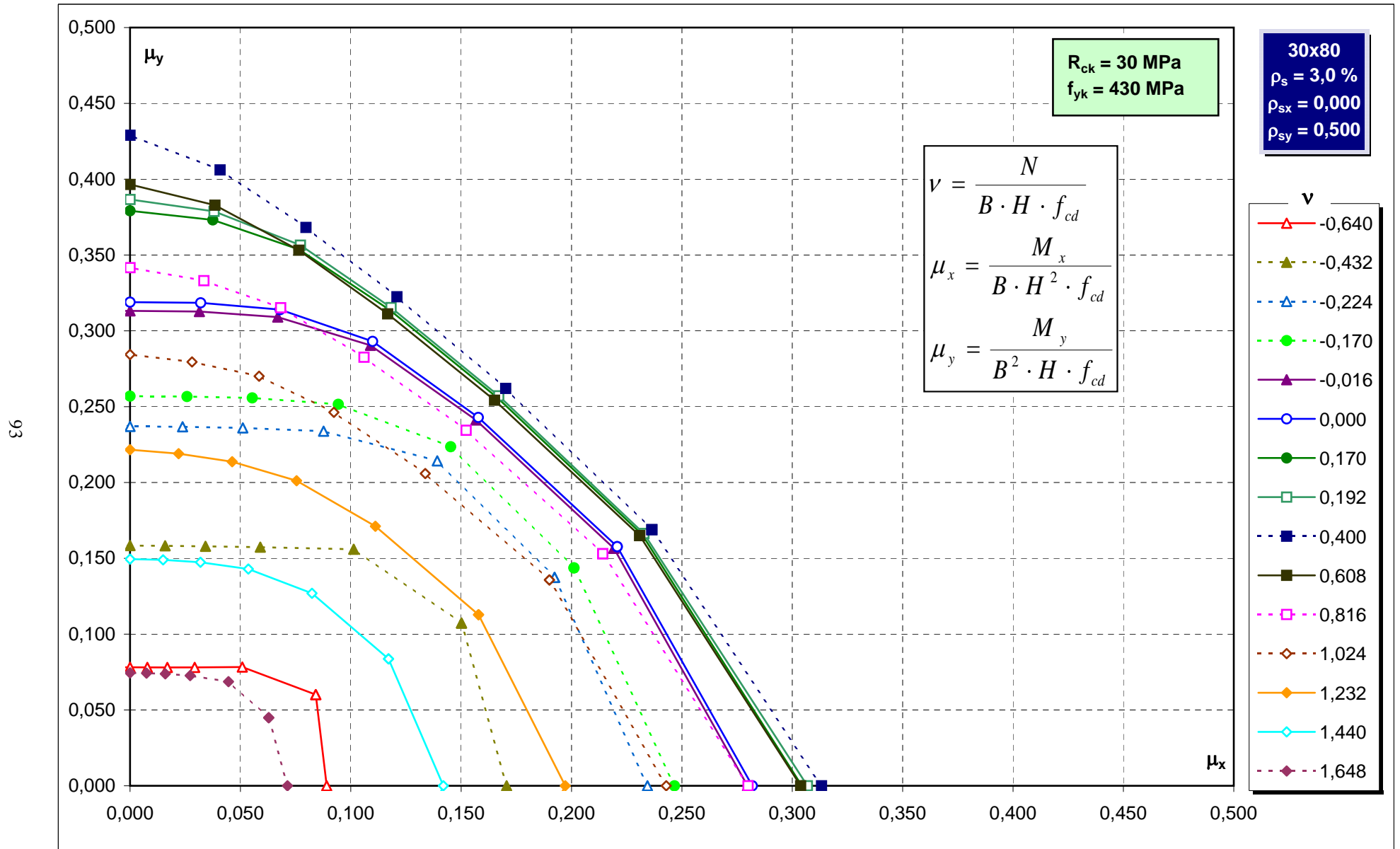
Abachi di verifica



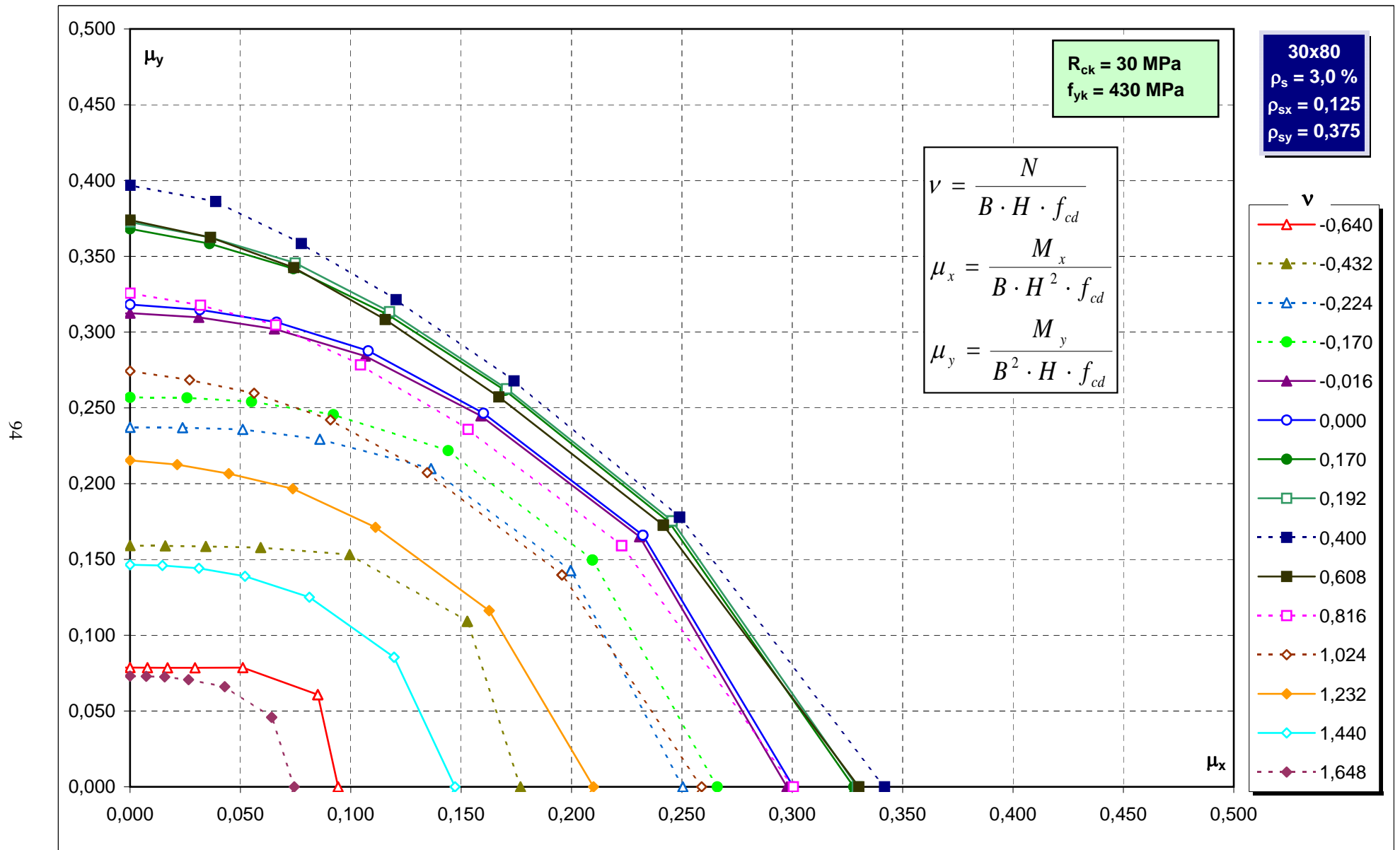
Abachi di verifica



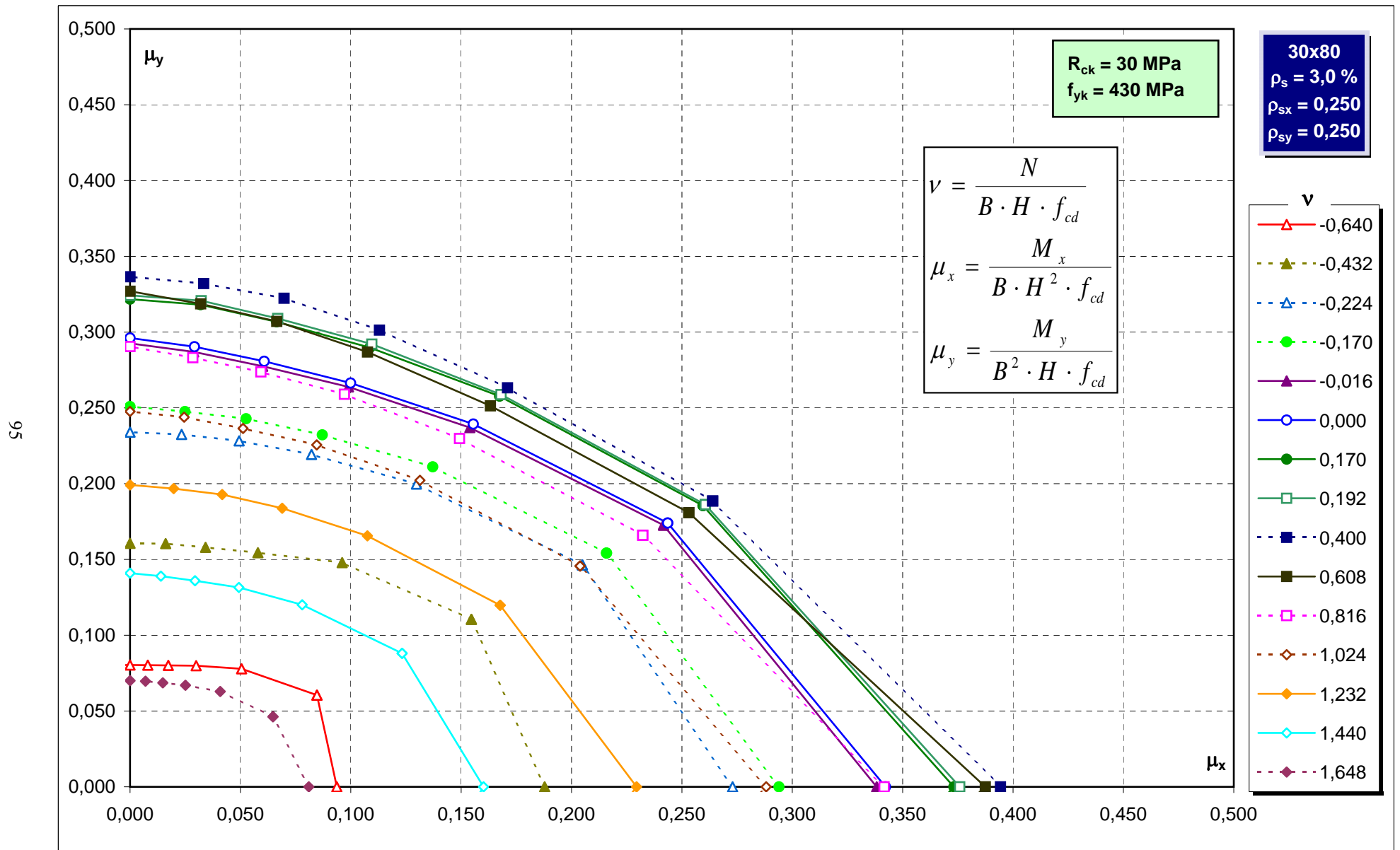
Abachi di verifica



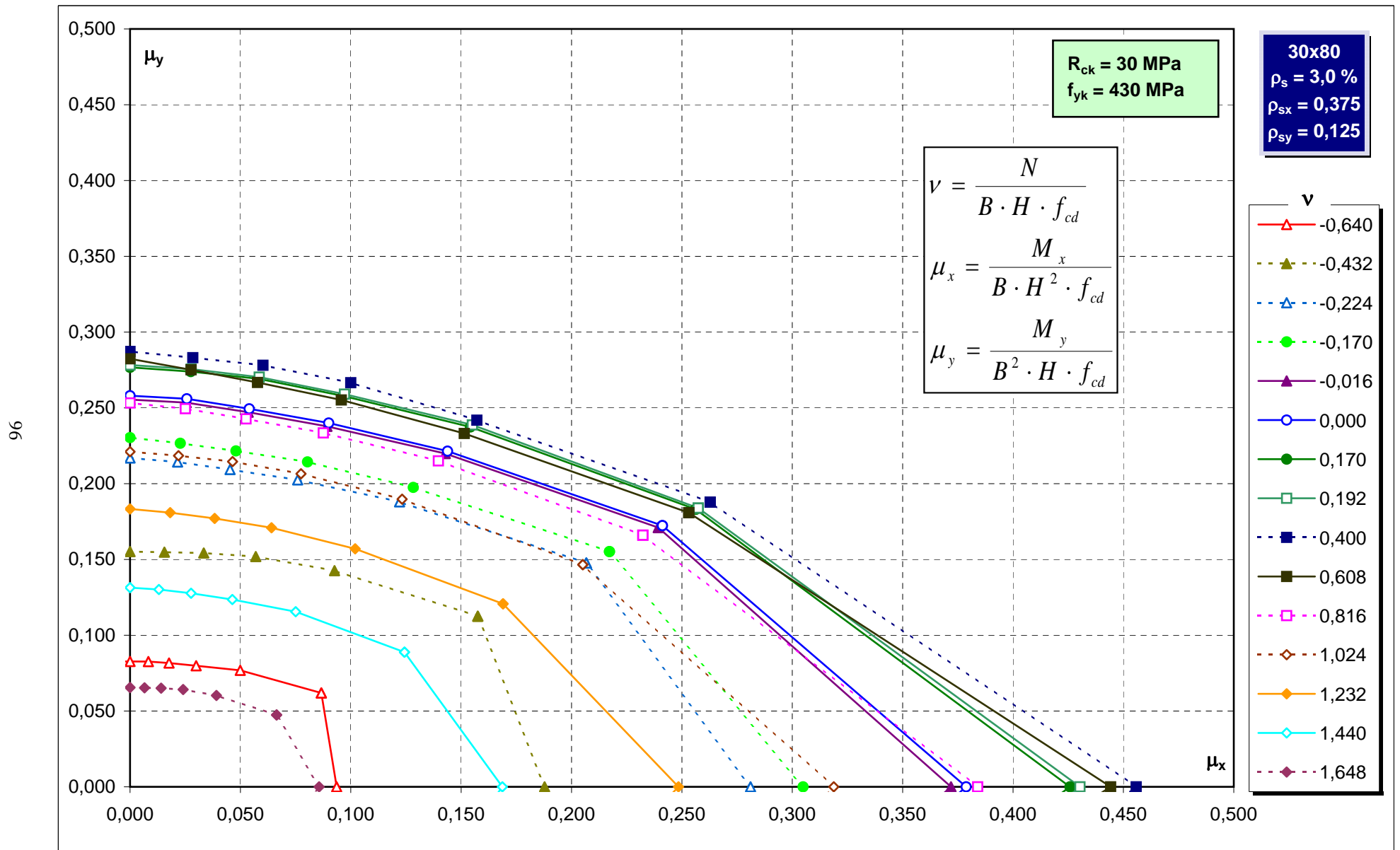
Abachi di verifica



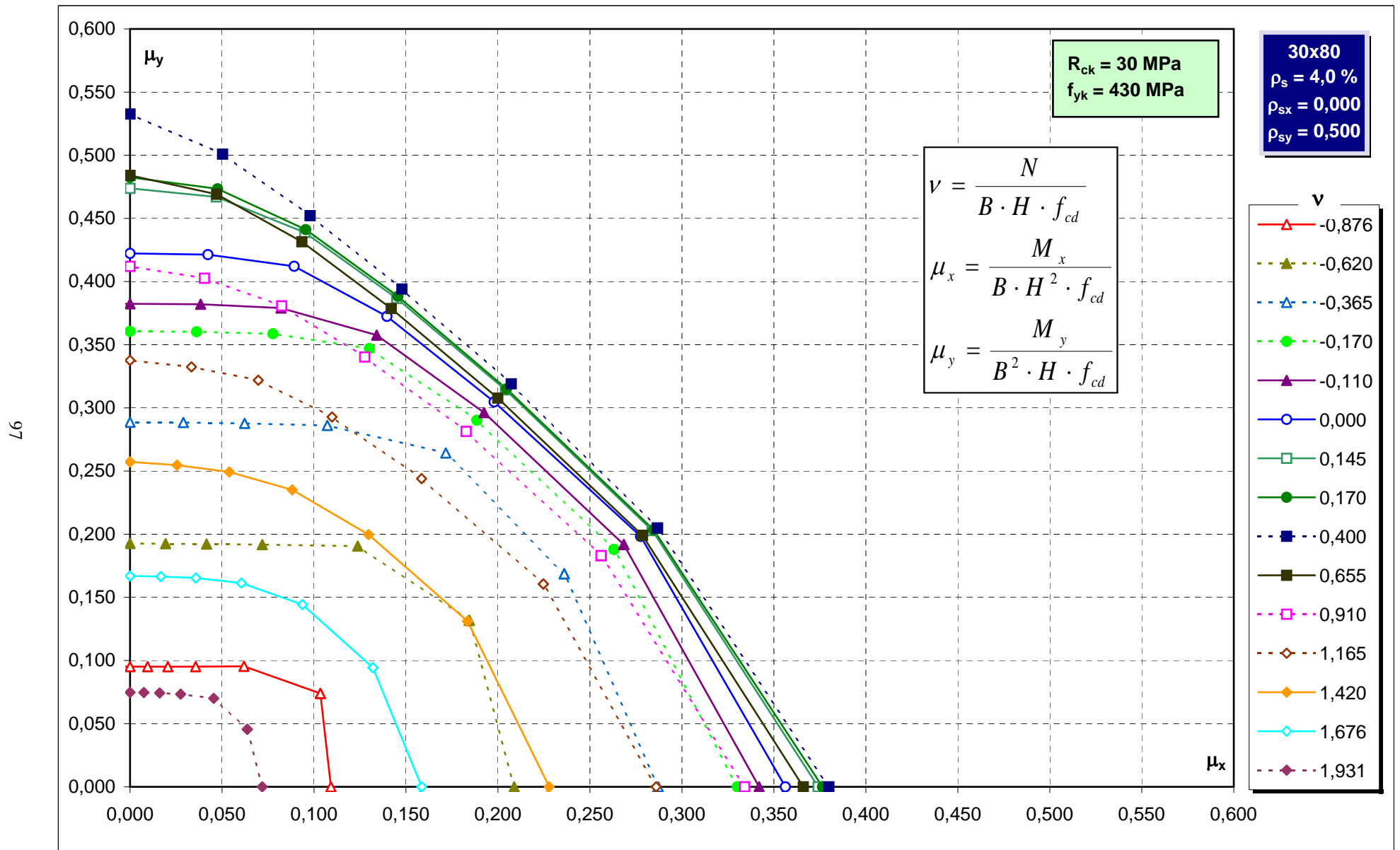
Abachi di verifica



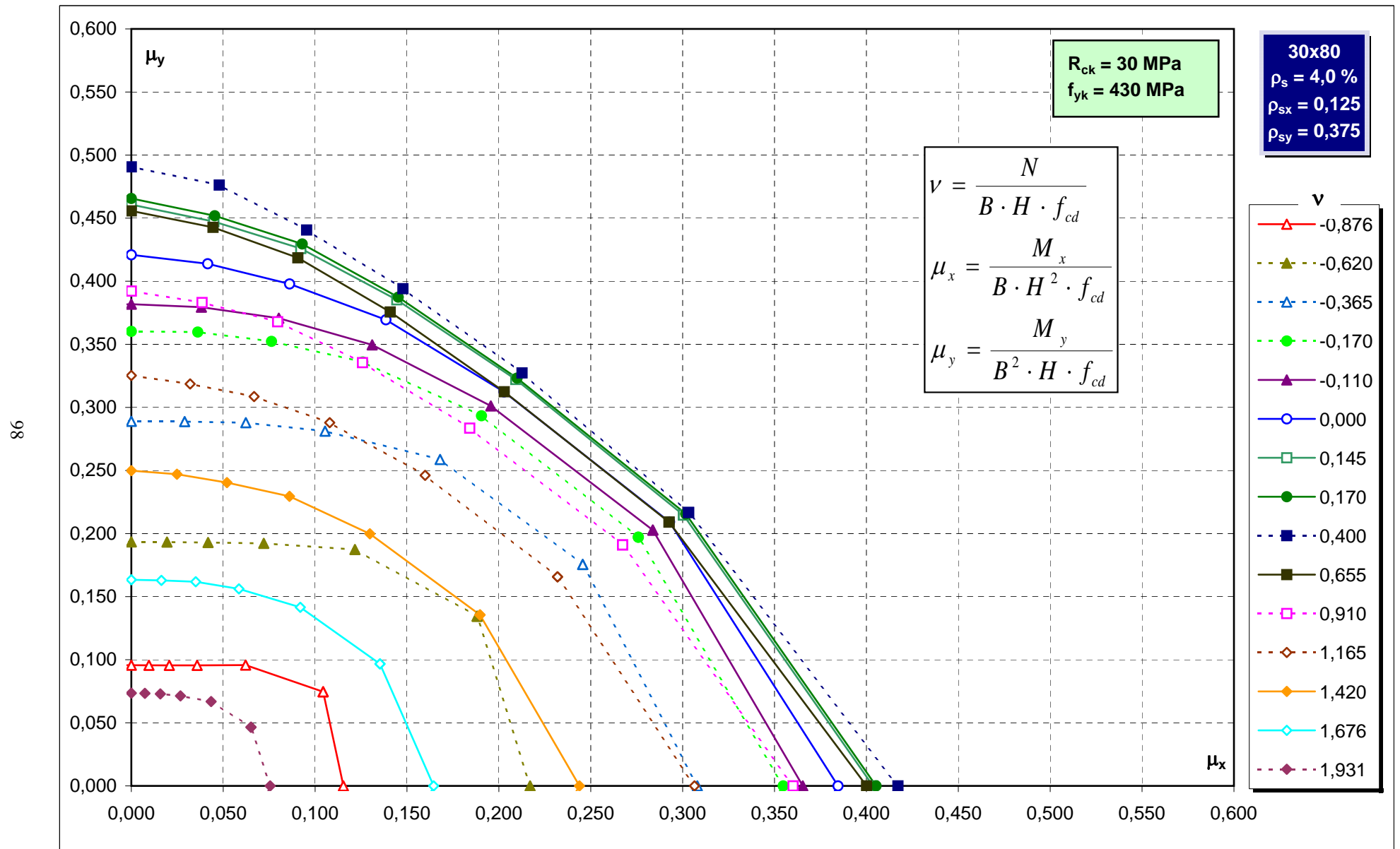
Abachi di verifica



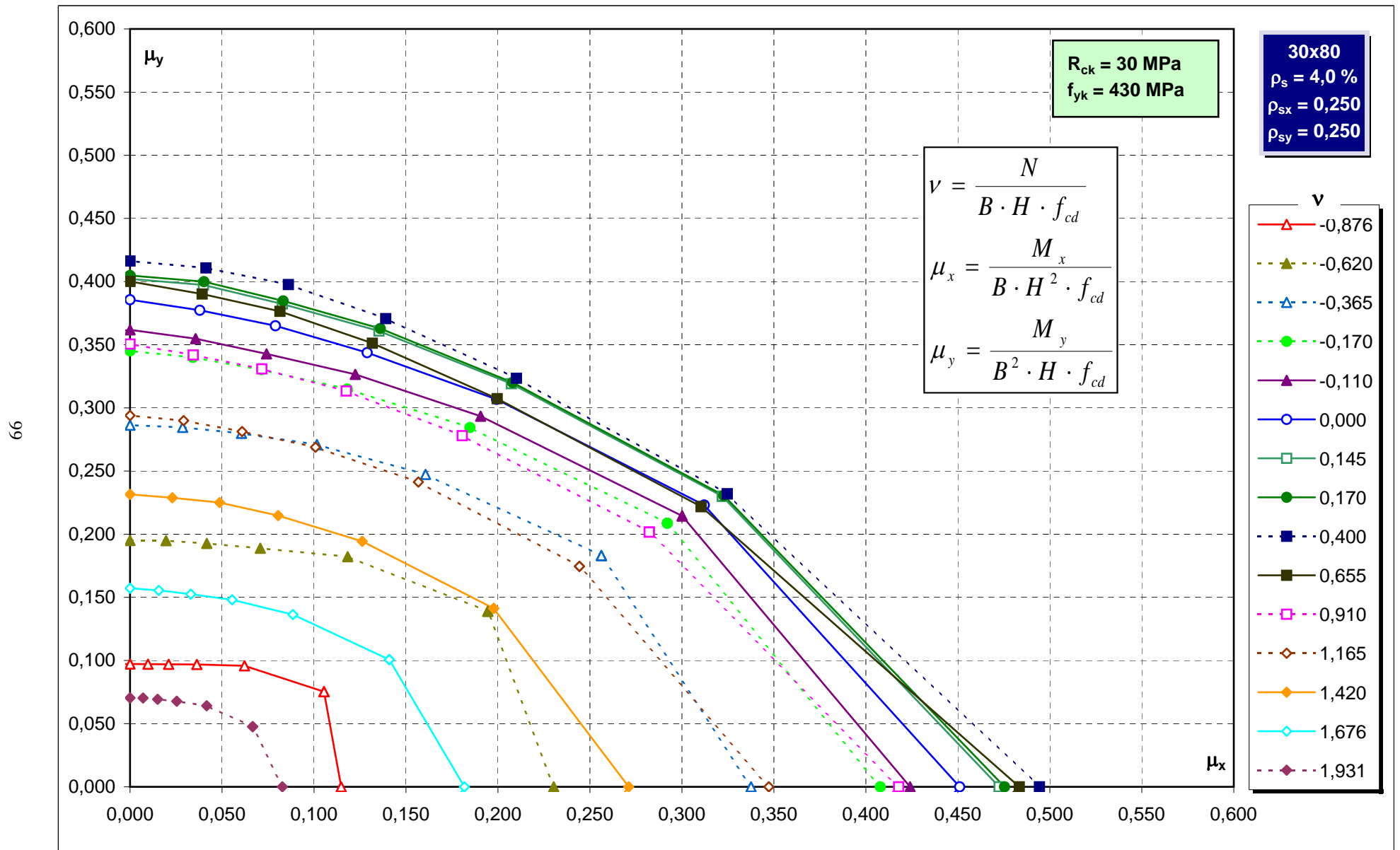
Abachi di verifica



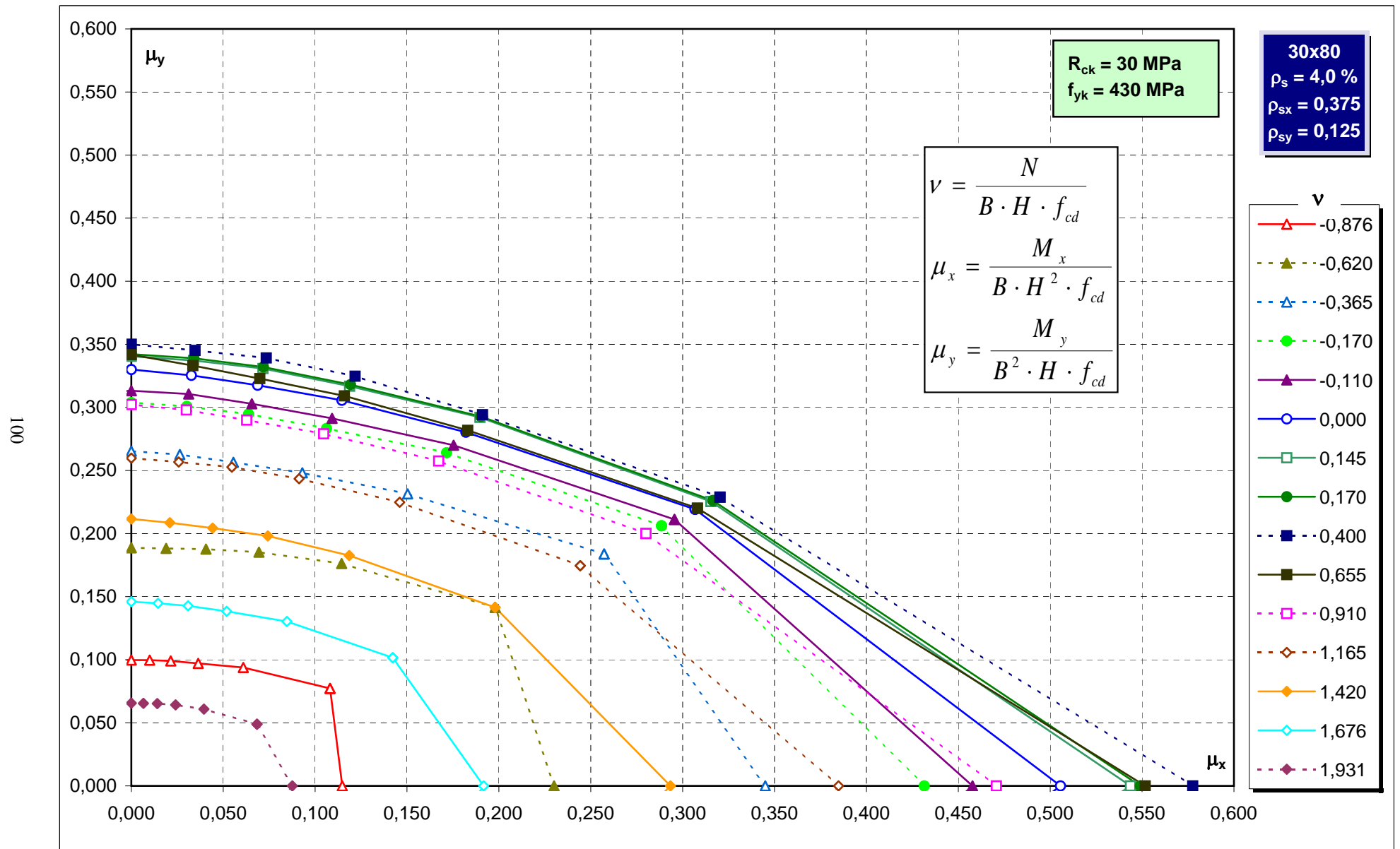
Abachi di verifica



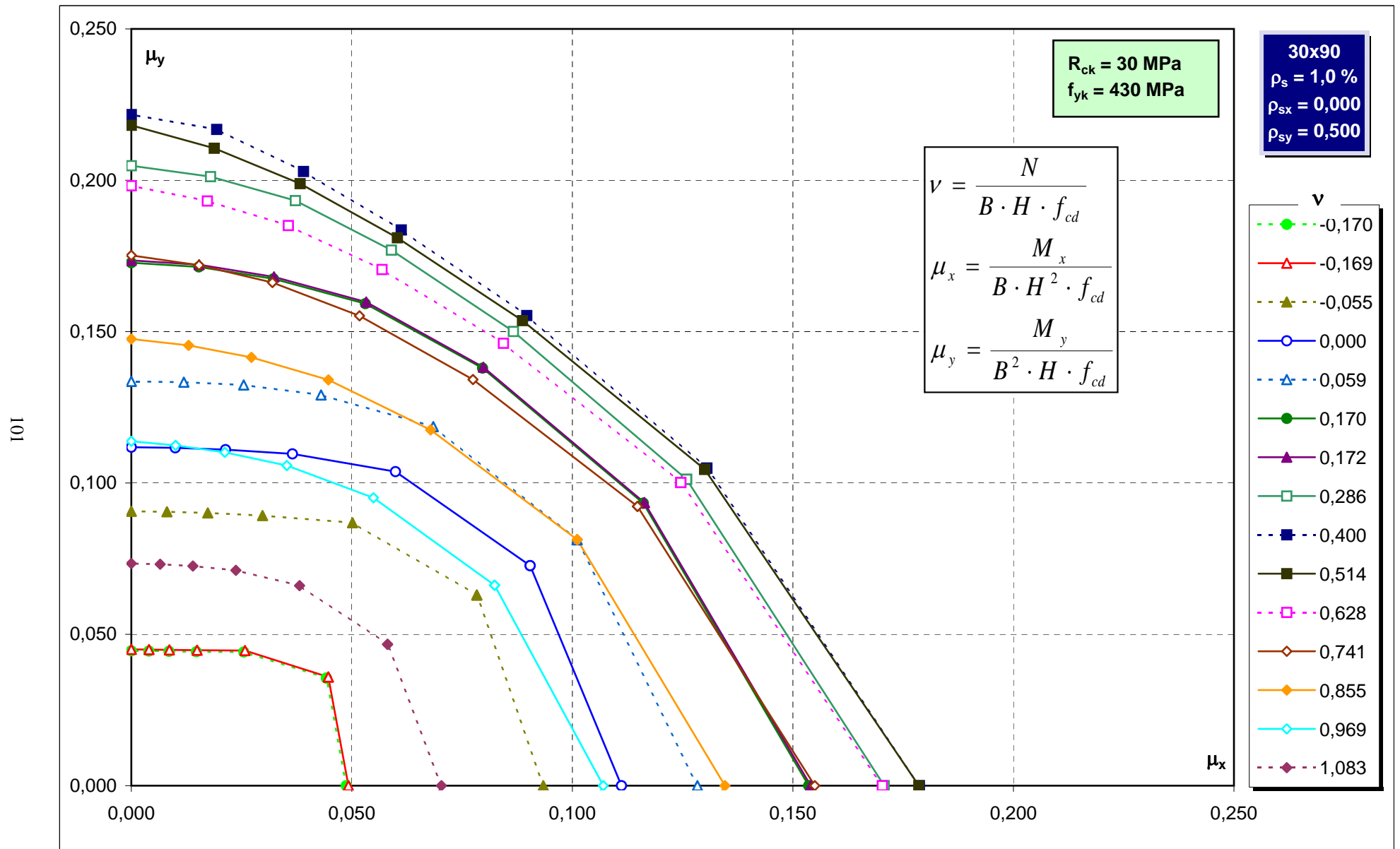
Abachi di verifica



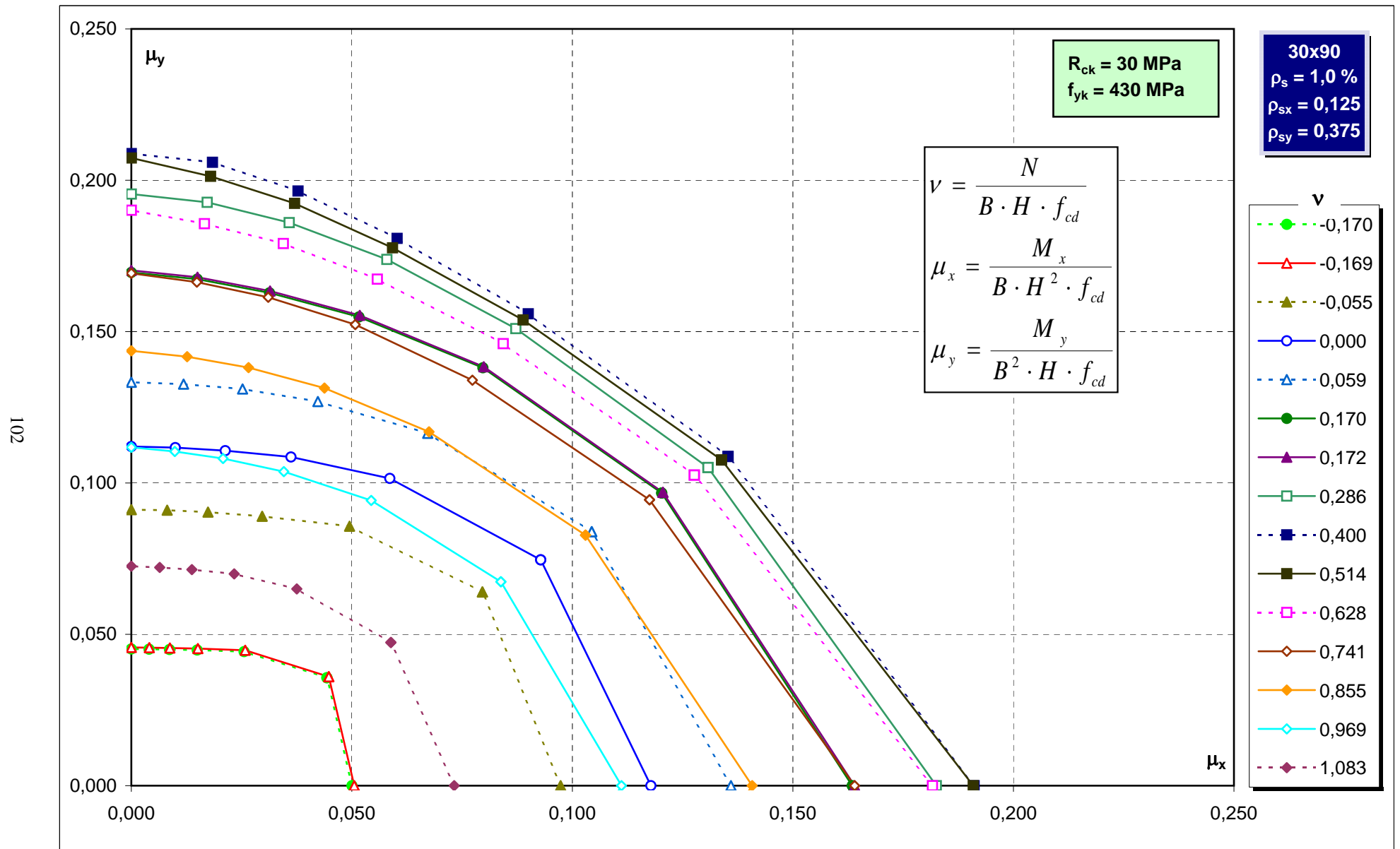
Abachi di verifica



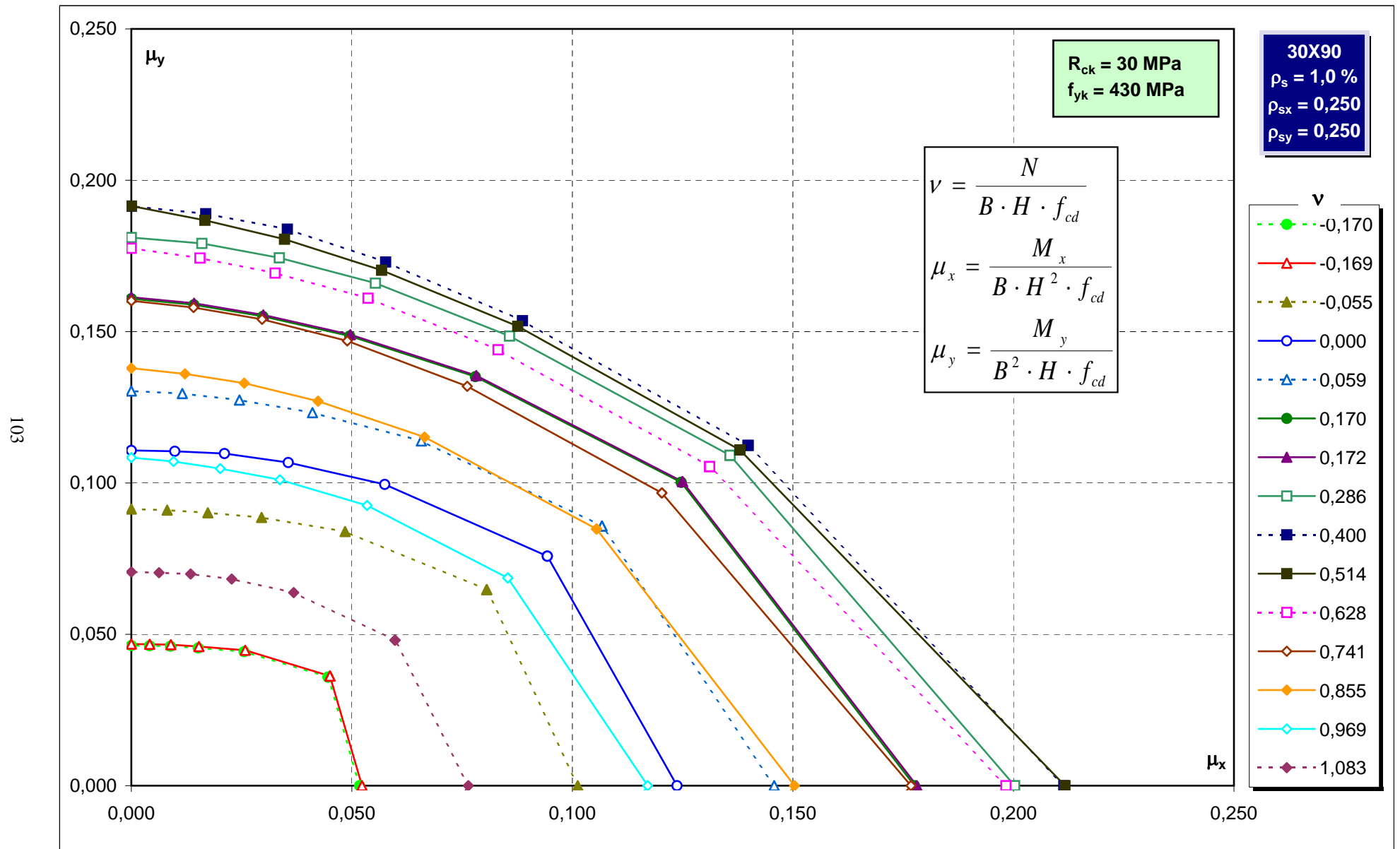
Abachi di verifica



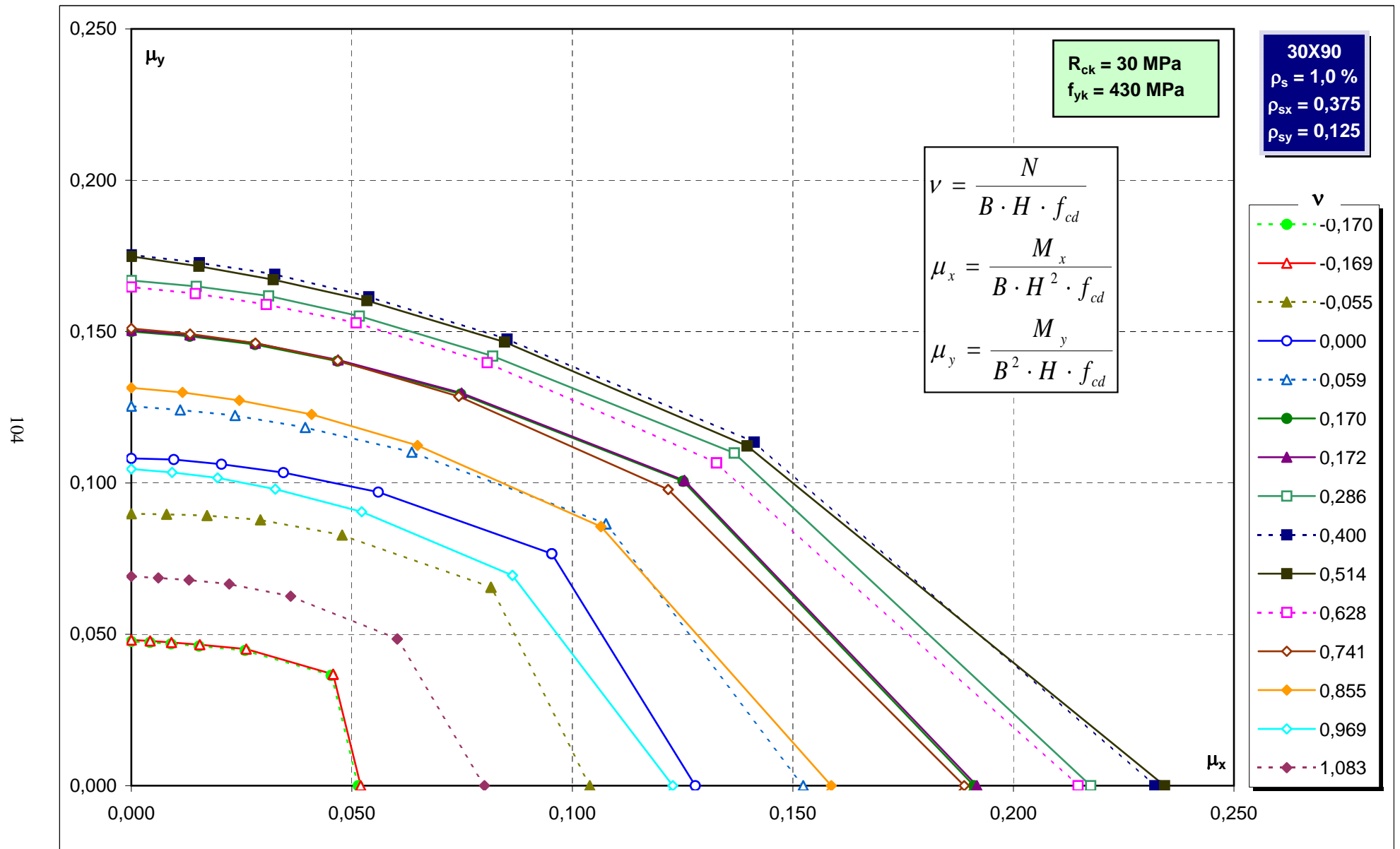
Abachi di verifica



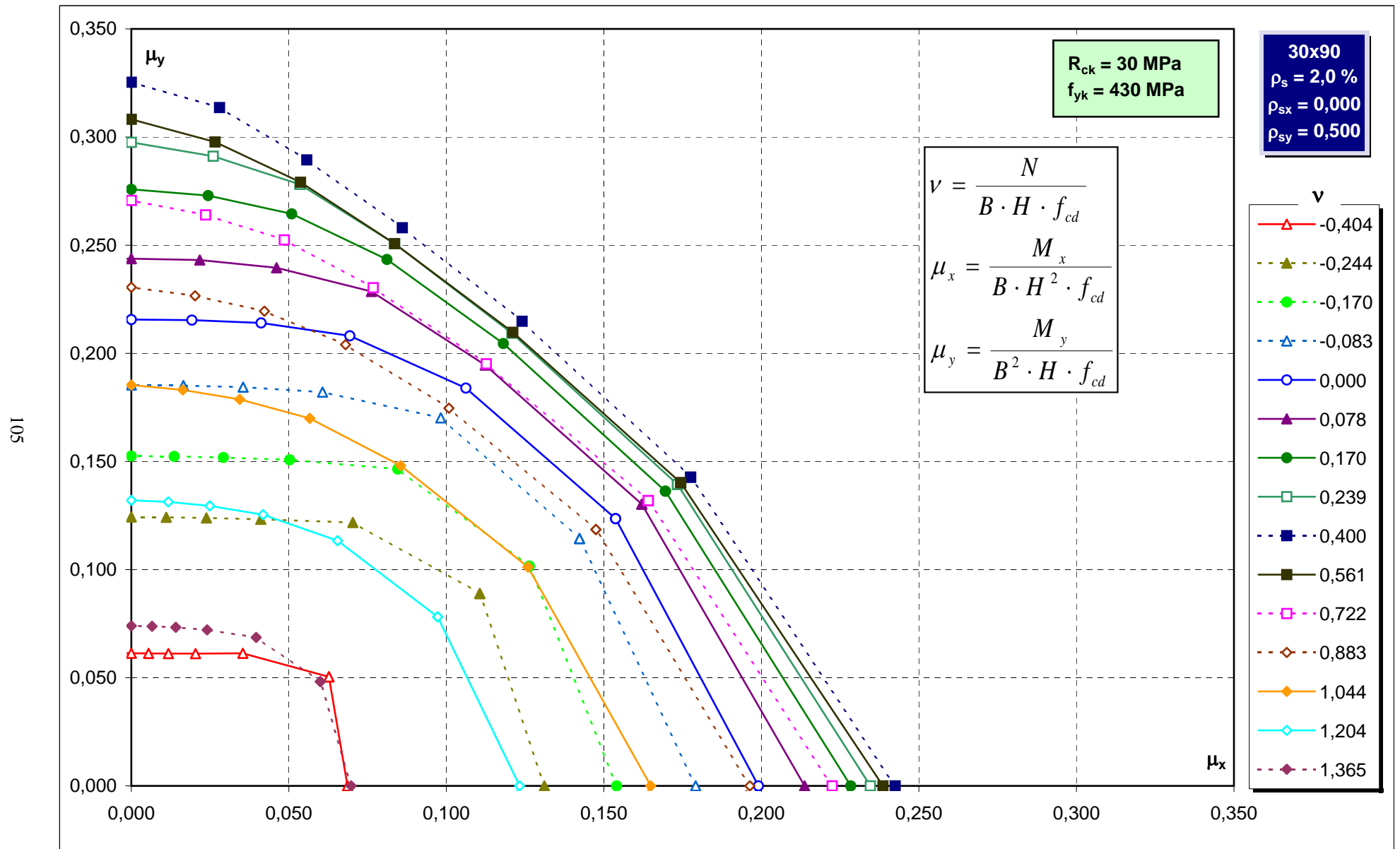
Abachi di verifica



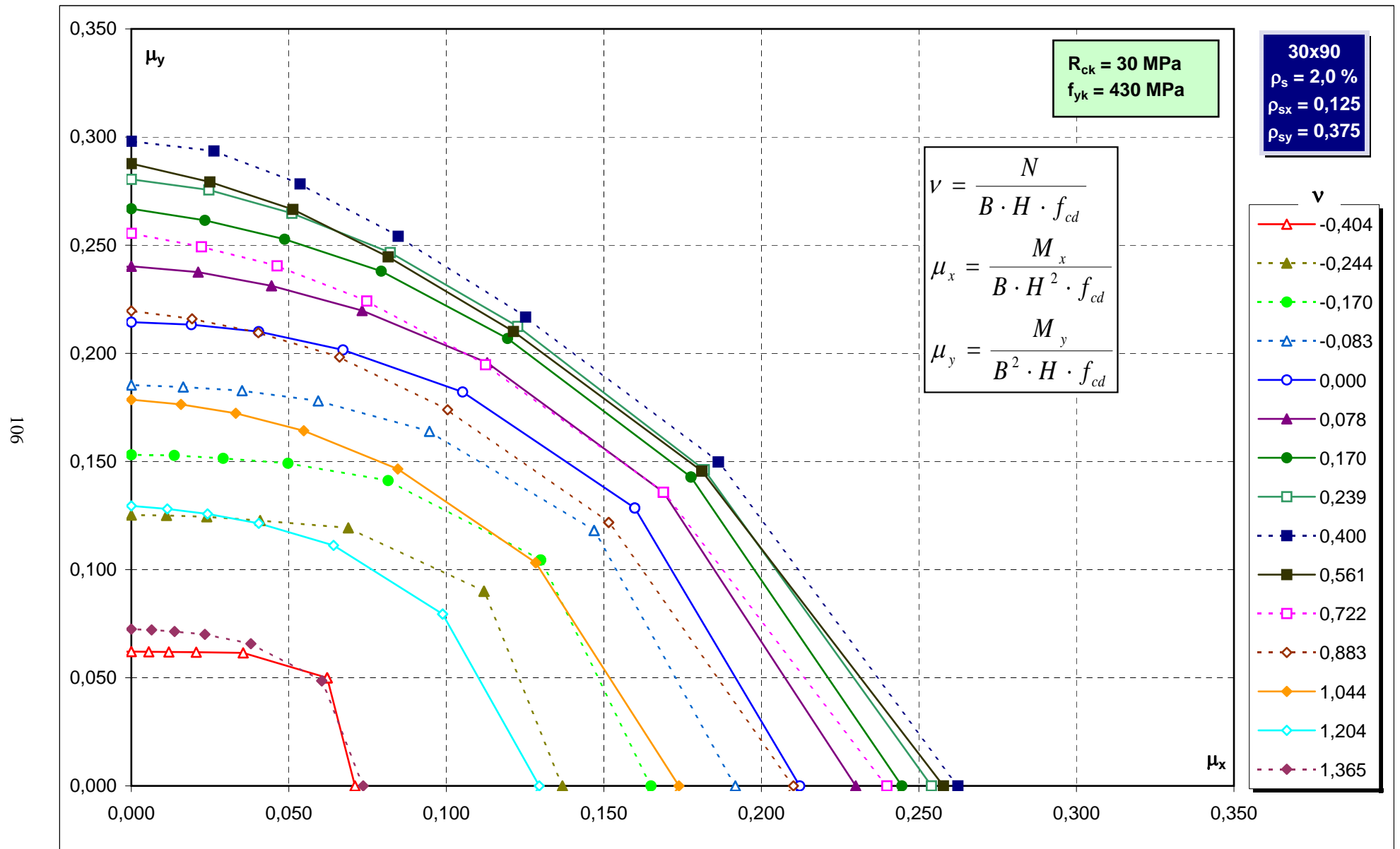
Abachi di verifica



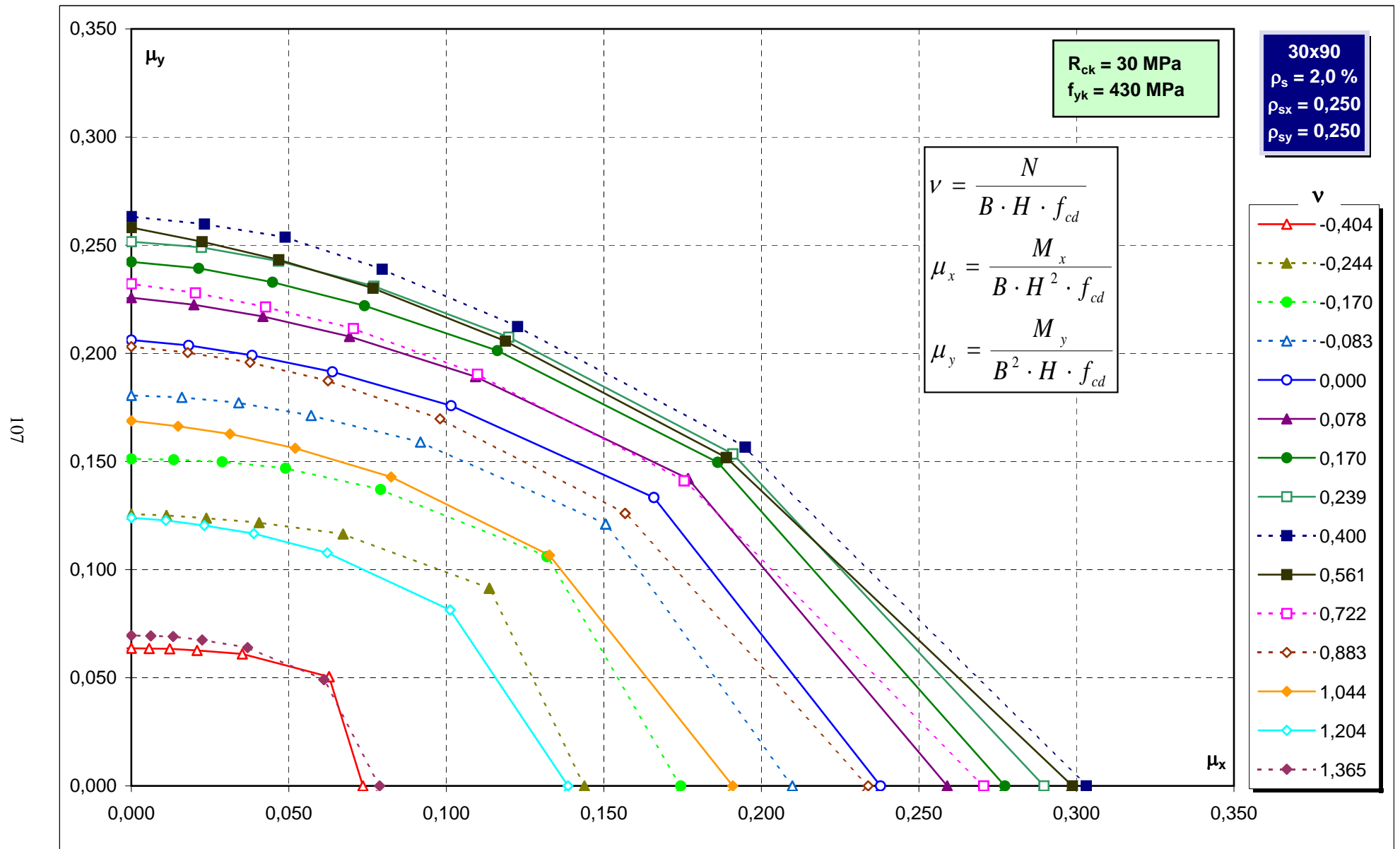
Abachi di verifica



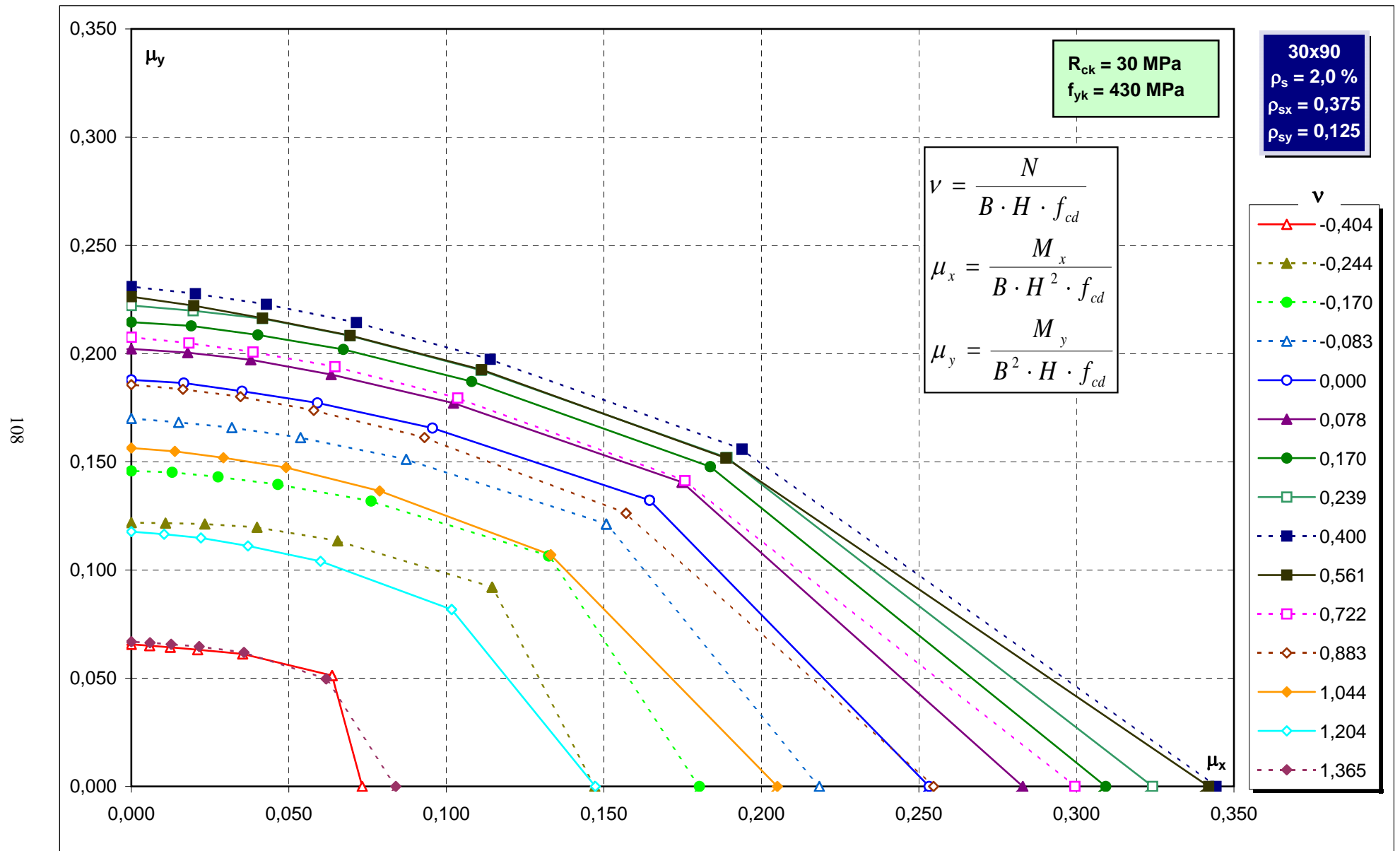
Abachi di verifica



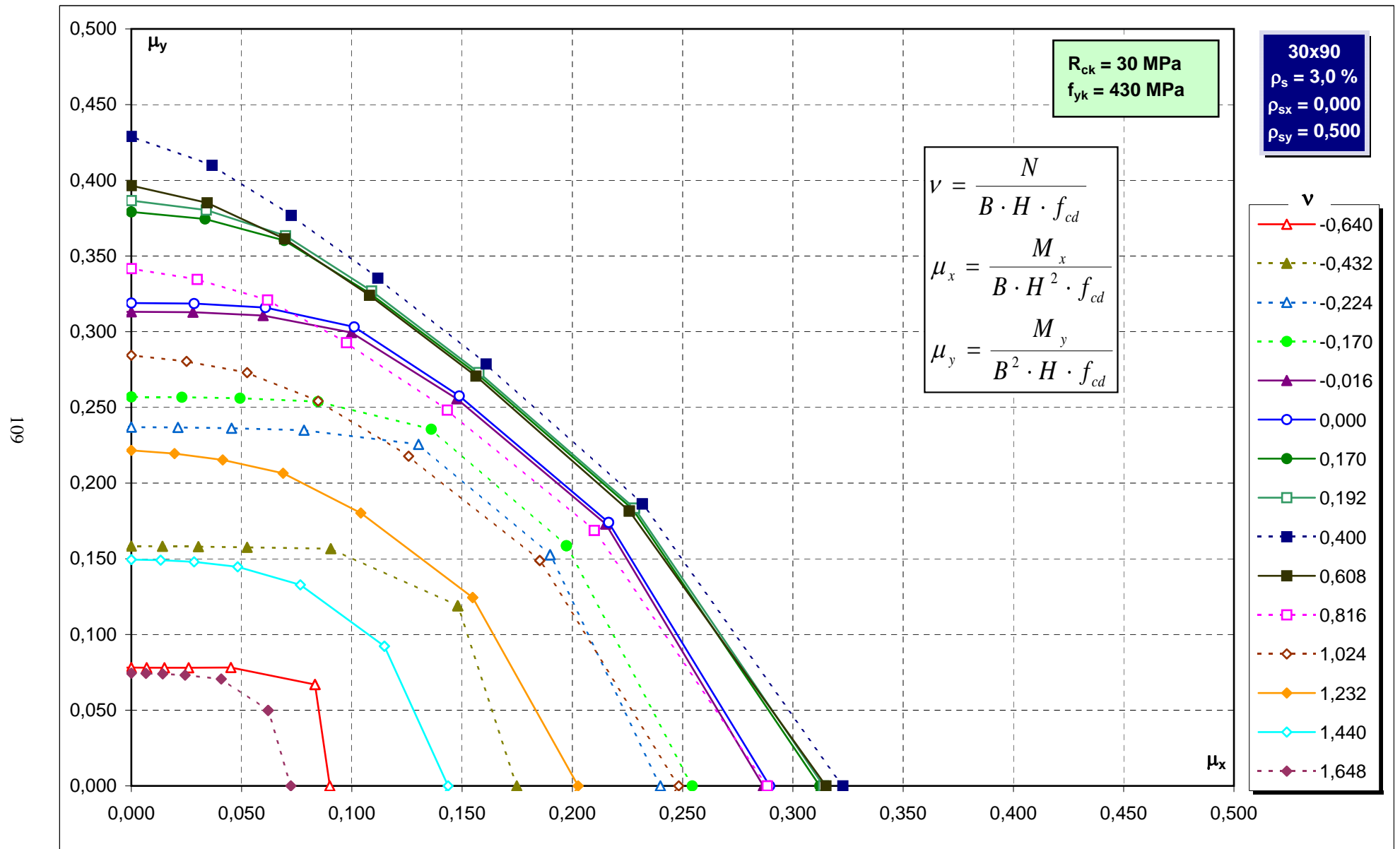
Abachi di verifica



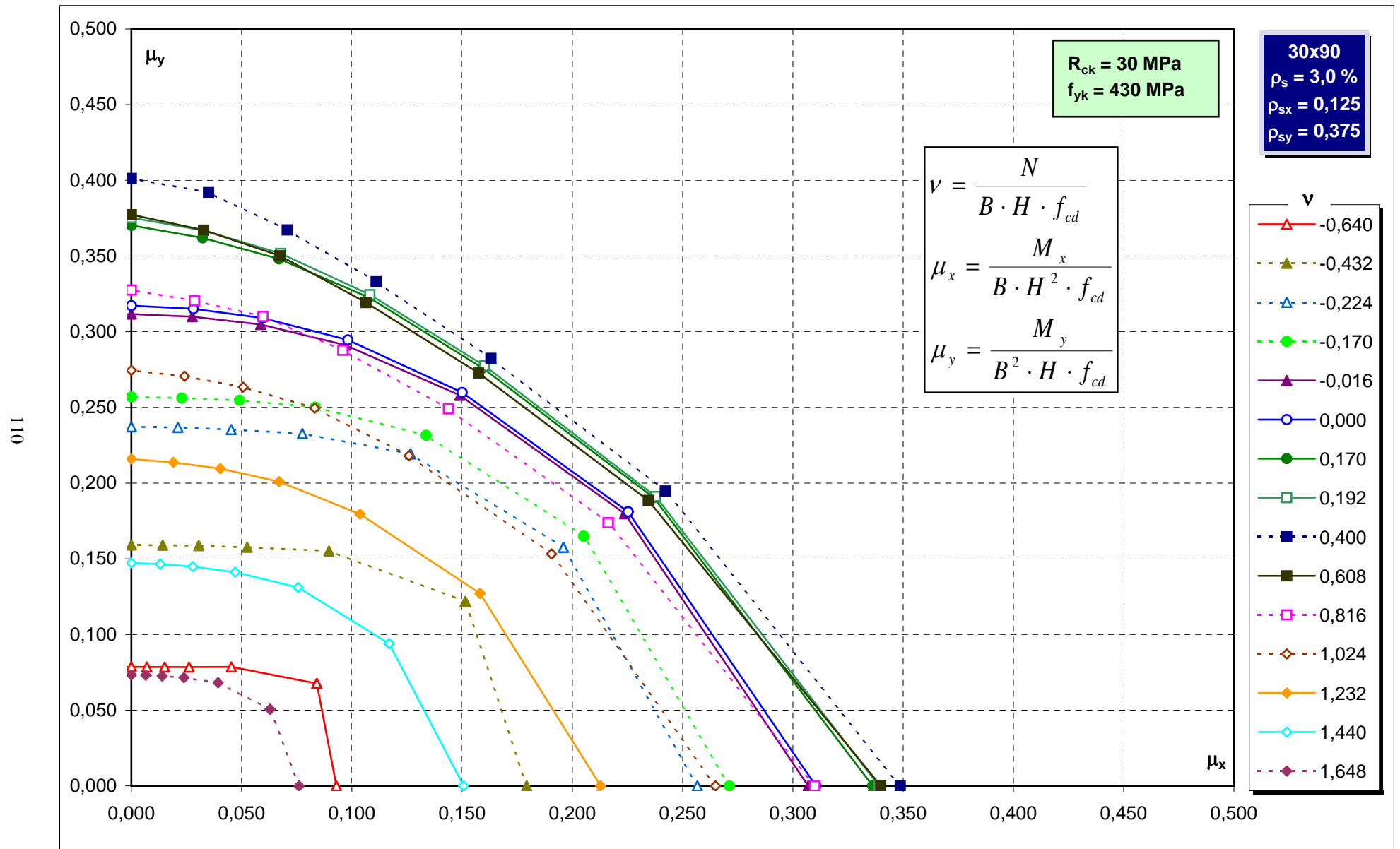
Abachi di verifica



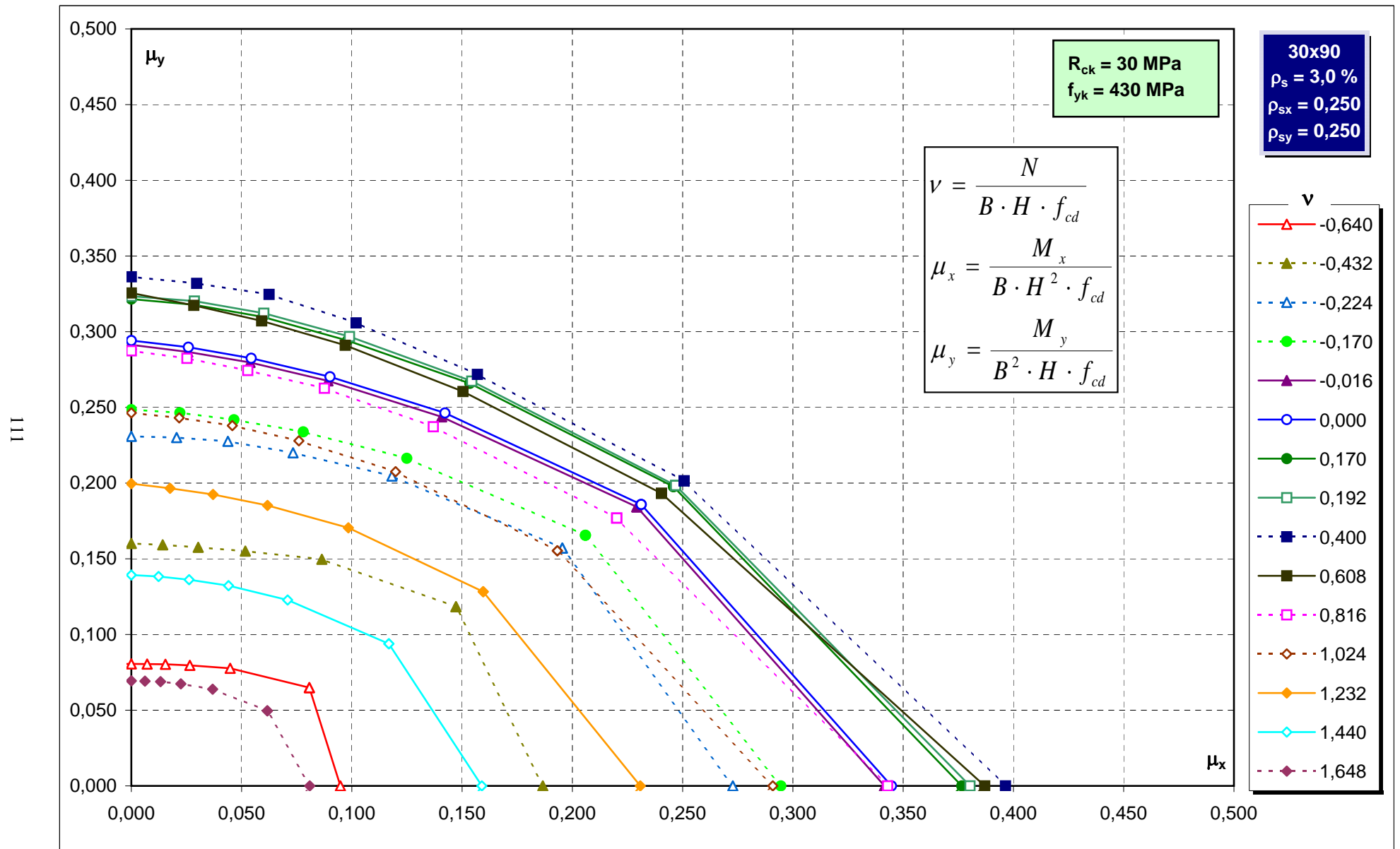
Abachi di verifica



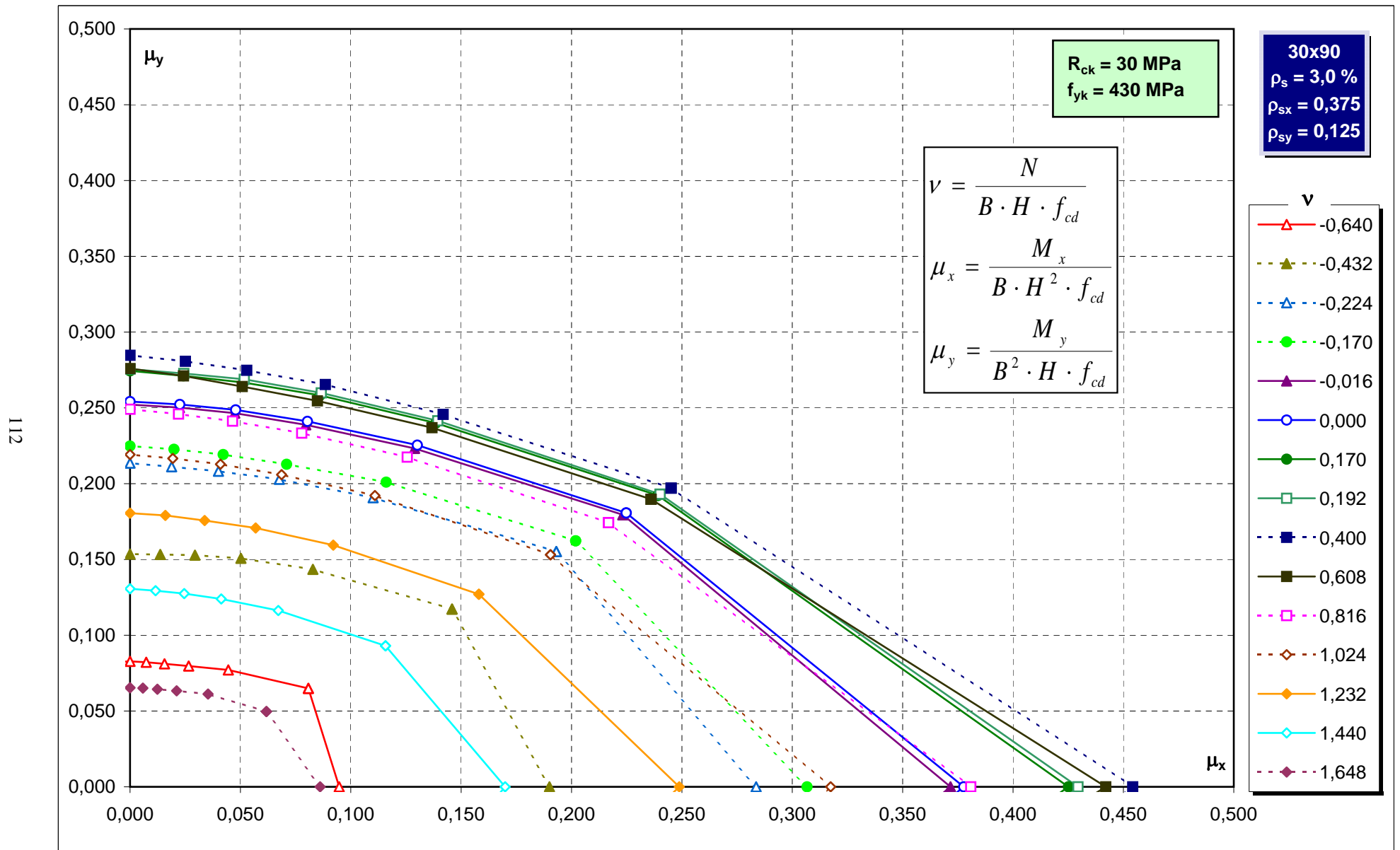
Abachi di verifica



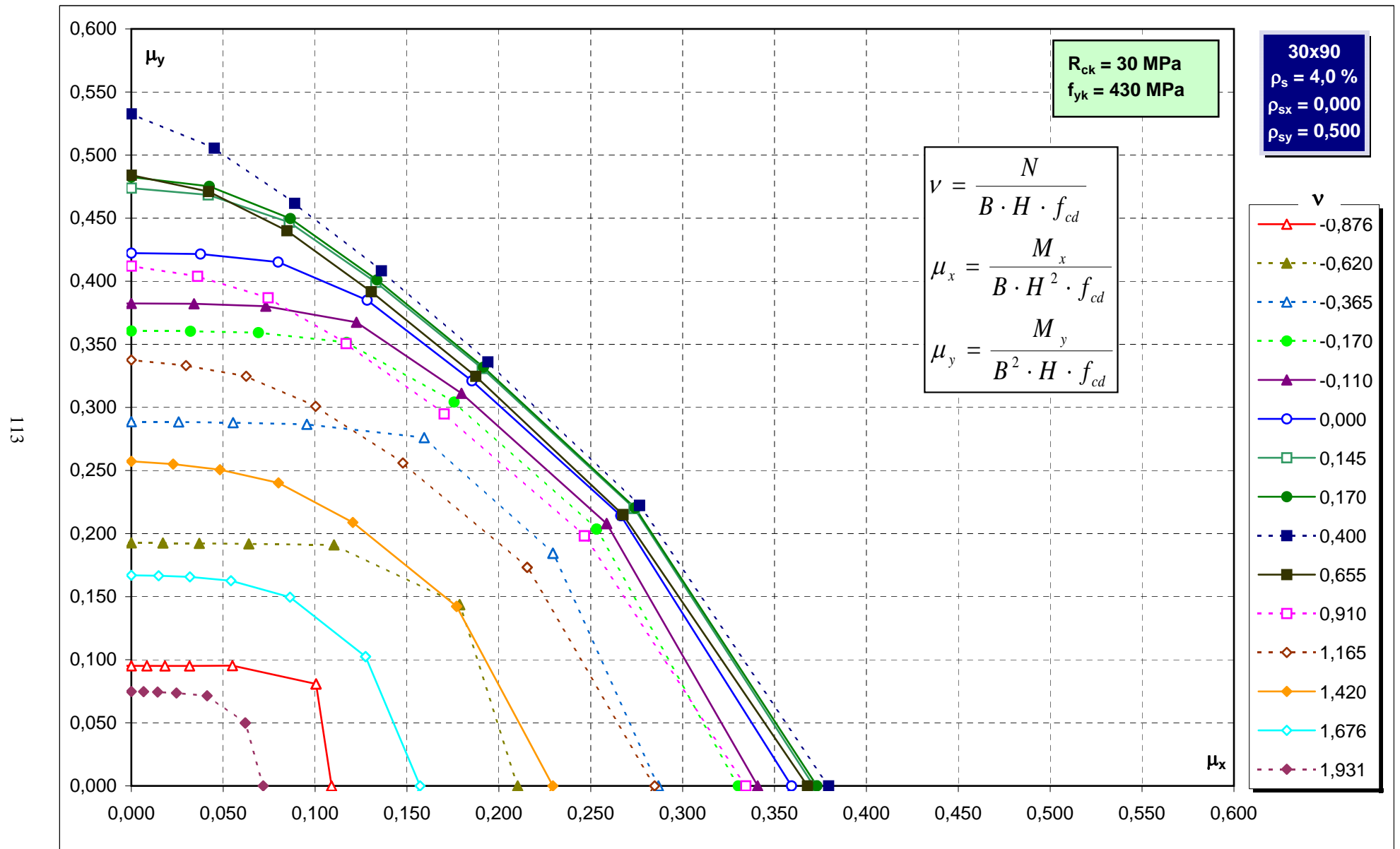
Abachi di verifica



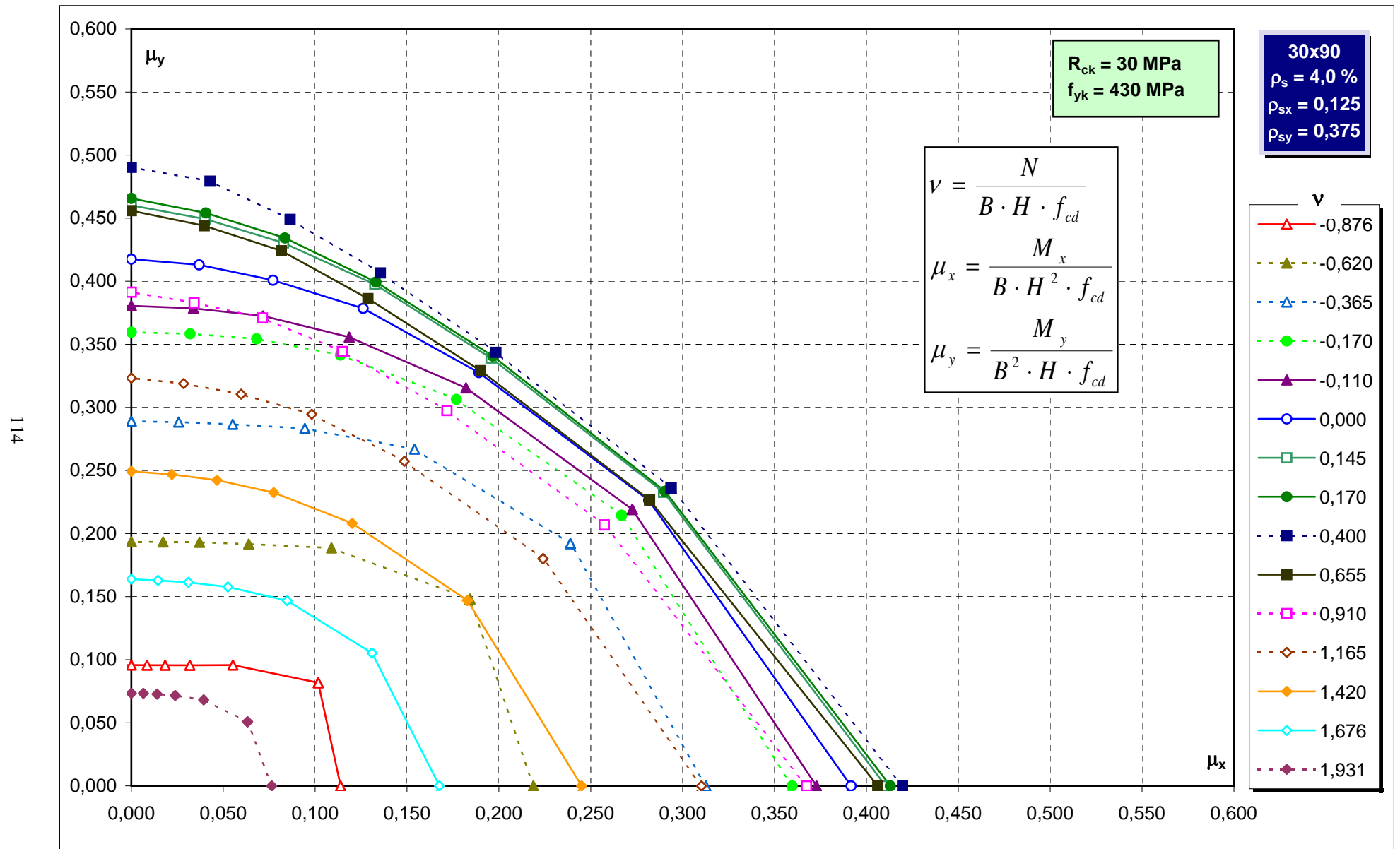
Abachi di verifica



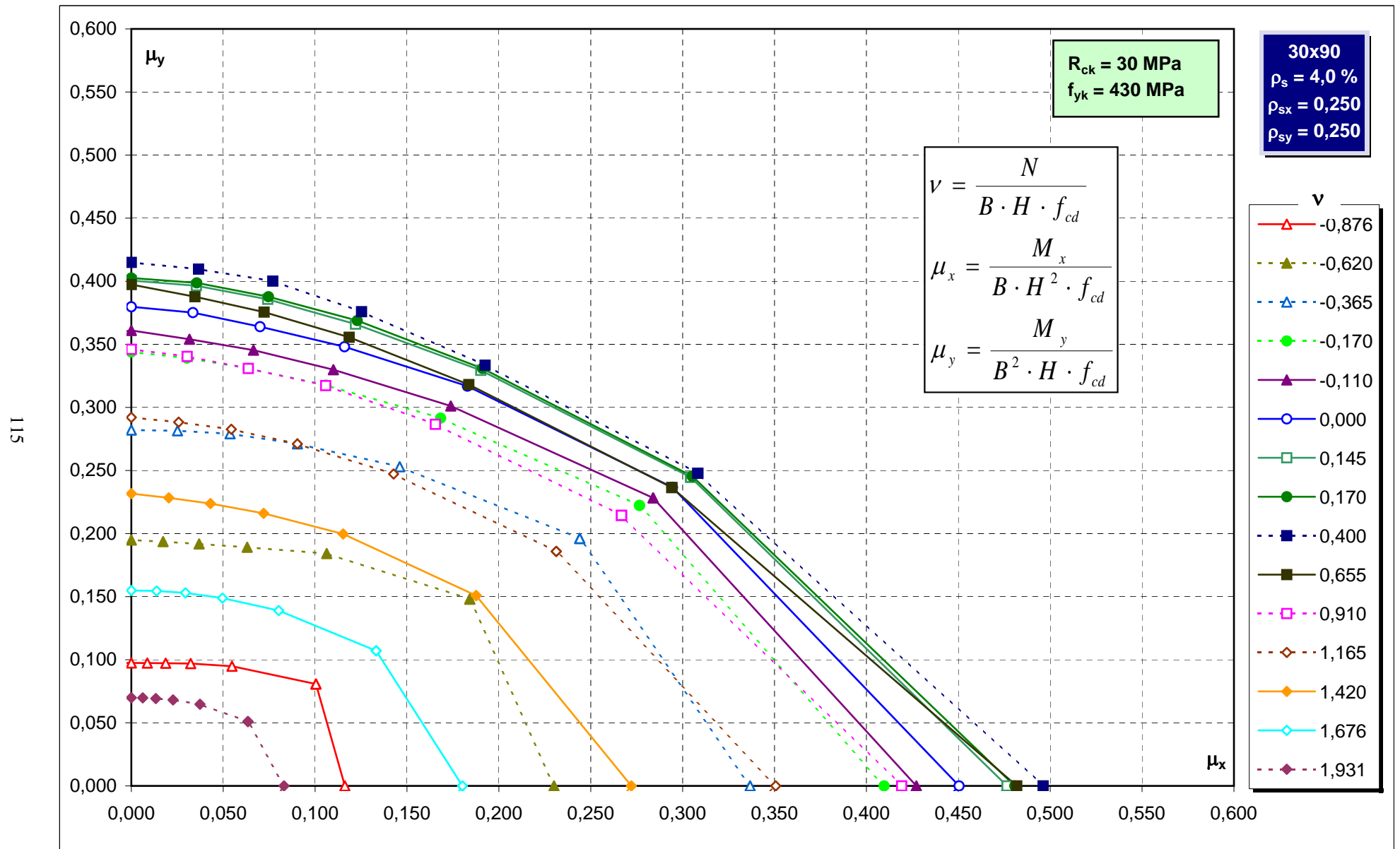
Abachi di verifica



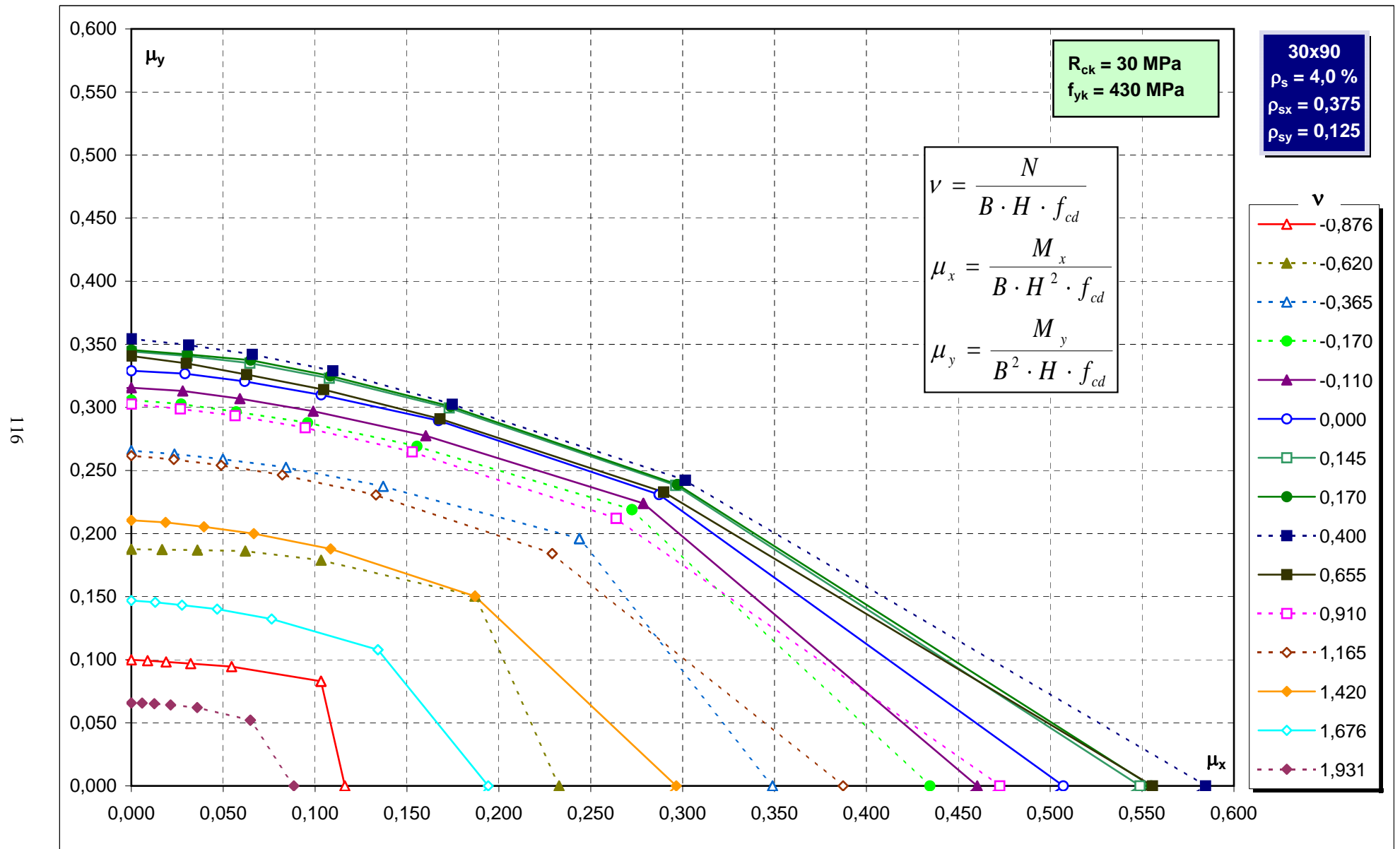
Abachi di verifica



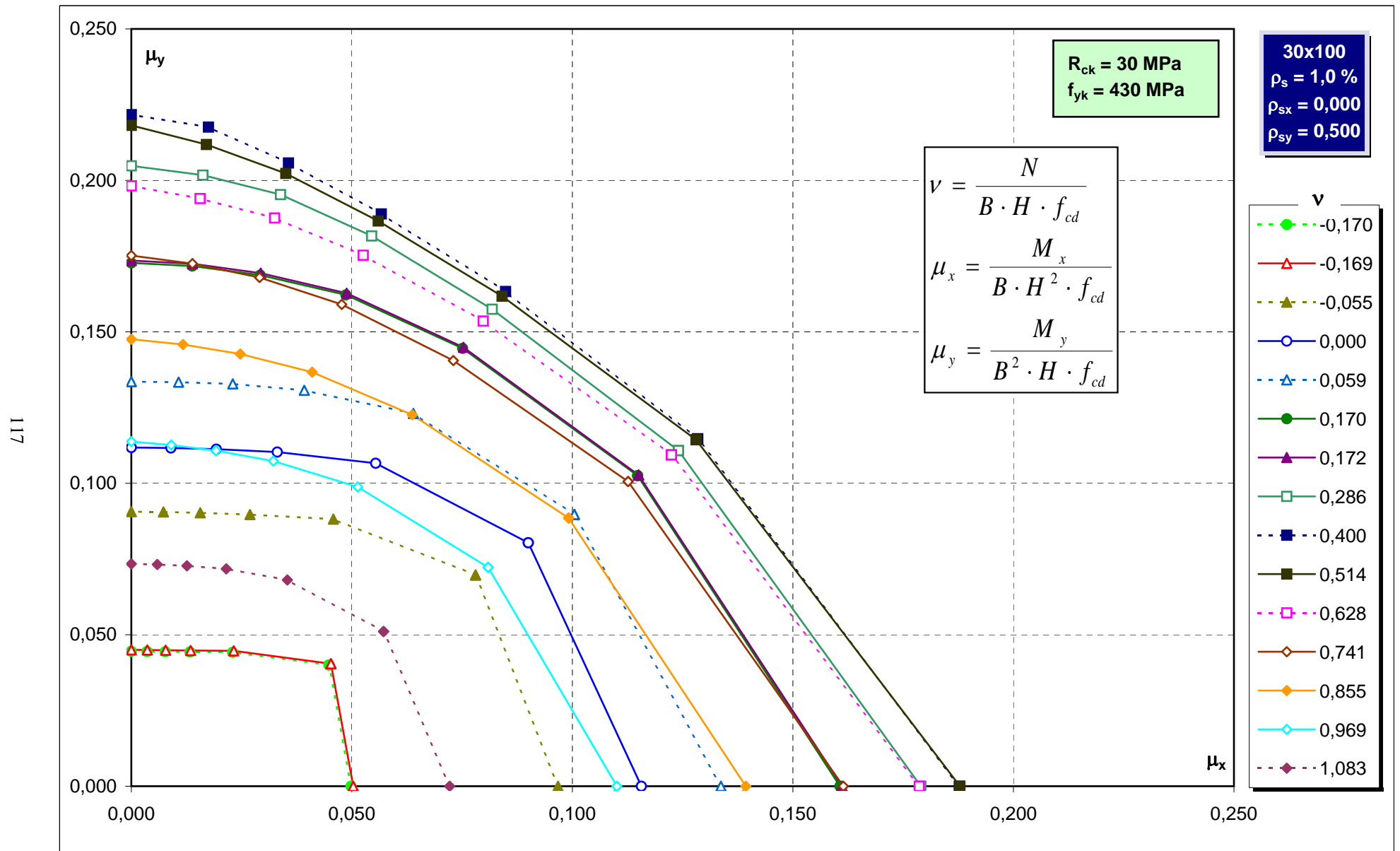
Abachi di verifica



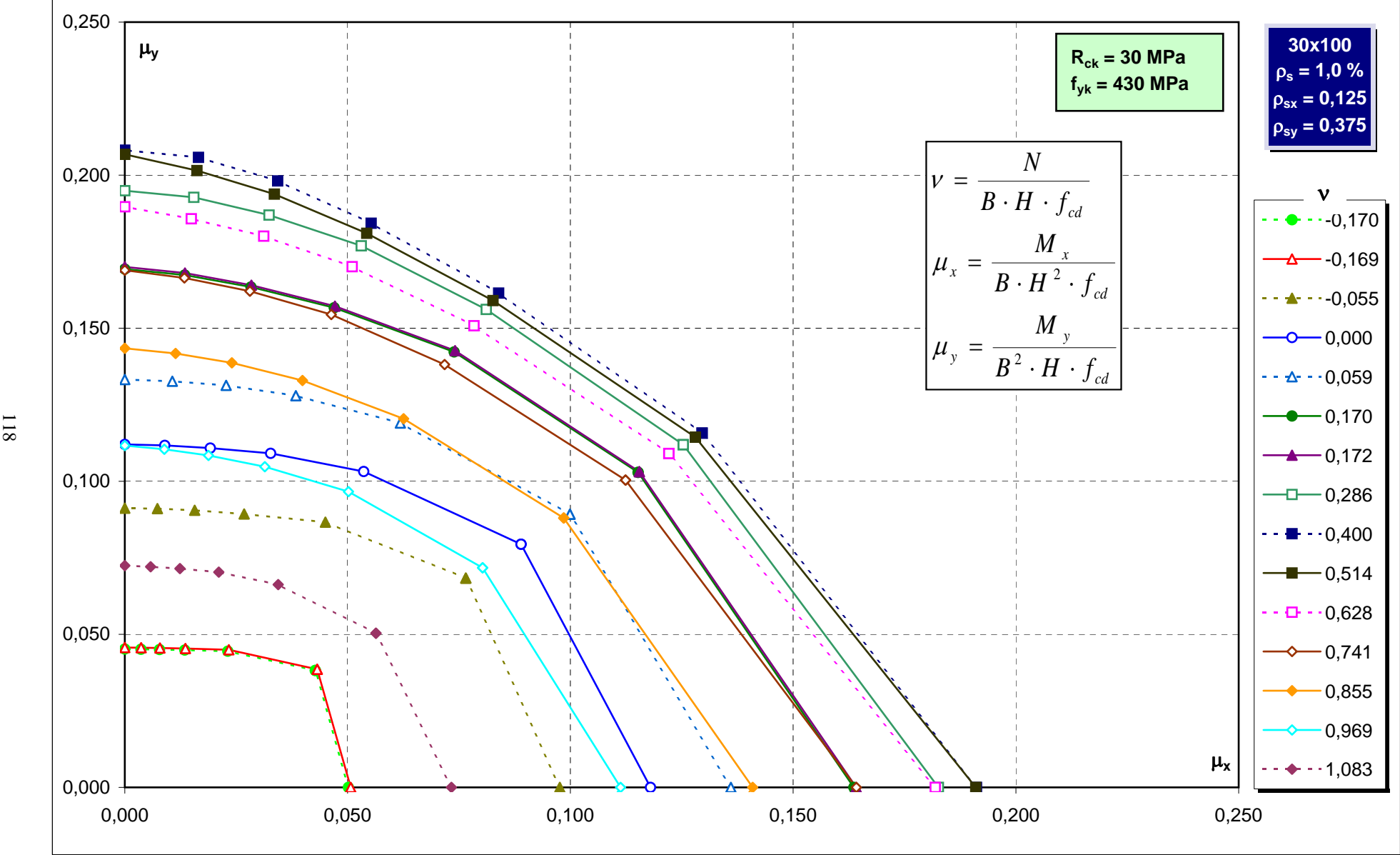
Abachi di verifica



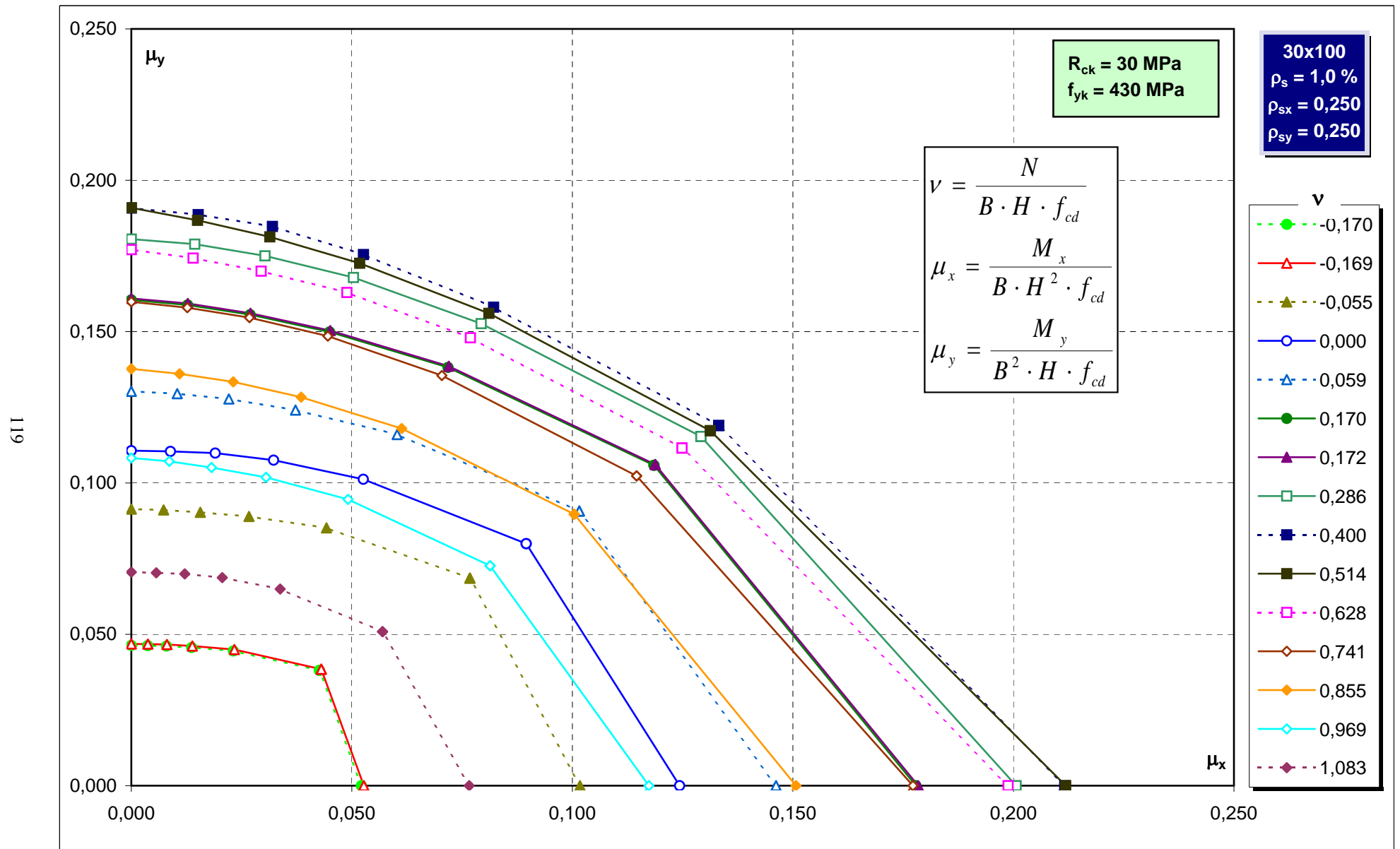
Abachi di verifica



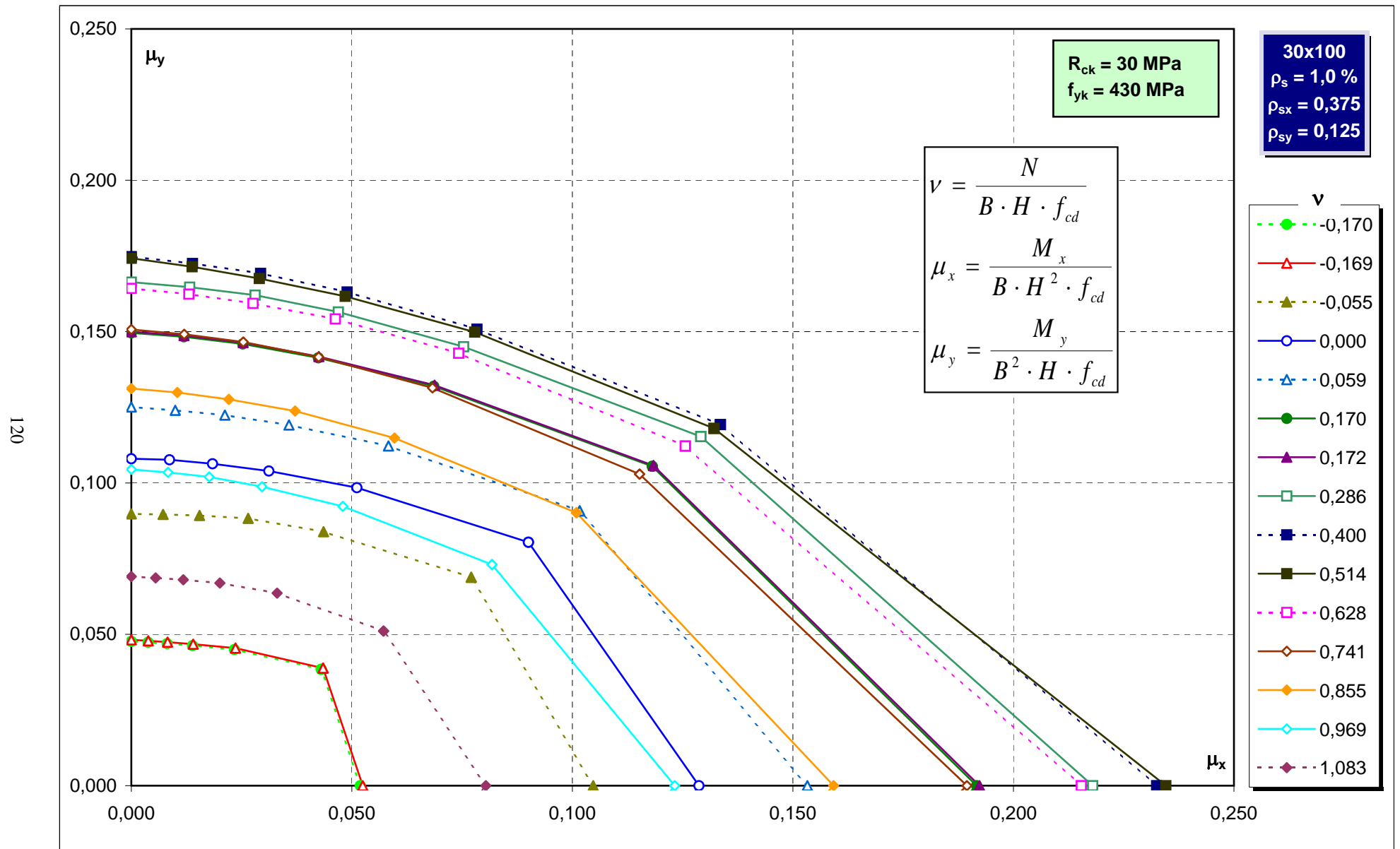
Abachi di verifica



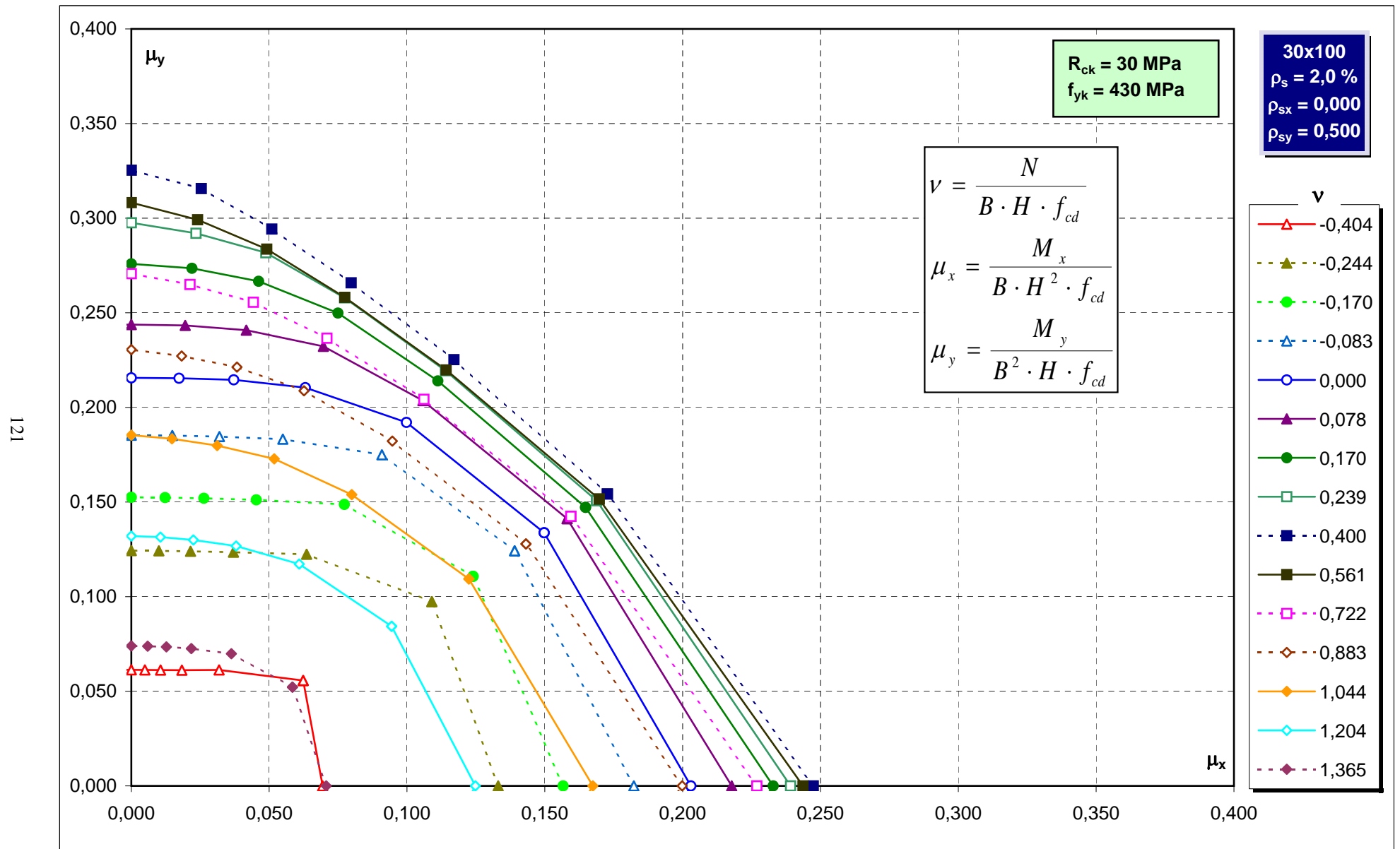
Abachi di verifica



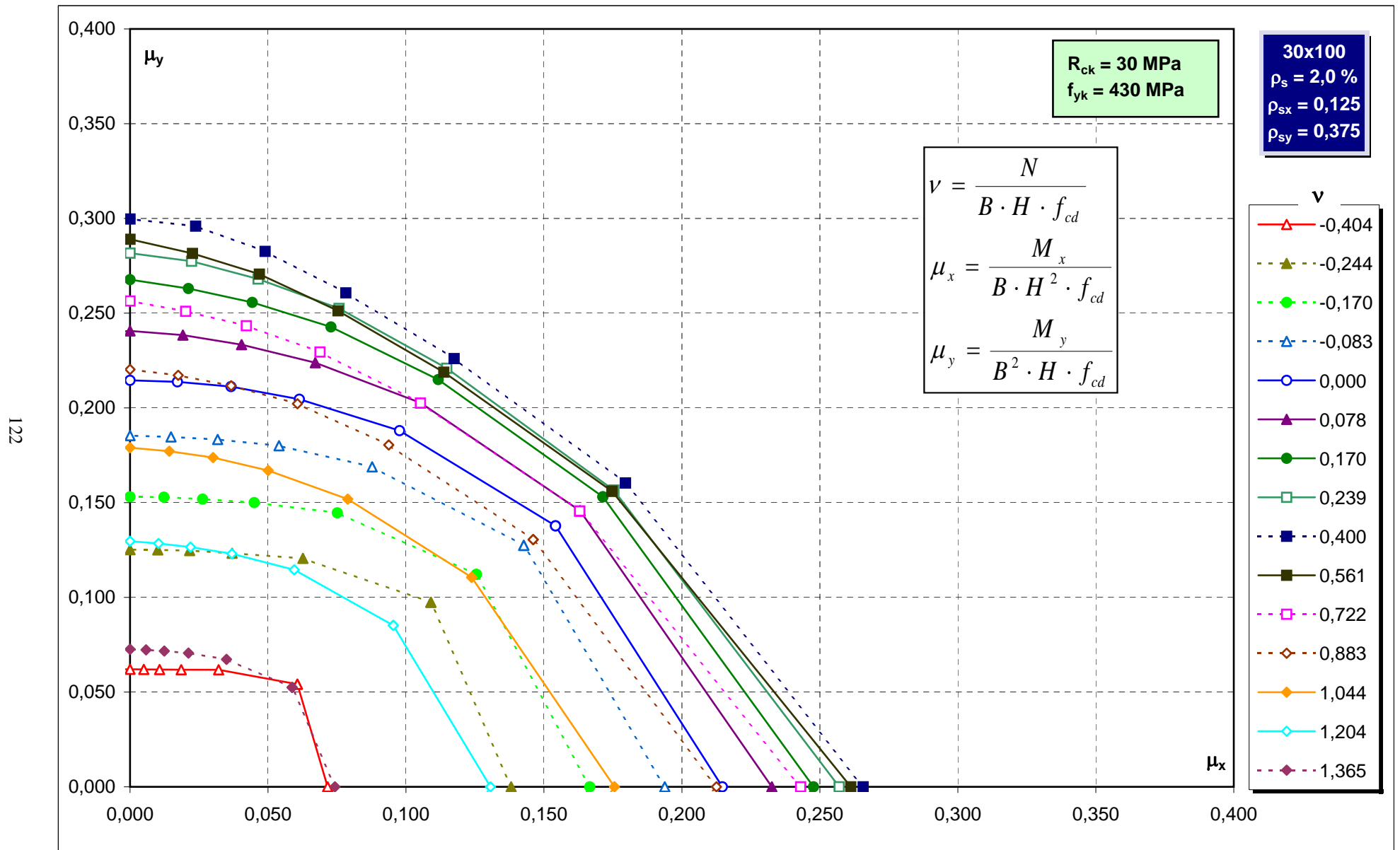
Abachi di verifica



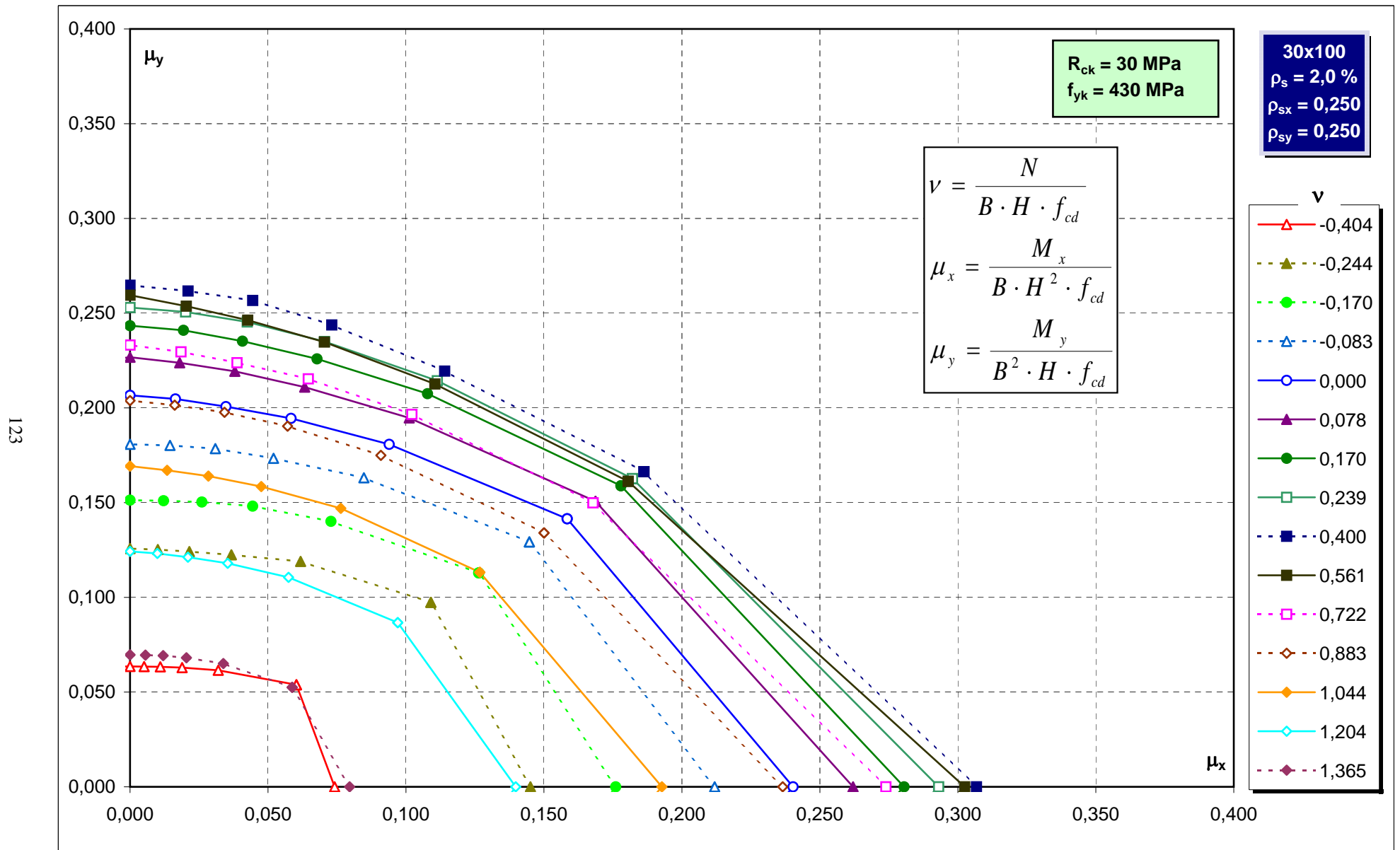
Abachi di verifica



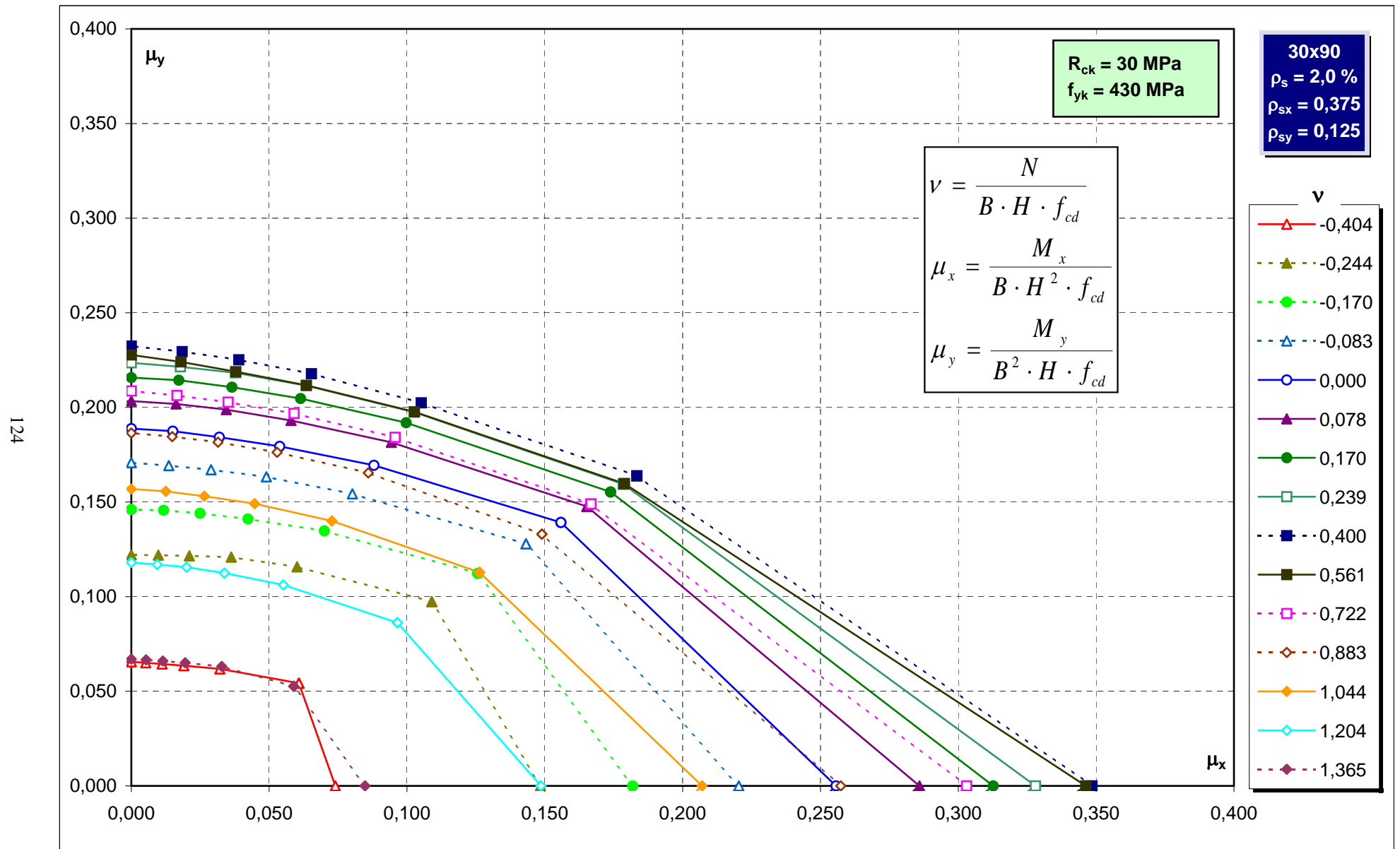
Abachi di verifica



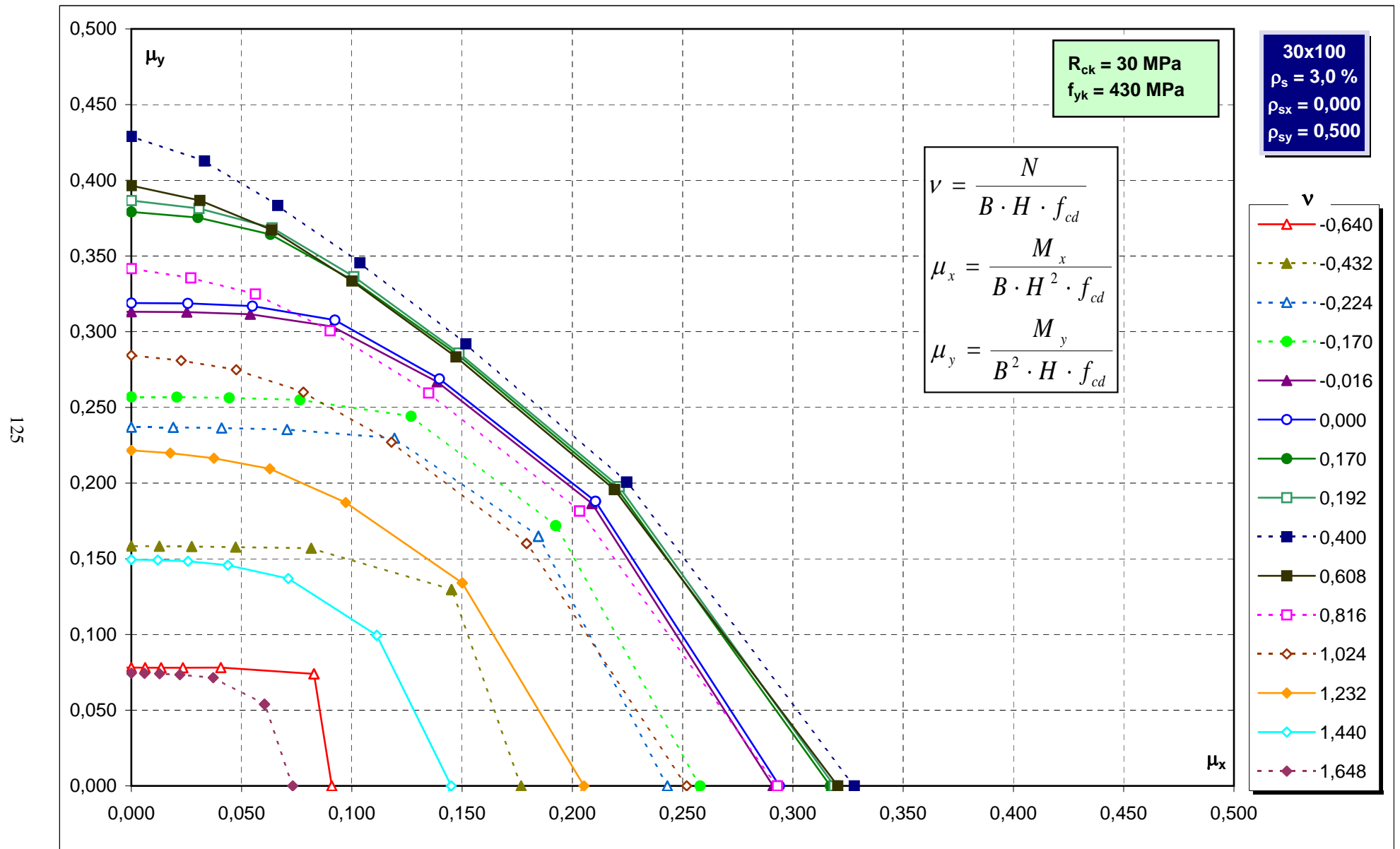
Abachi di verifica



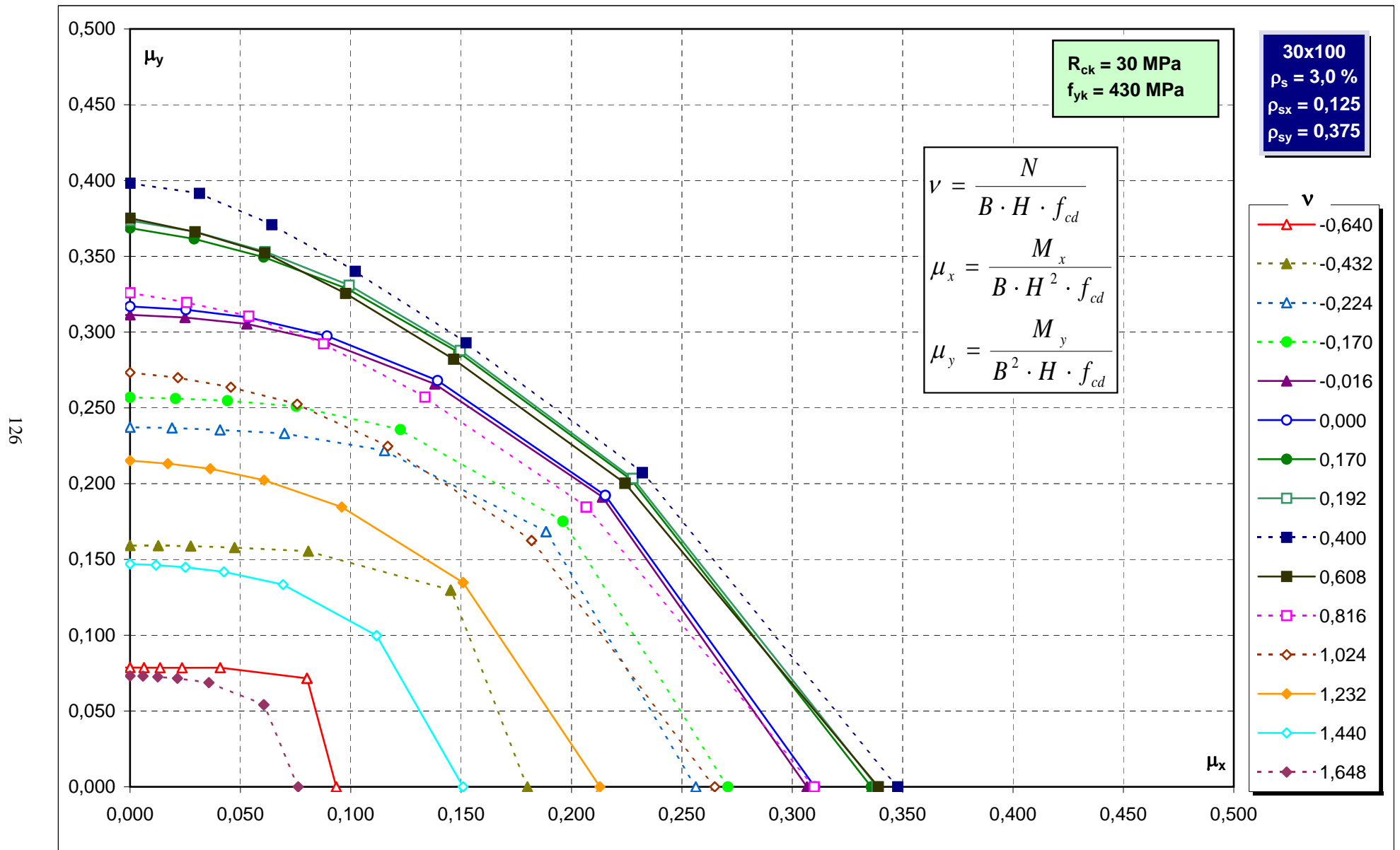
Abachi di verifica



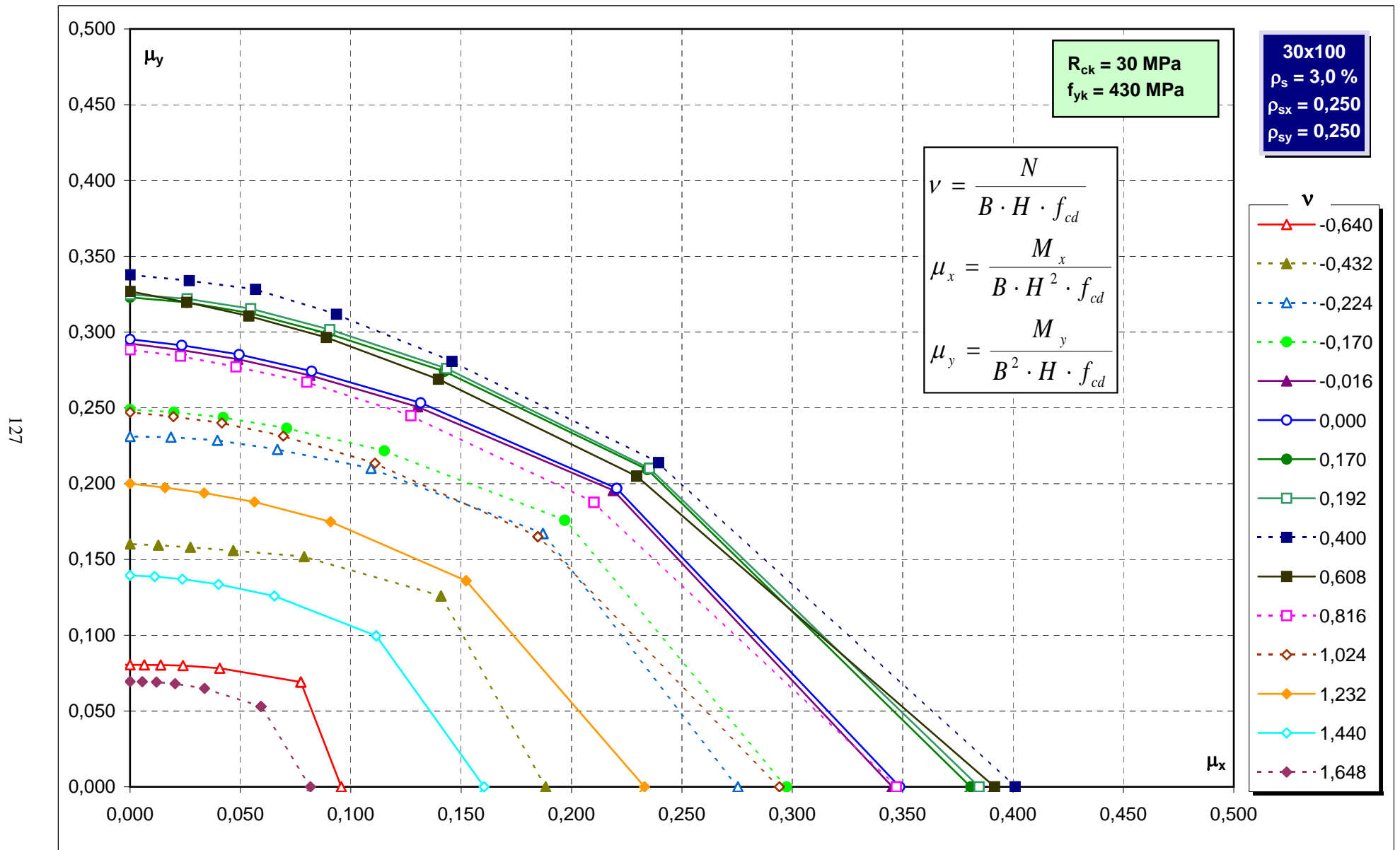
Abachi di verifica



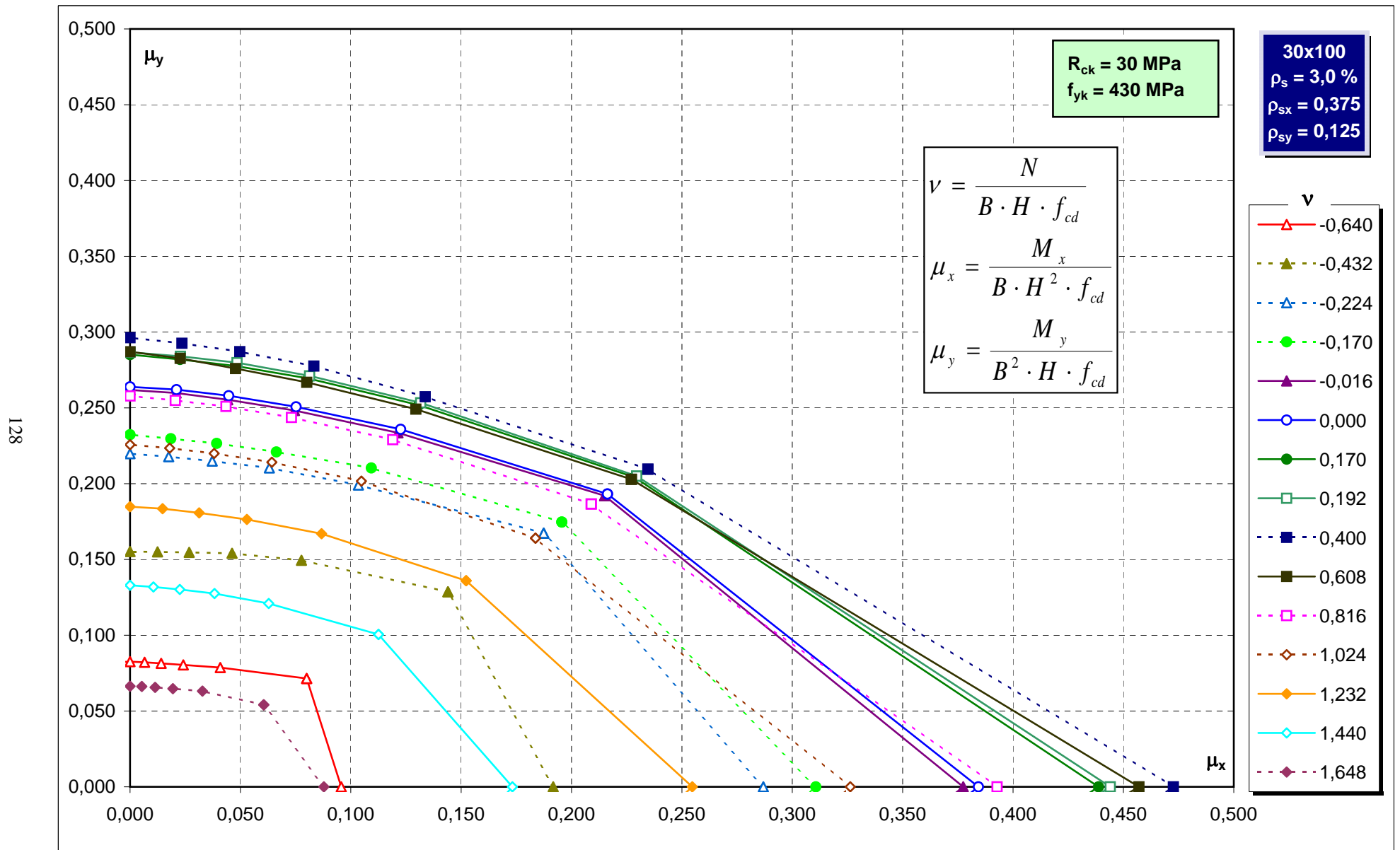
Abachi di verifica



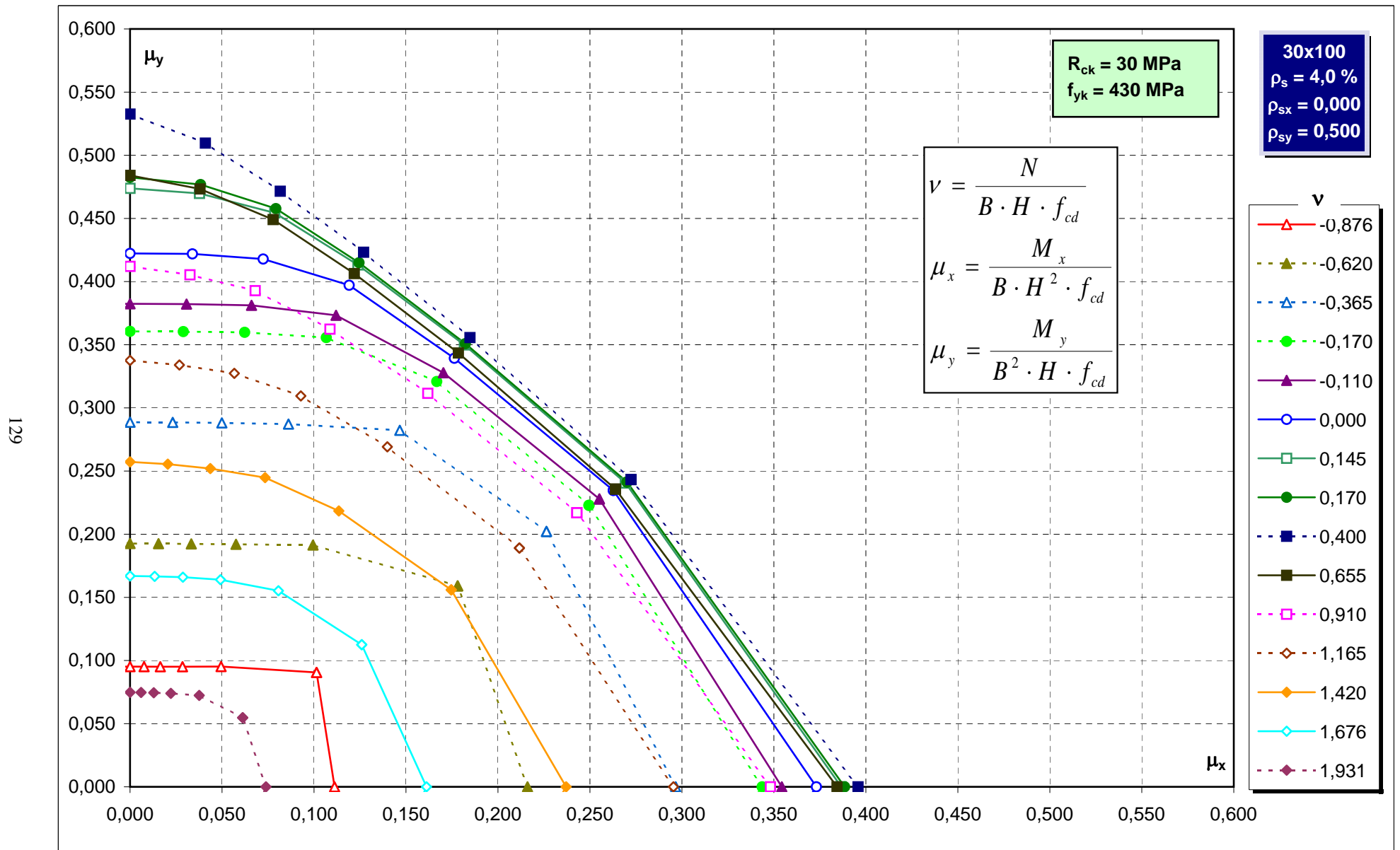
Abachi di verifica



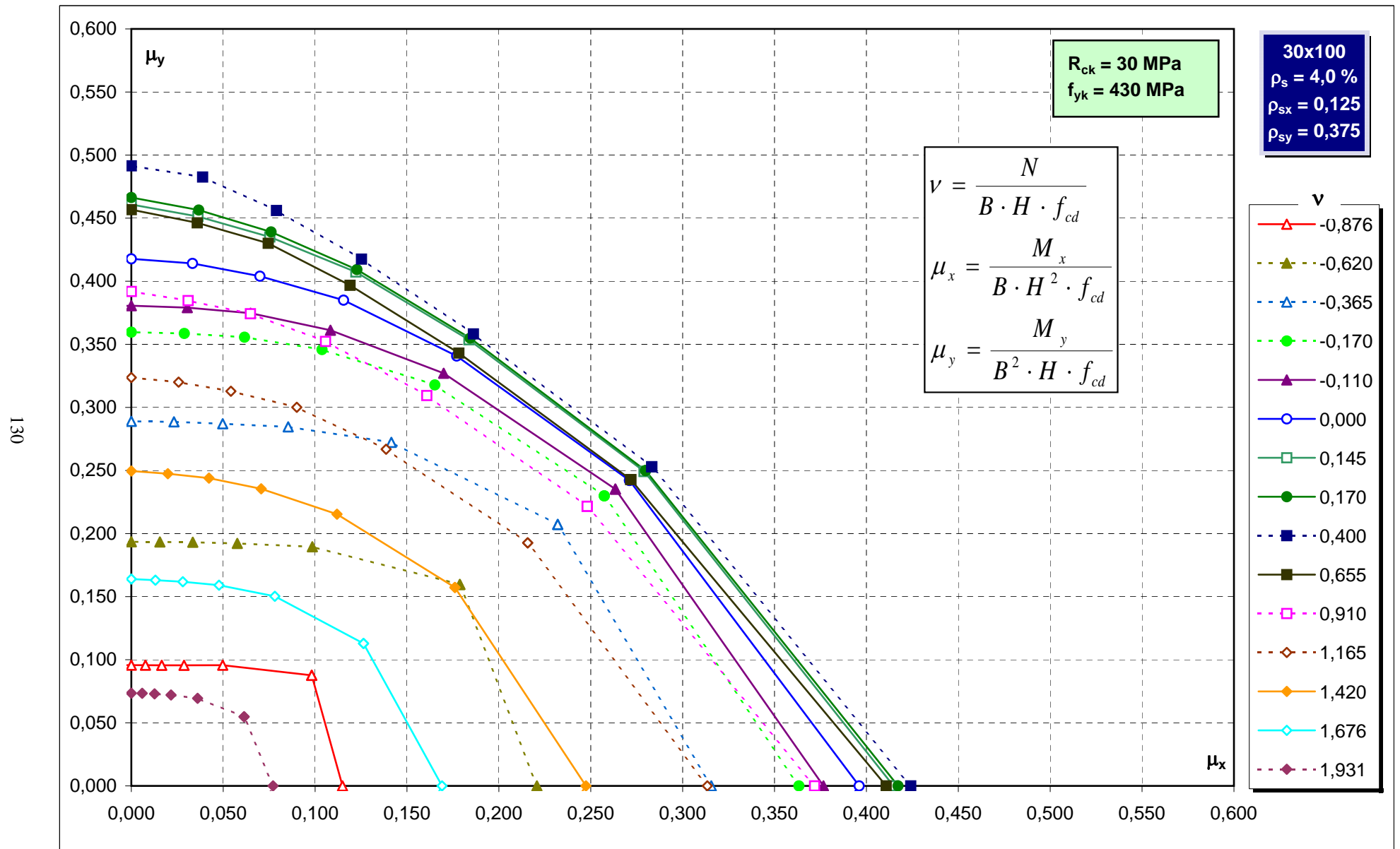
Abachi di verifica



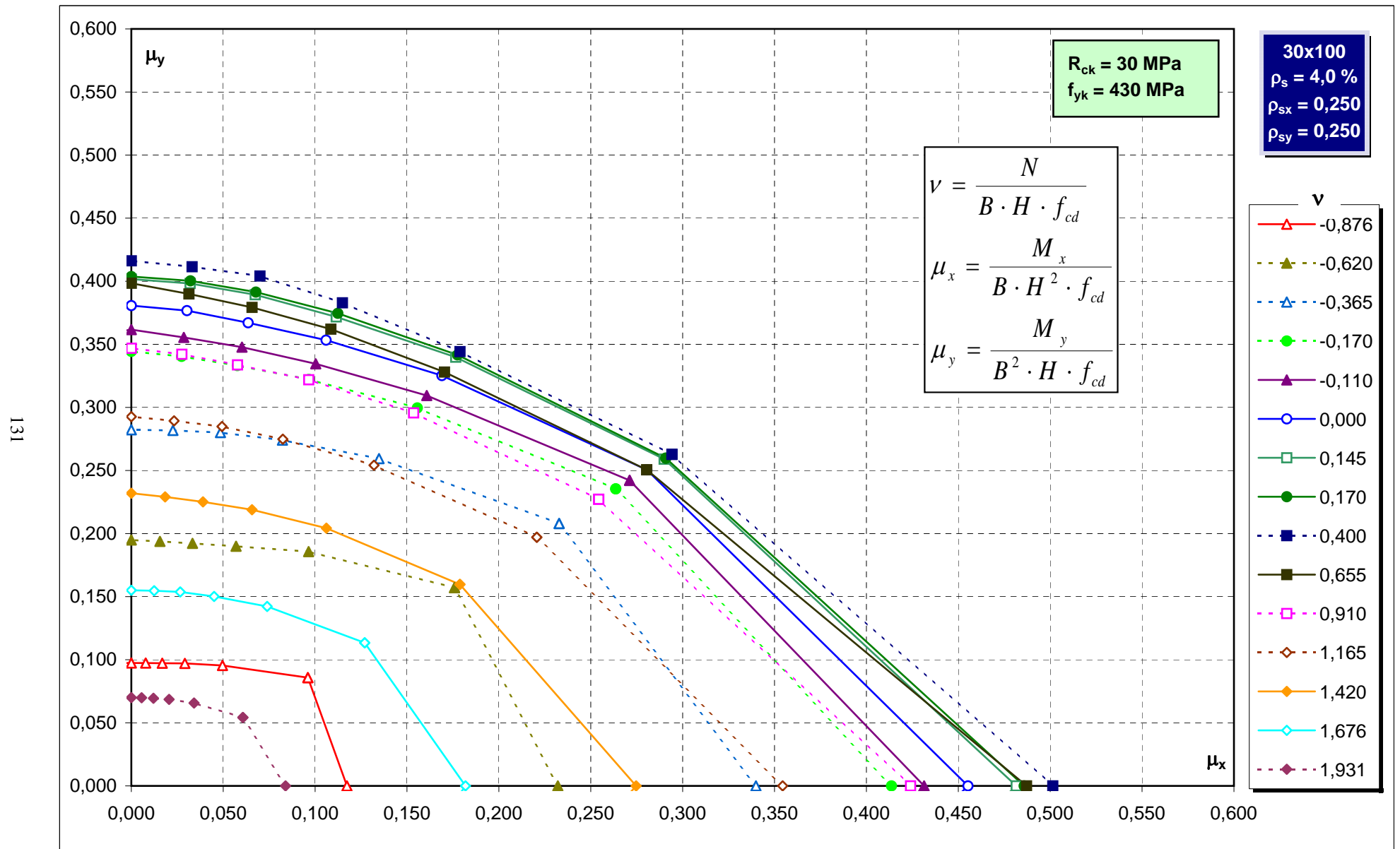
Abachi di verifica



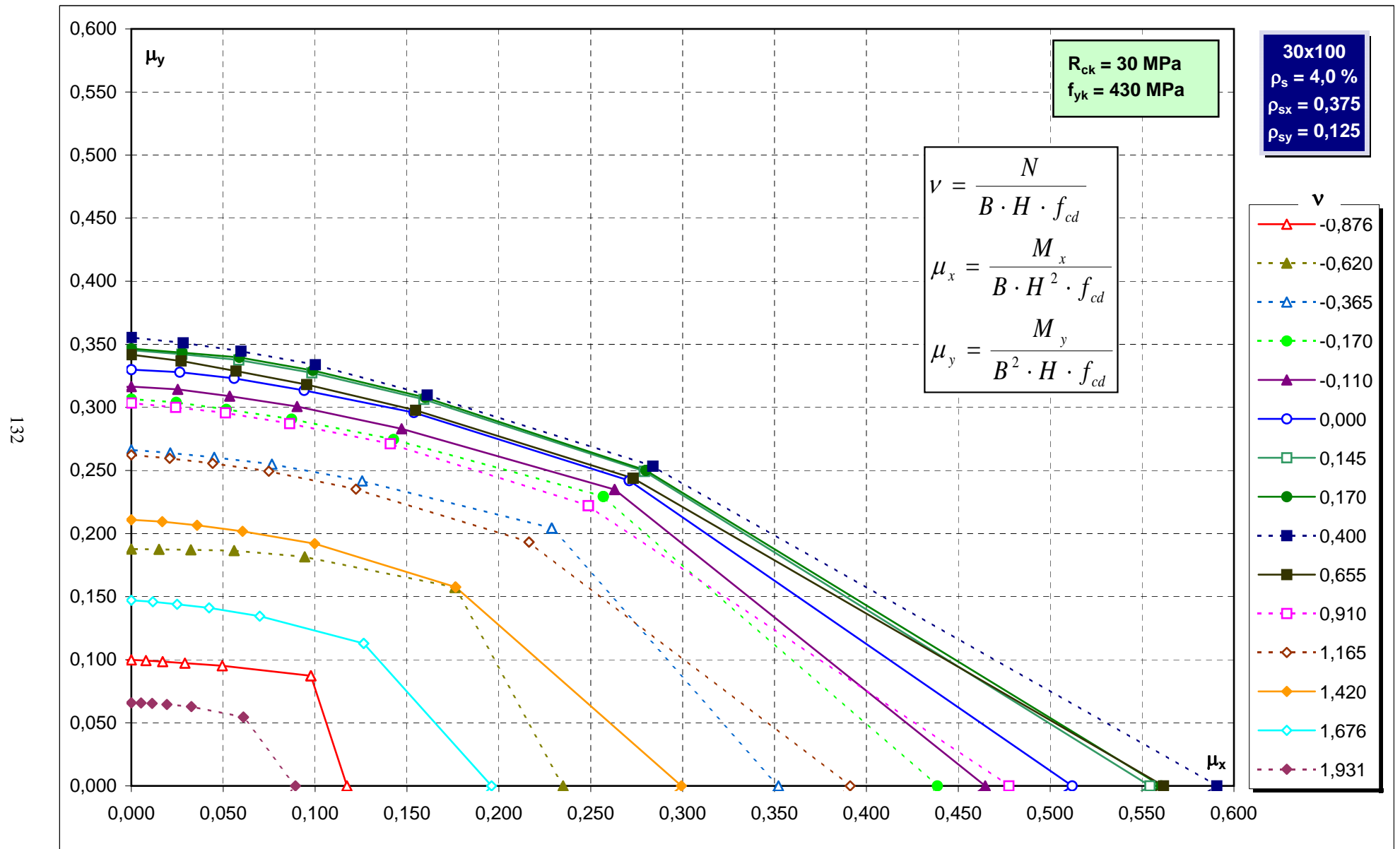
Abachi di verifica



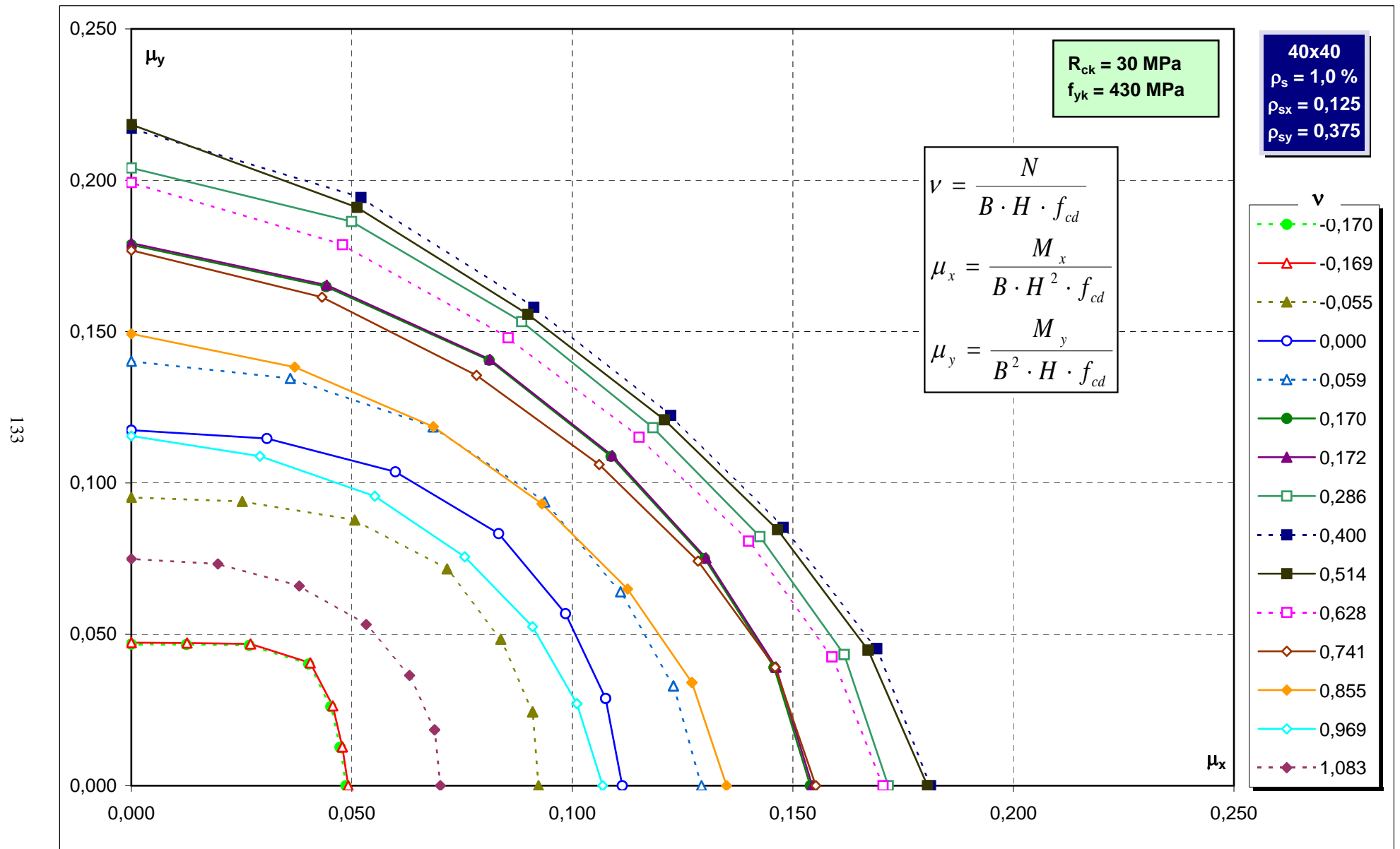
Abachi di verifica



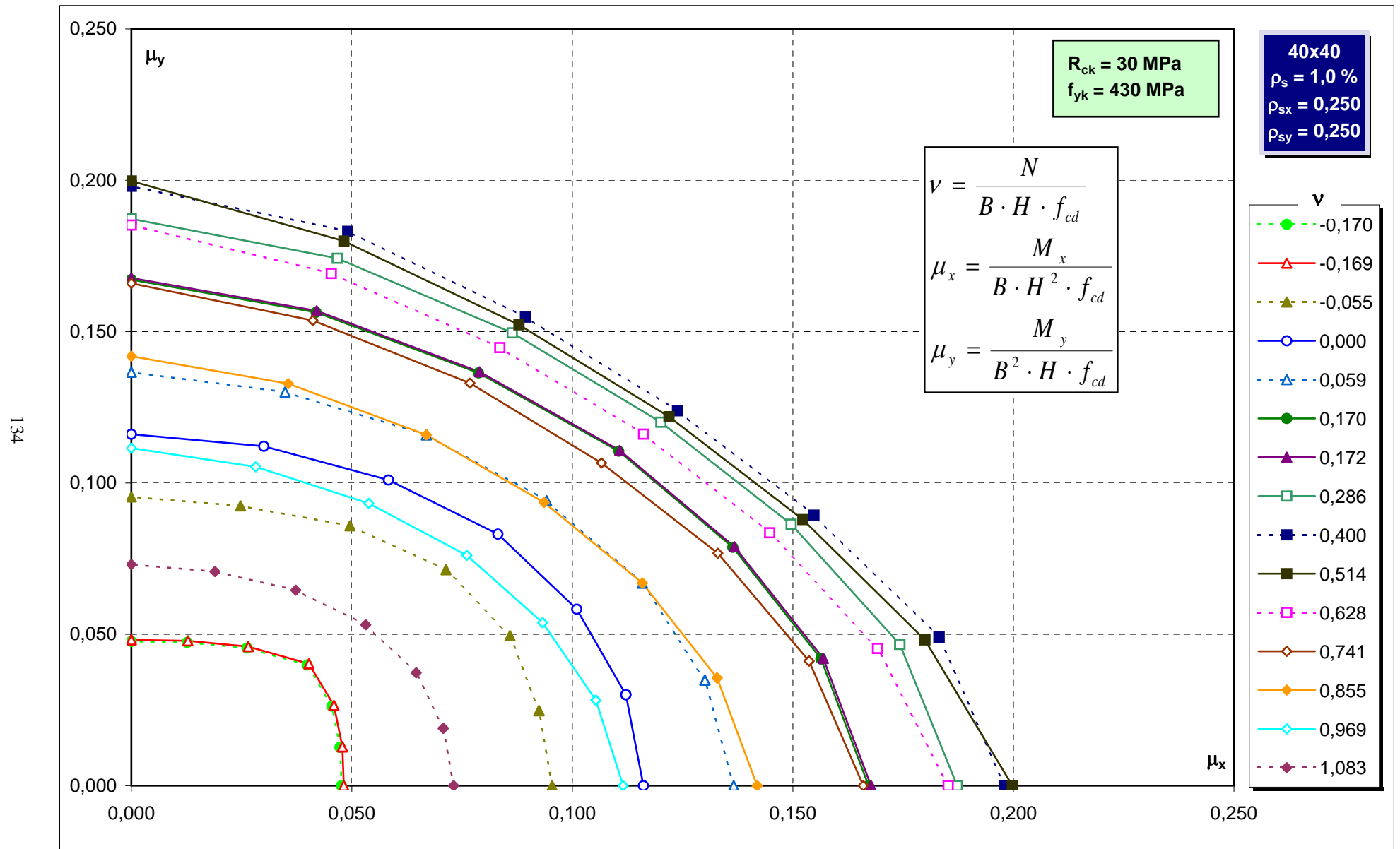
Abachi di verifica



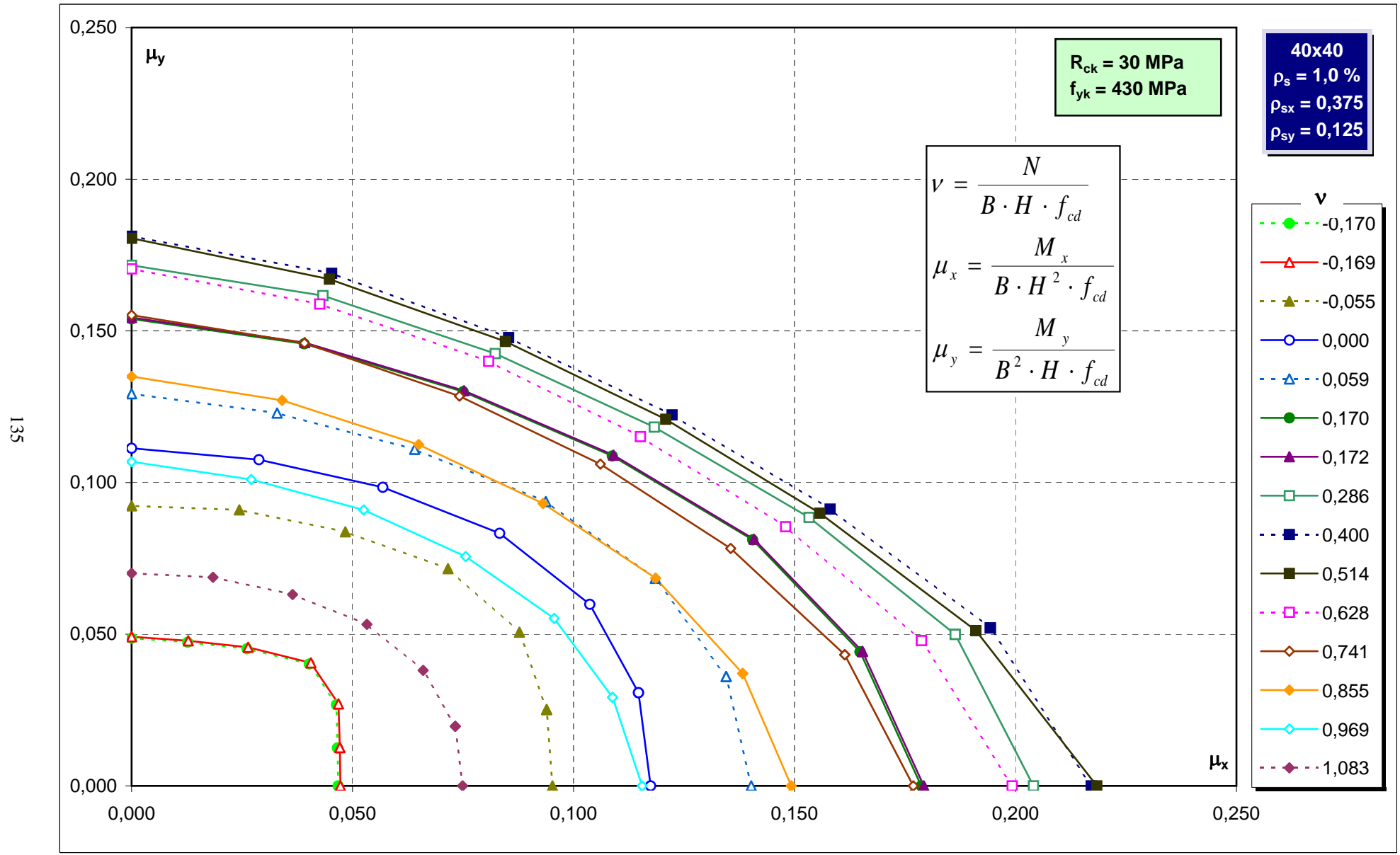
Abachi di verifica



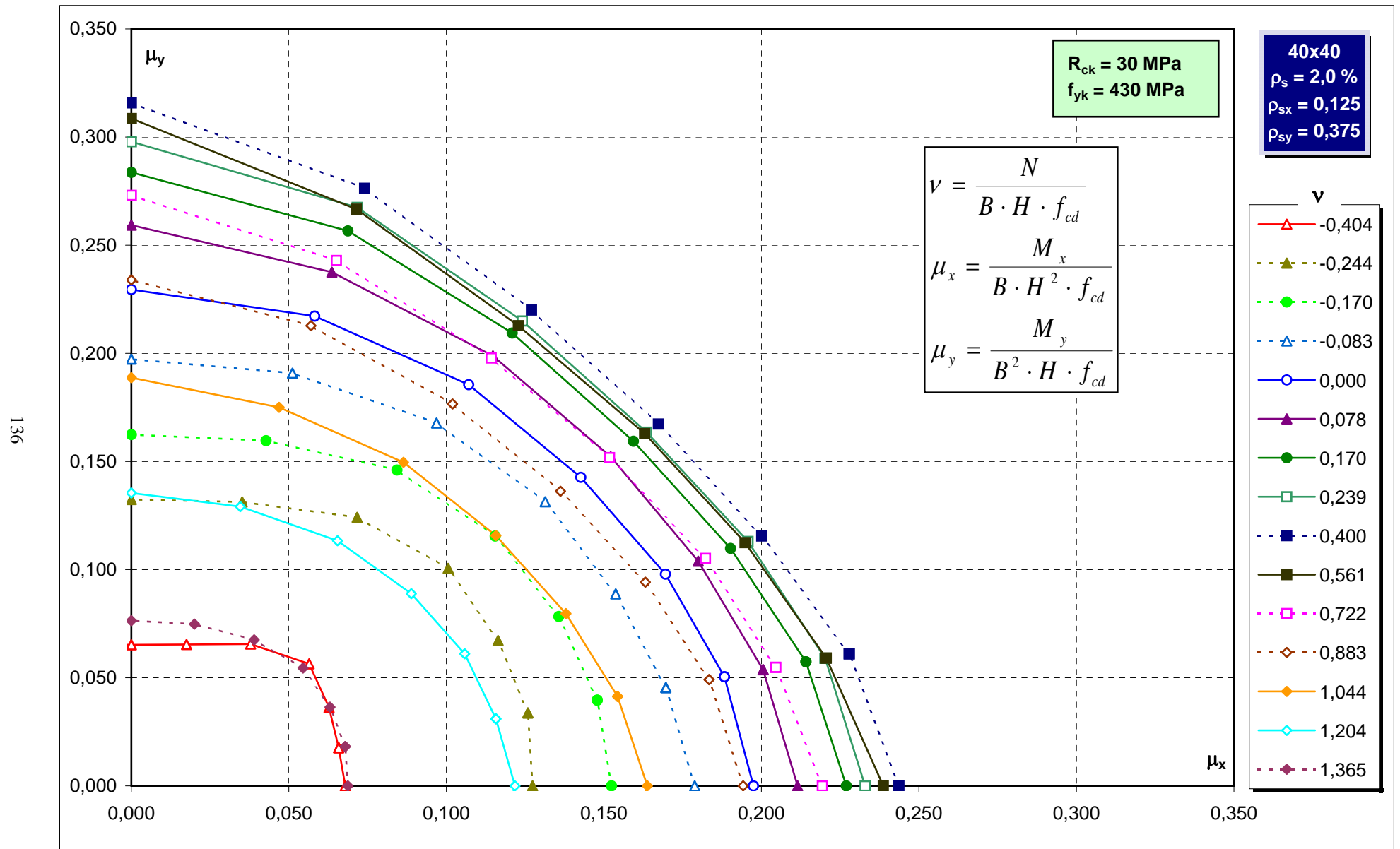
Abachi di verifica



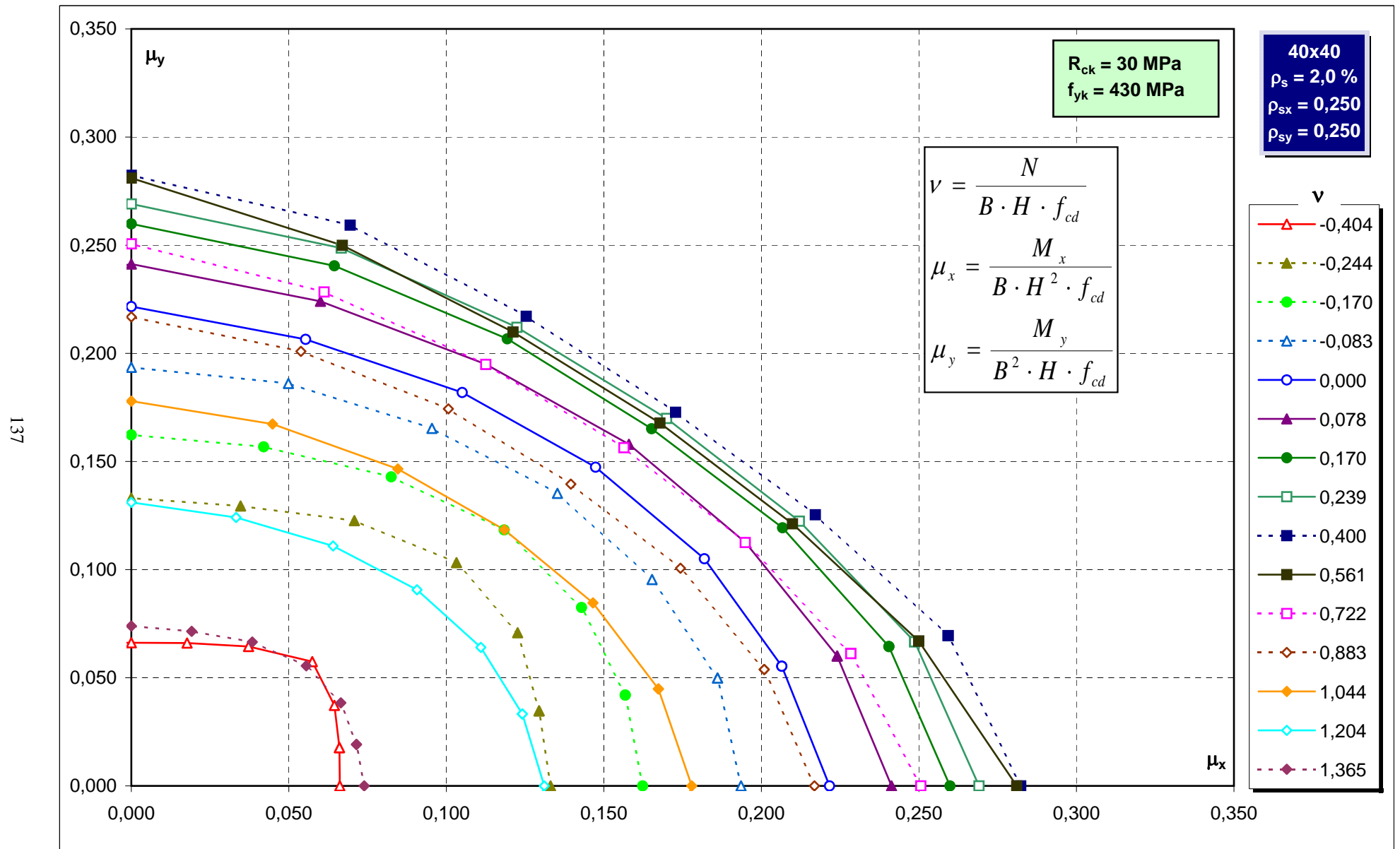
Abachi di verifica



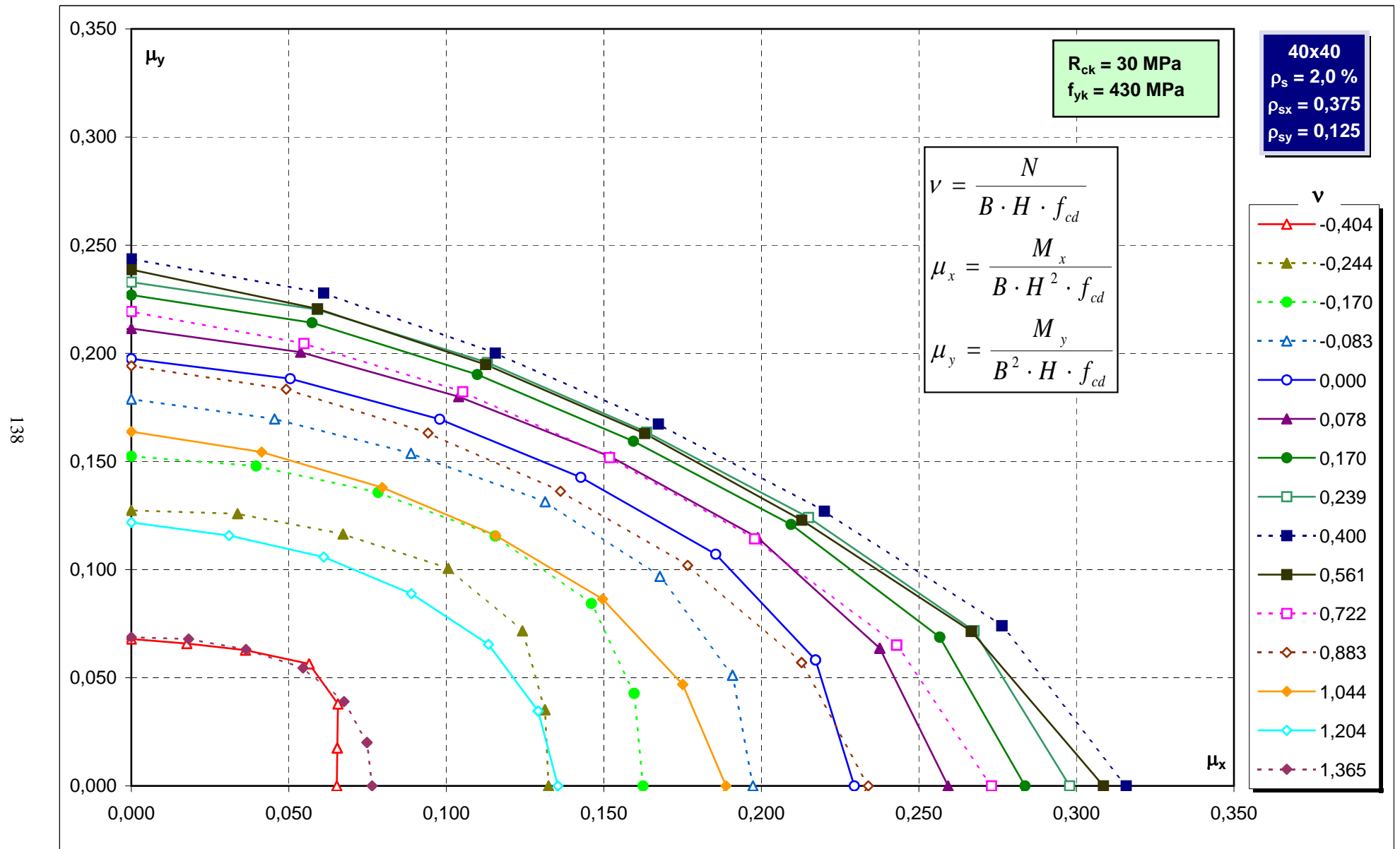
Abachi di verifica



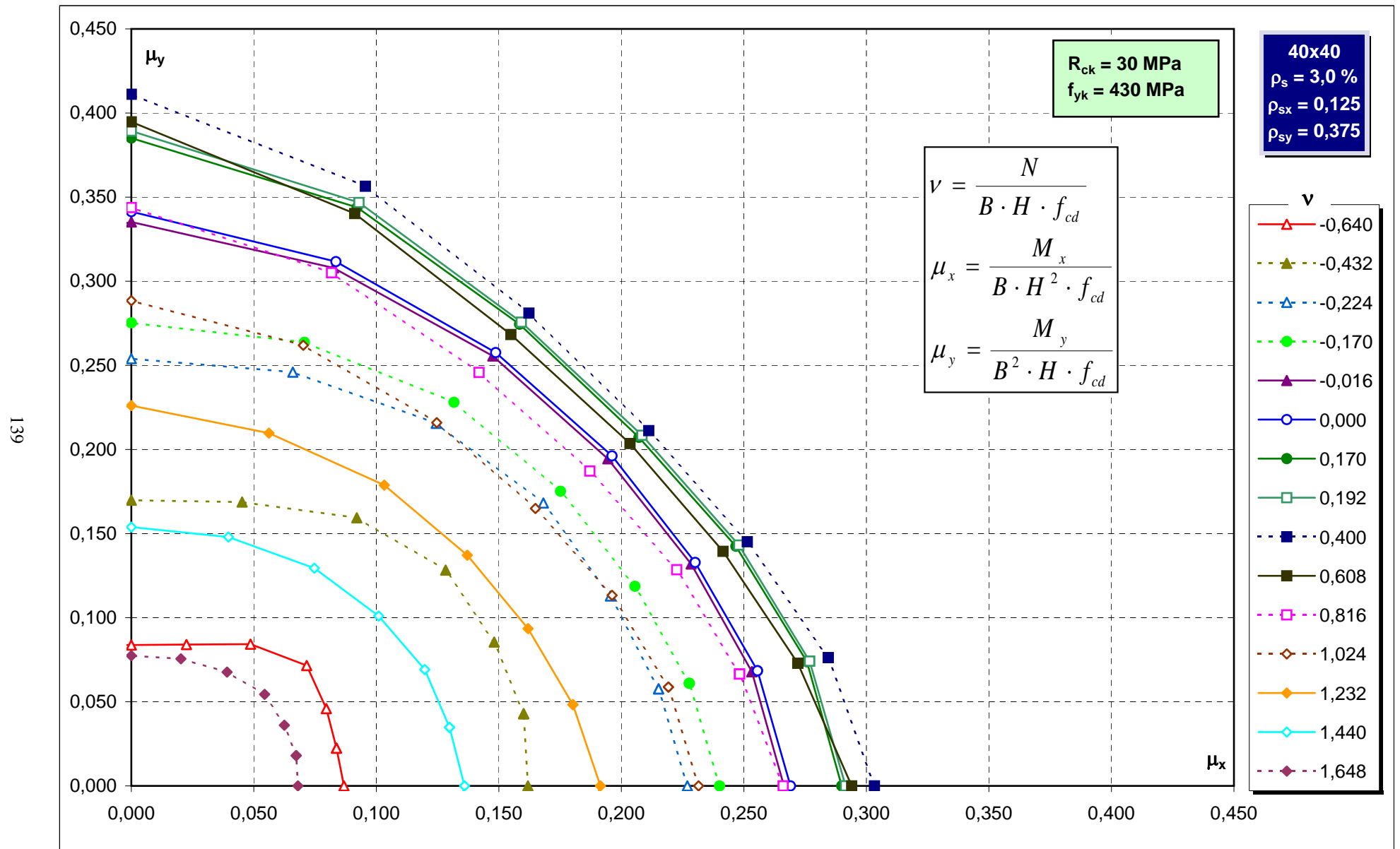
Abachi di verifica



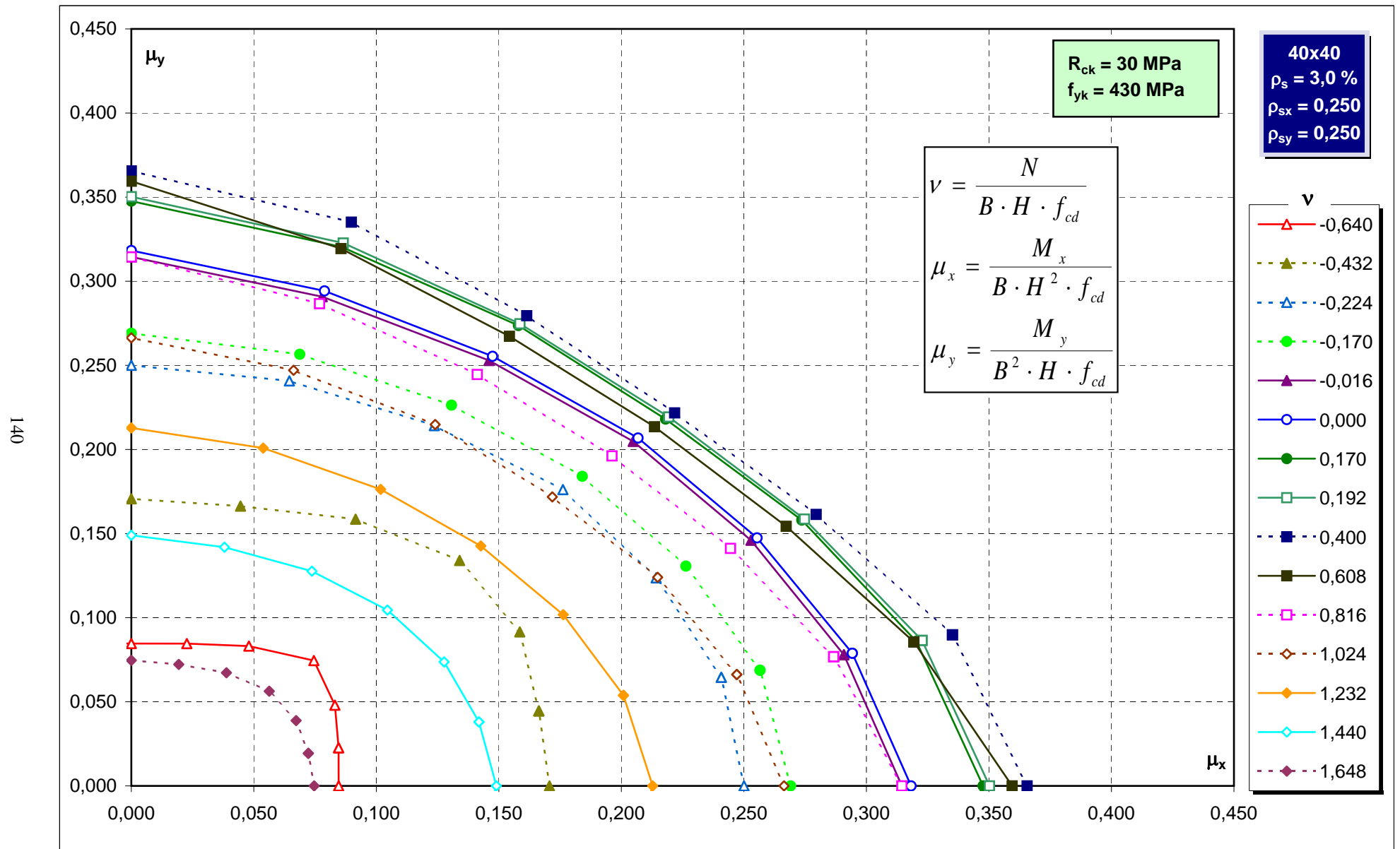
Abachi di verifica



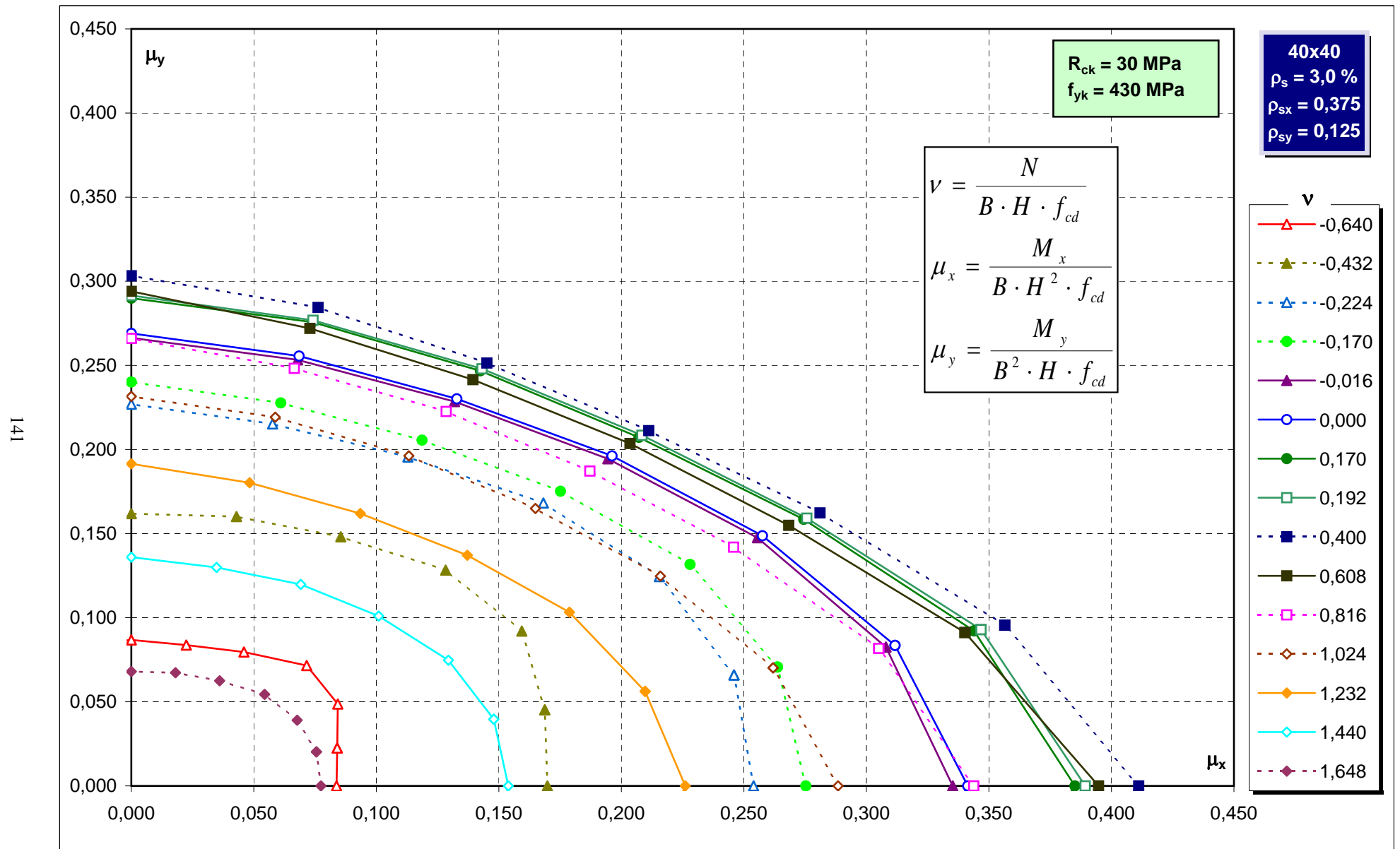
Abachi di verifica



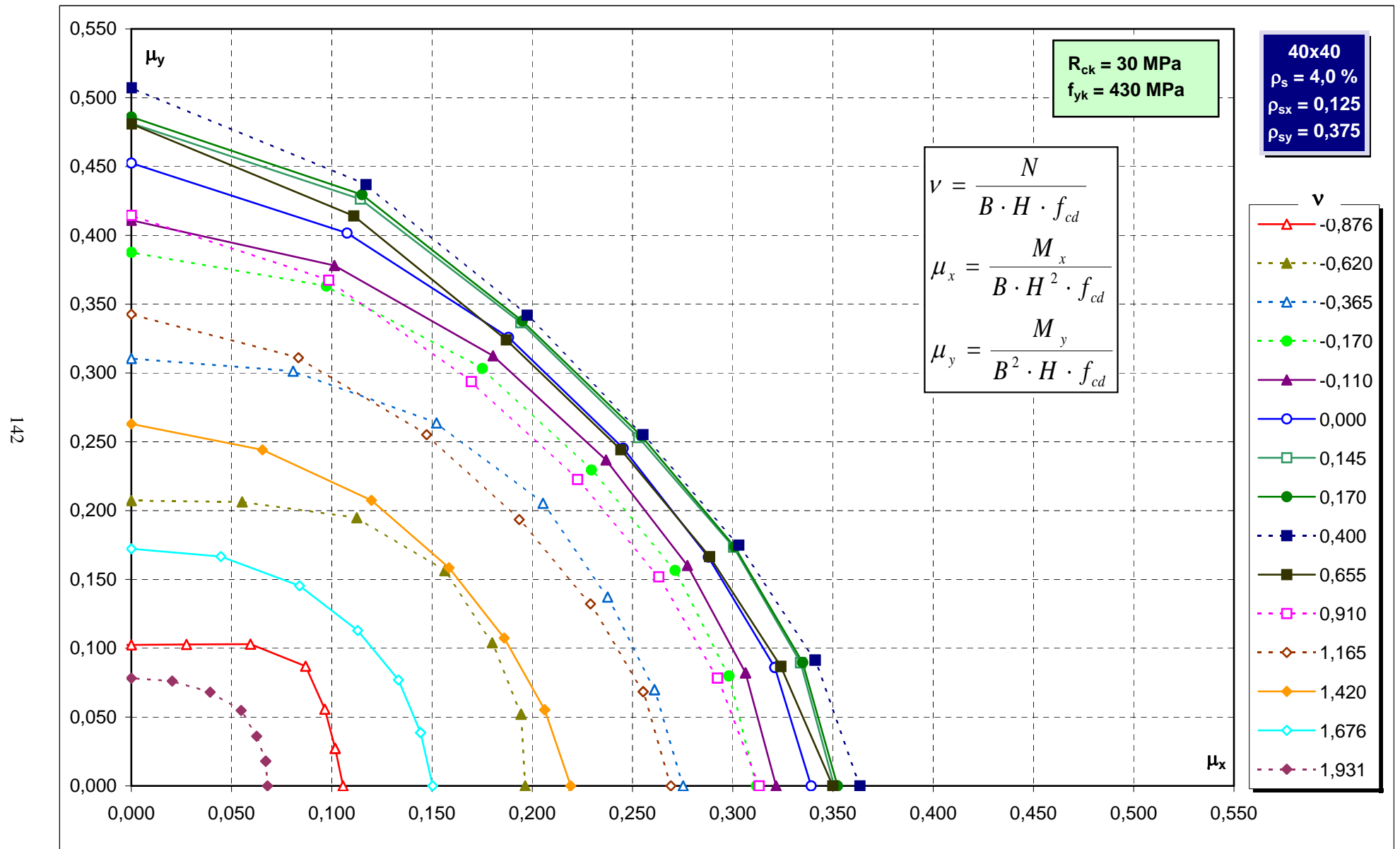
Abachi di verifica



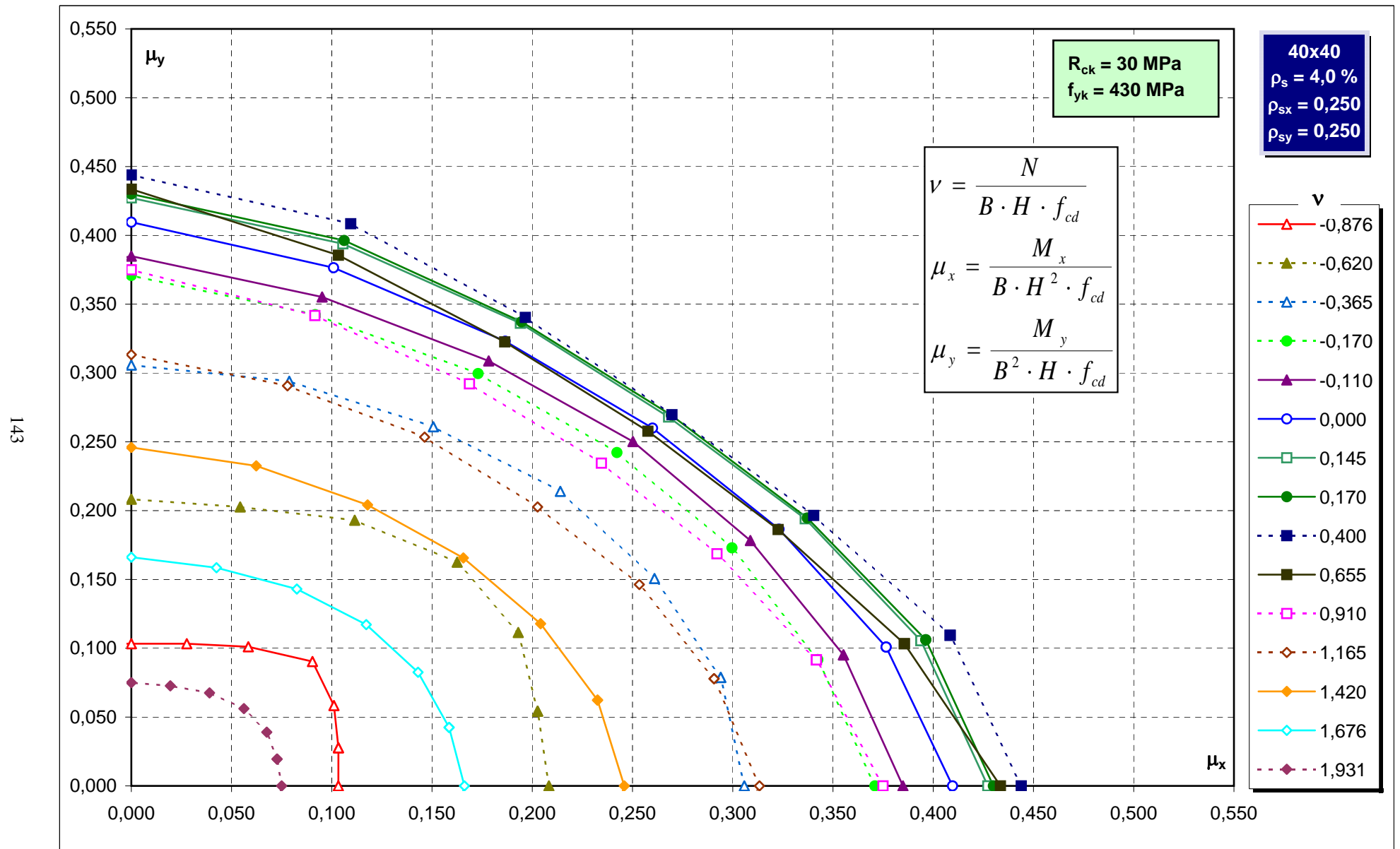
Abachi di verifica



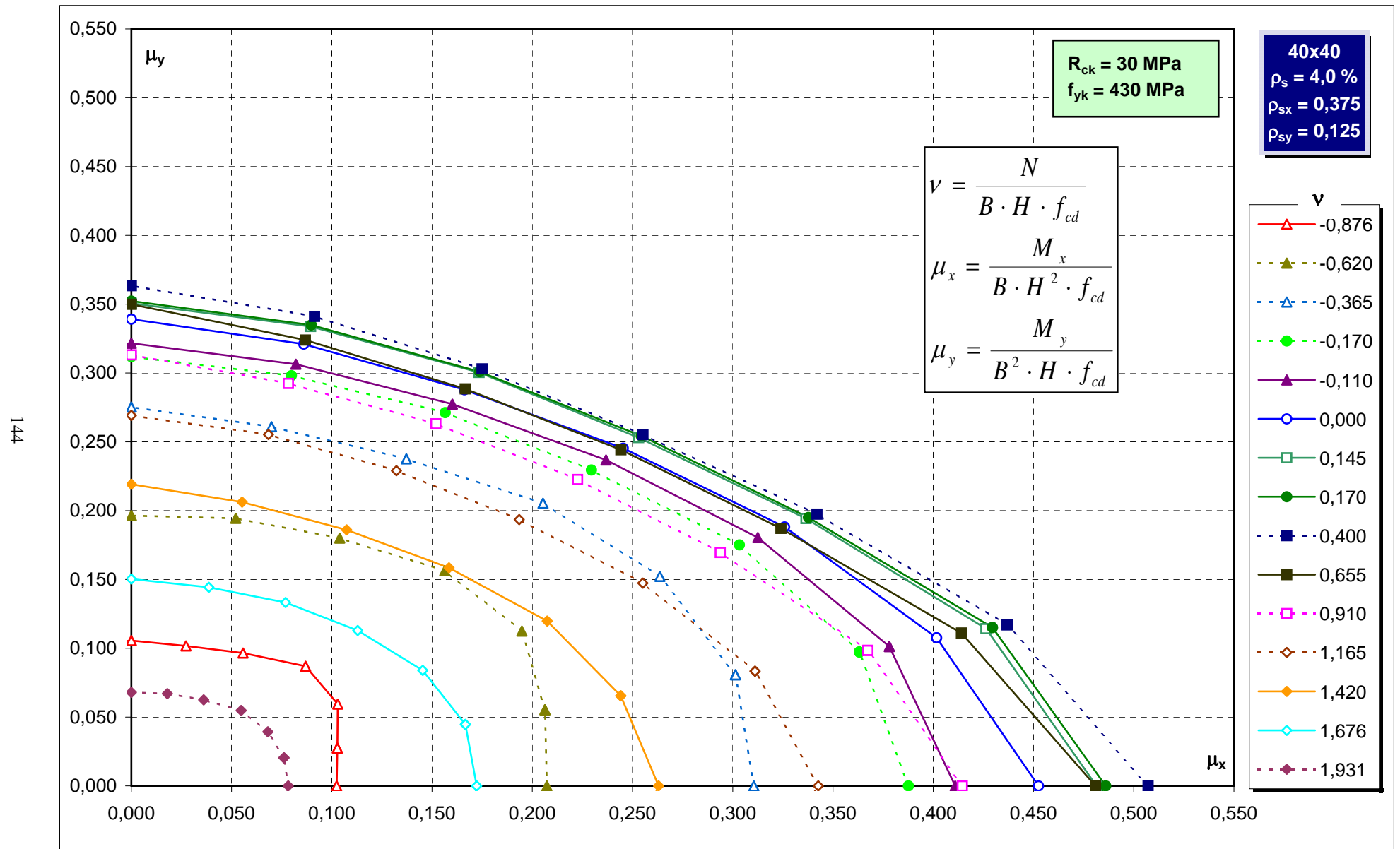
Abachi di verifica



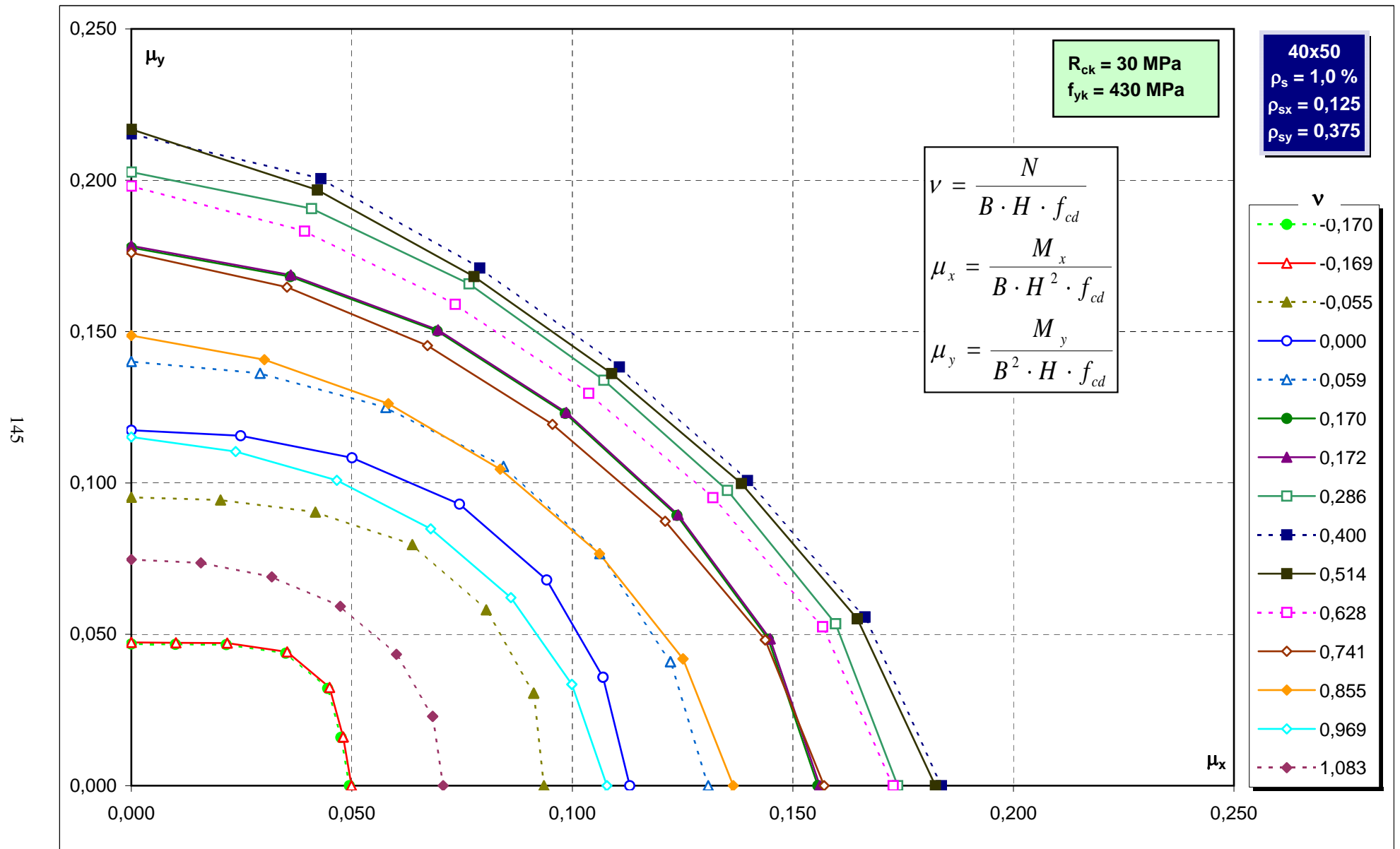
Abachi di verifica



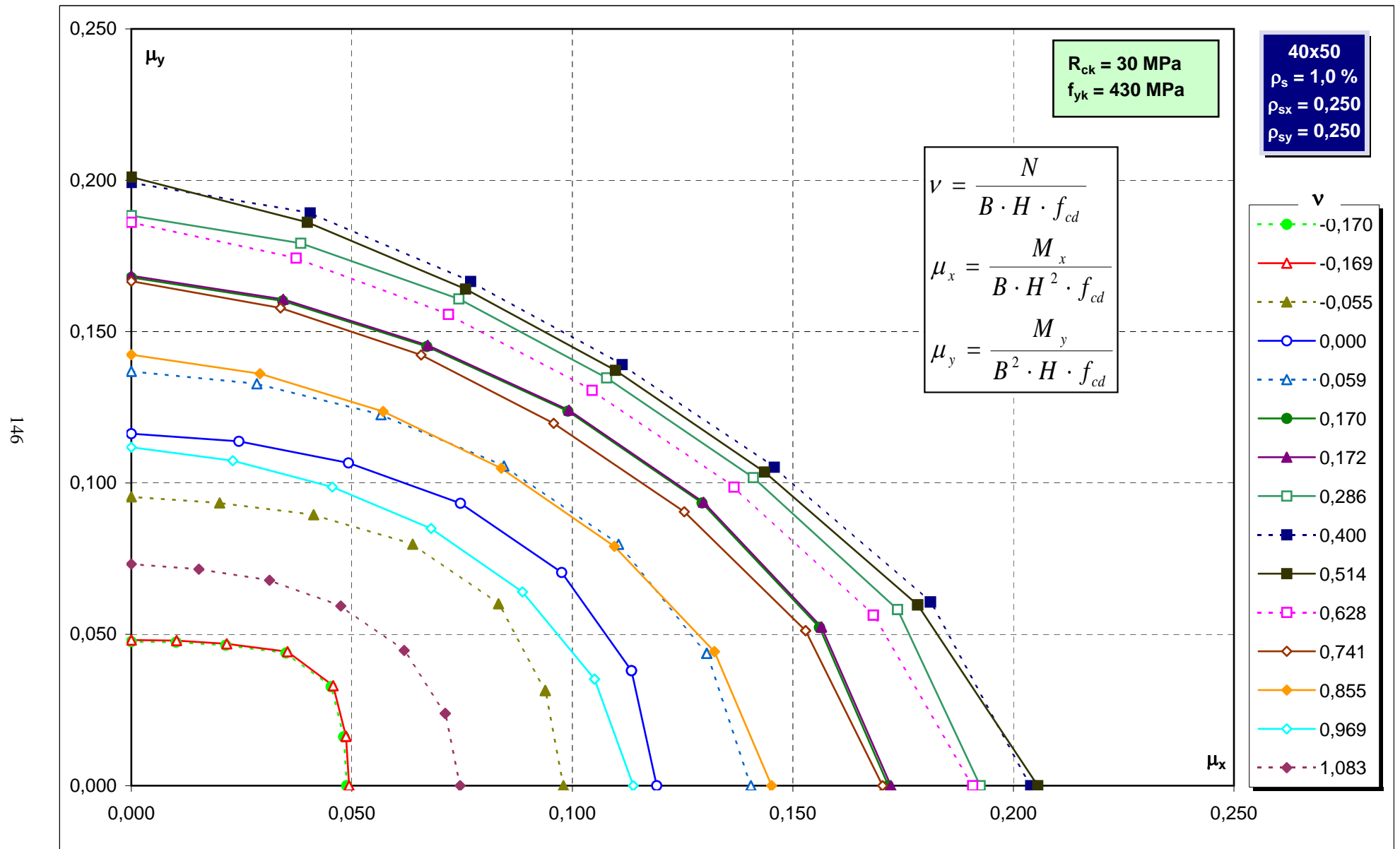
Abachi di verifica



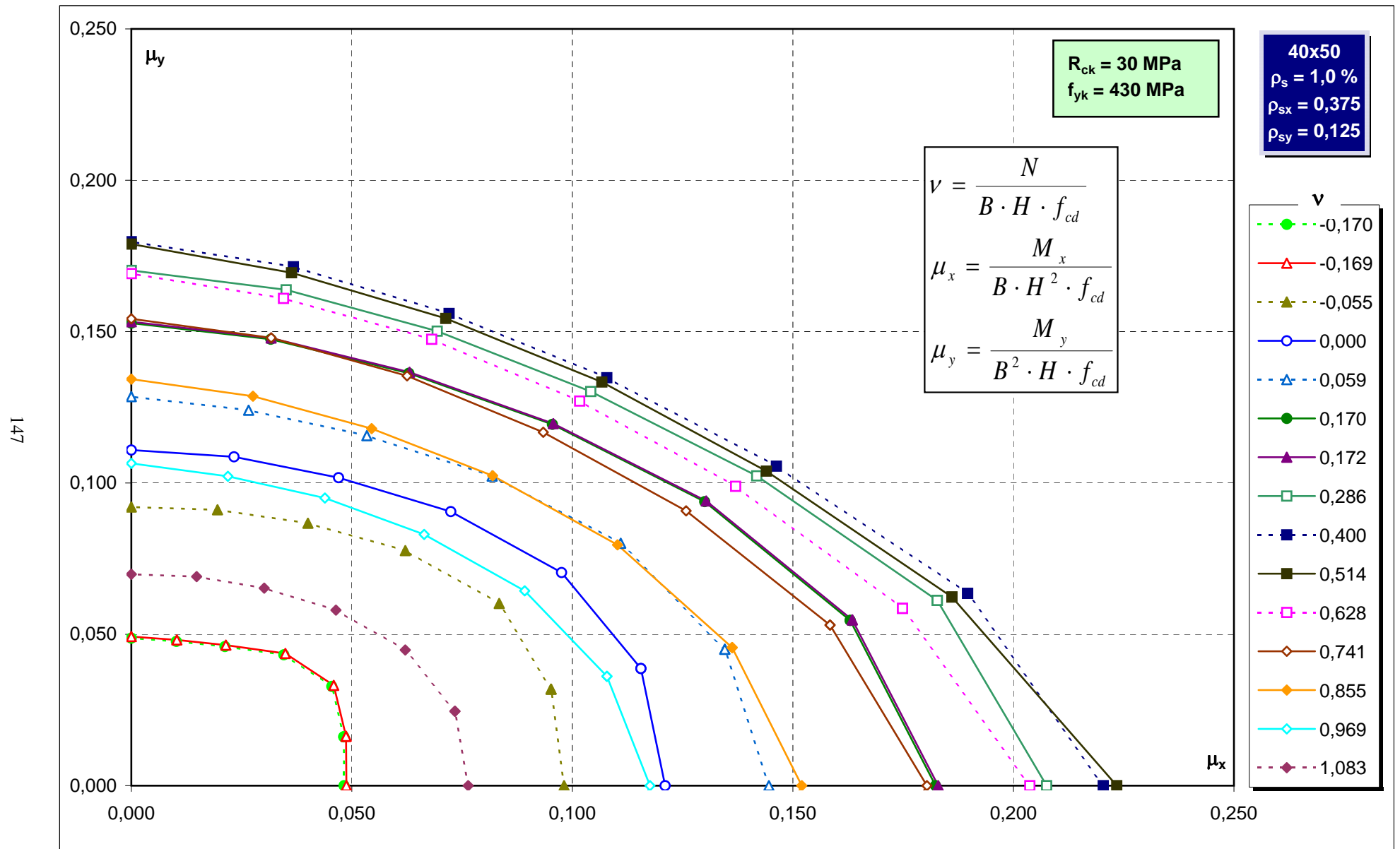
Abachi di verifica



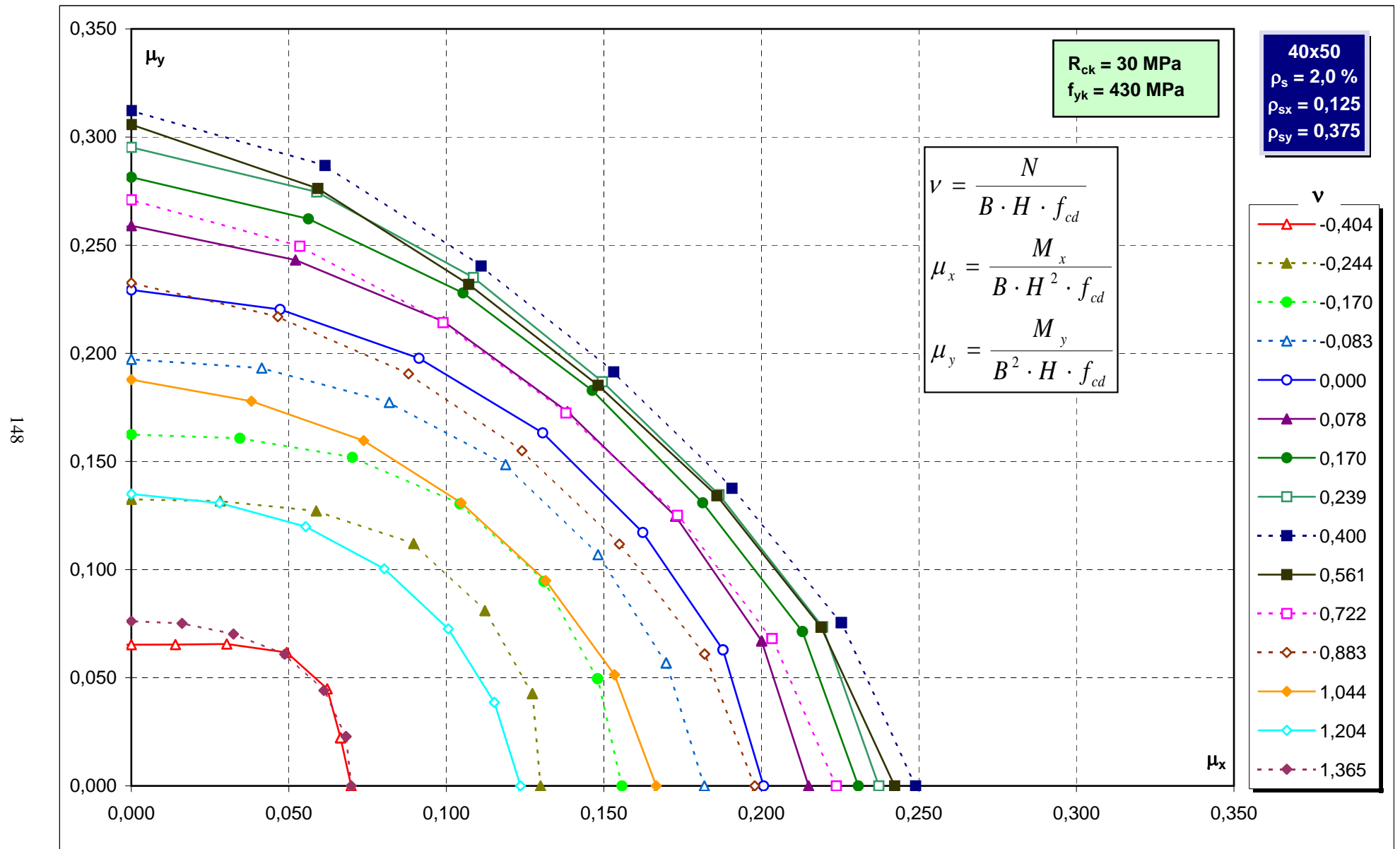
Abachi di verifica



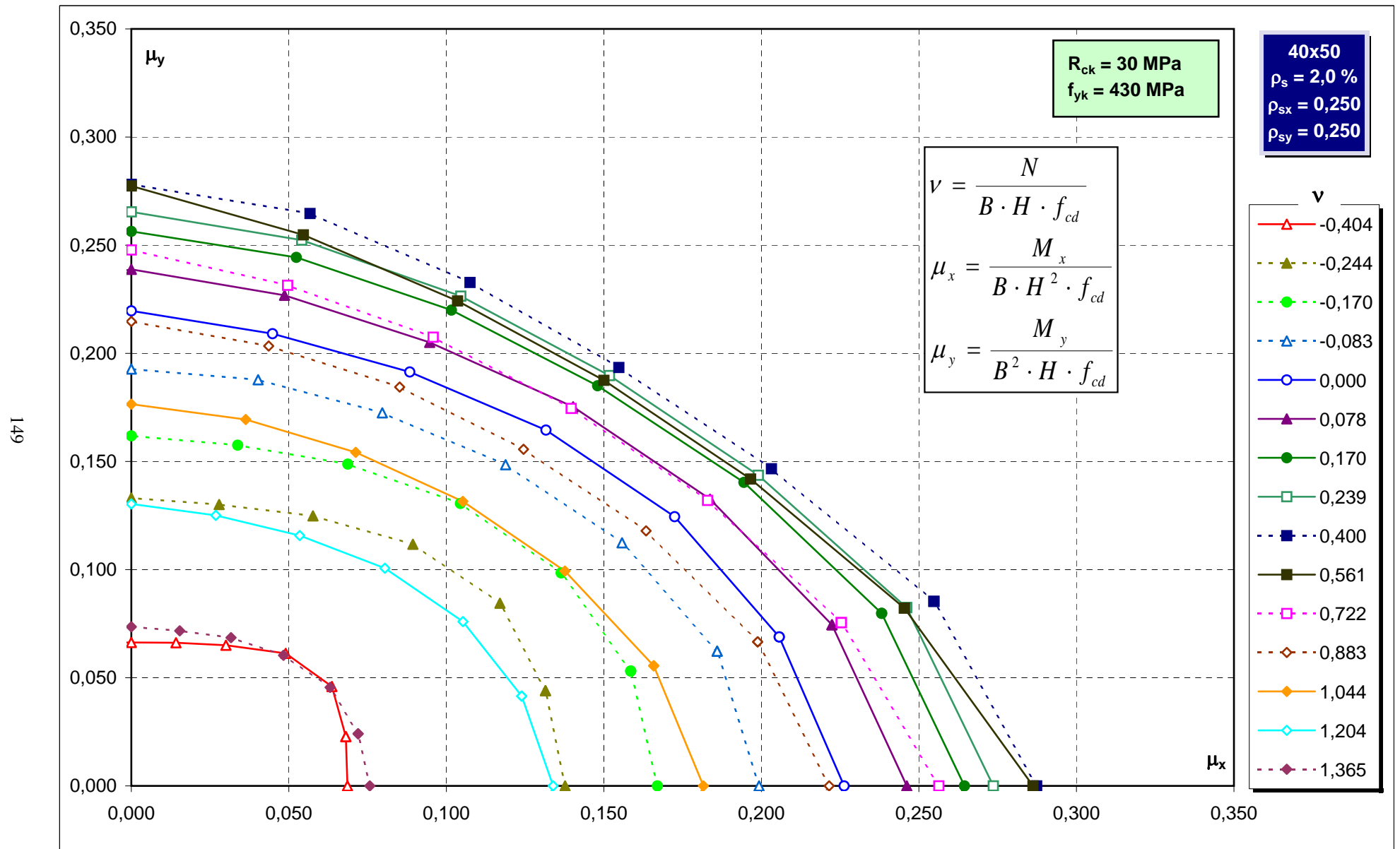
Abachi di verifica



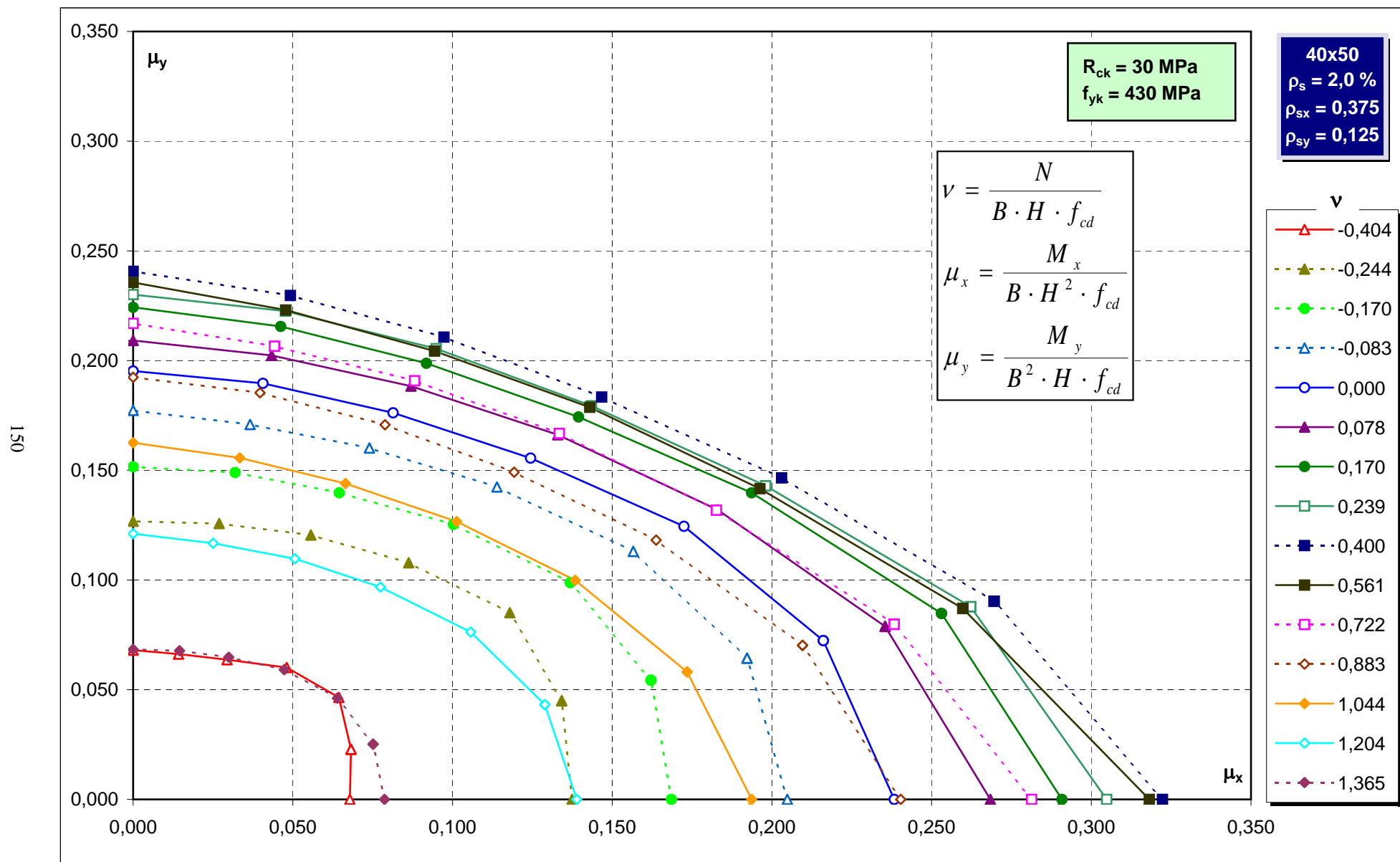
Abachi di verifica



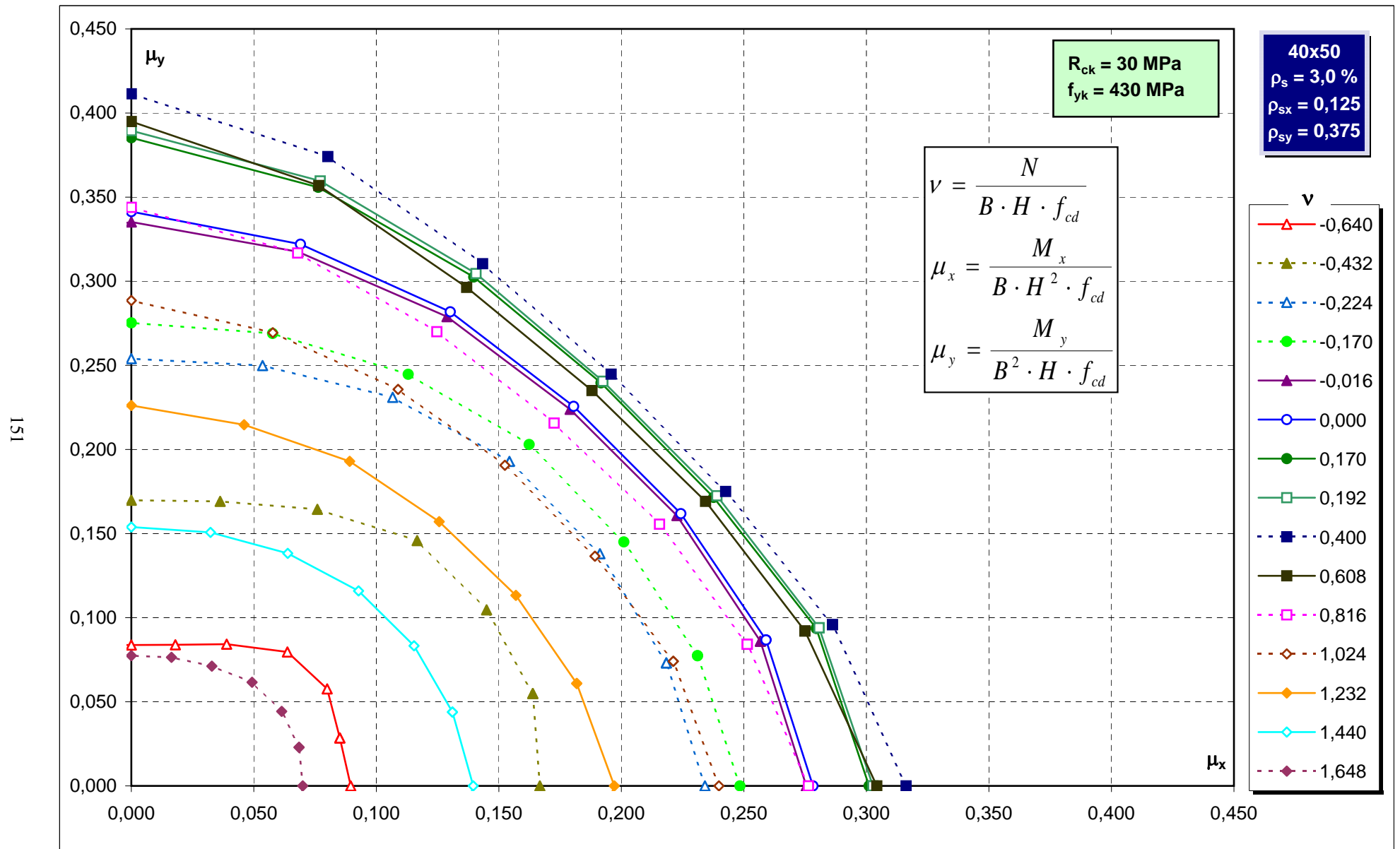
Abachi di verifica



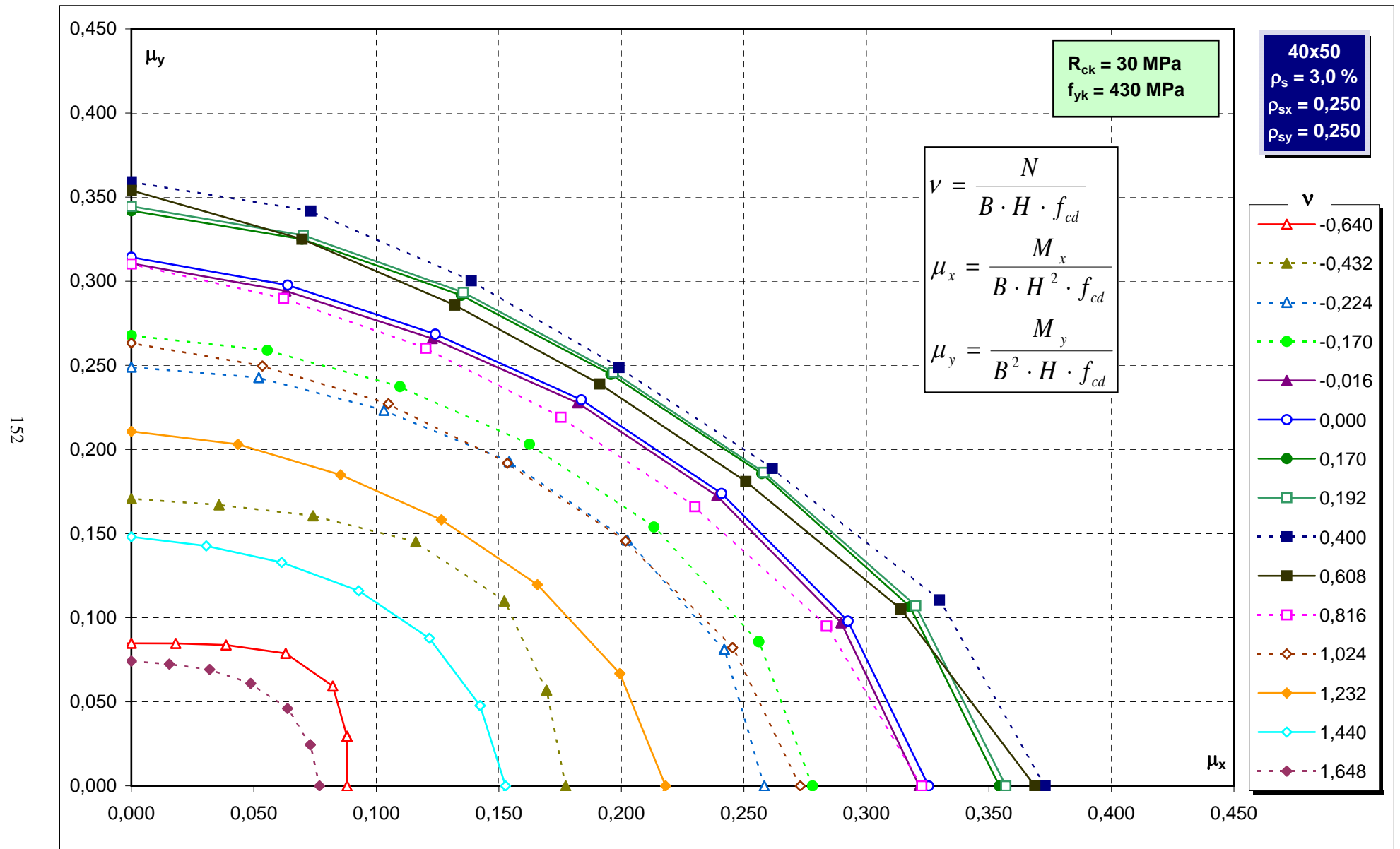
Abachi di verifica



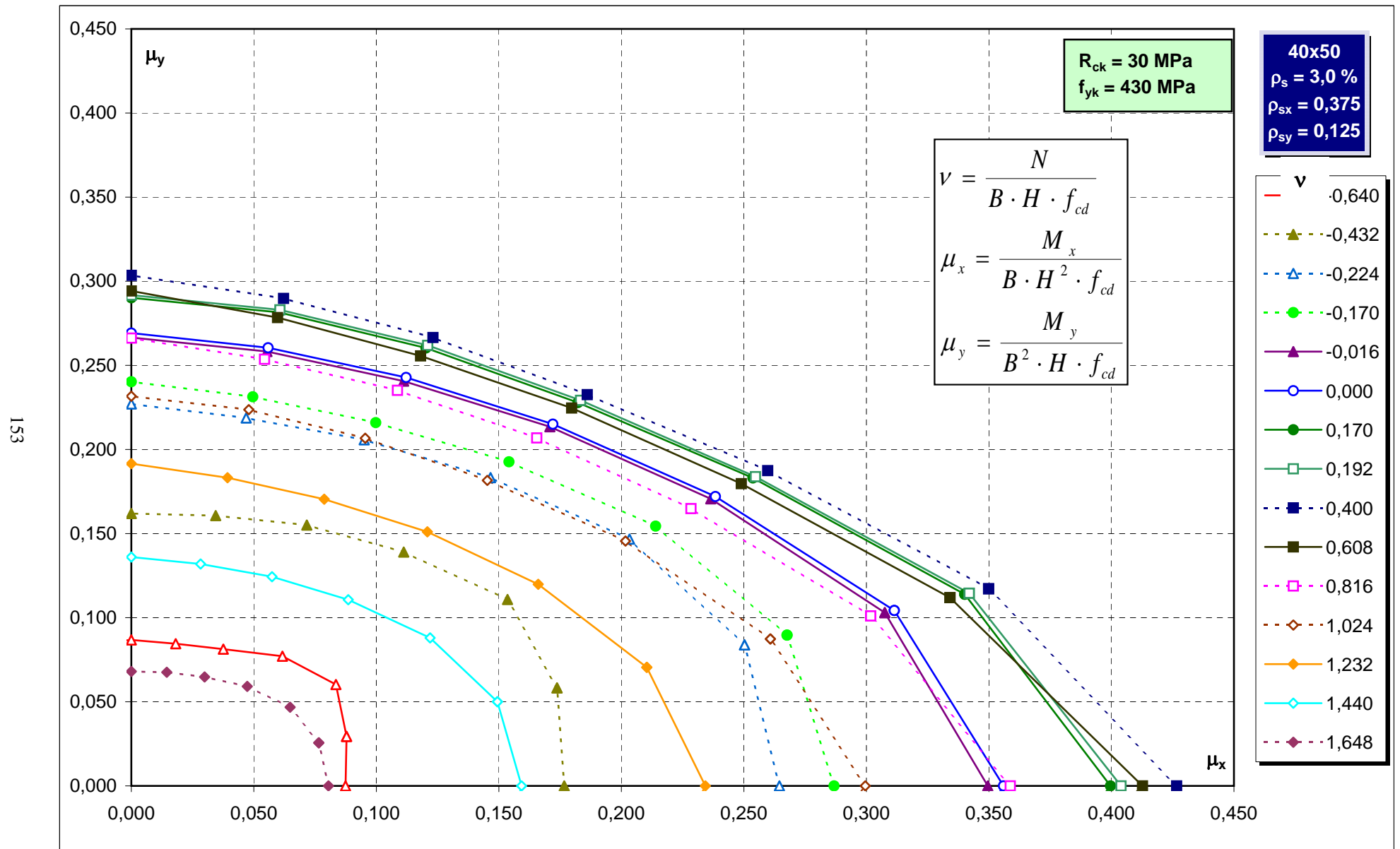
Abachi di verifica



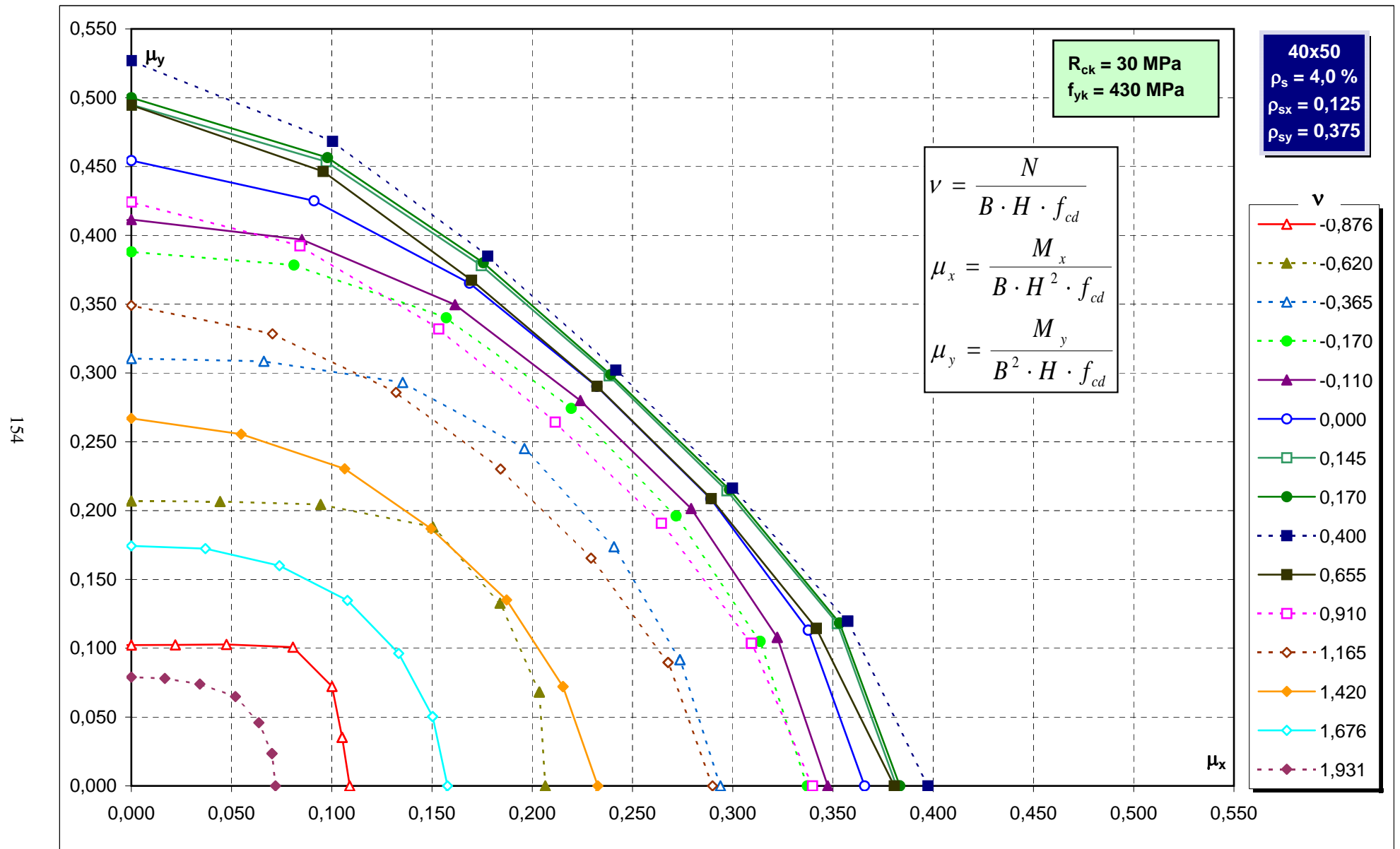
Abachi di verifica



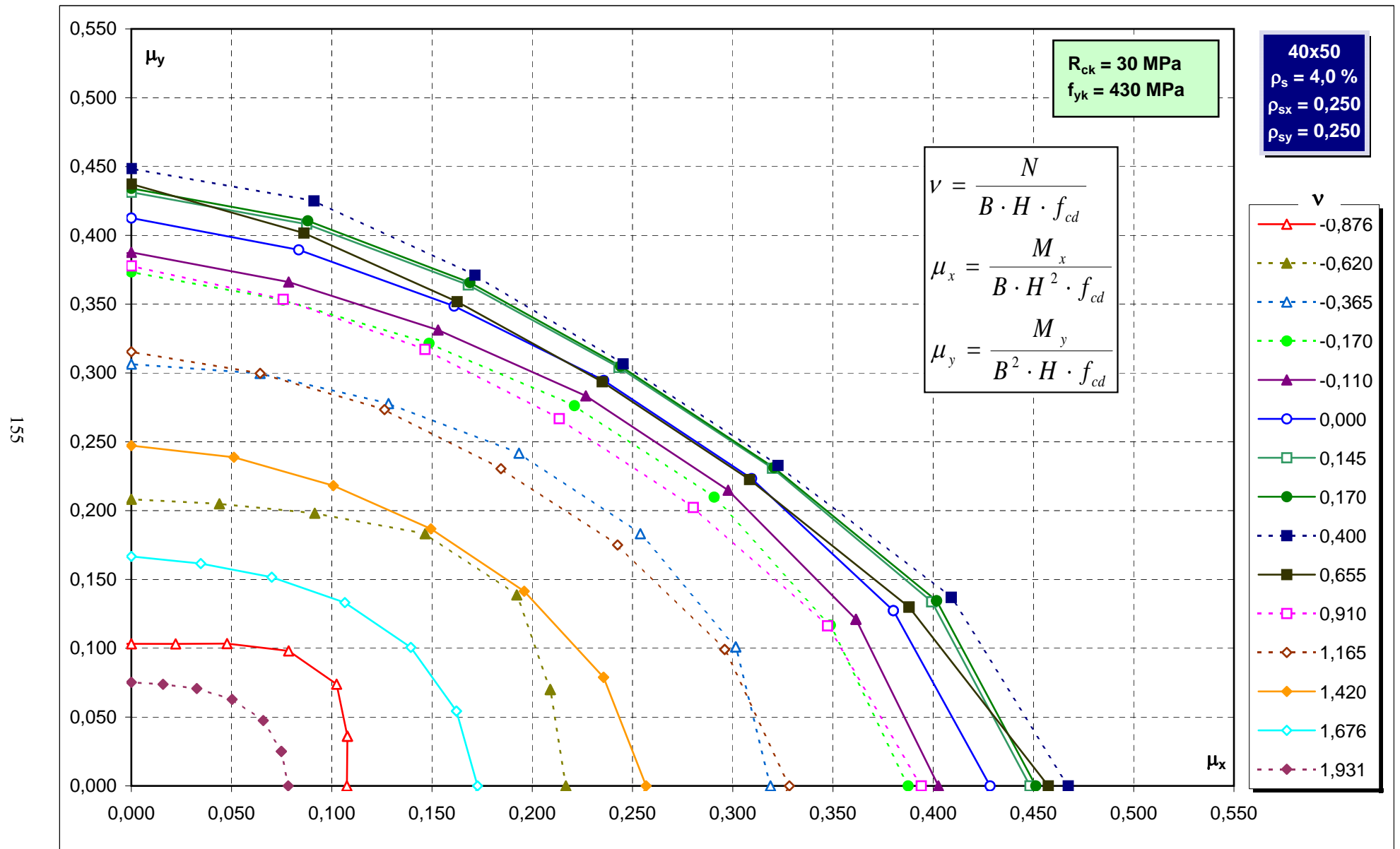
Abachi di verifica



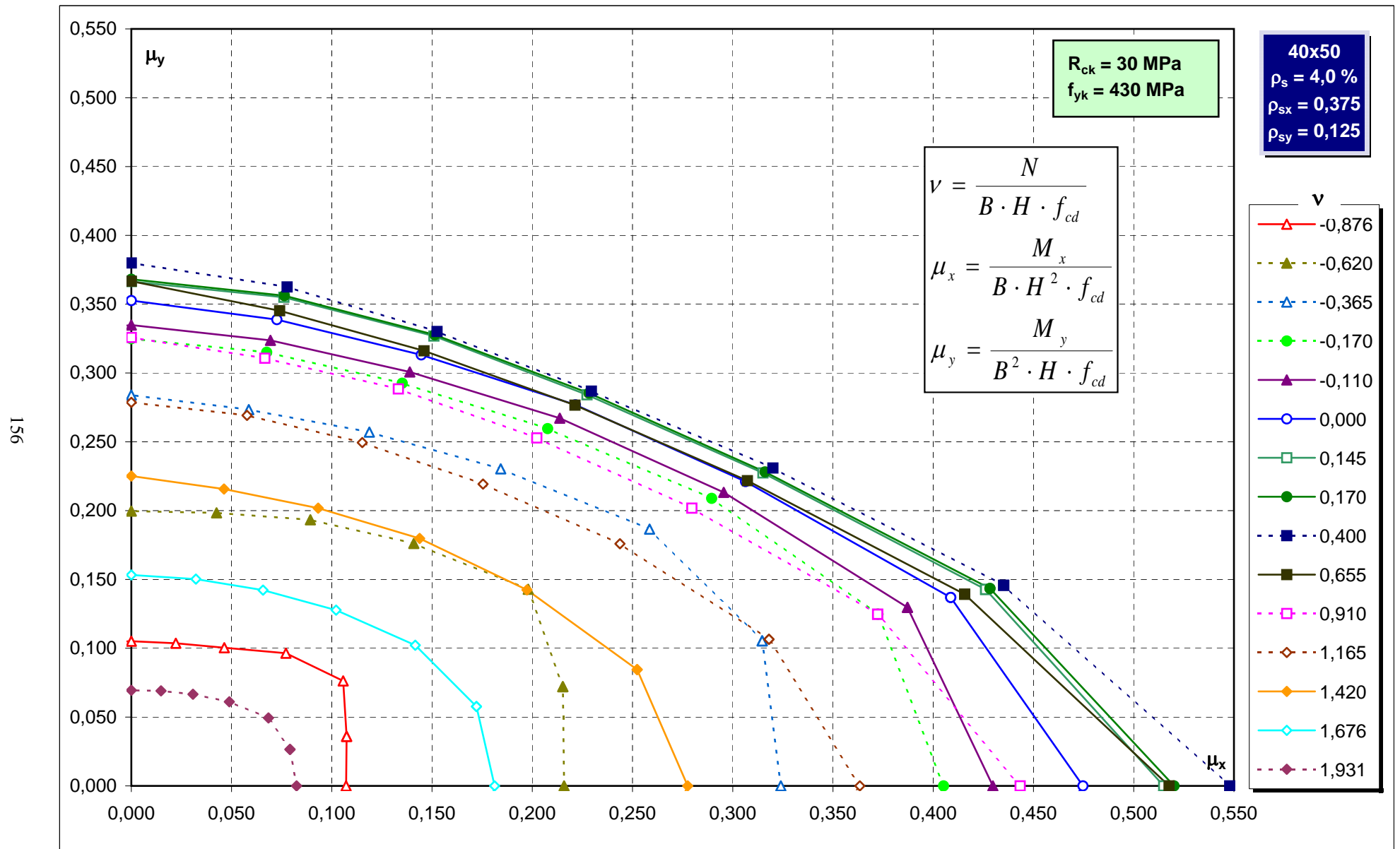
Abachi di verifica



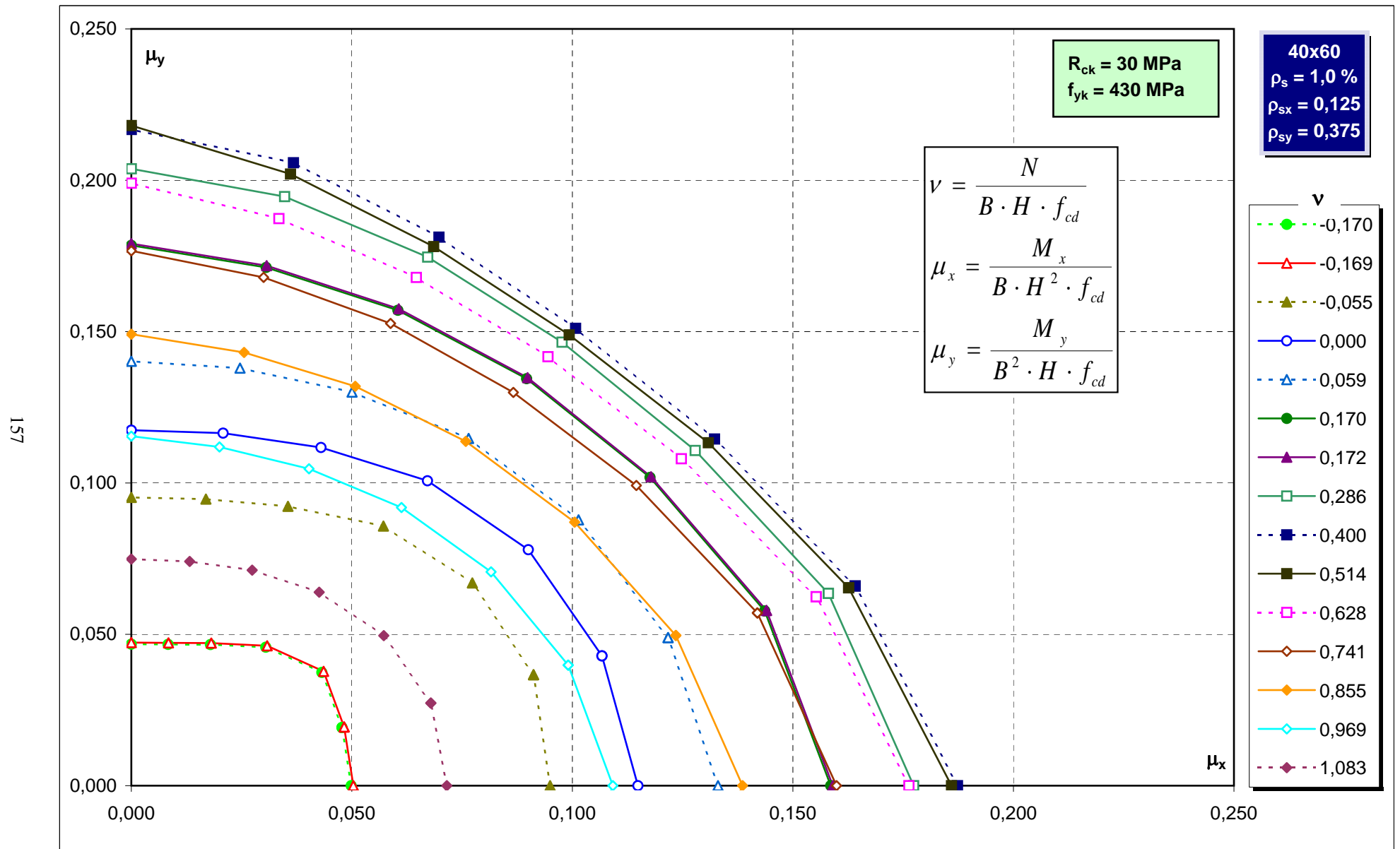
Abachi di verifica



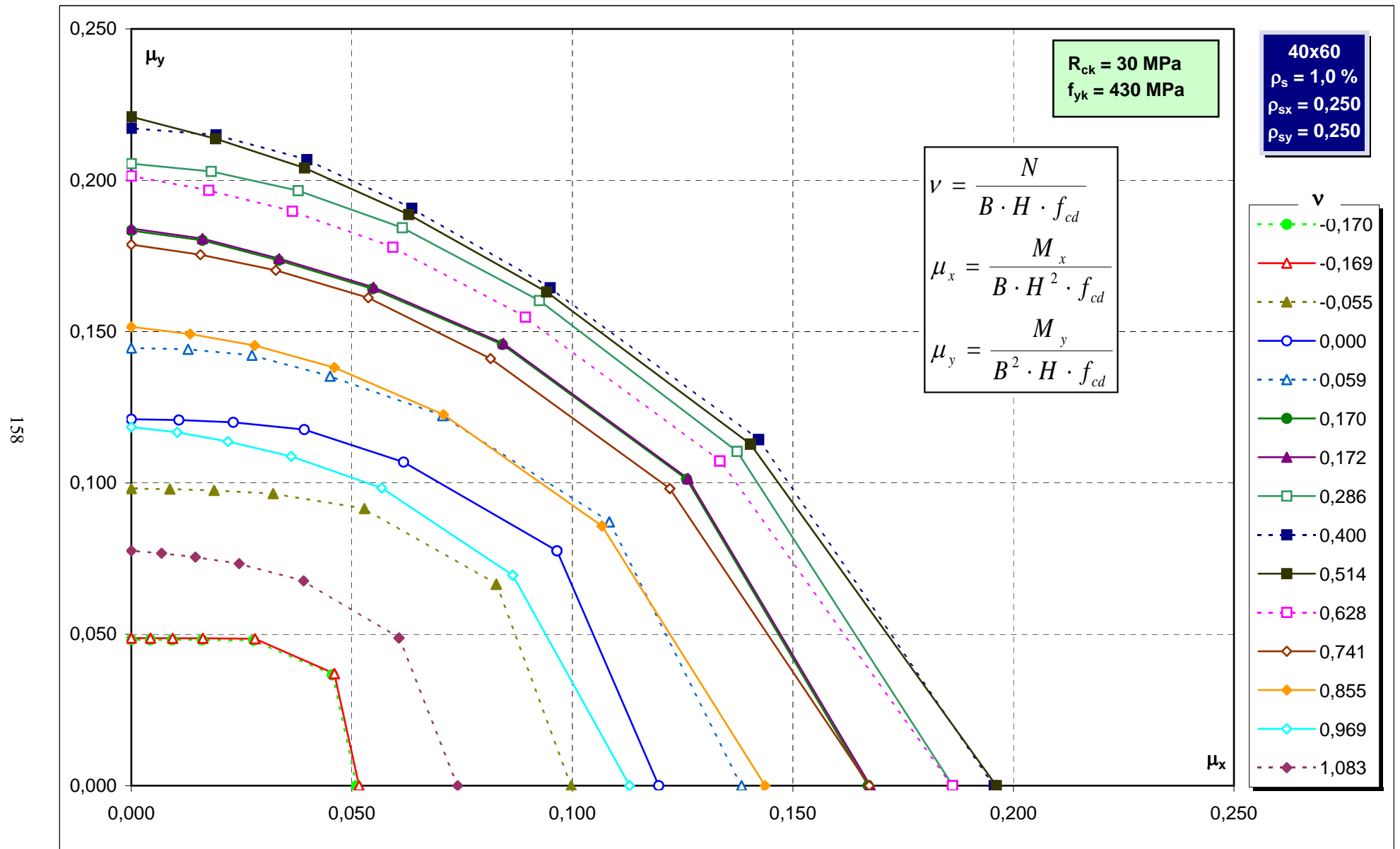
Abachi di verifica



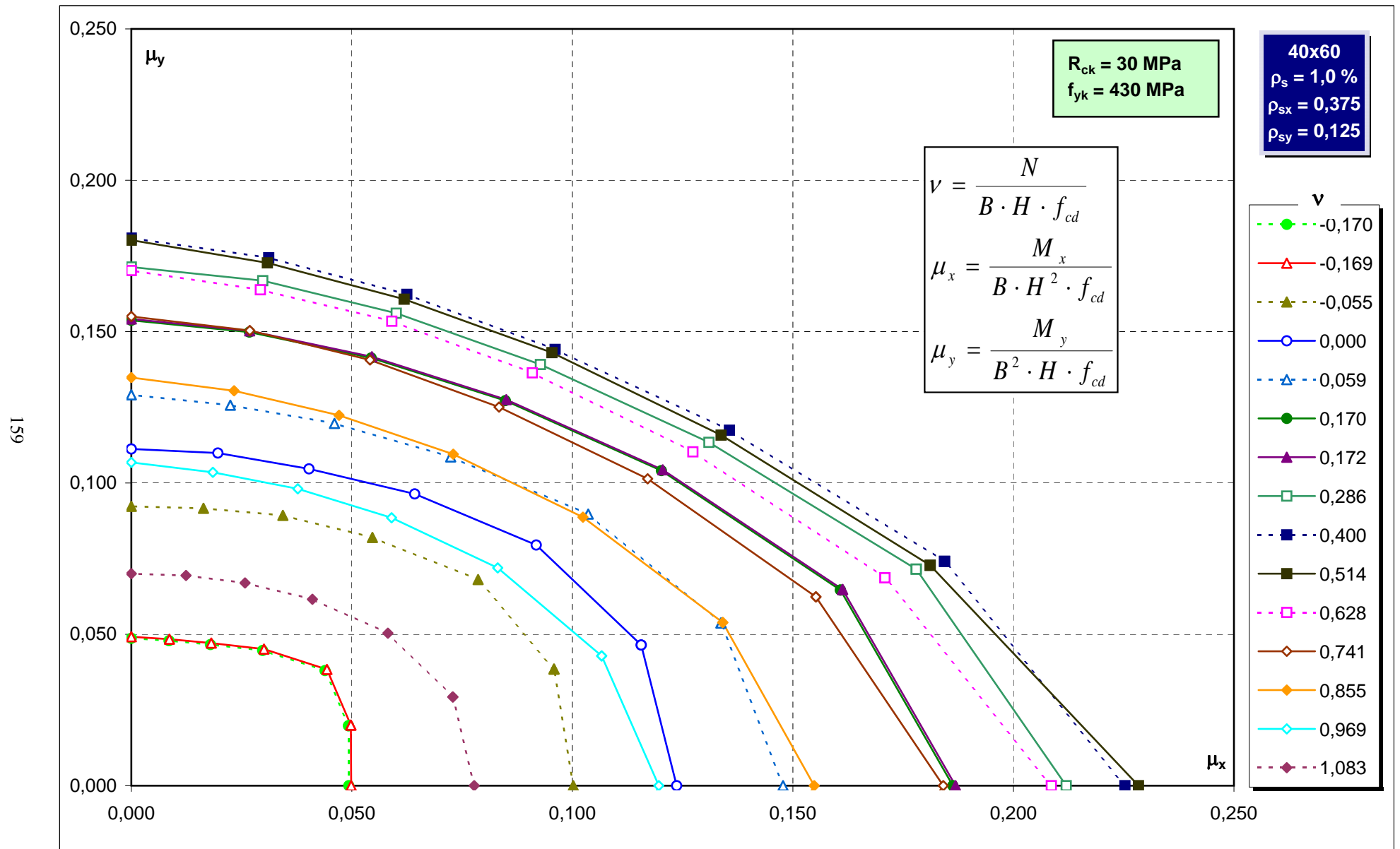
Abachi di verifica



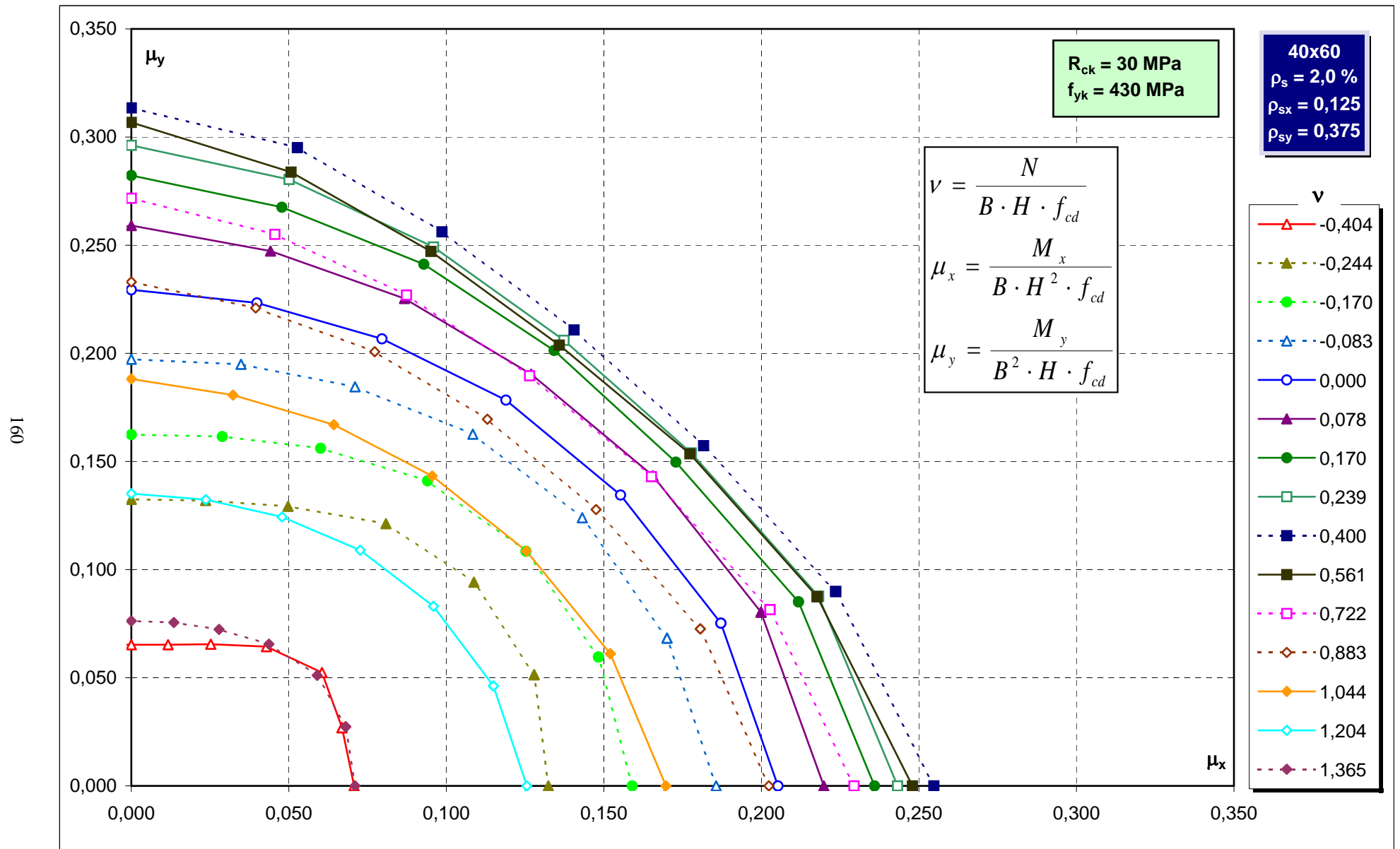
Abachi di verifica



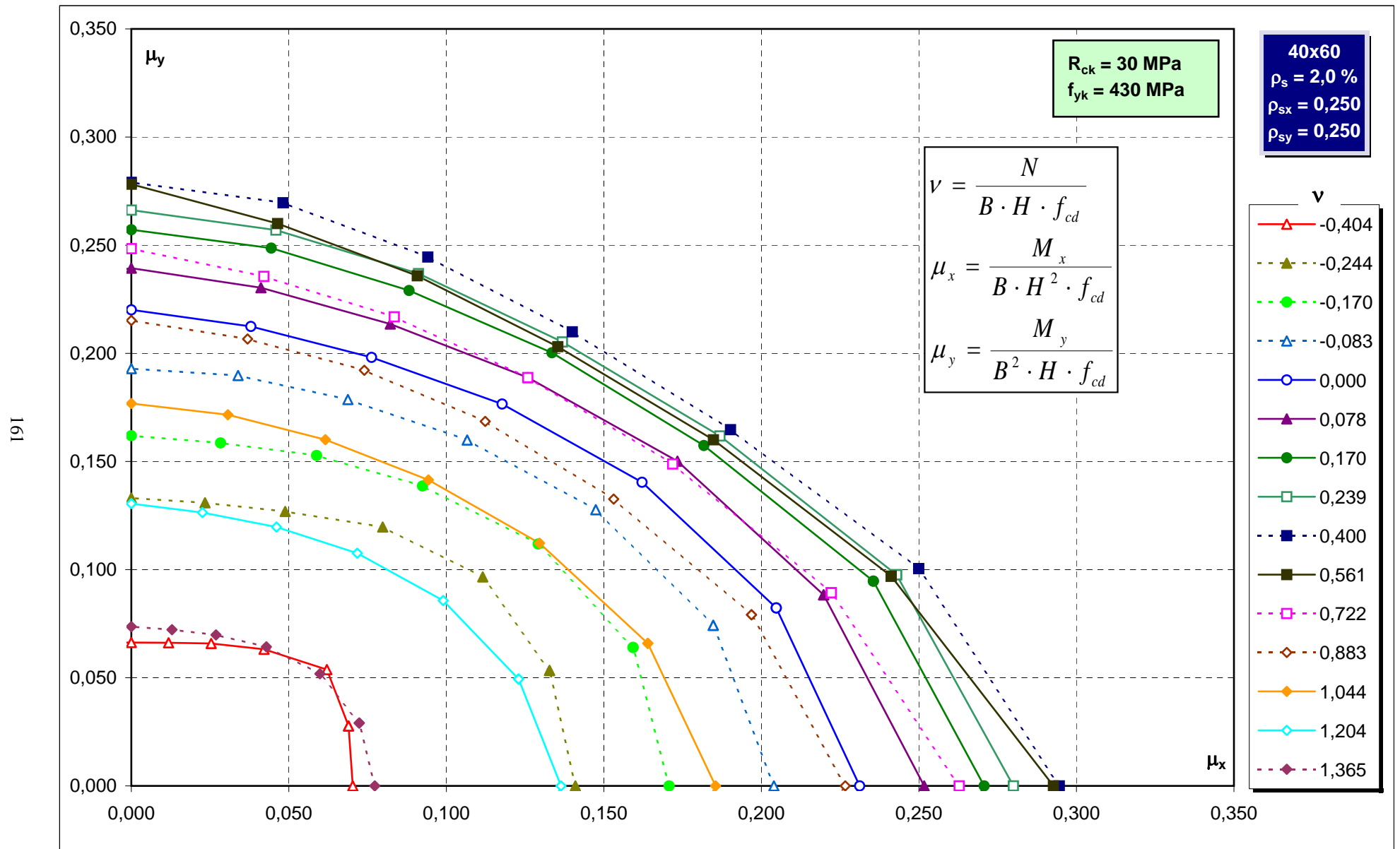
Abachi di verifica



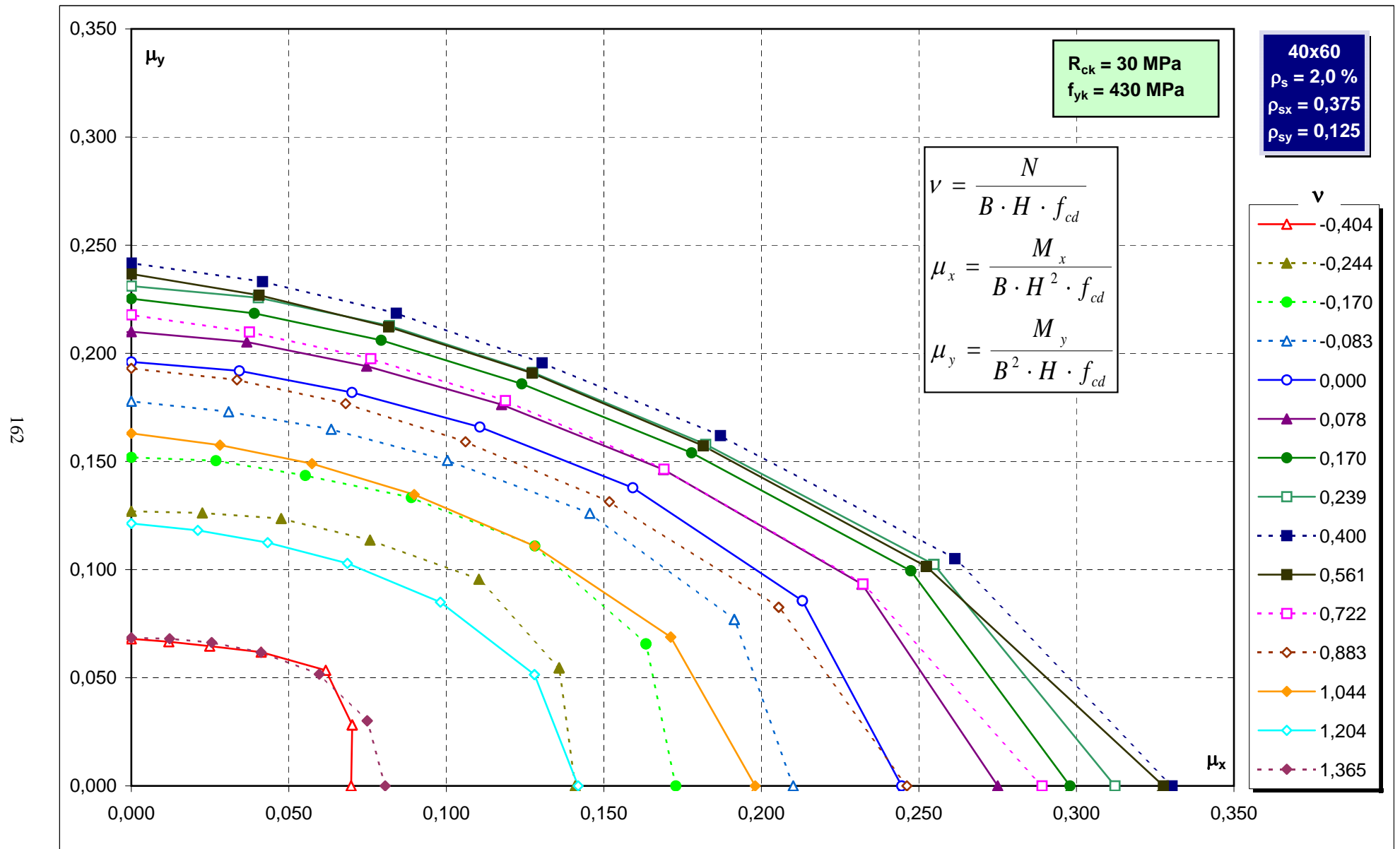
Abachi di verifica



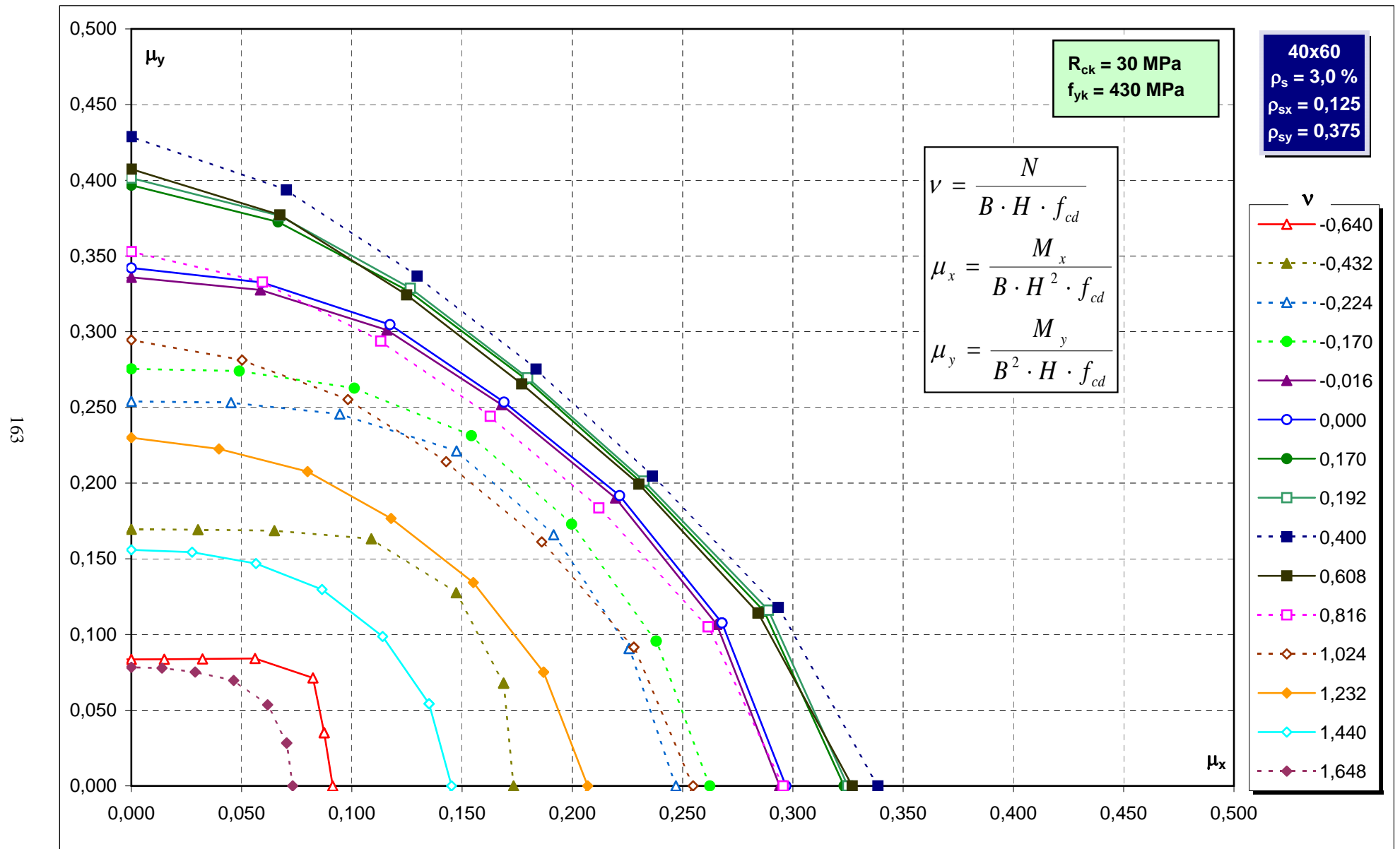
Abachi di verifica



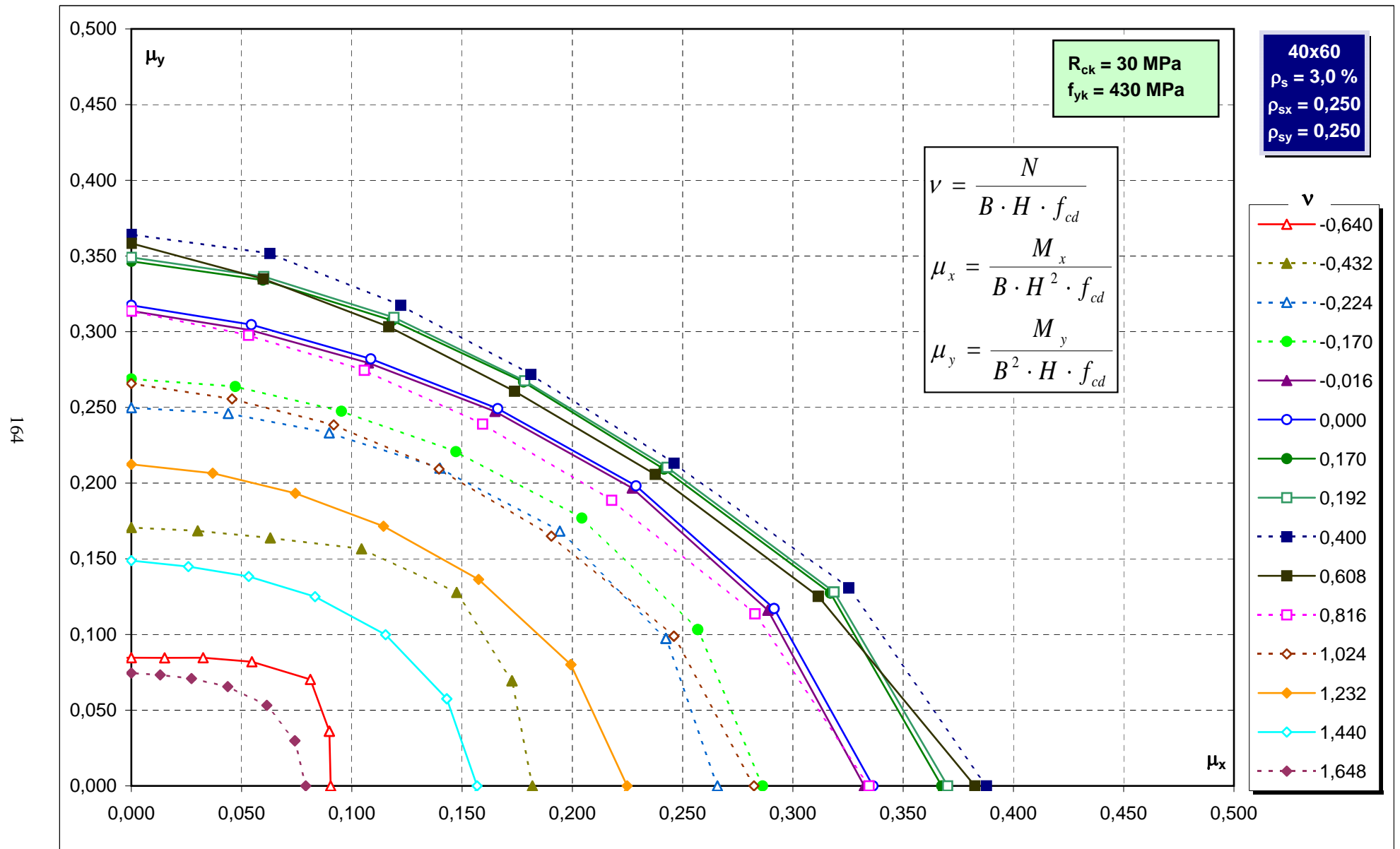
Abachi di verifica



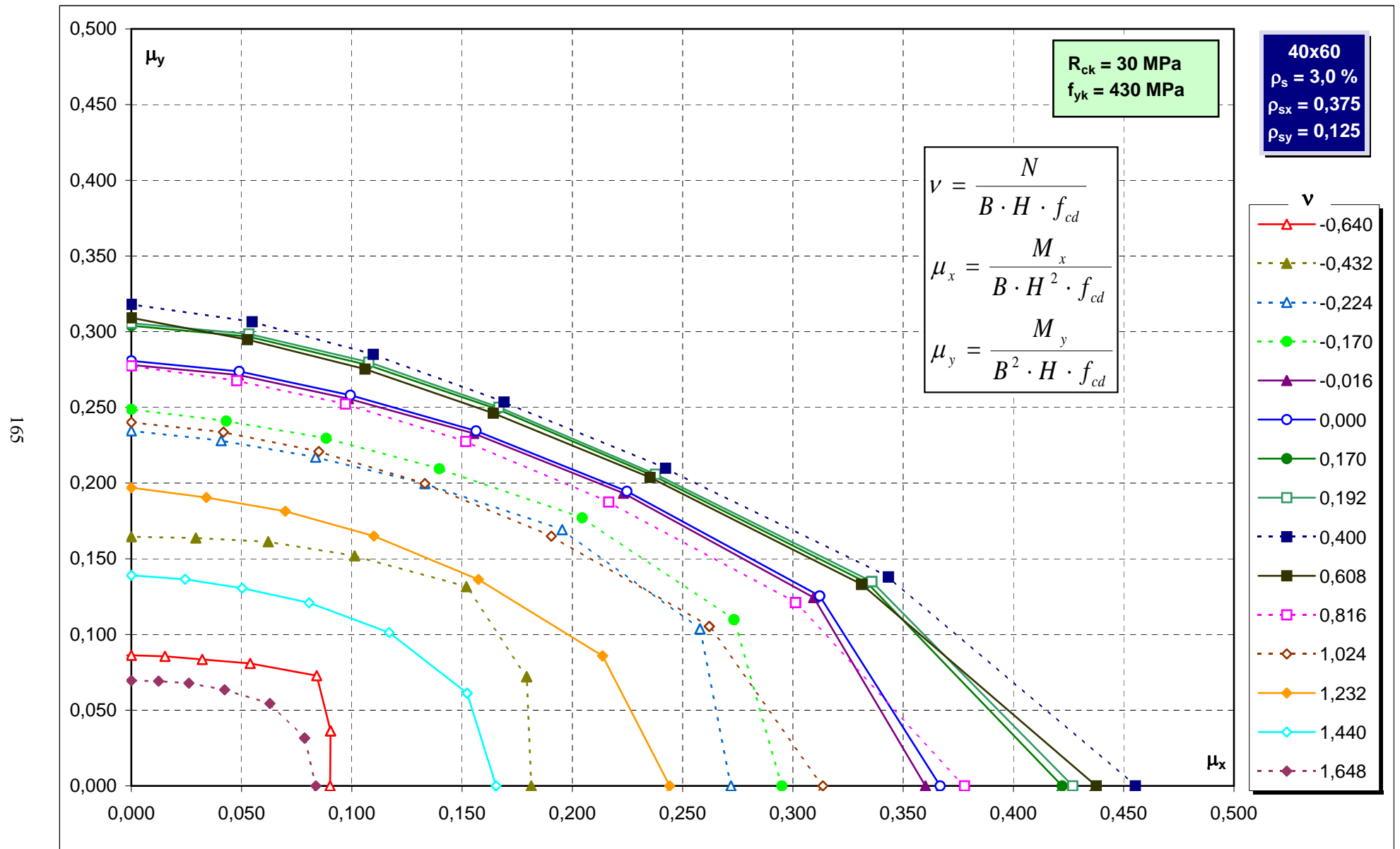
Abachi di verifica



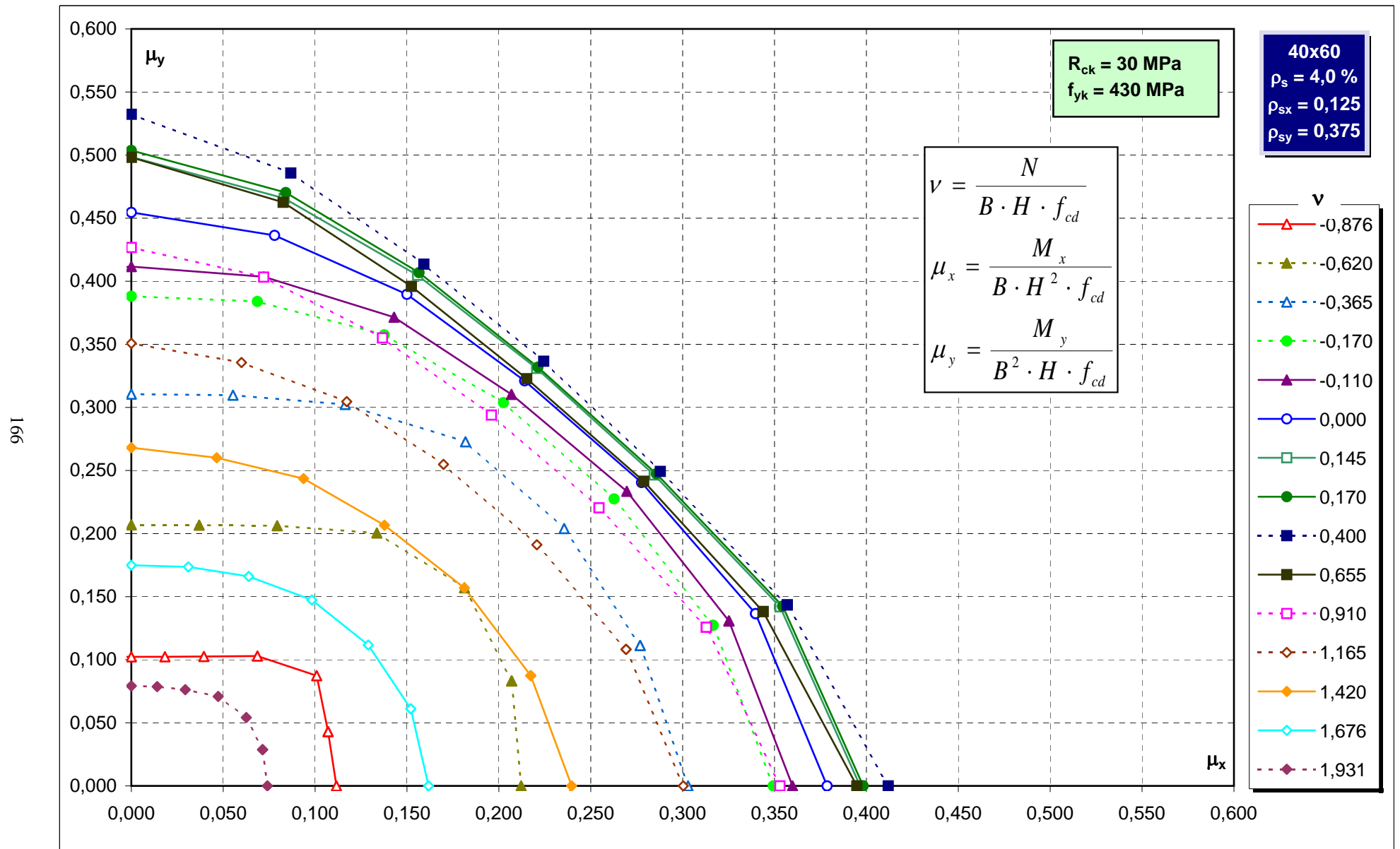
Abachi di verifica



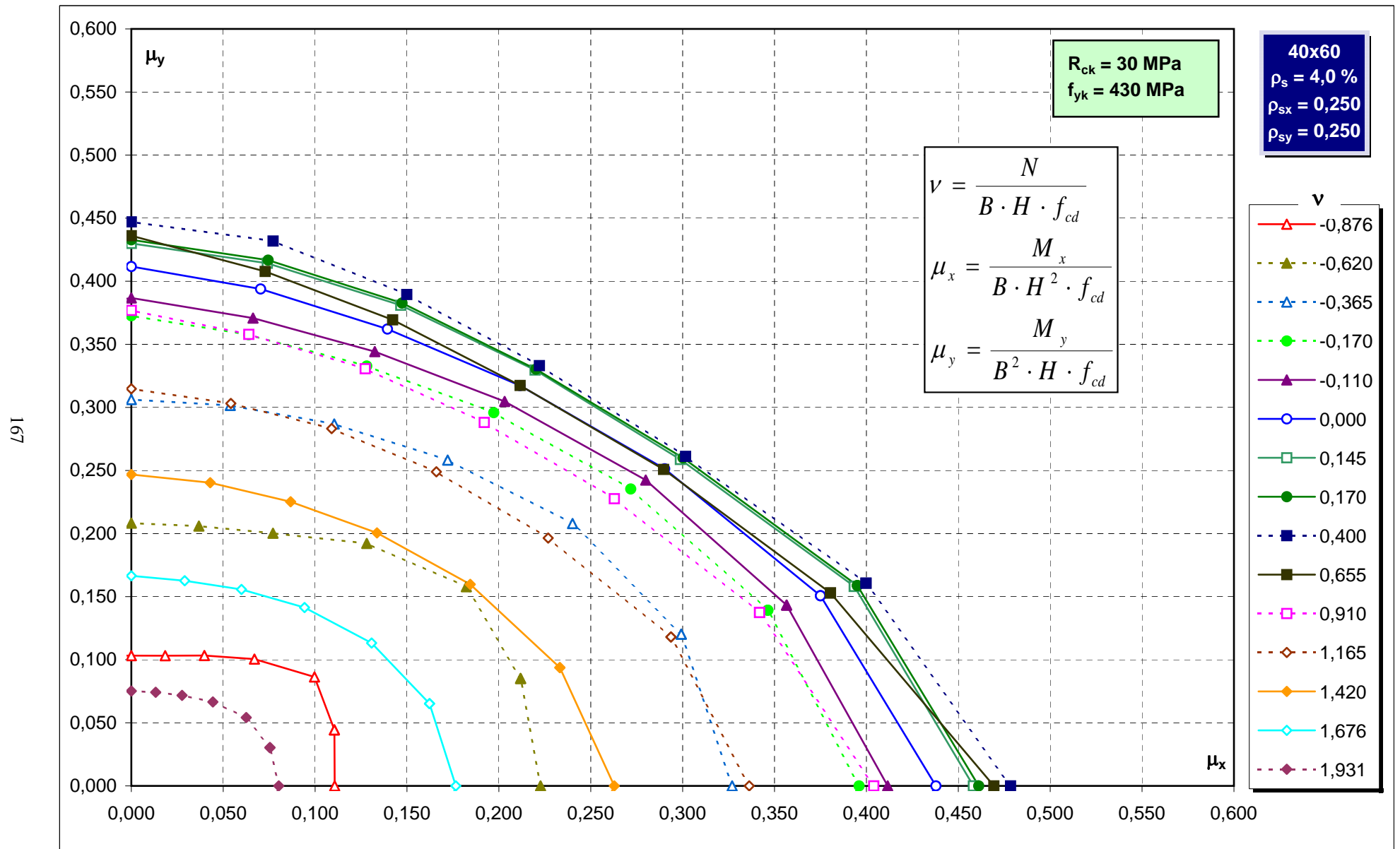
Abachi di verifica



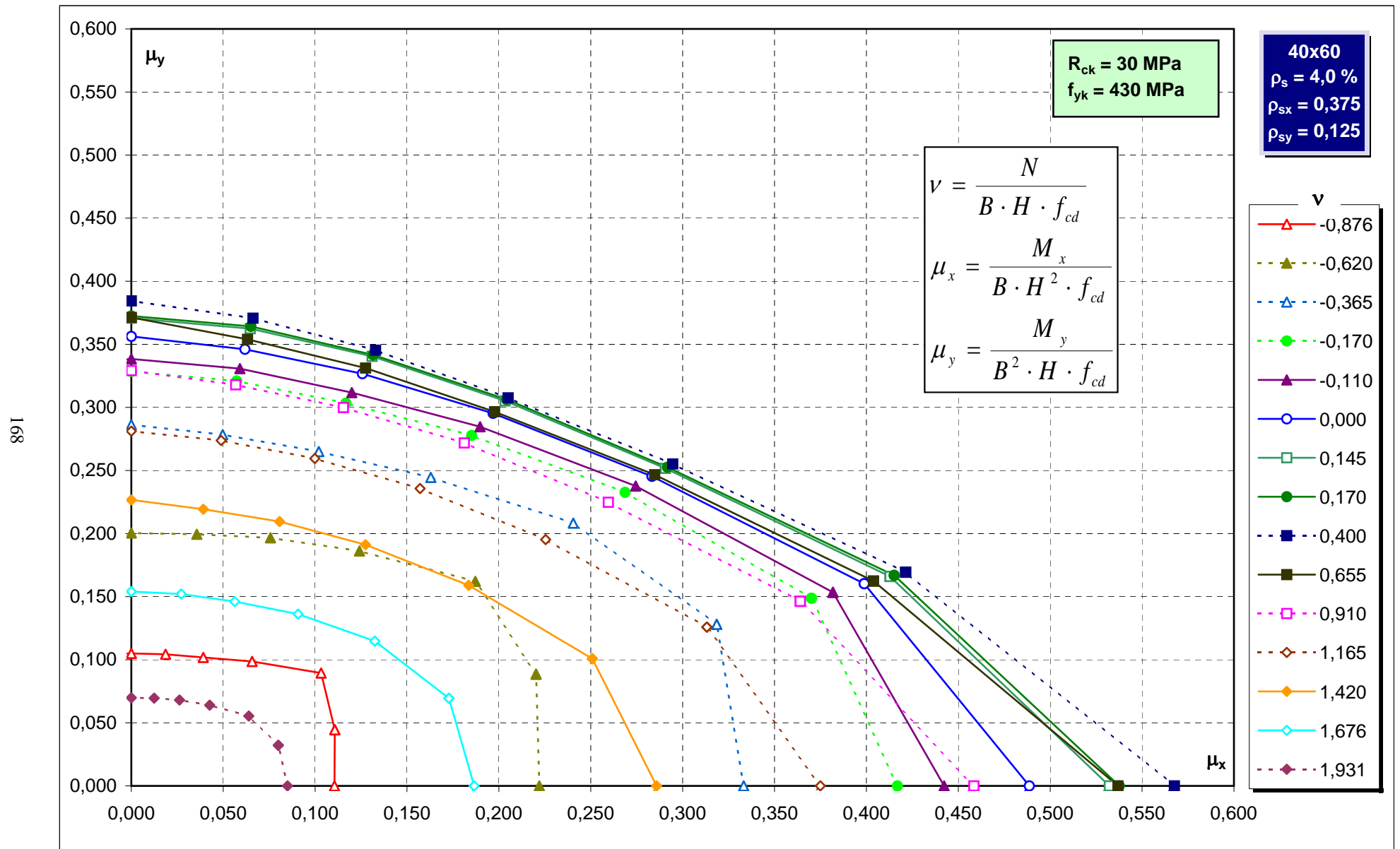
Abachi di verifica



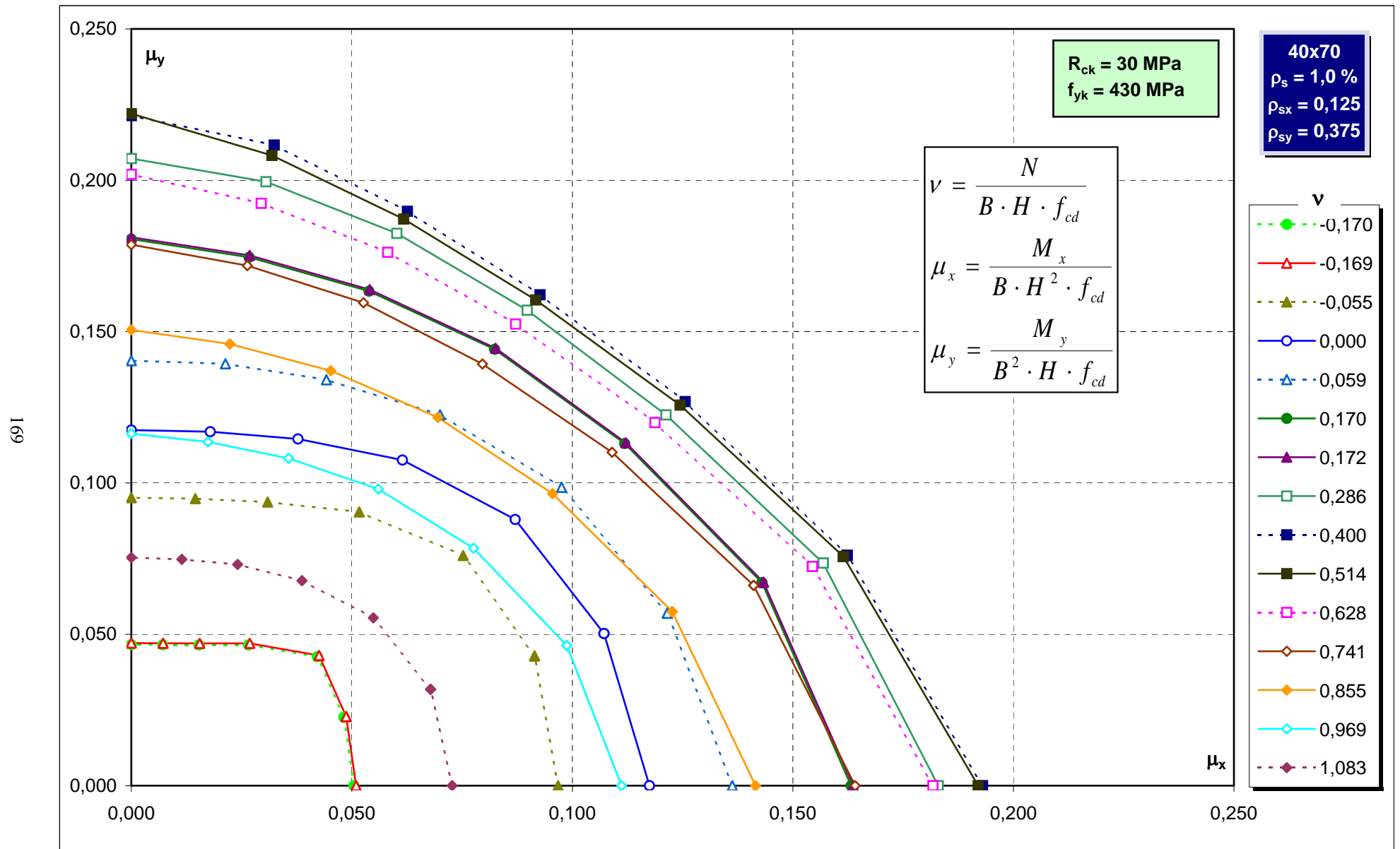
Abachi di verifica



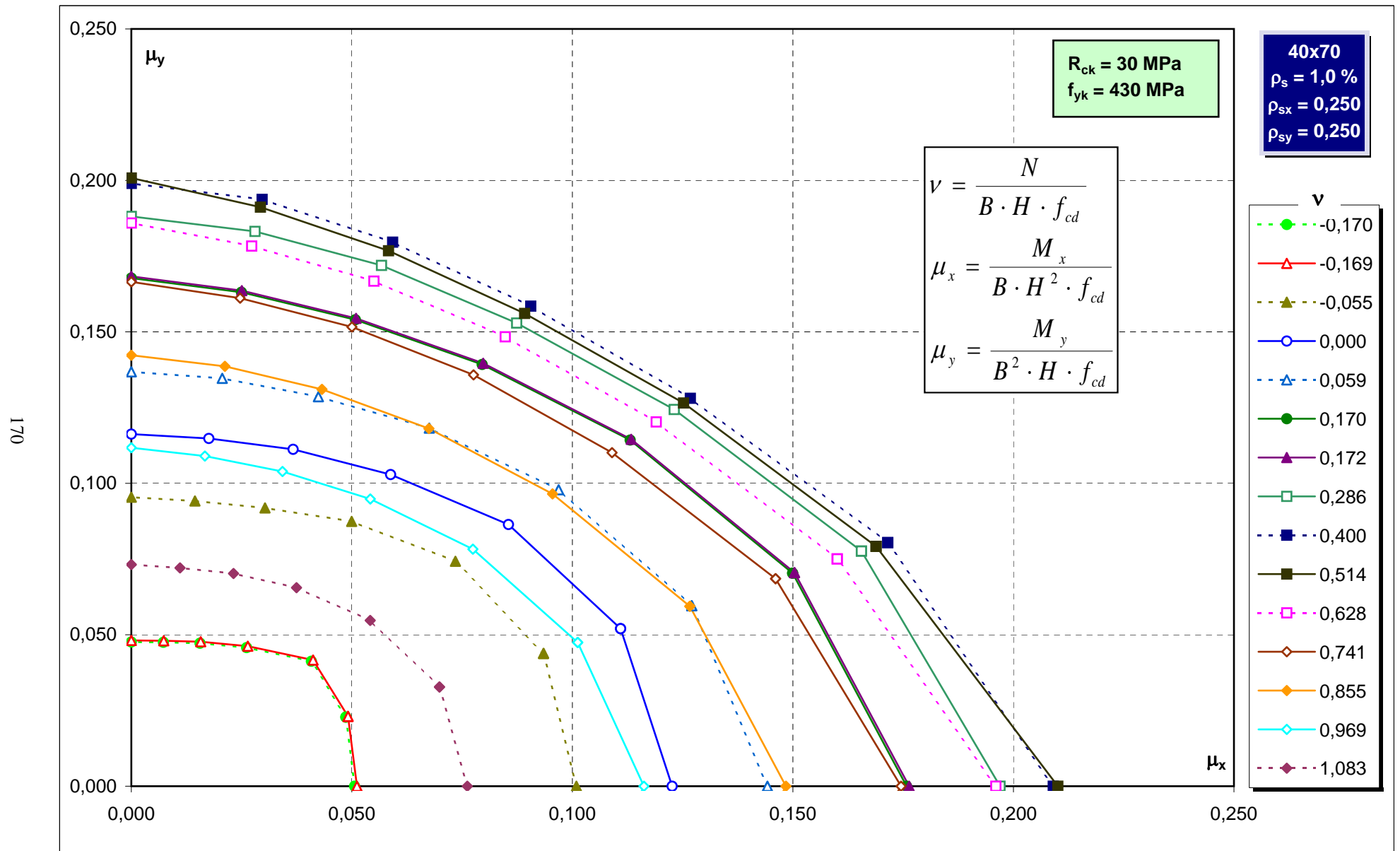
Abachi di verifica



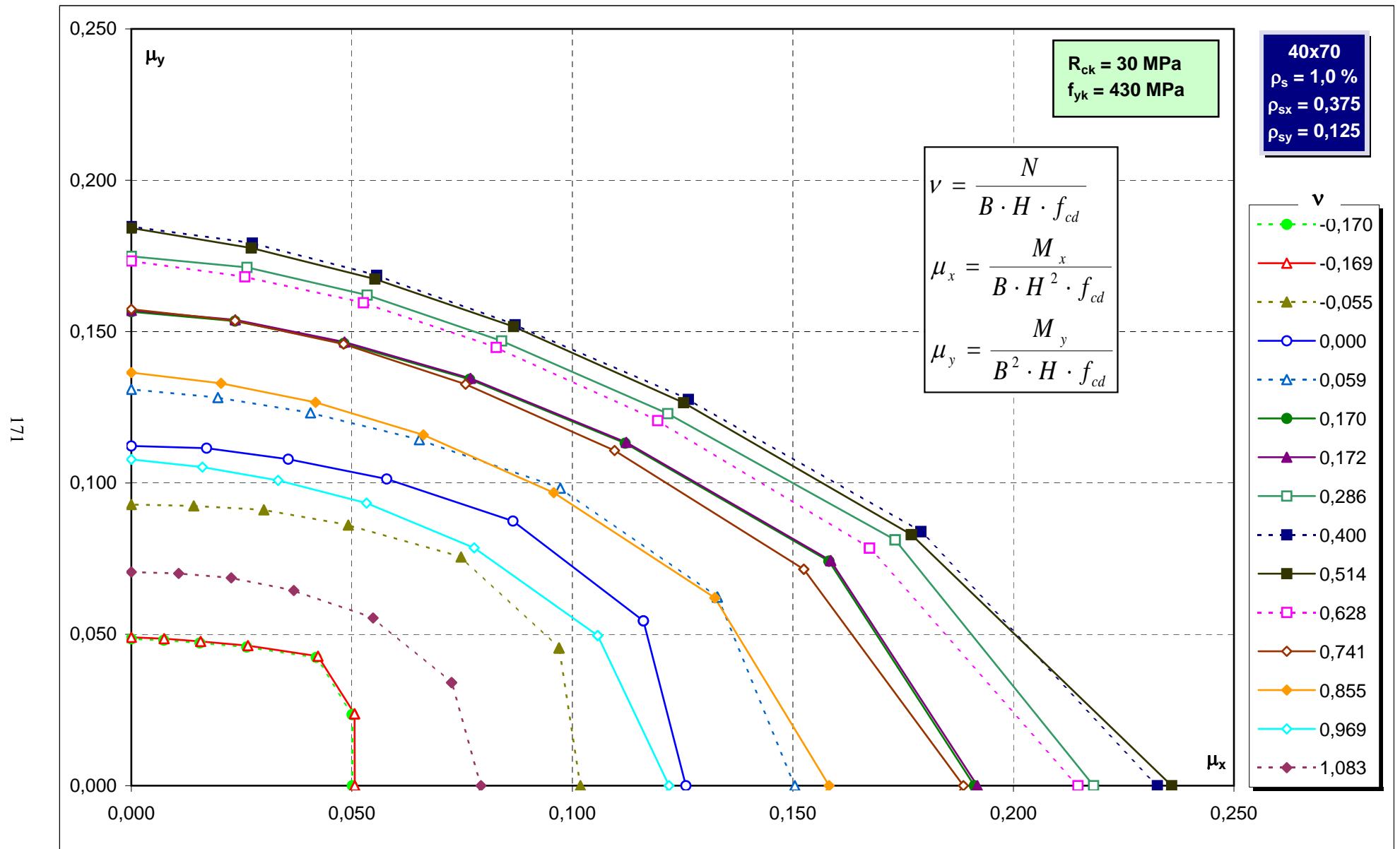
Abachi di verifica



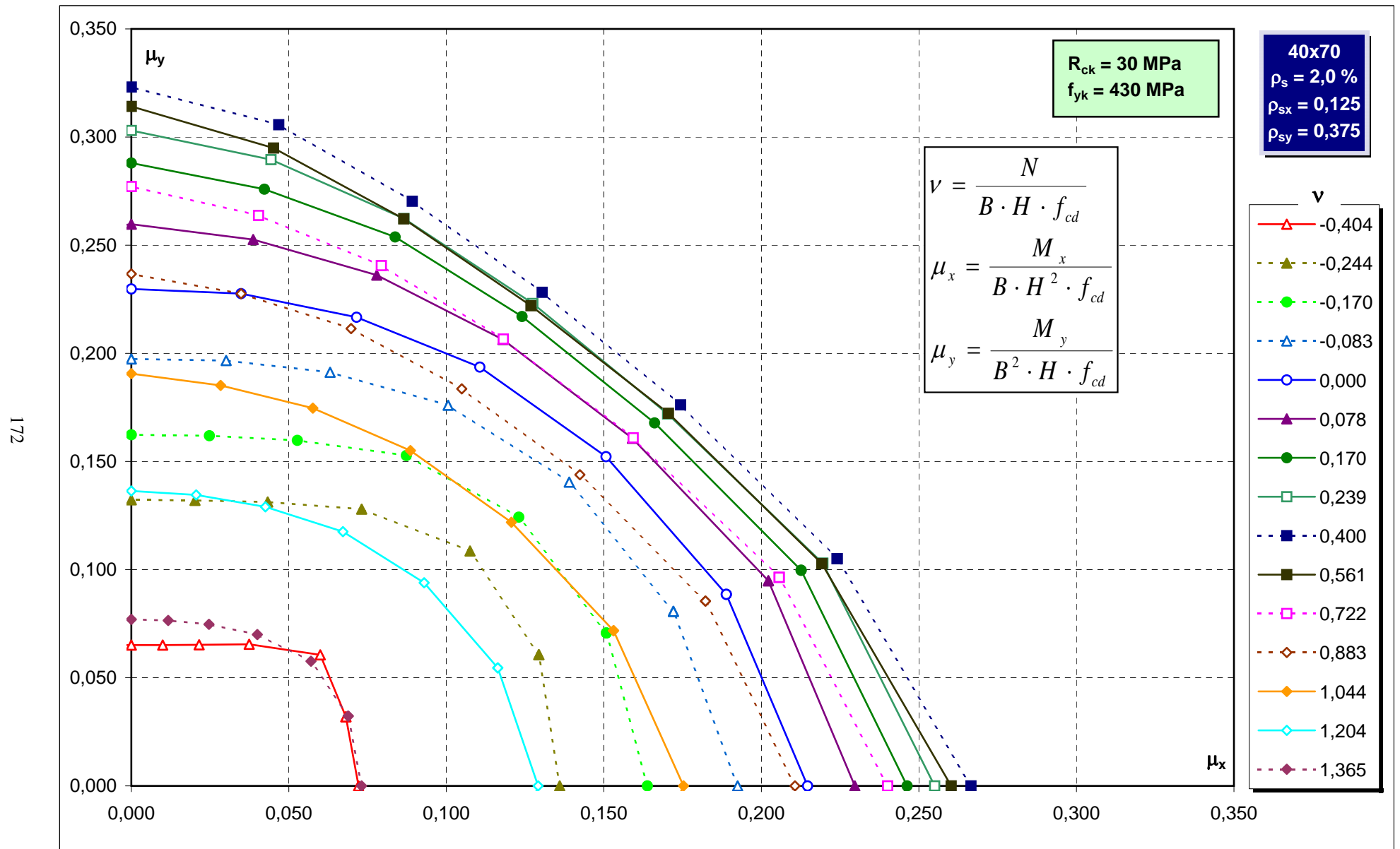
Abachi di verifica



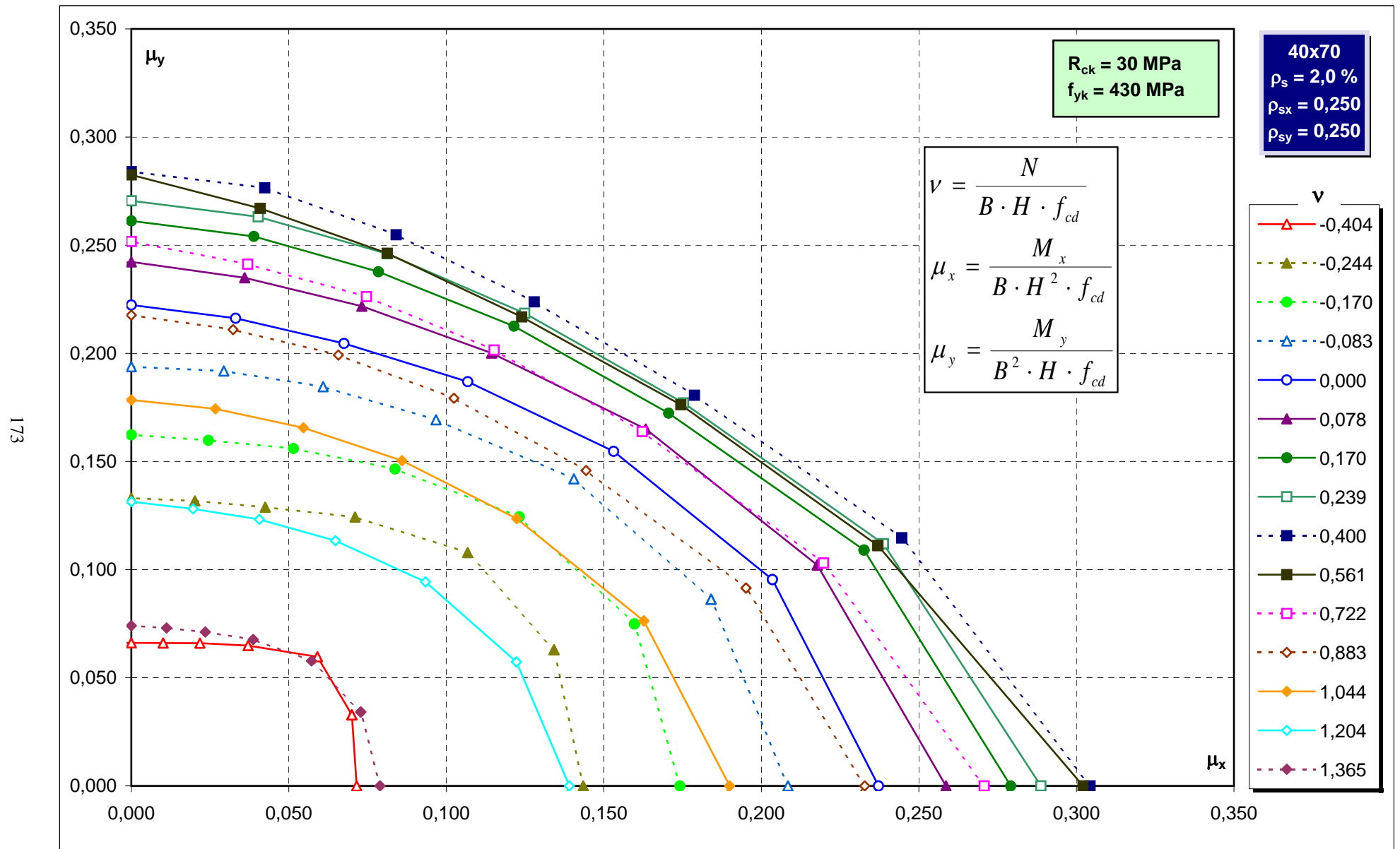
Abachi di verifica



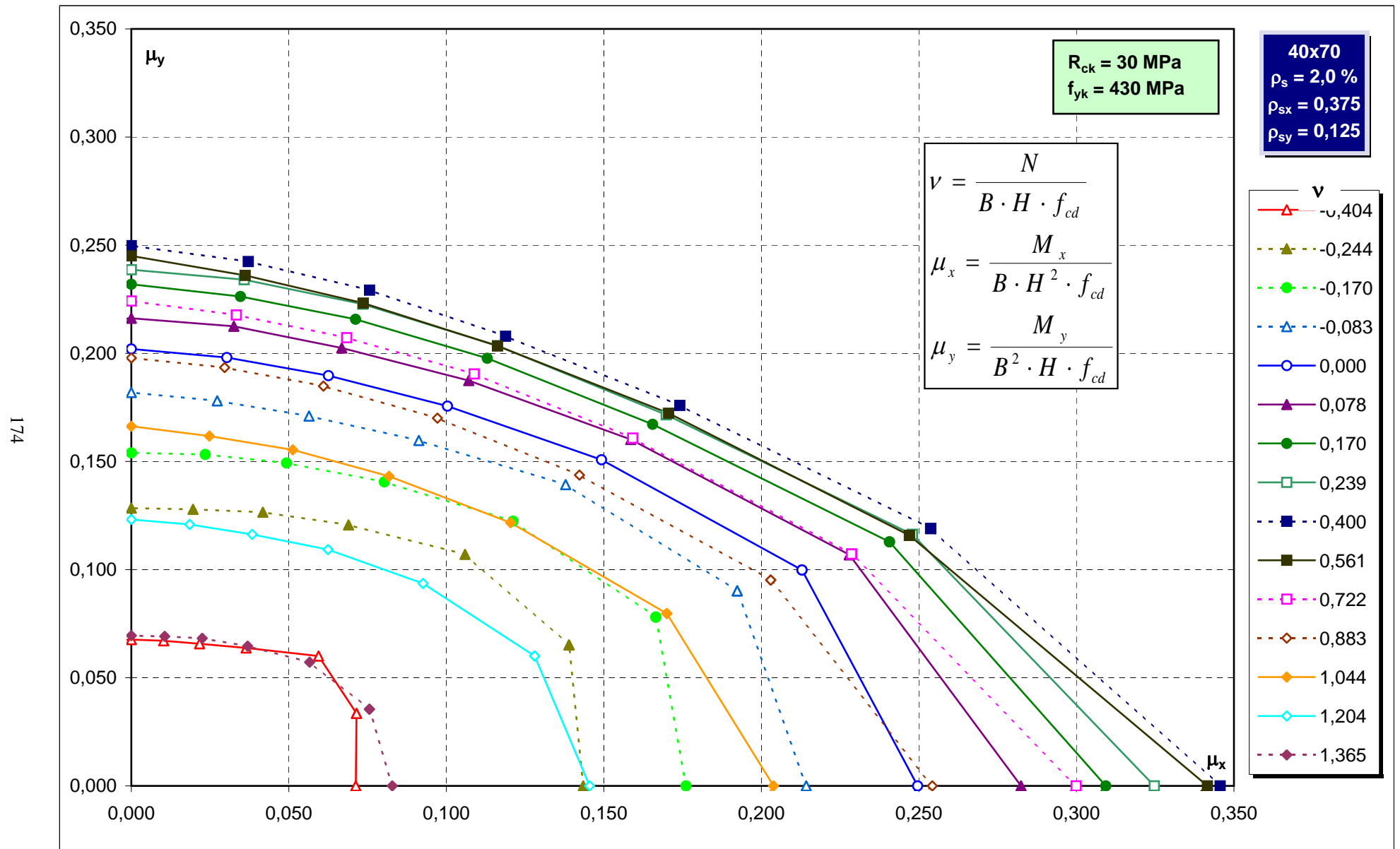
Abachi di verifica



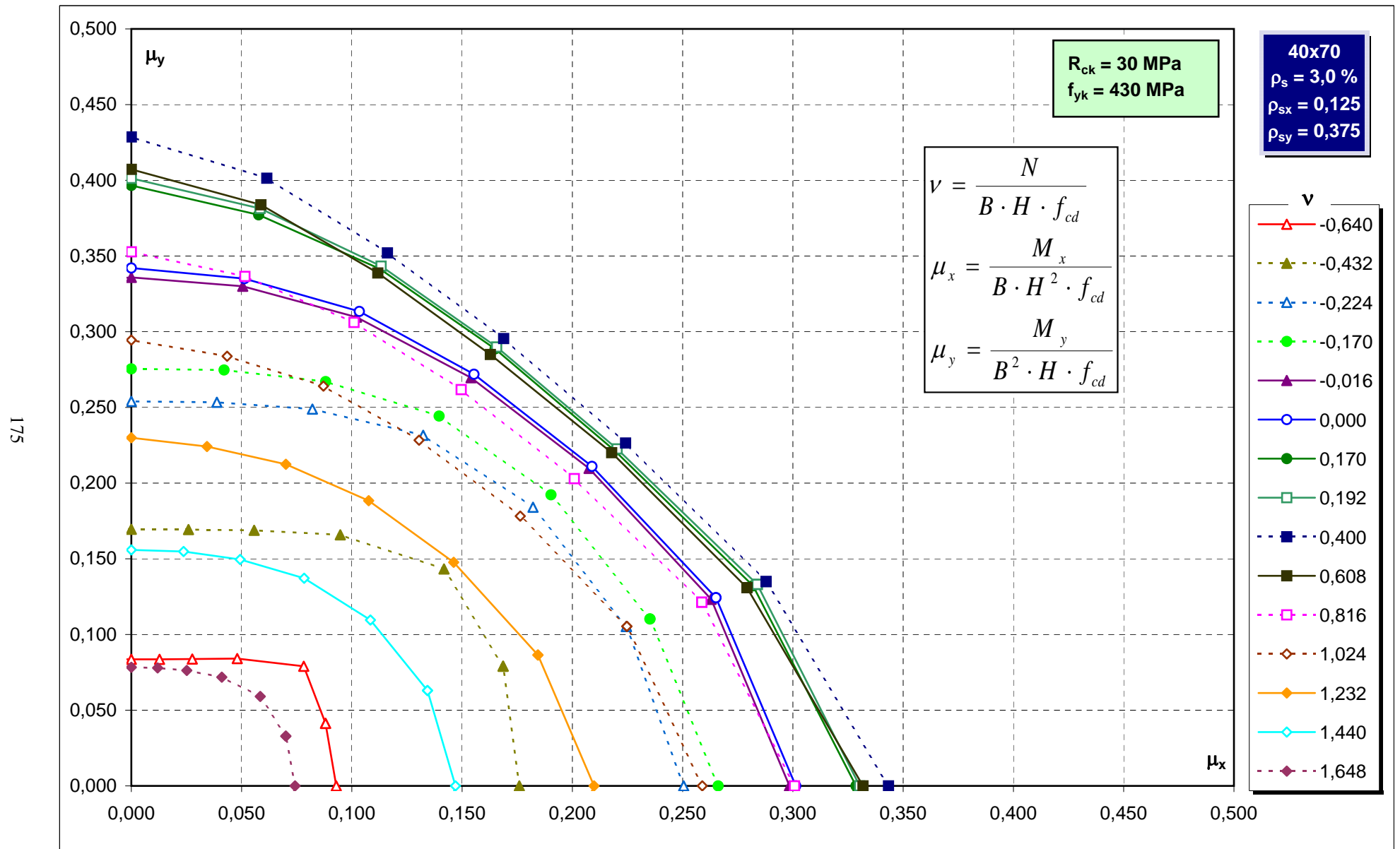
Abachi di verifica



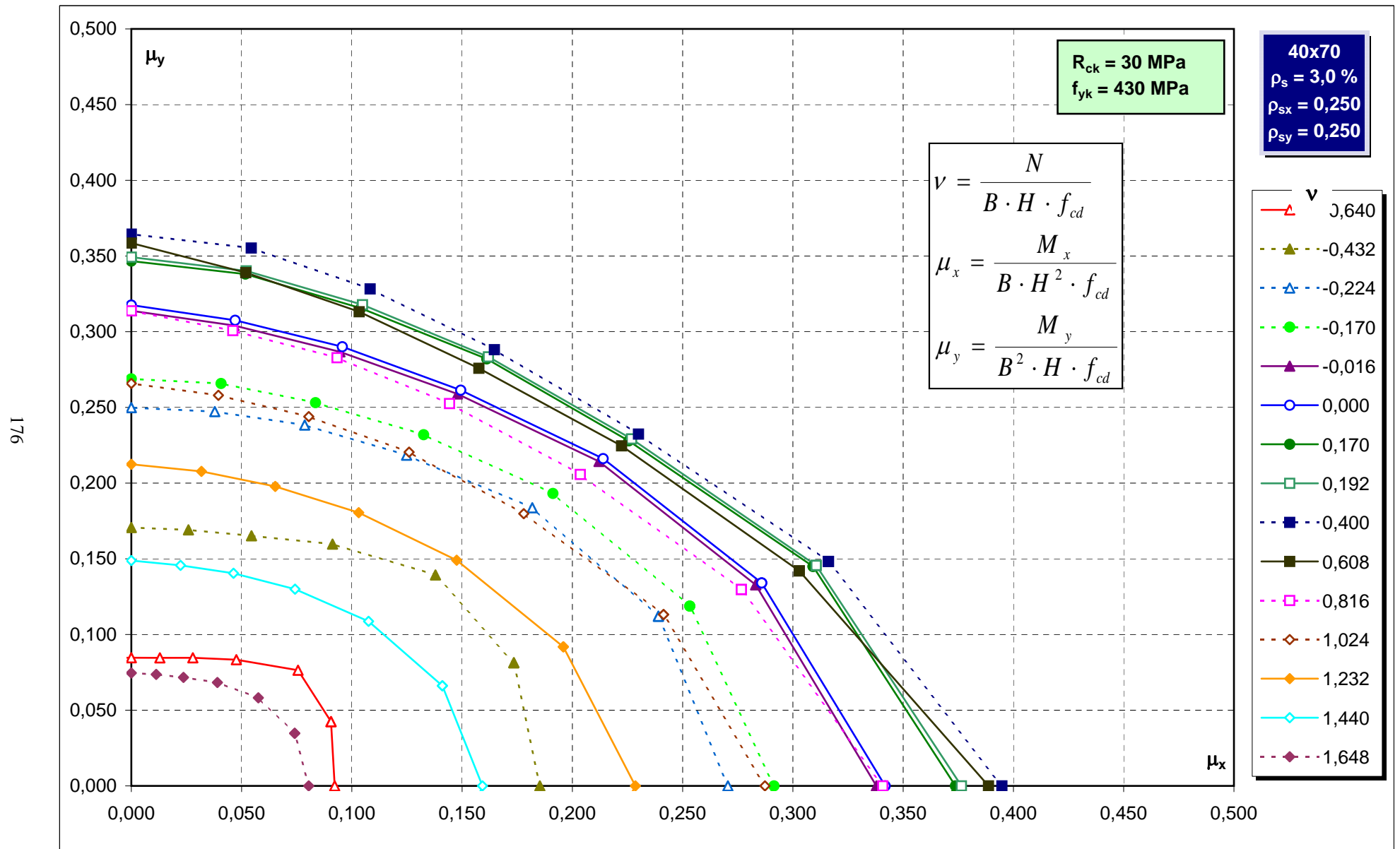
Abachi di verifica



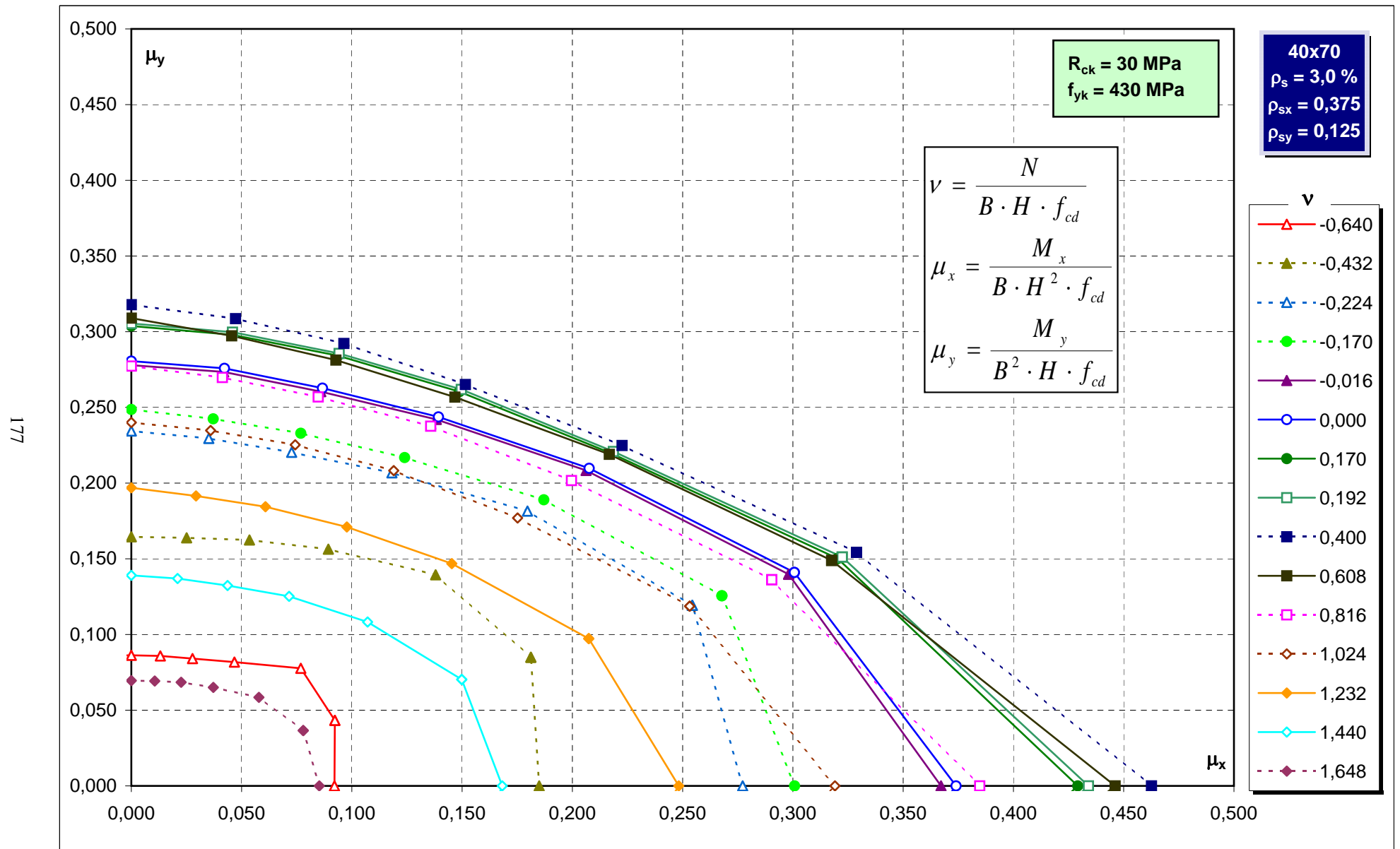
Abachi di verifica



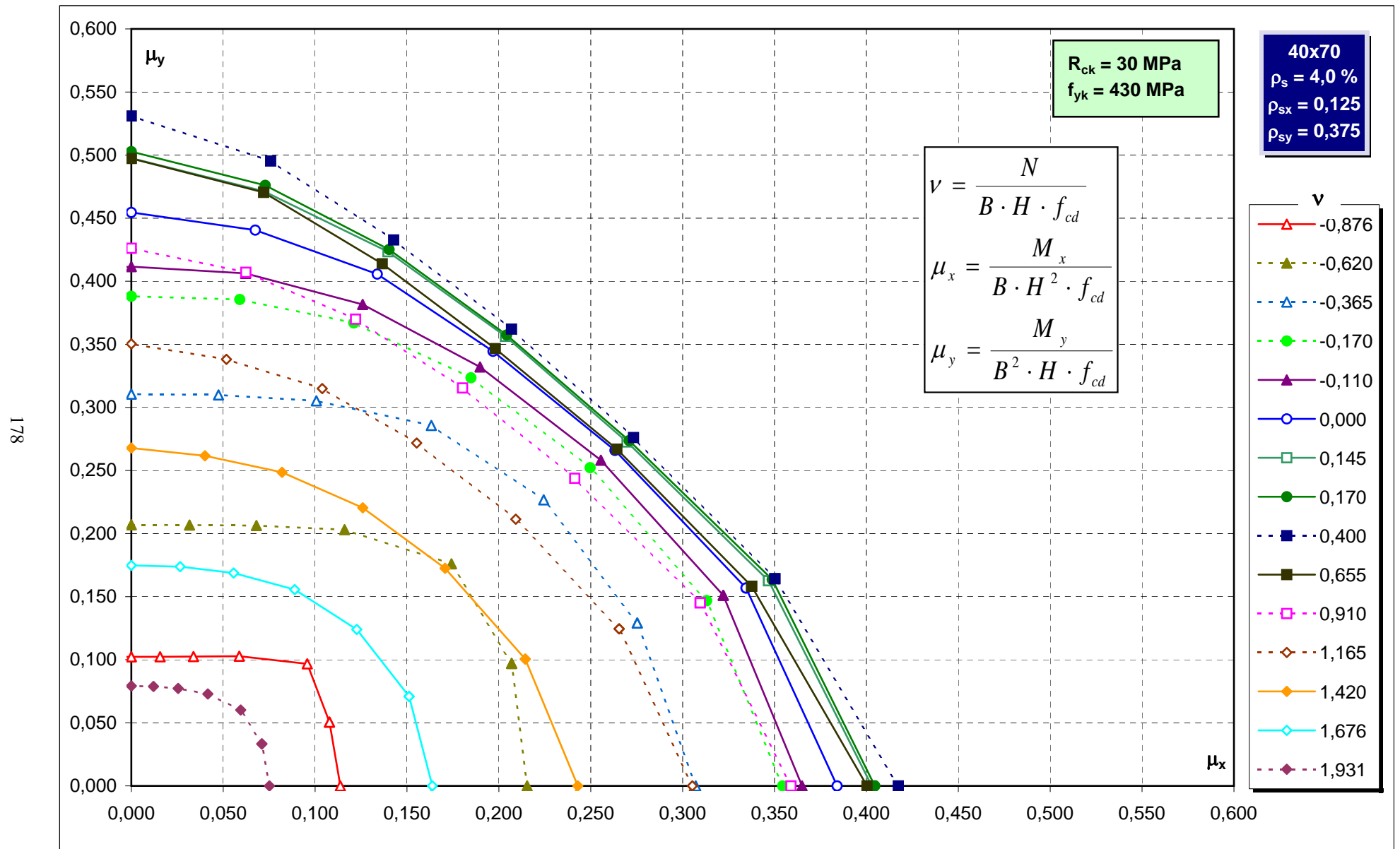
Abachi di verifica



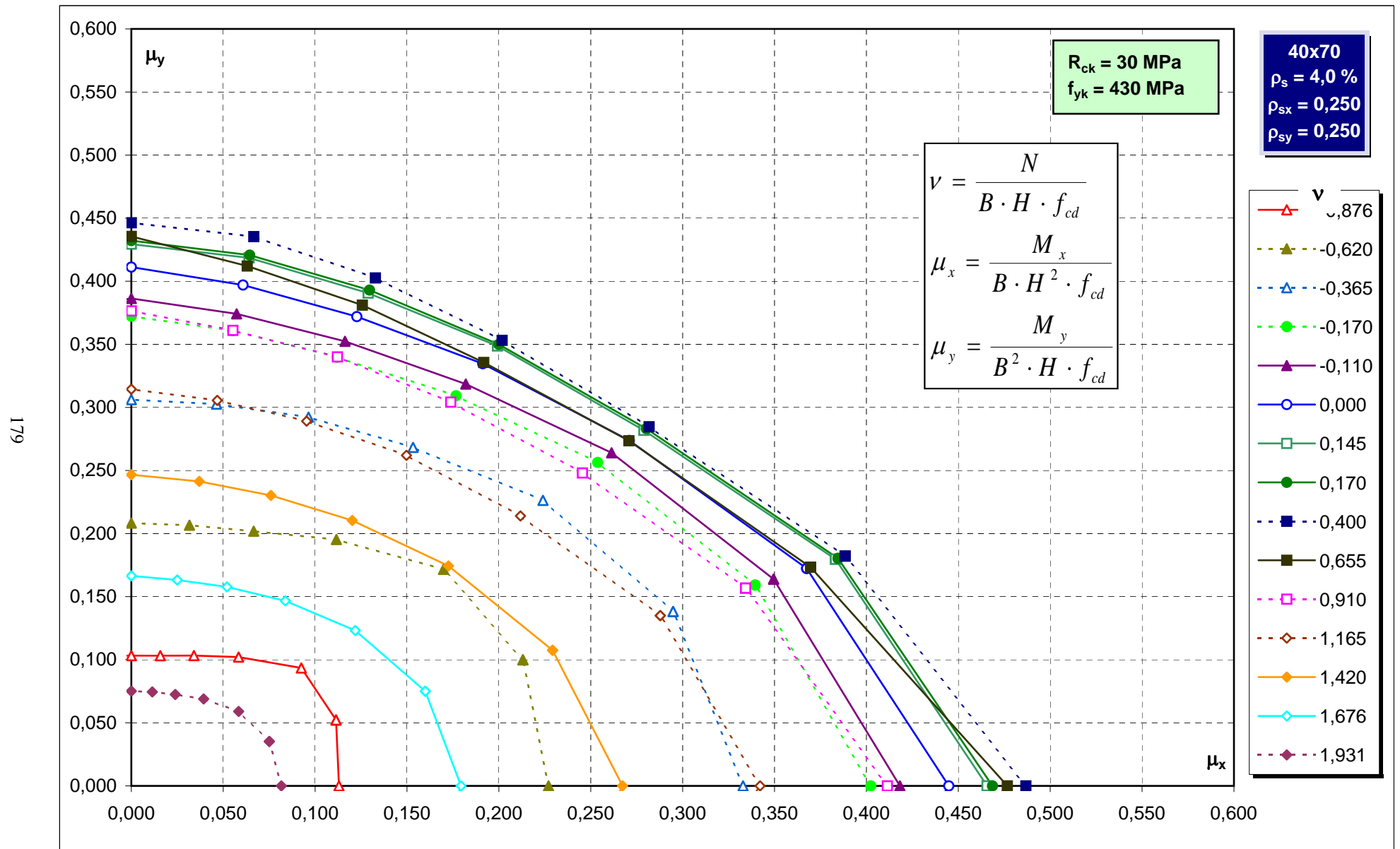
Abachi di verifica



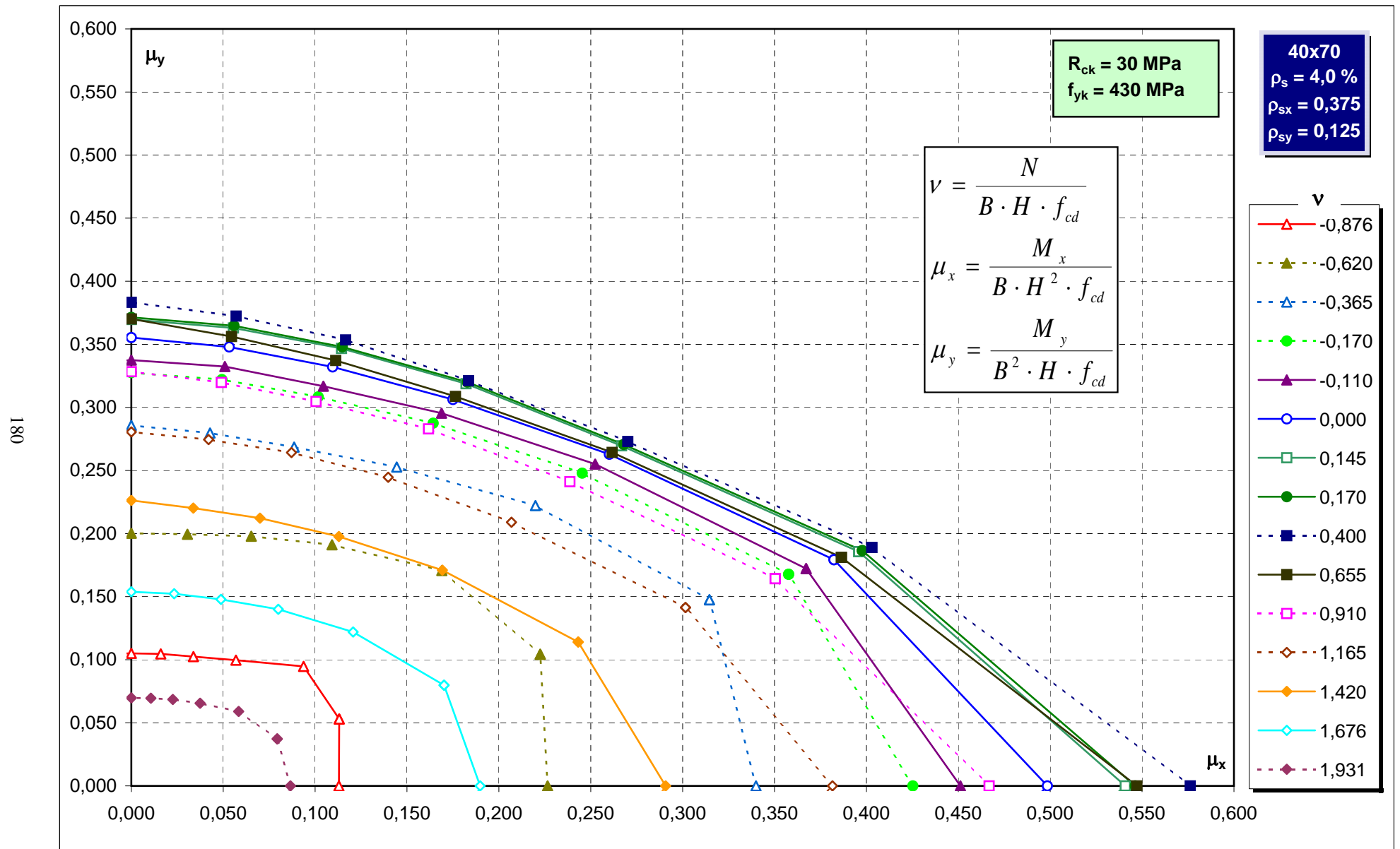
Abachi di verifica



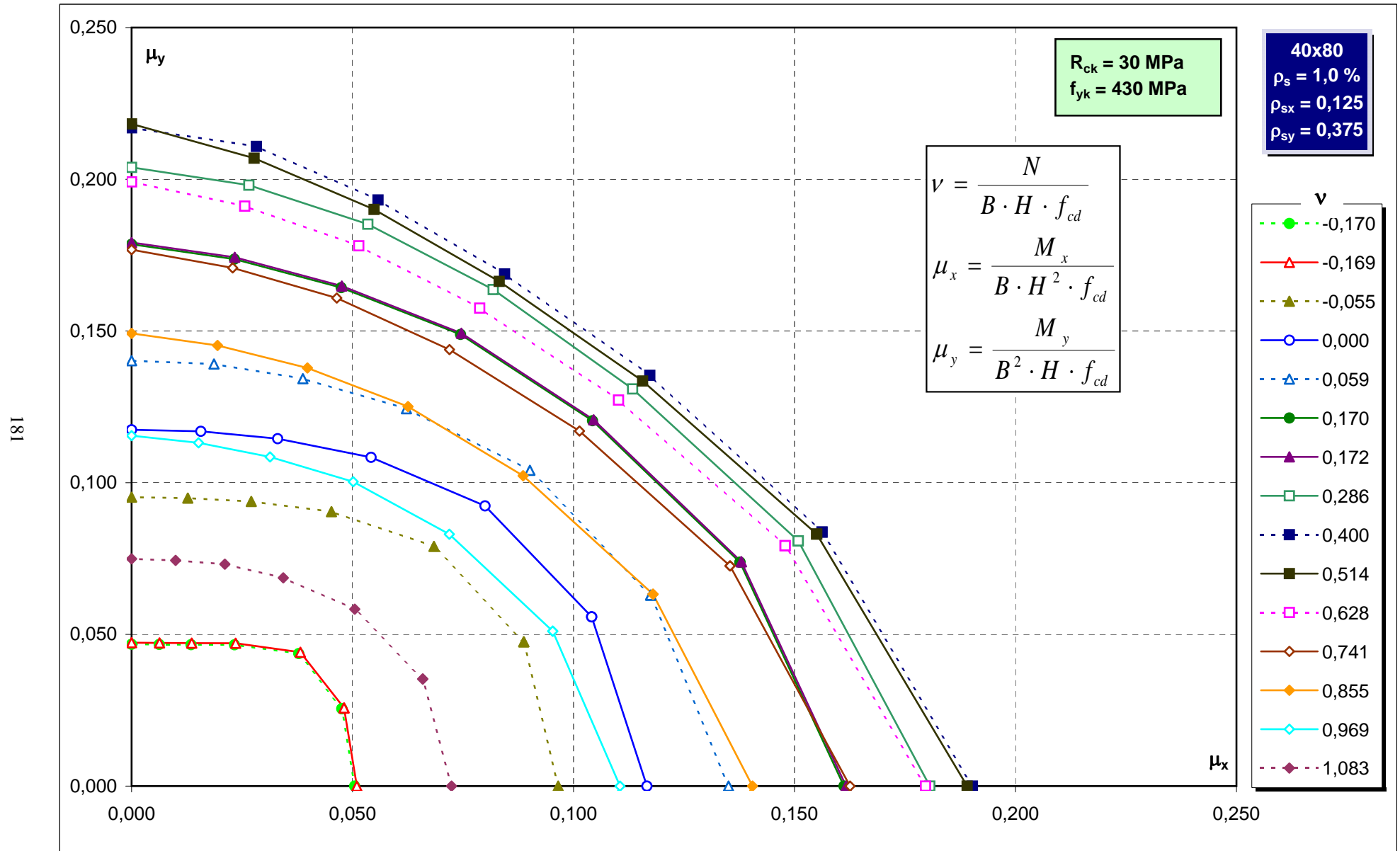
Abachi di verifica



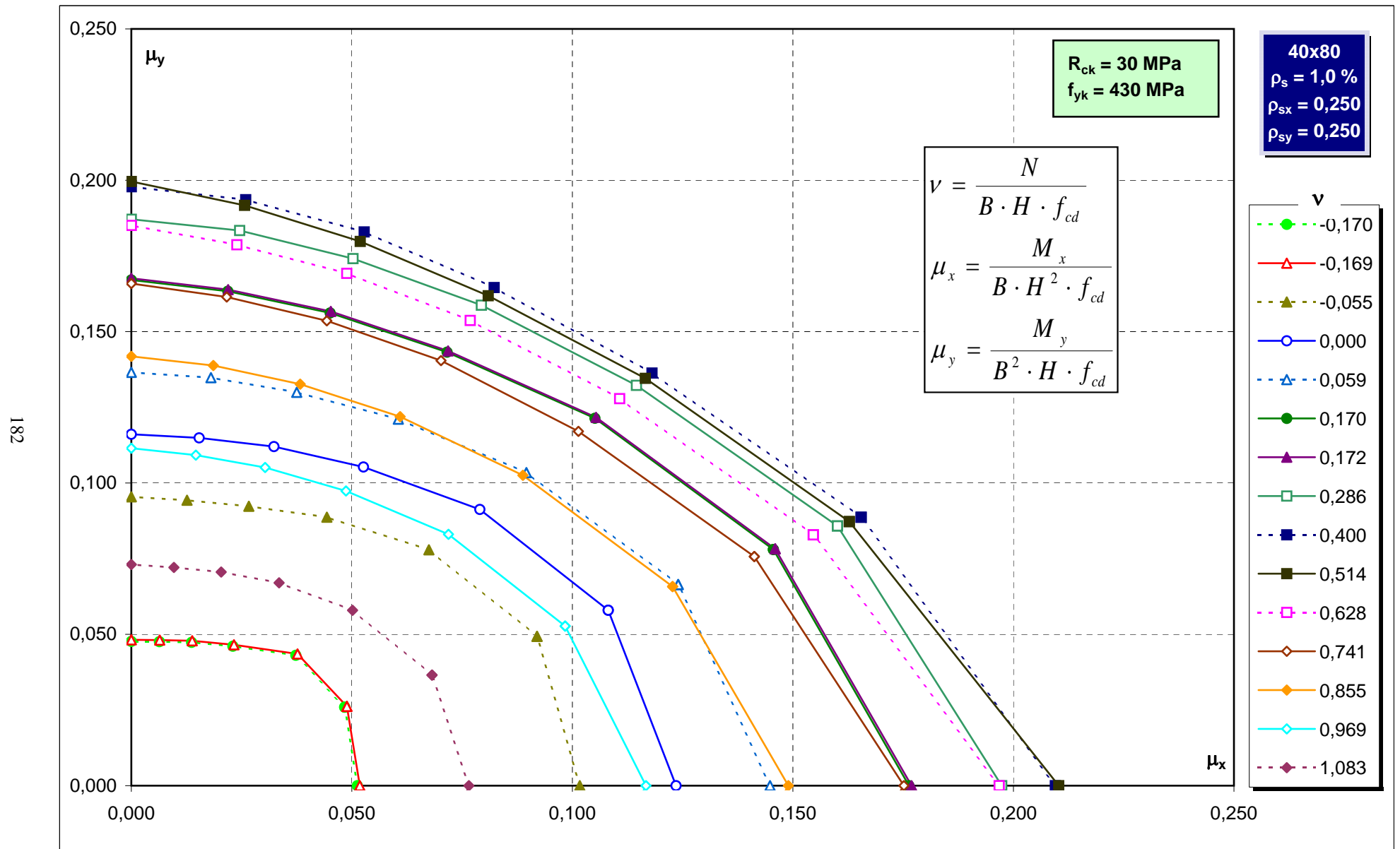
Abachi di verifica



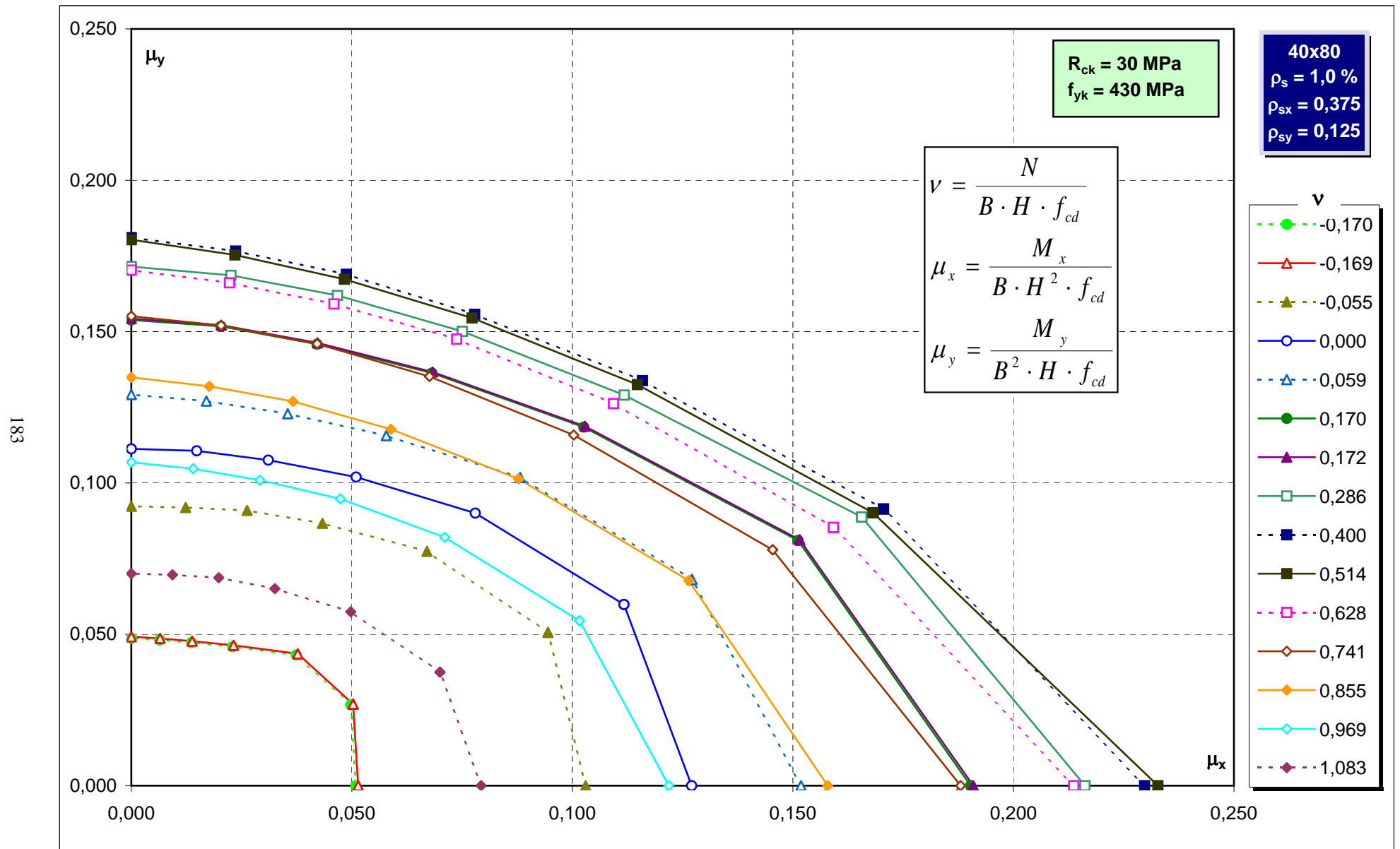
Abachi di verifica



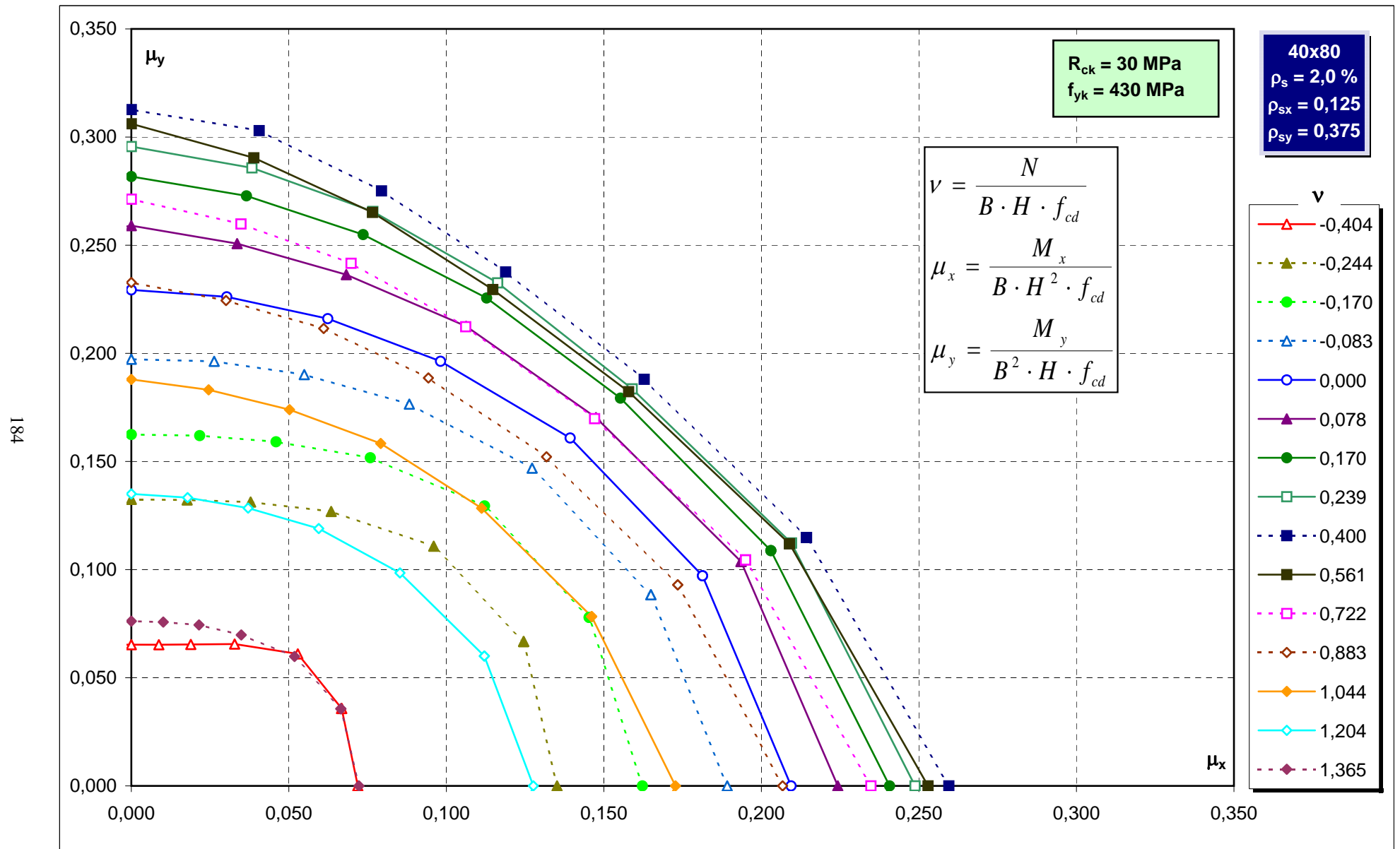
Abachi di verifica



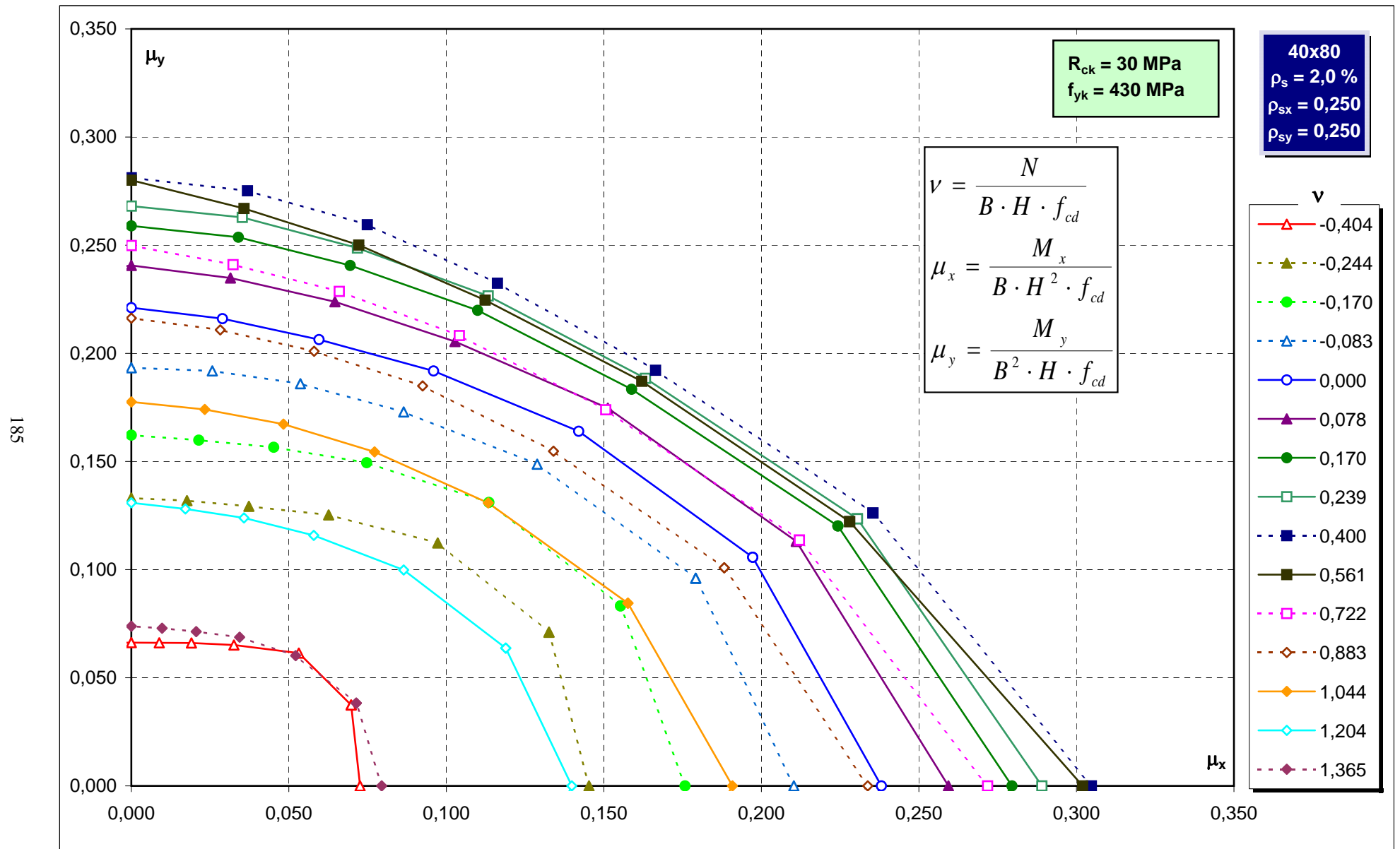
Abachi di verifica



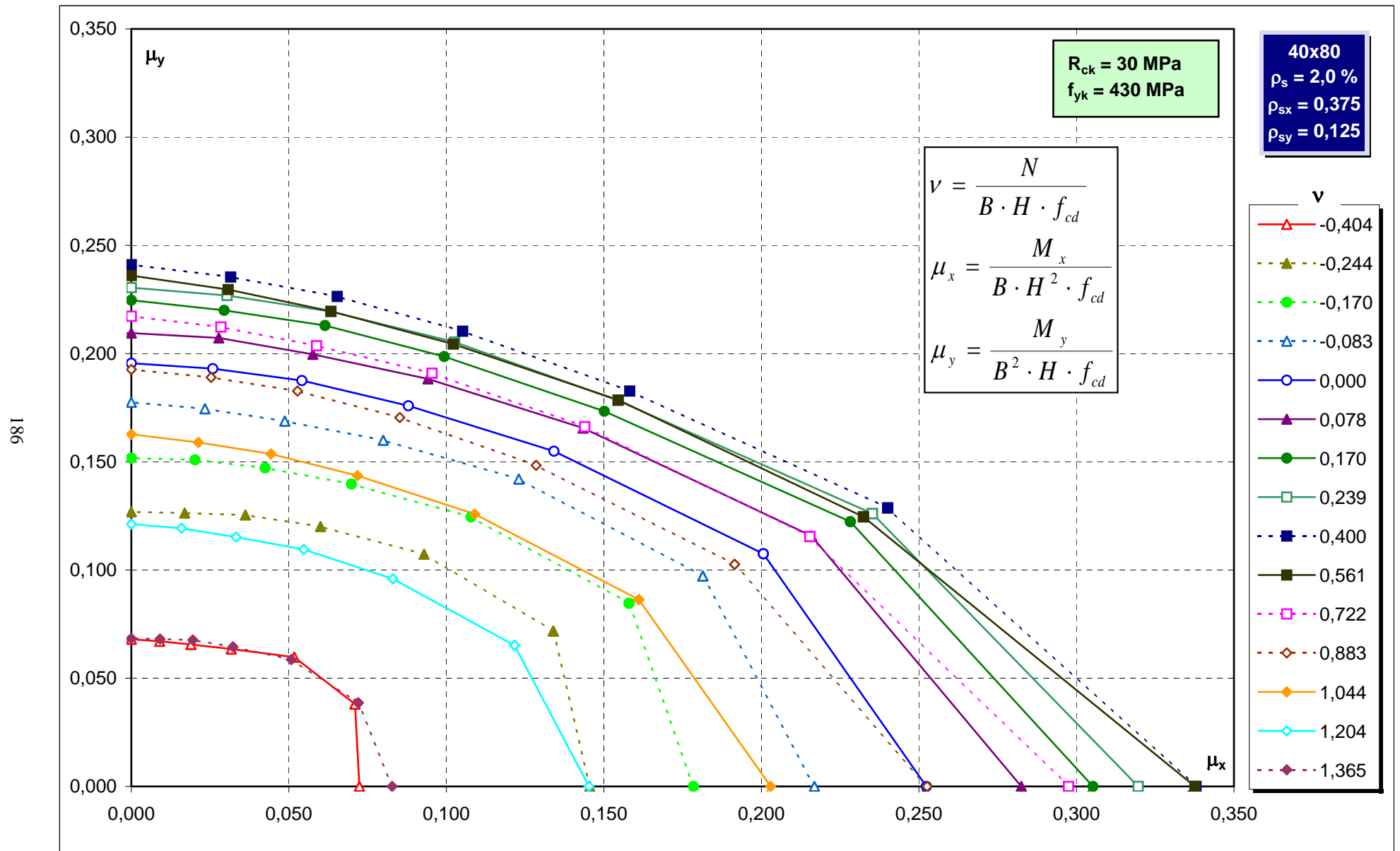
Abachi di verifica



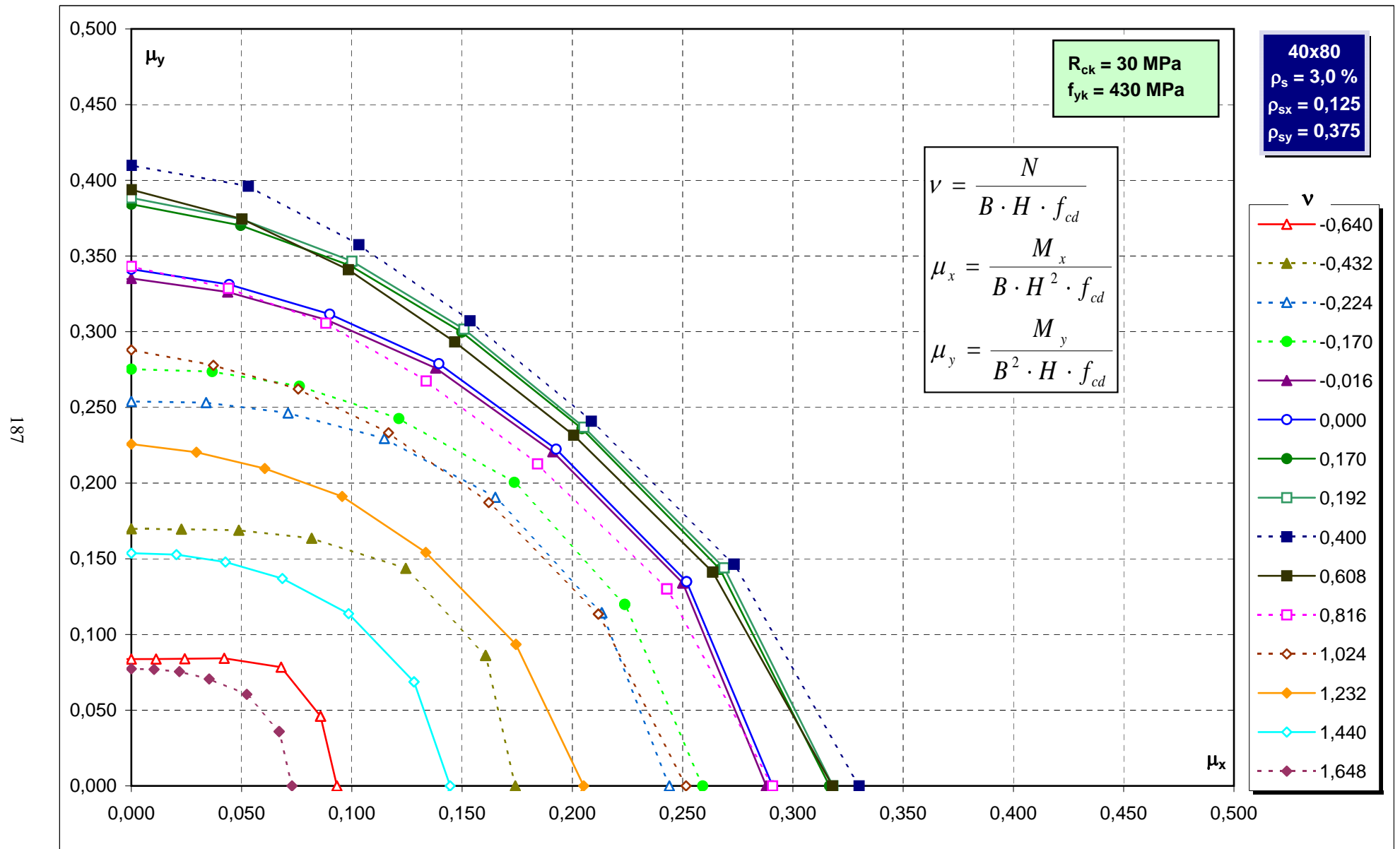
Abachi di verifica



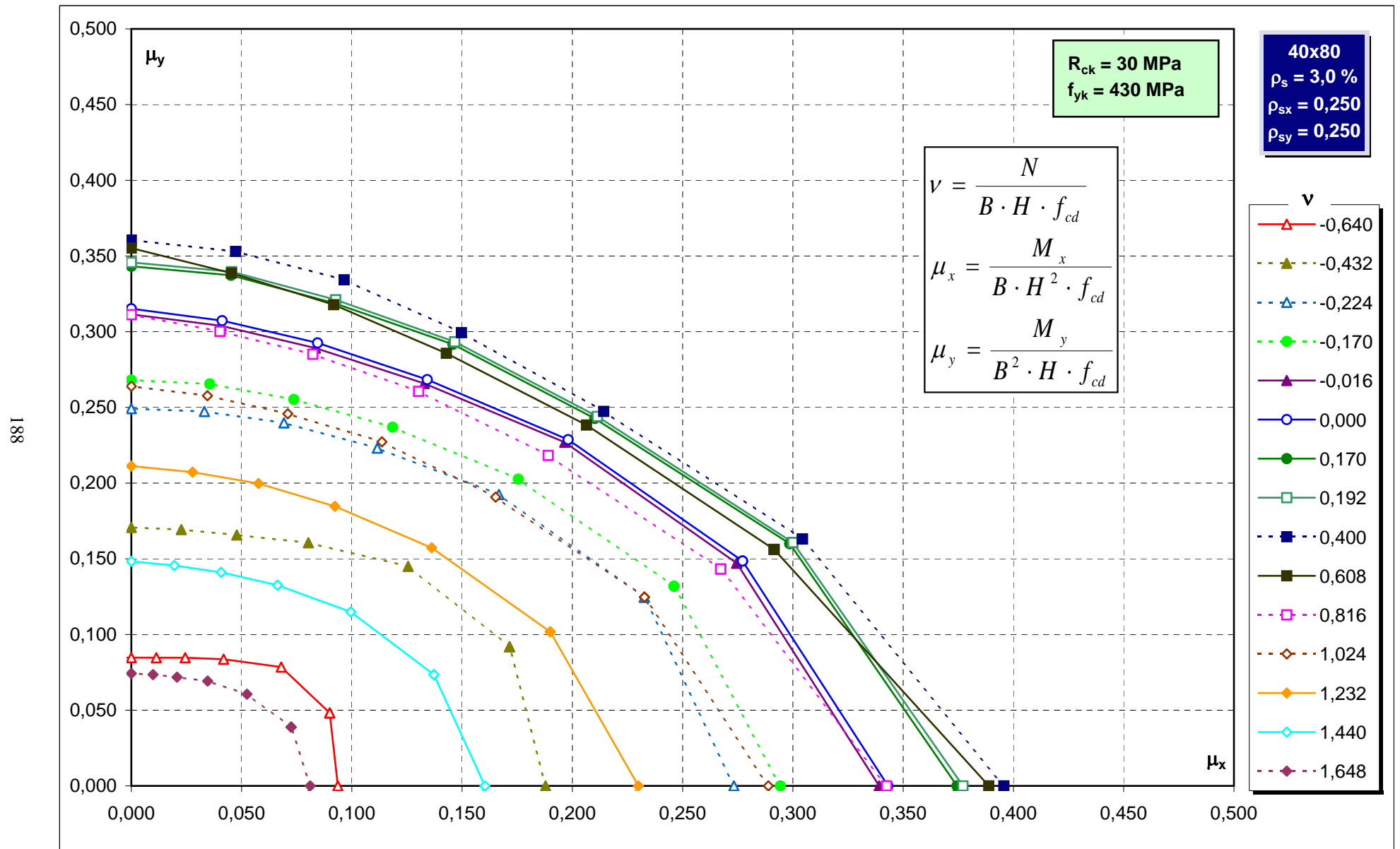
Abachi di verifica



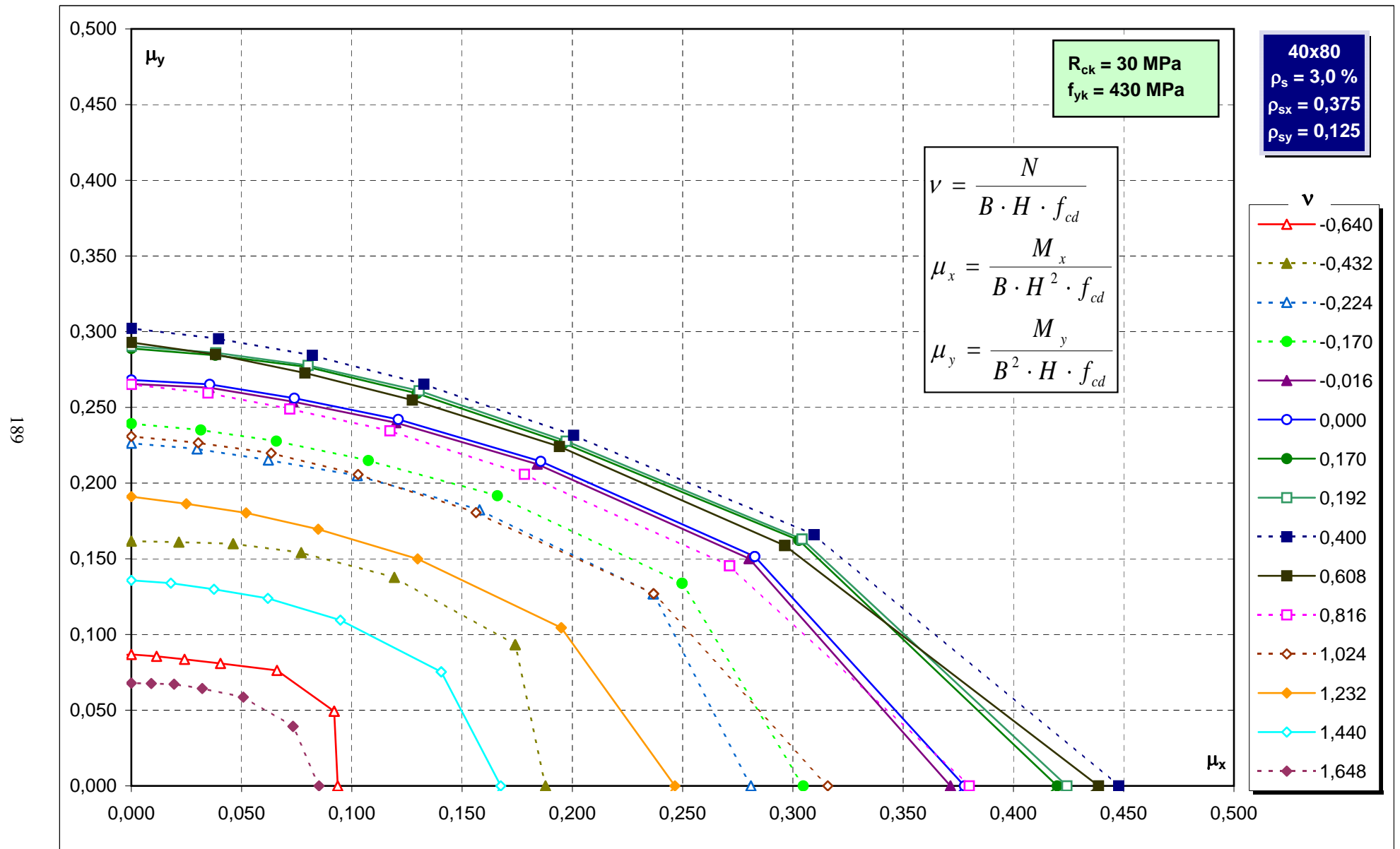
Abachi di verifica



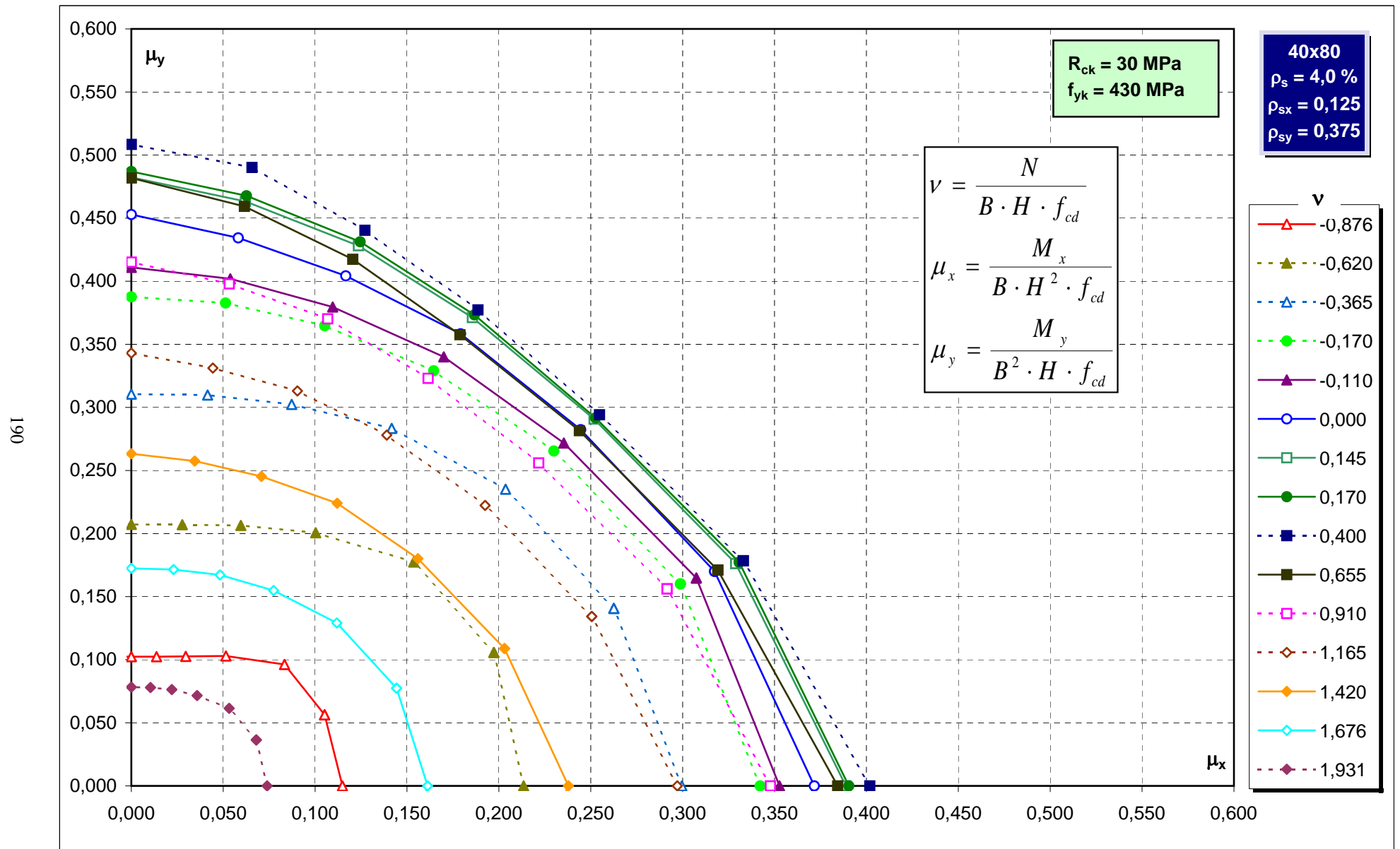
Abachi di verifica



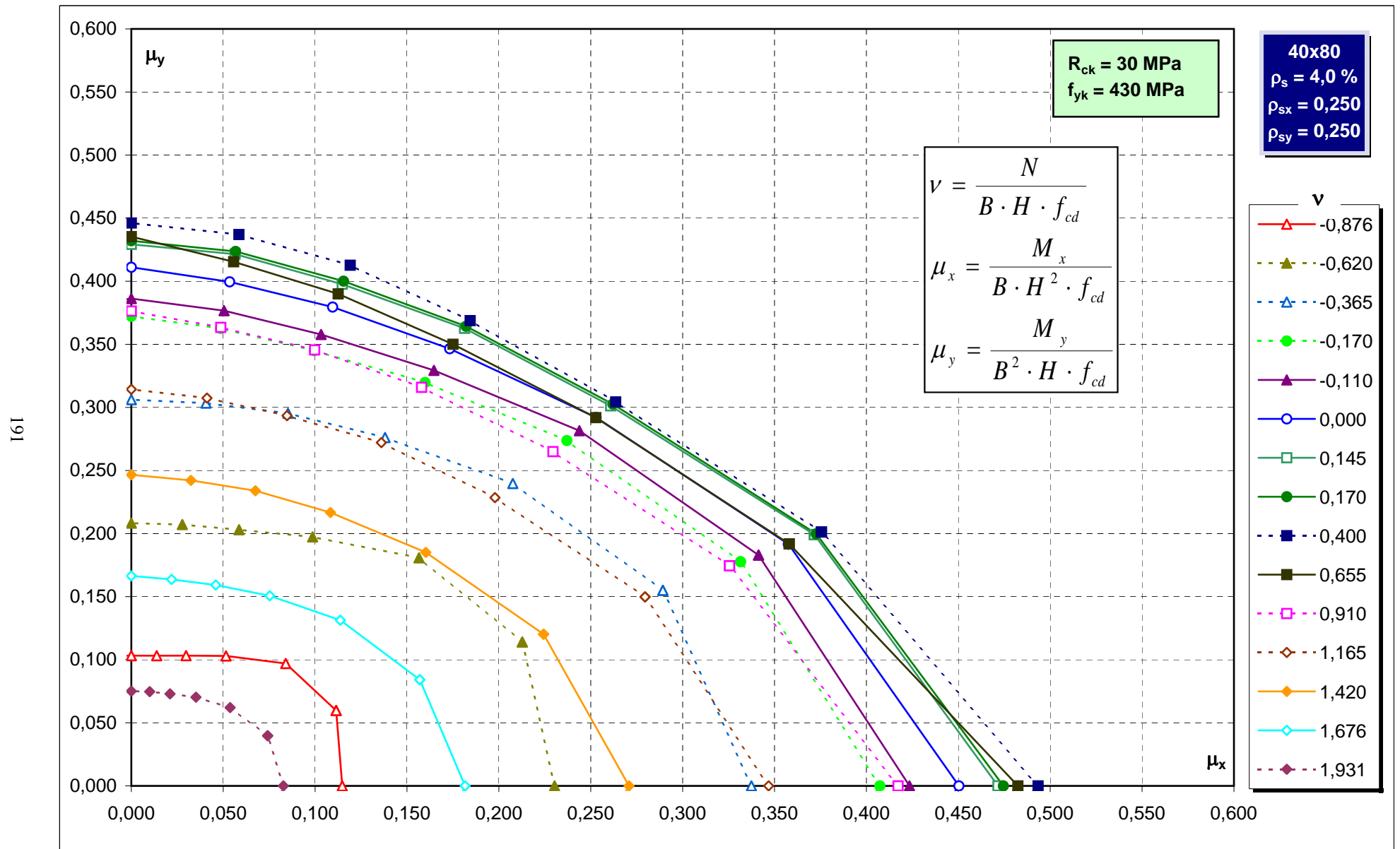
Abachi di verifica



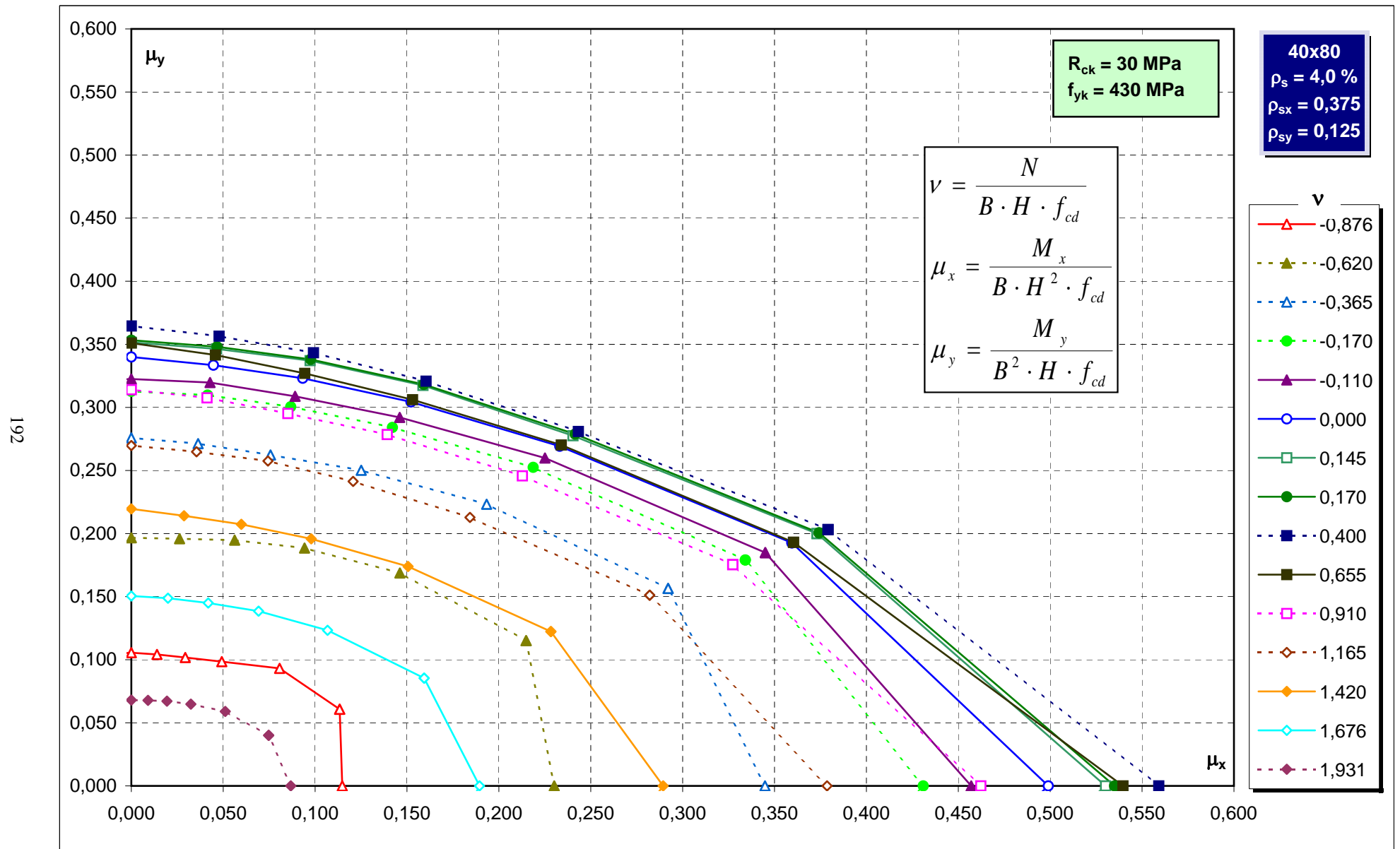
Abachi di verifica



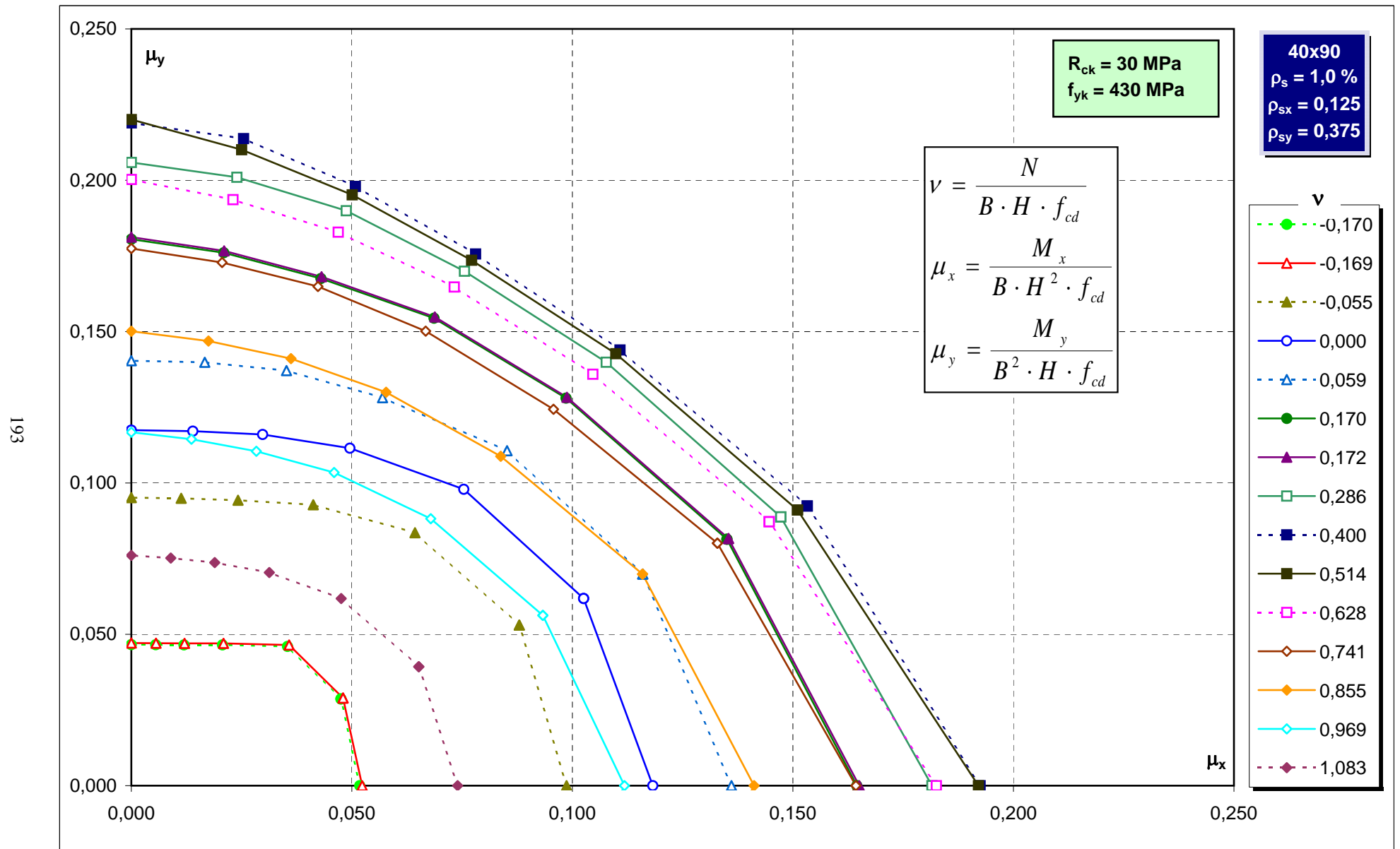
Abachi di verifica



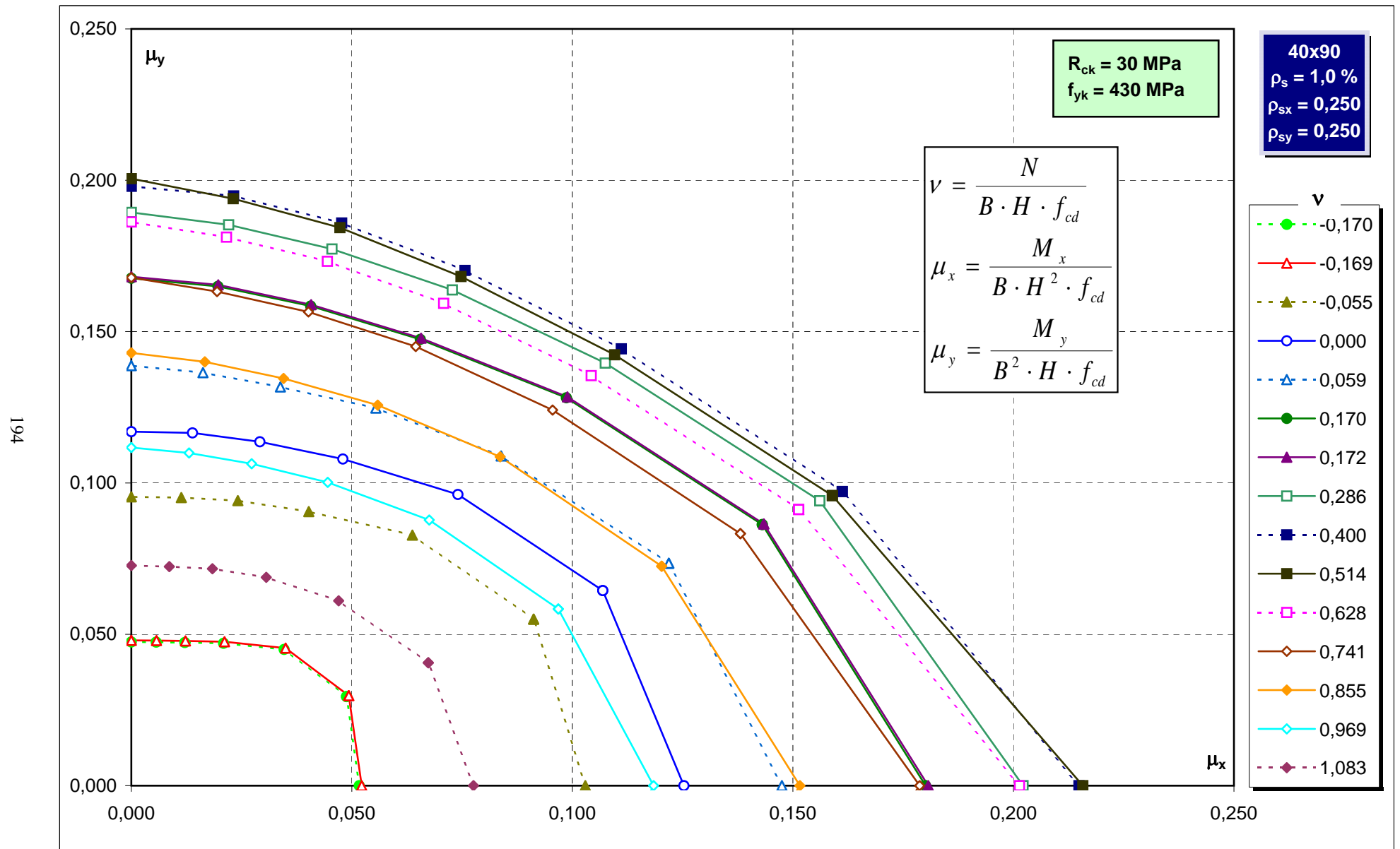
Abachi di verifica



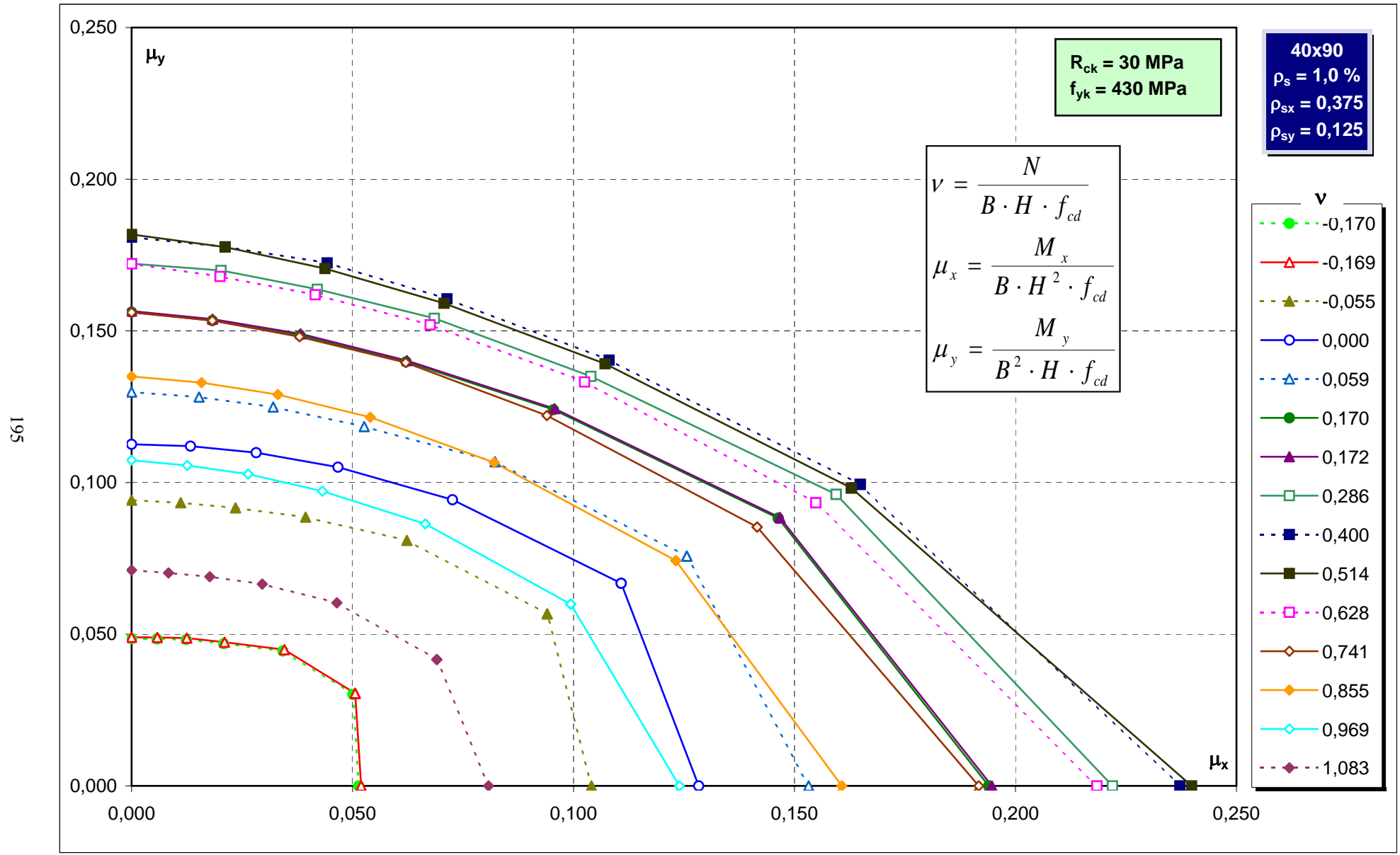
Abachi di verifica



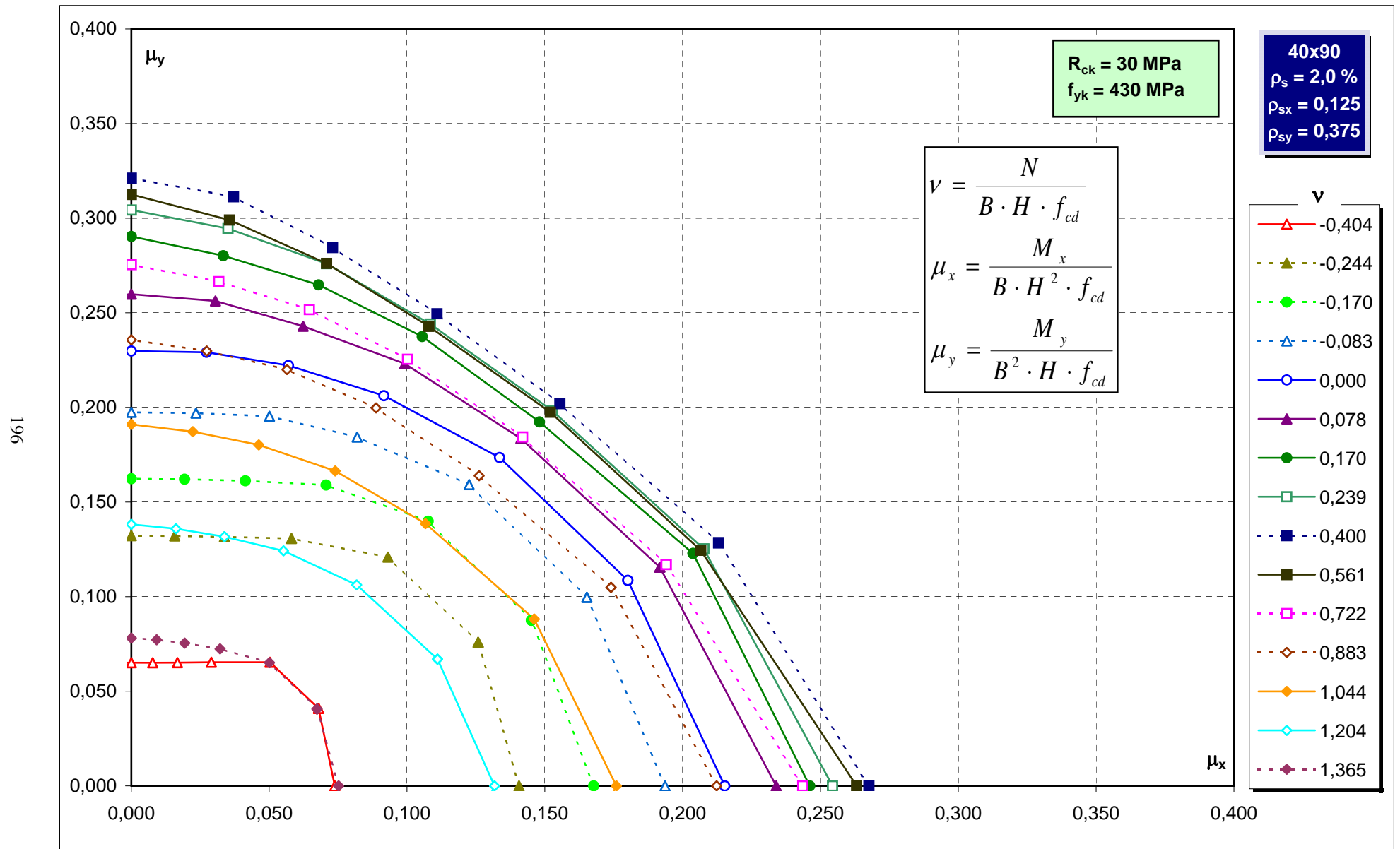
Abachi di verifica



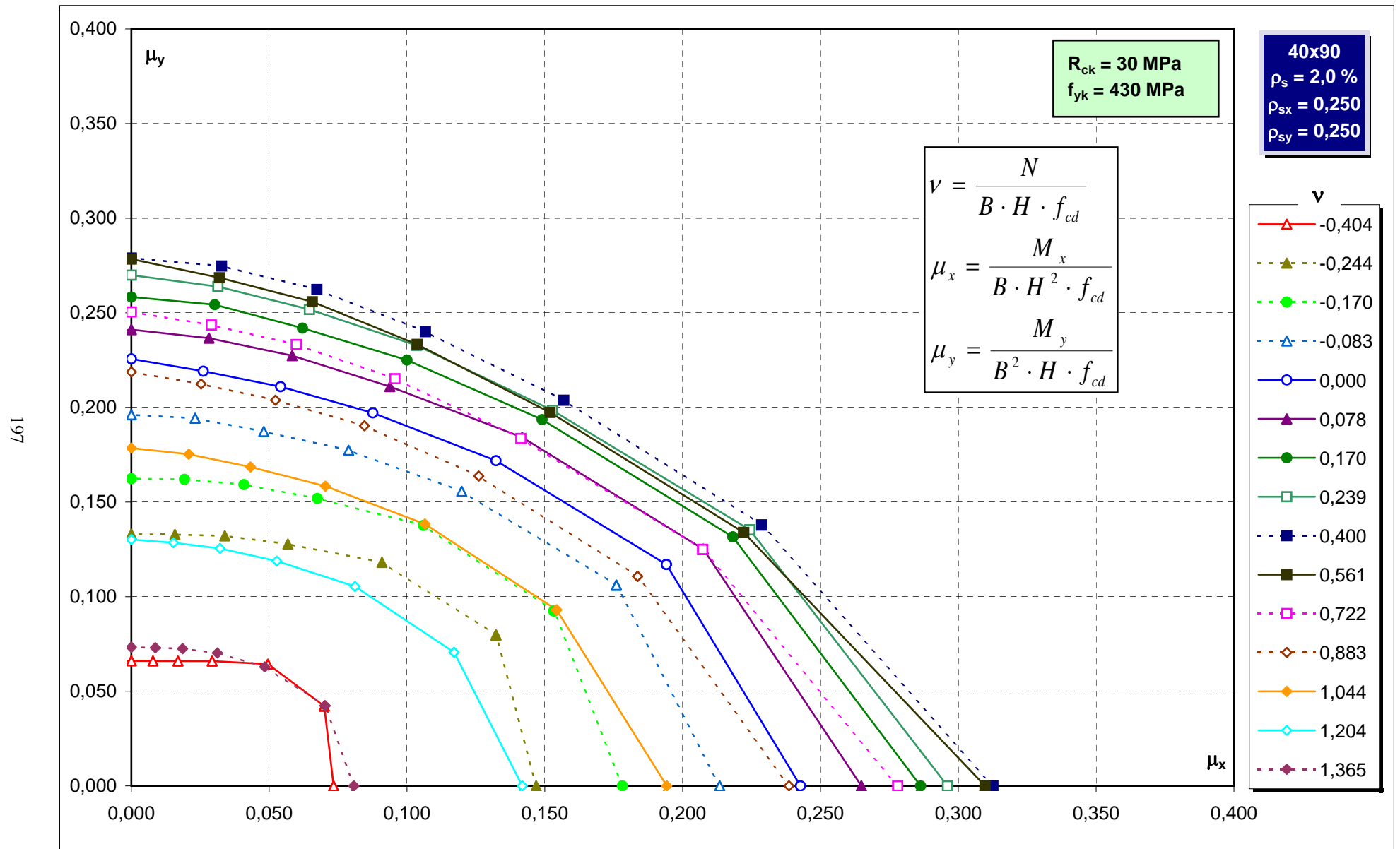
Abachi di verifica



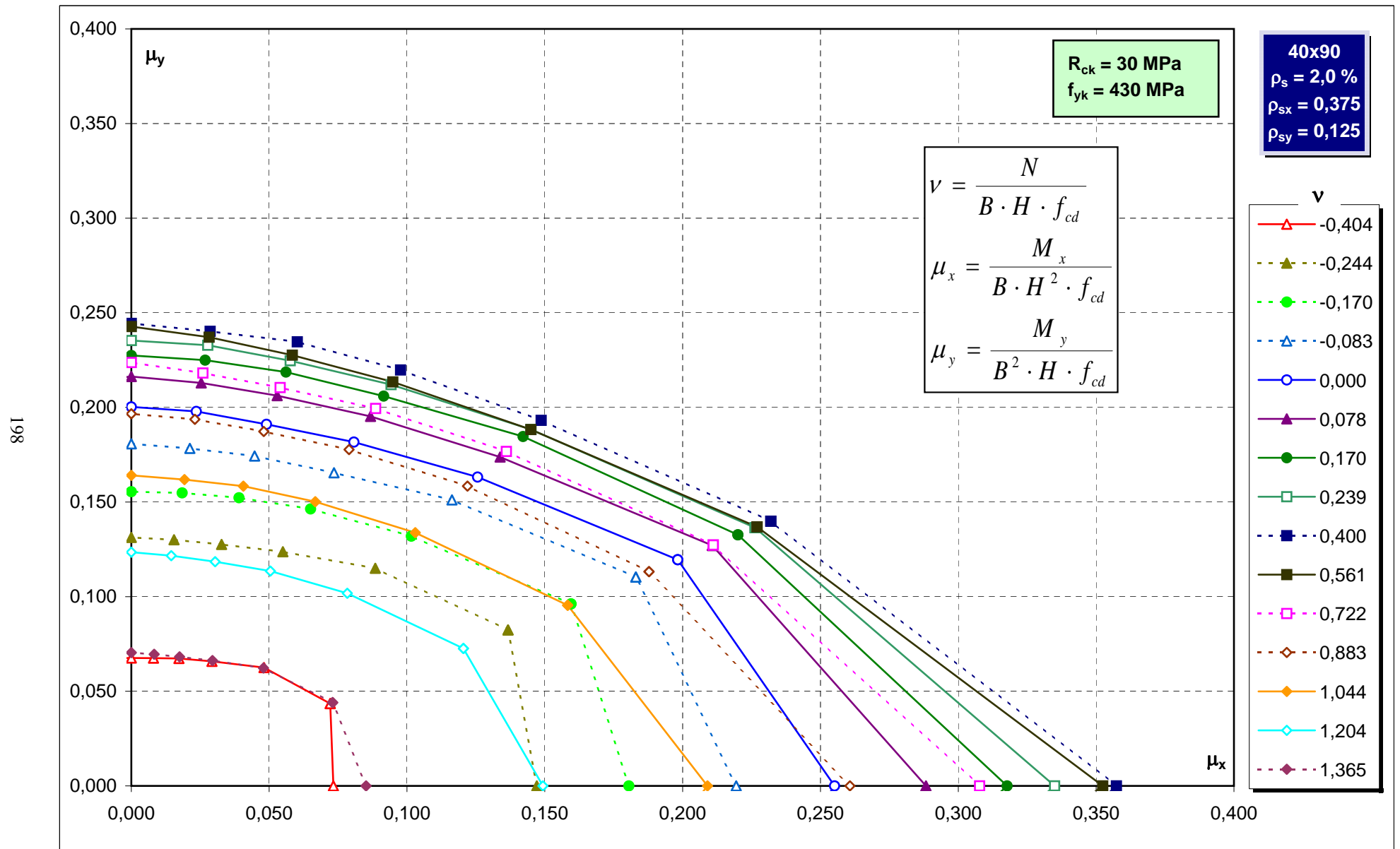
Abachi di verifica



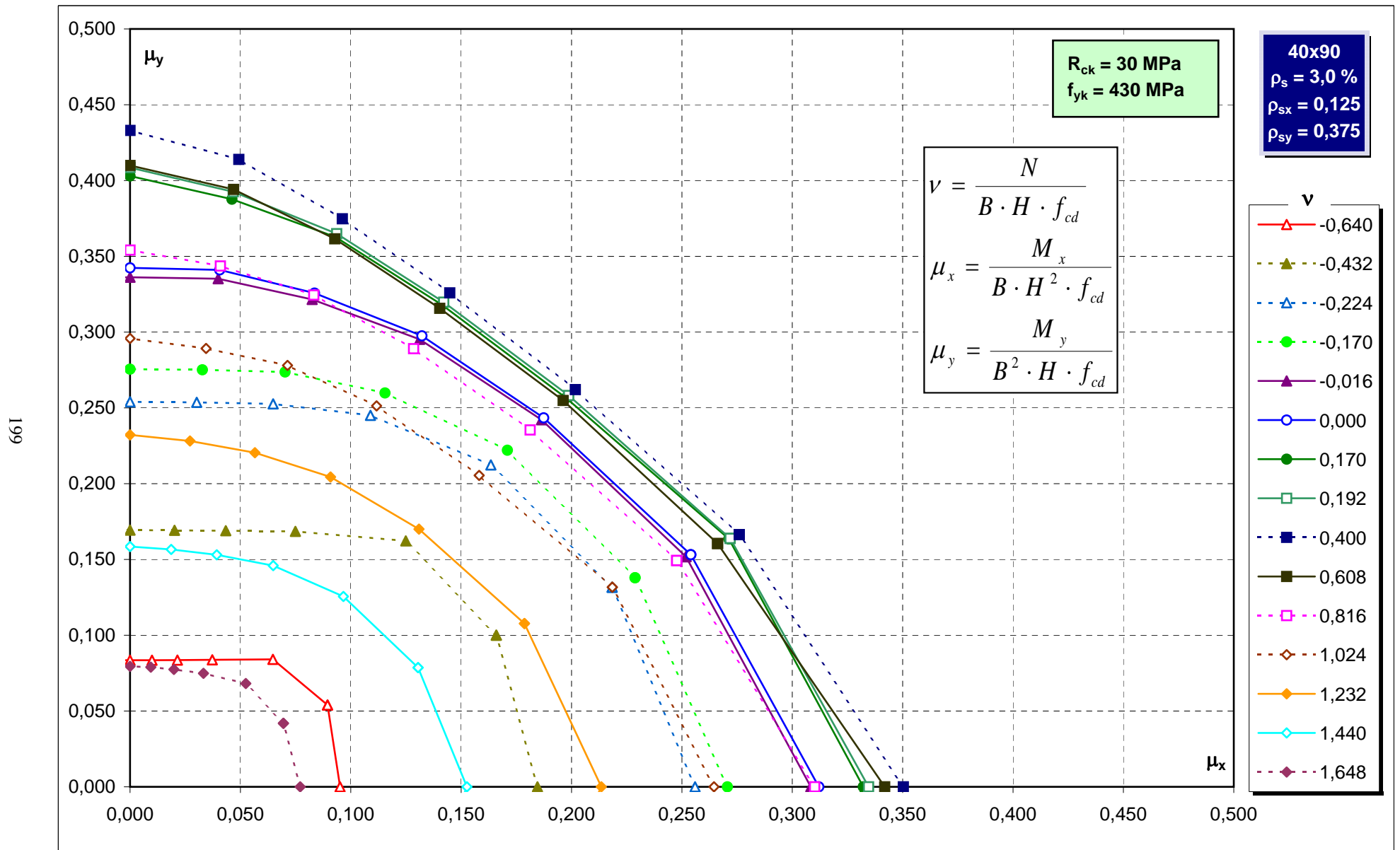
Abachi di verifica



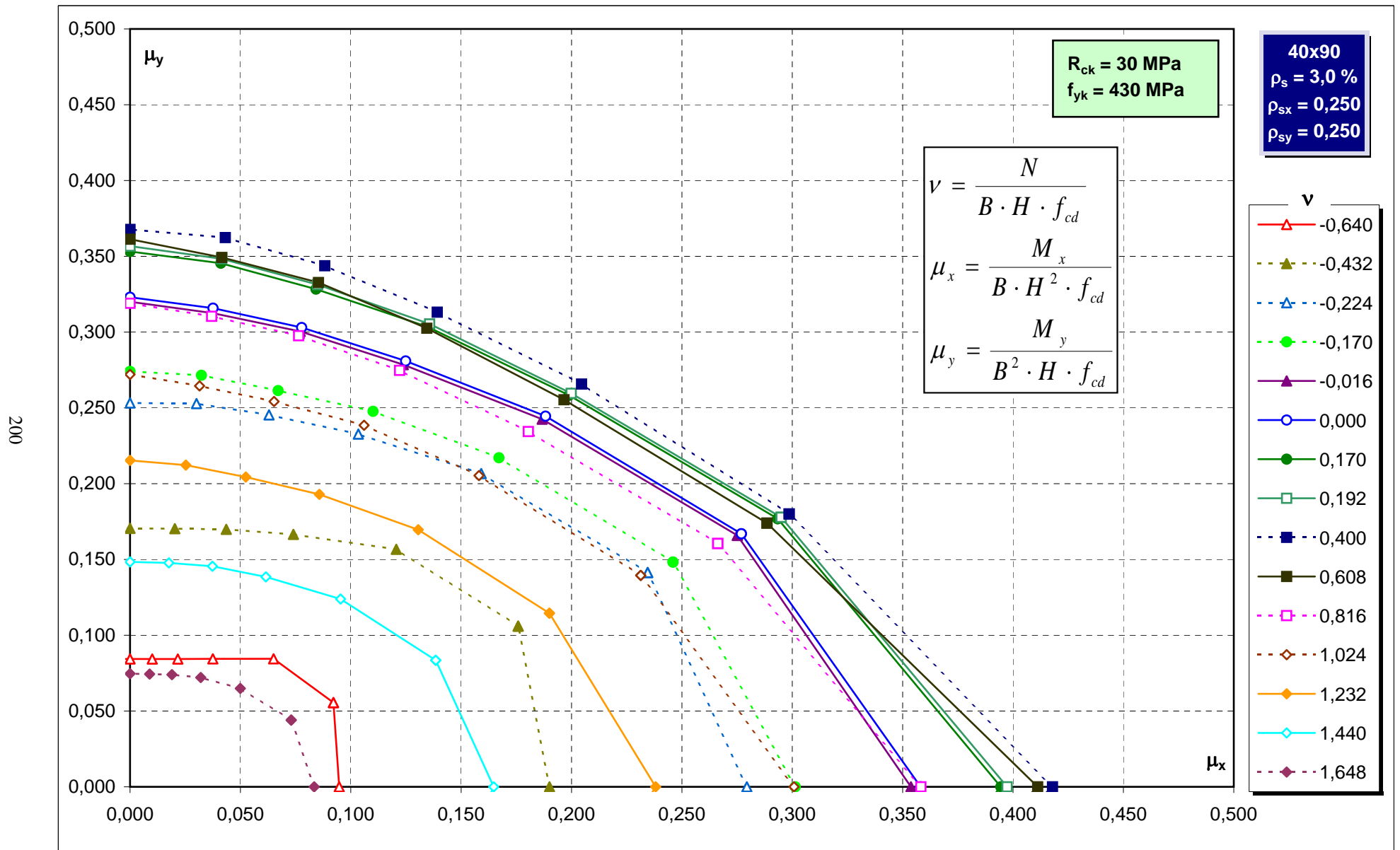
Abachi di verifica



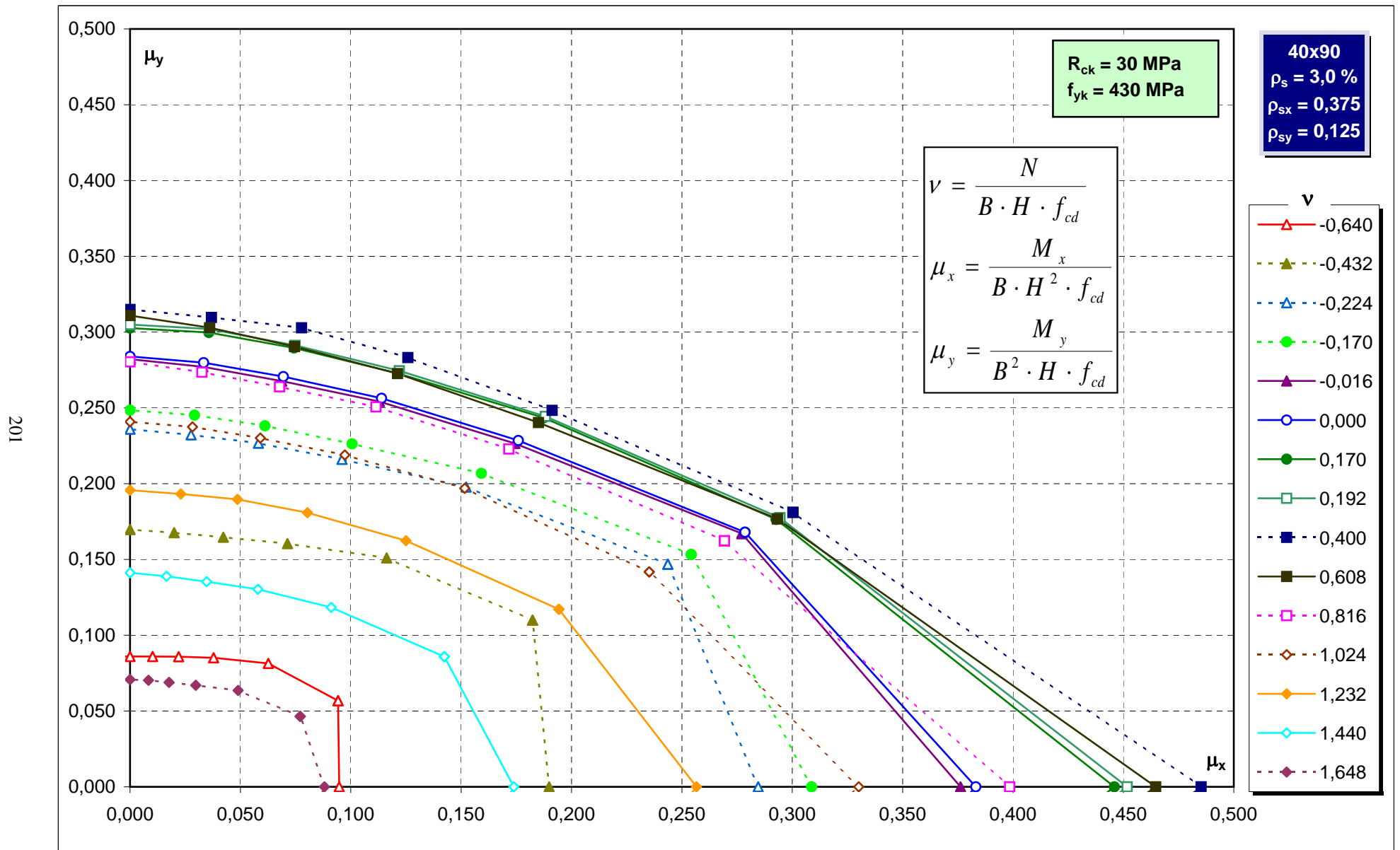
Abachi di verifica



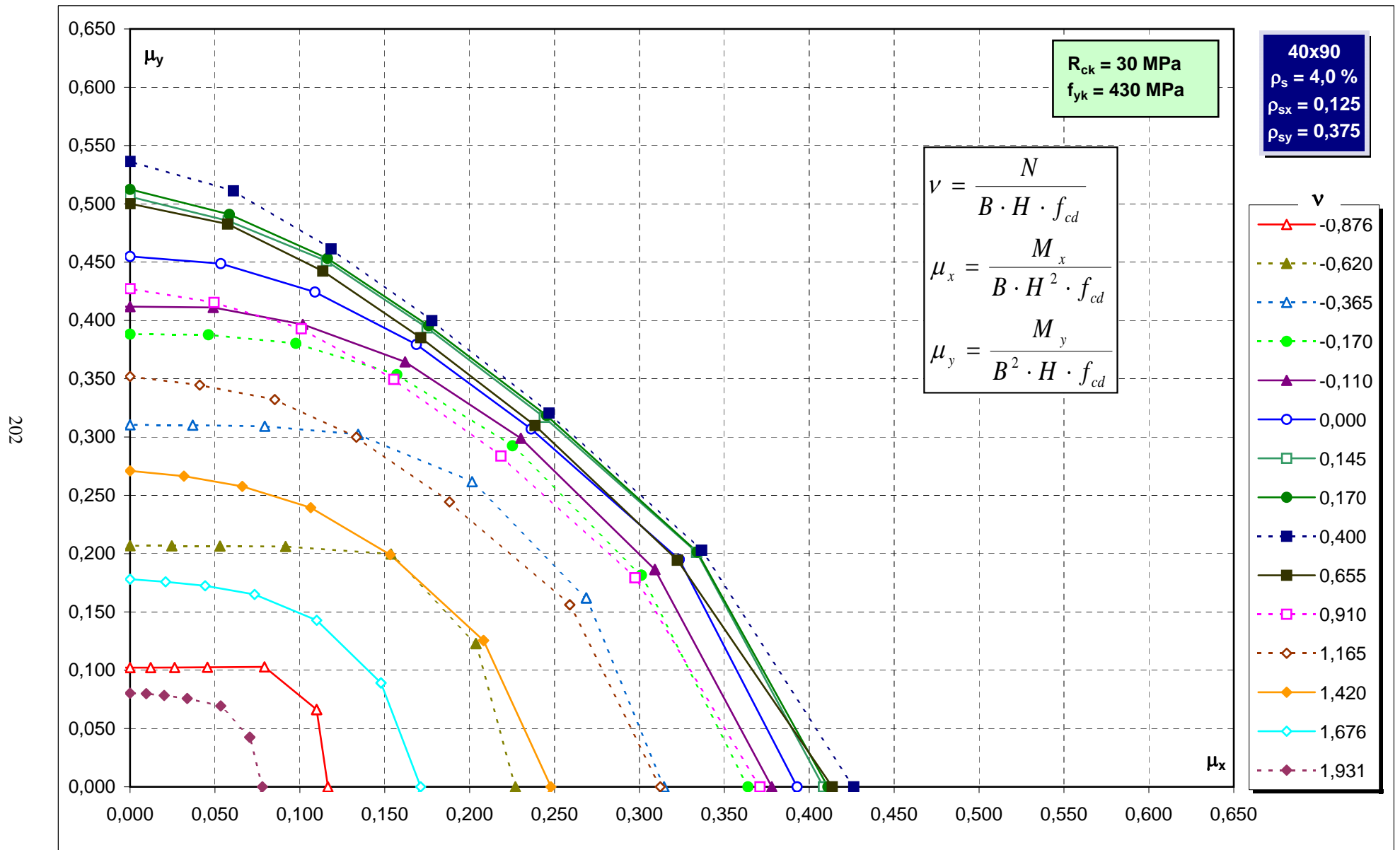
Abachi di verifica



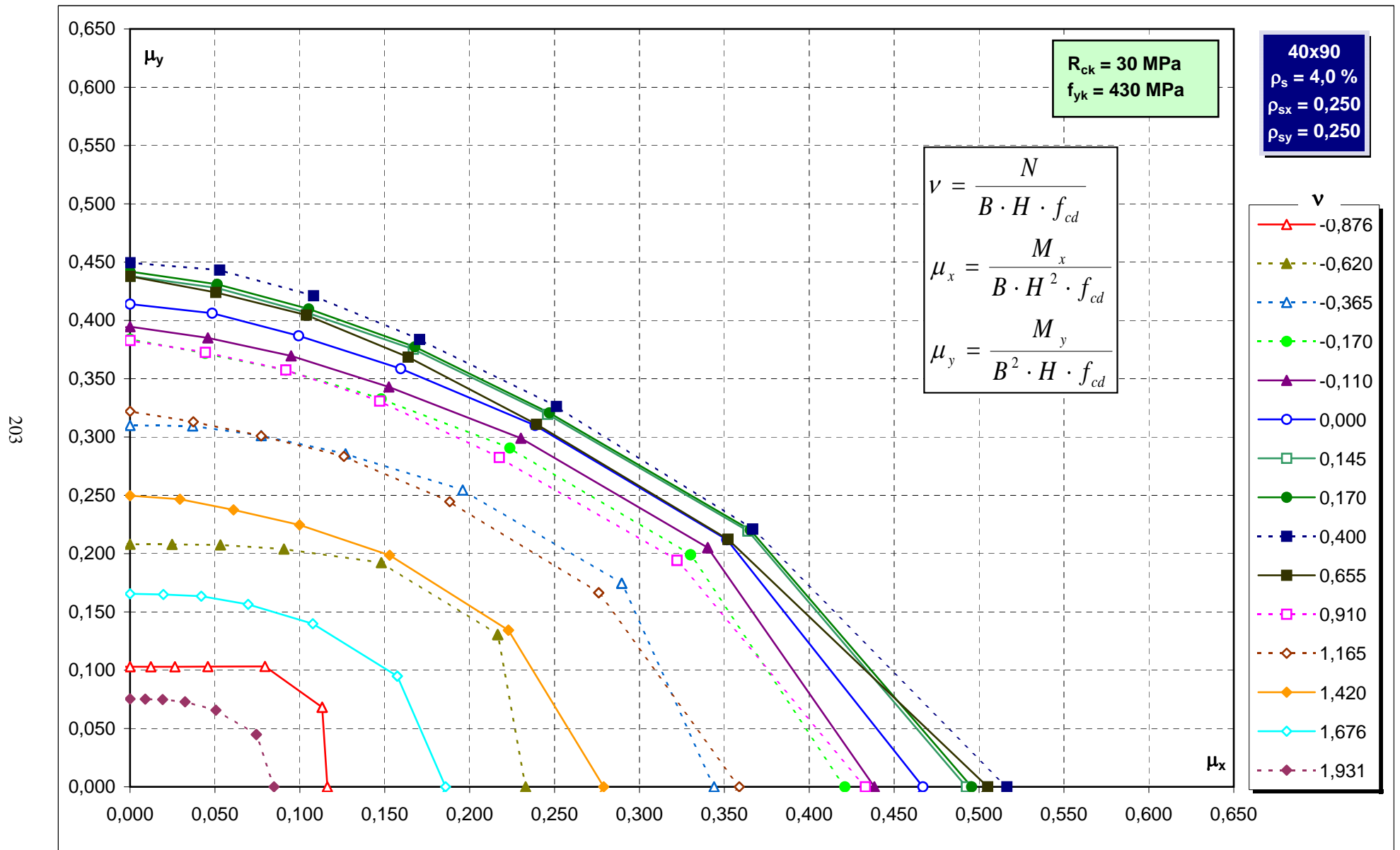
Abachi di verifica



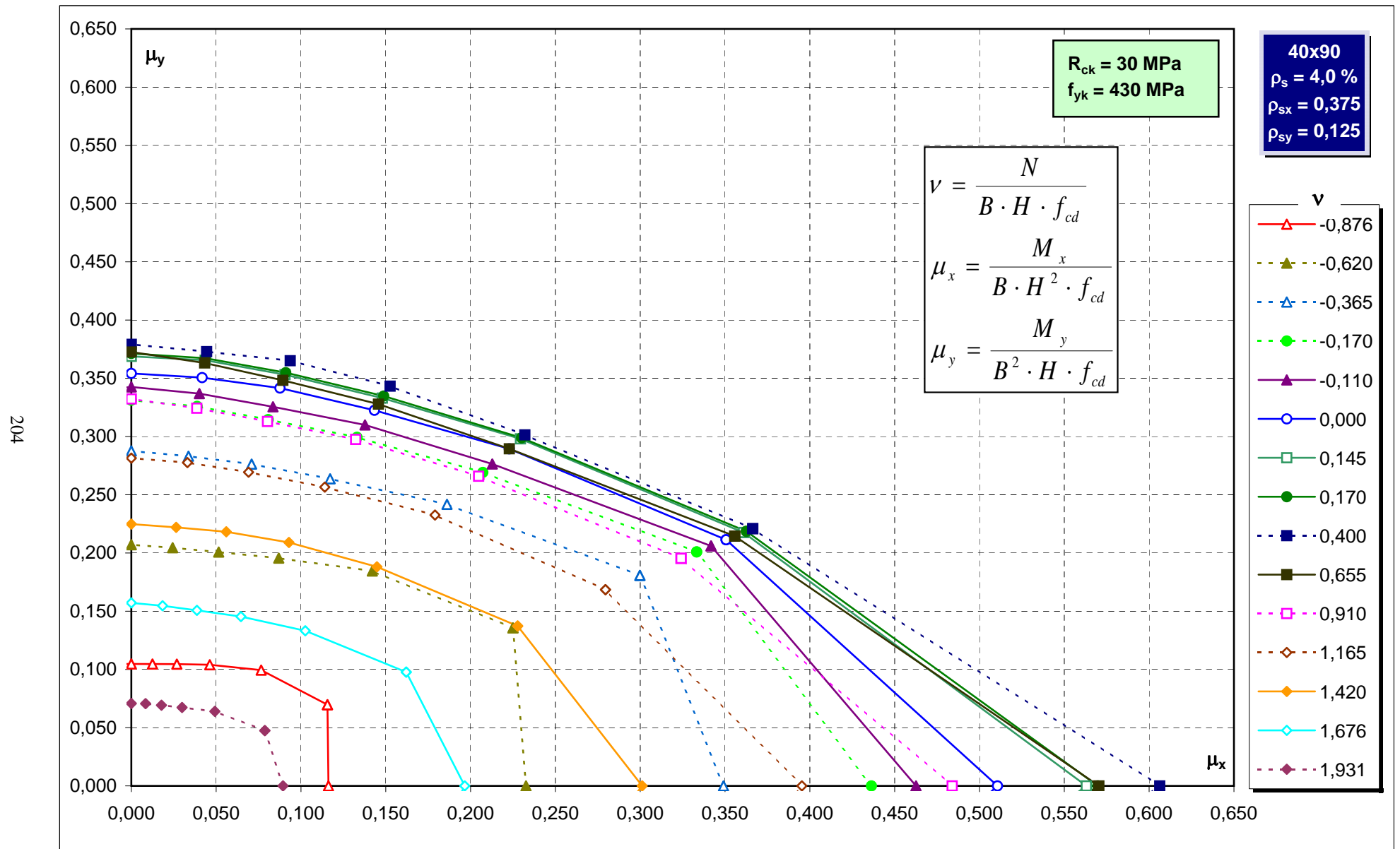
Abachi di verifica



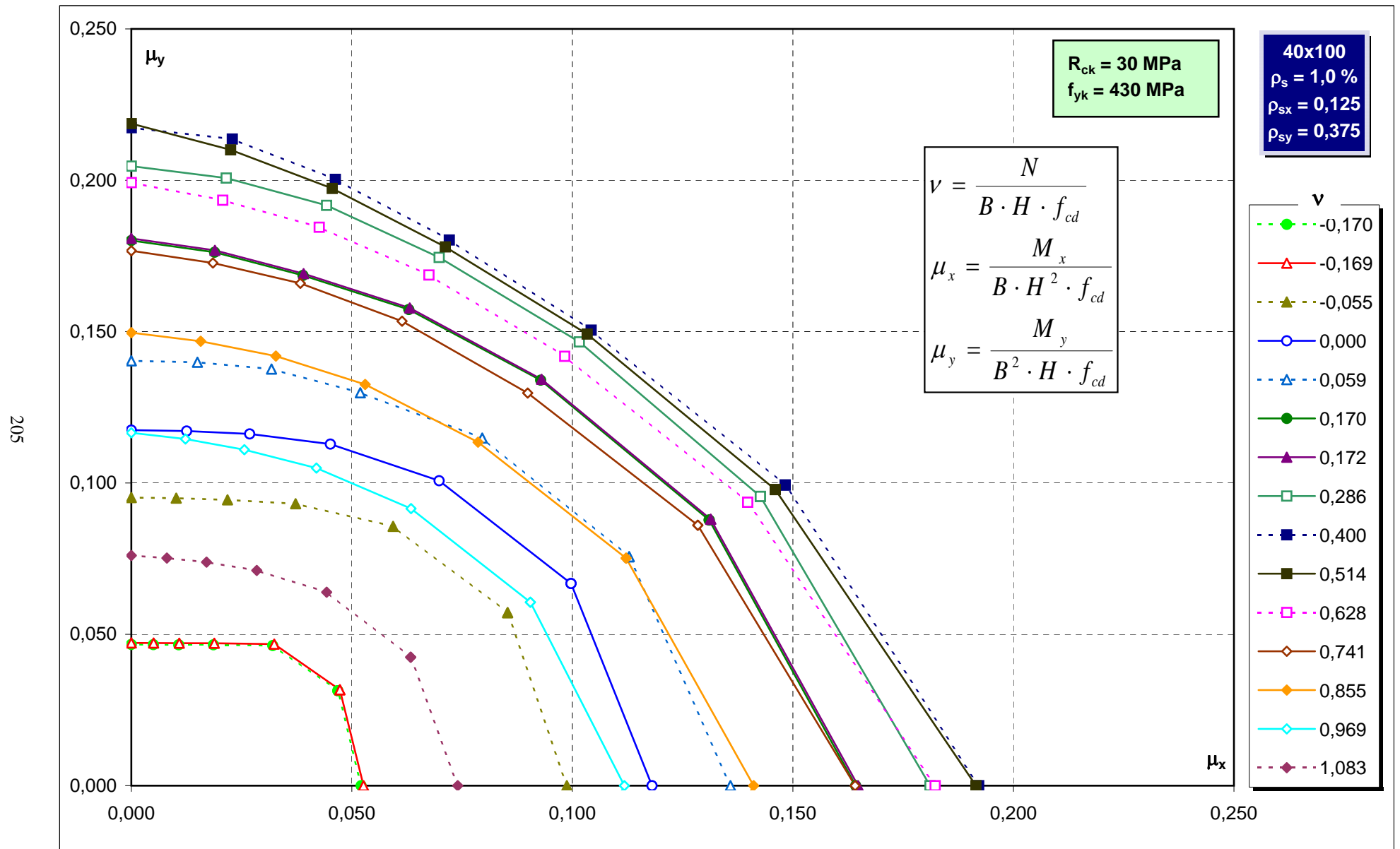
Abachi di verifica



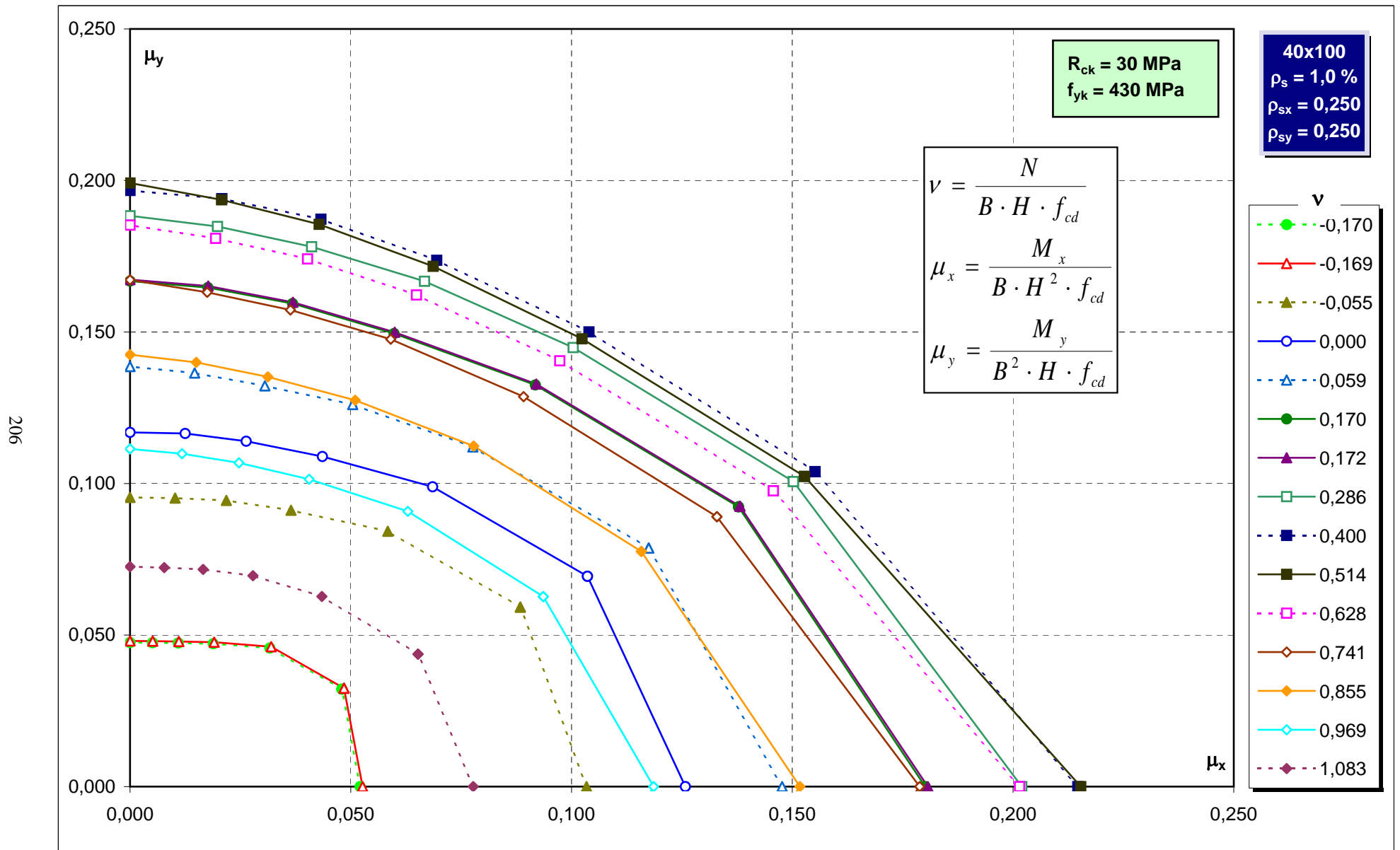
Abachi di verifica



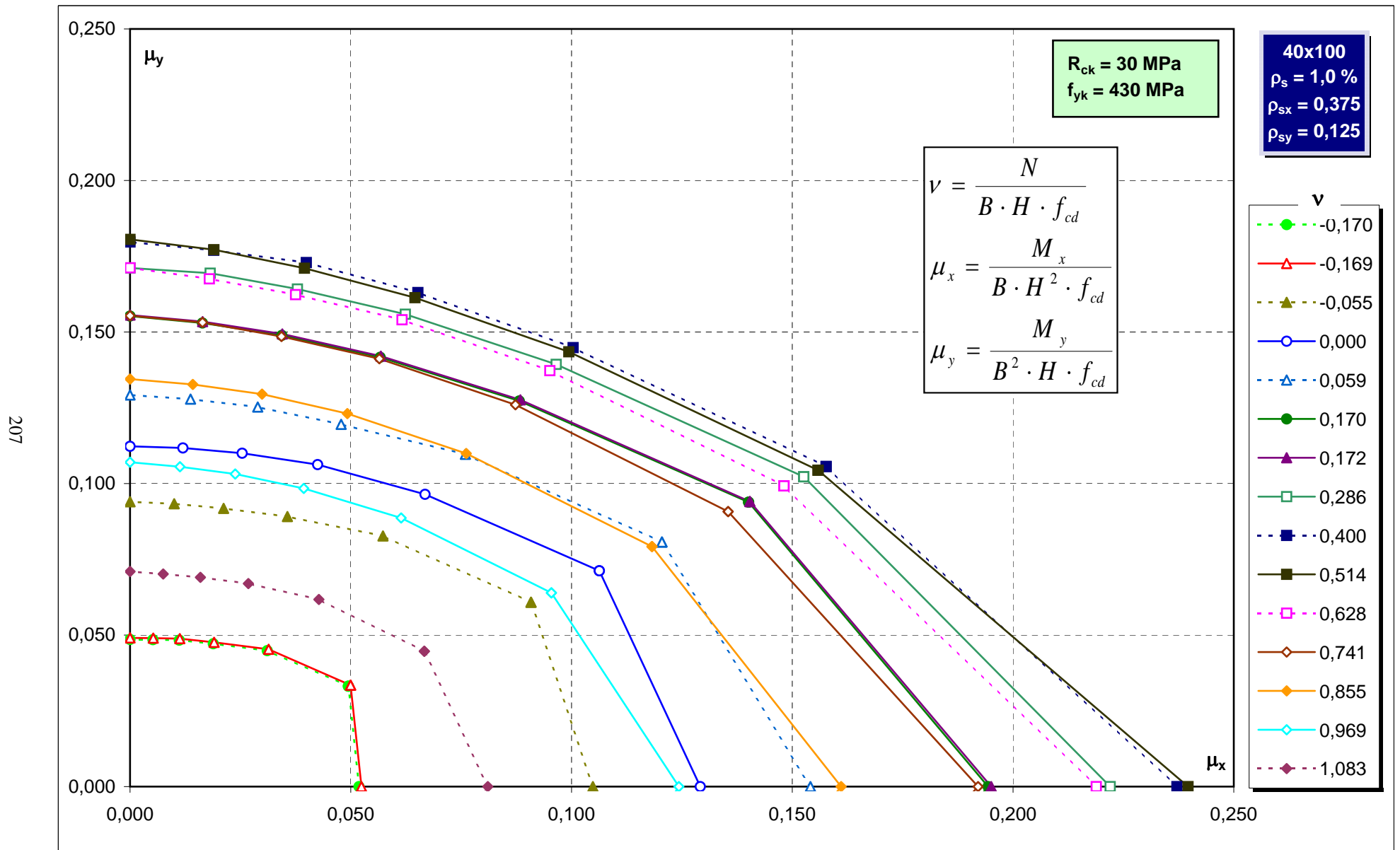
Abachi di verifica



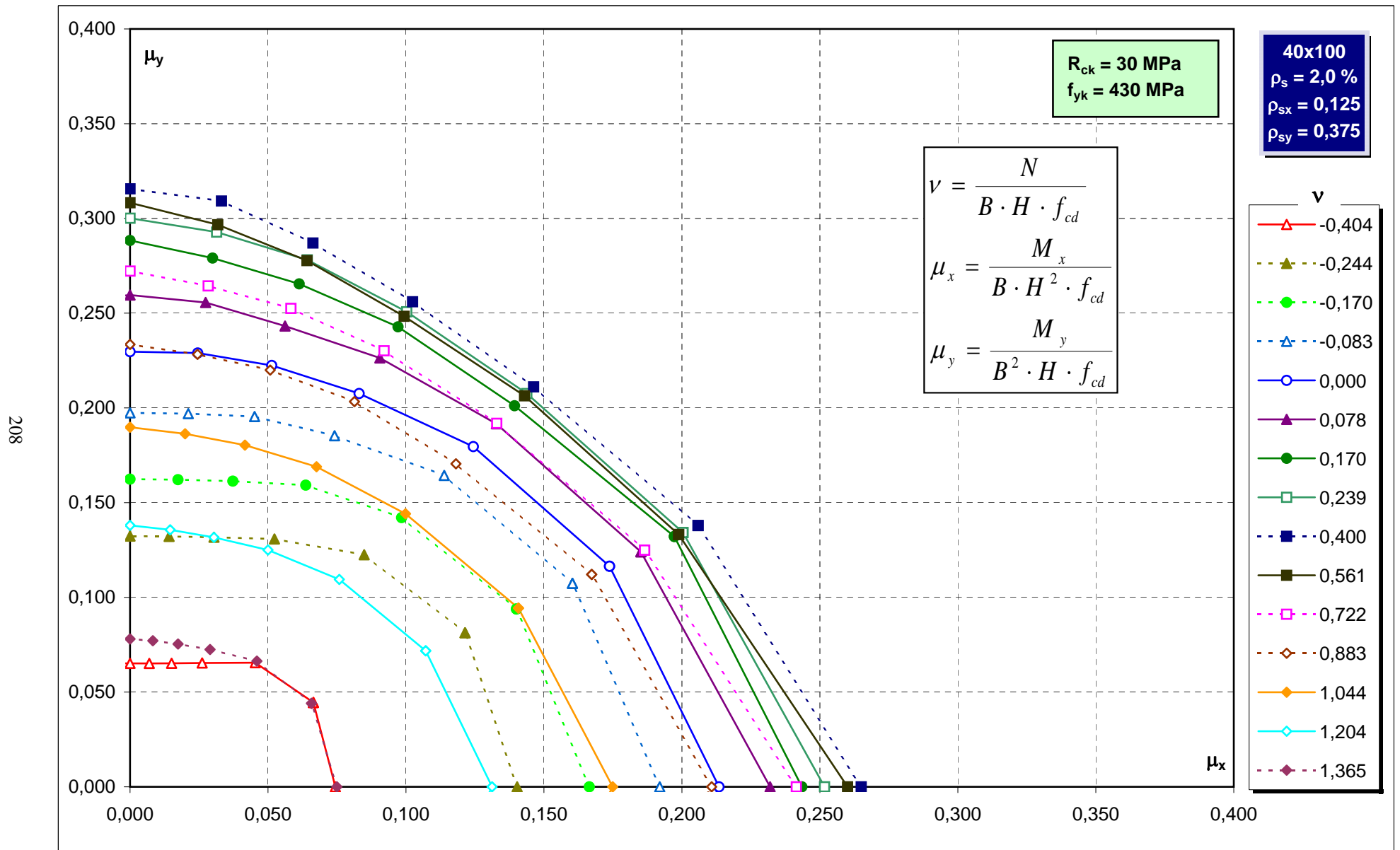
Abachi di verifica



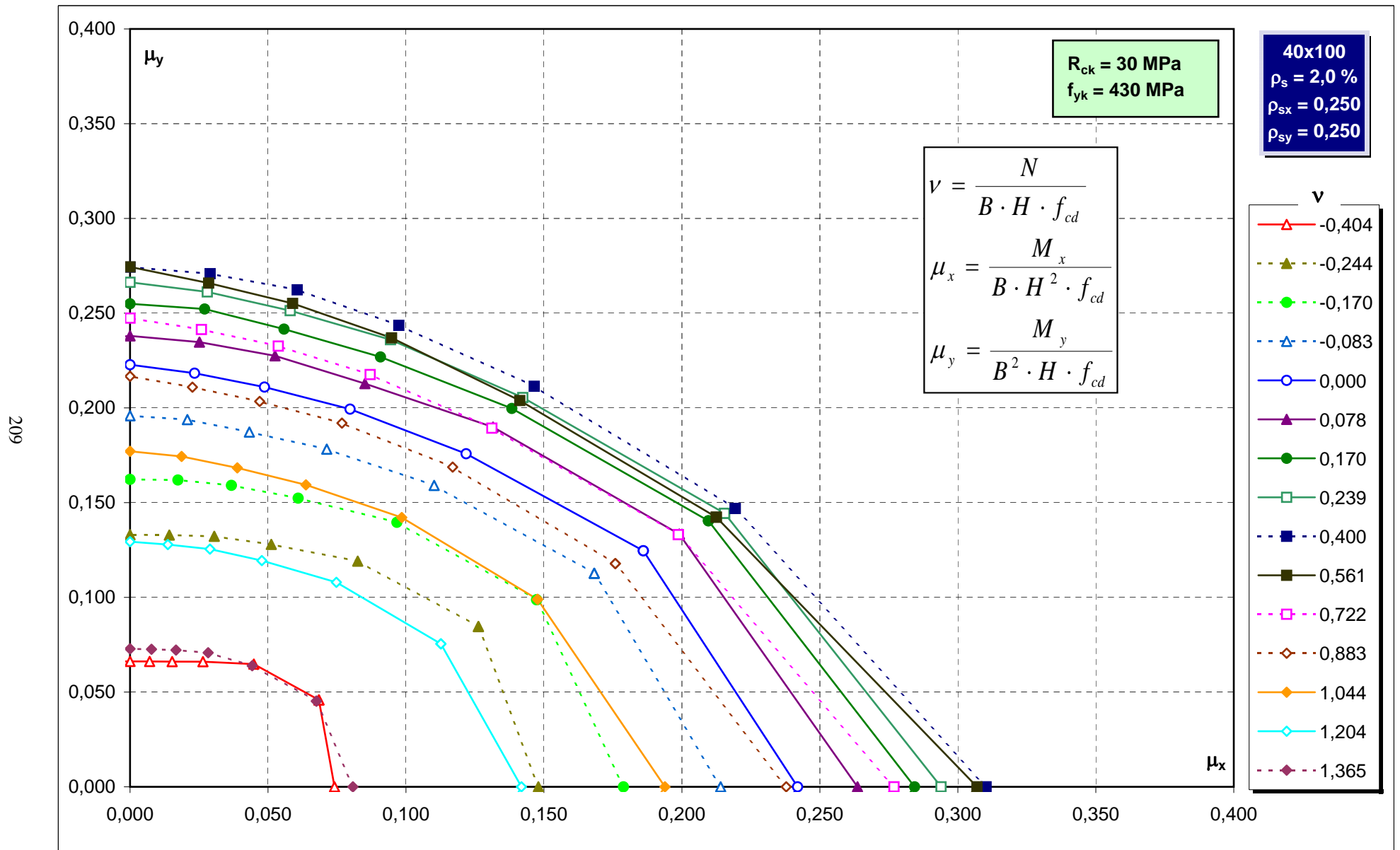
Abachi di verifica



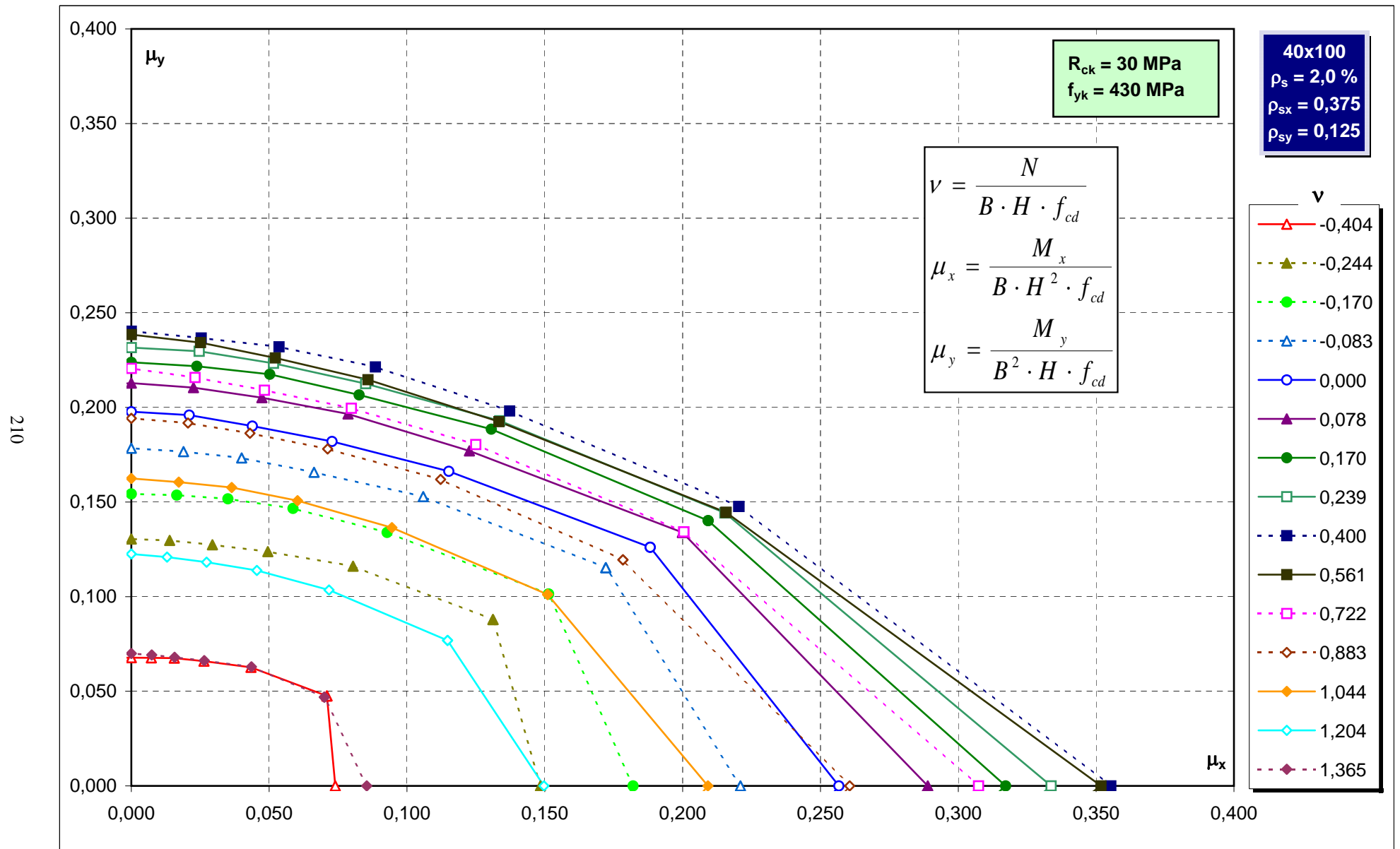
Abachi di verifica



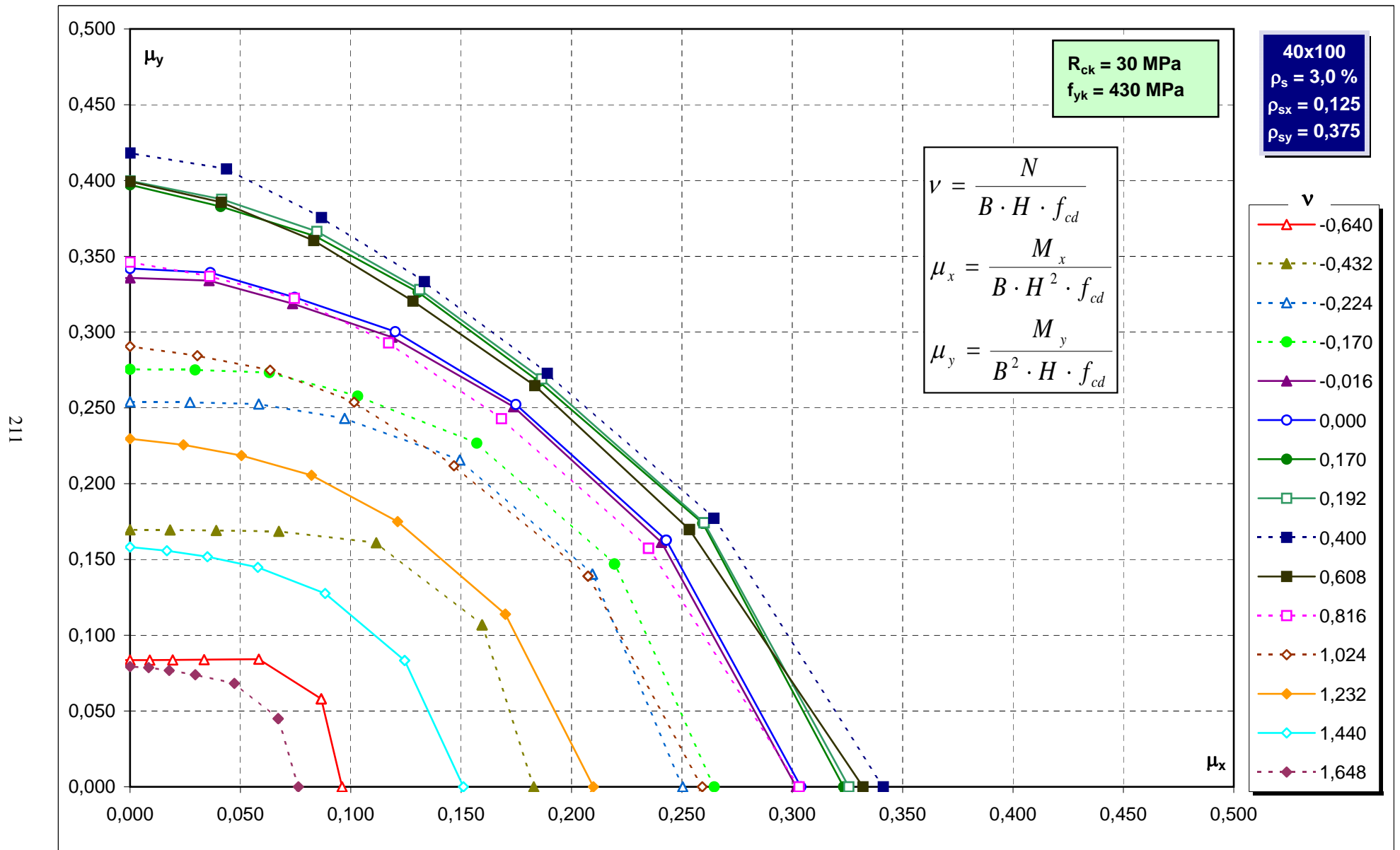
Abachi di verifica



Abachi di verifica

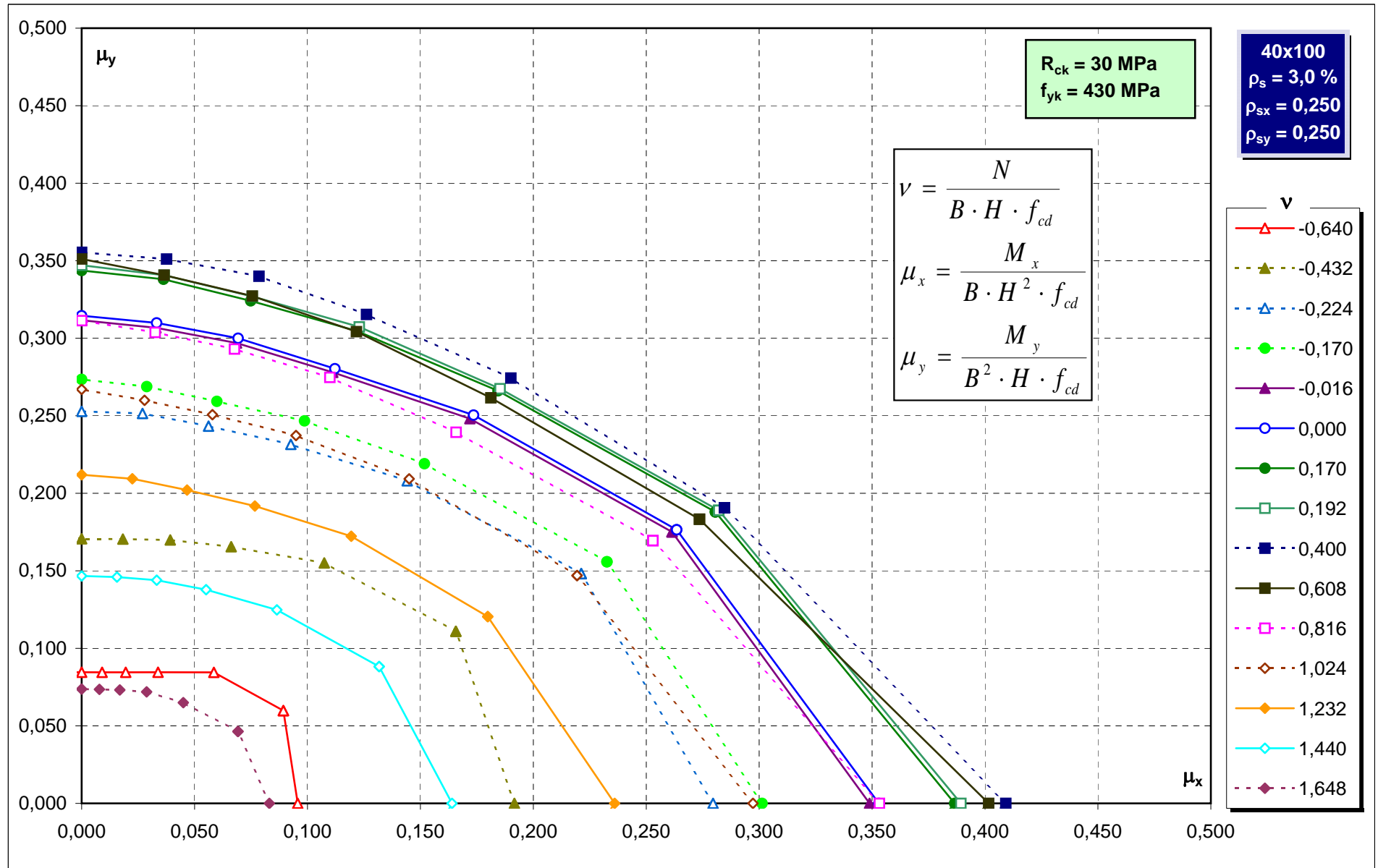


Abachi di verifica

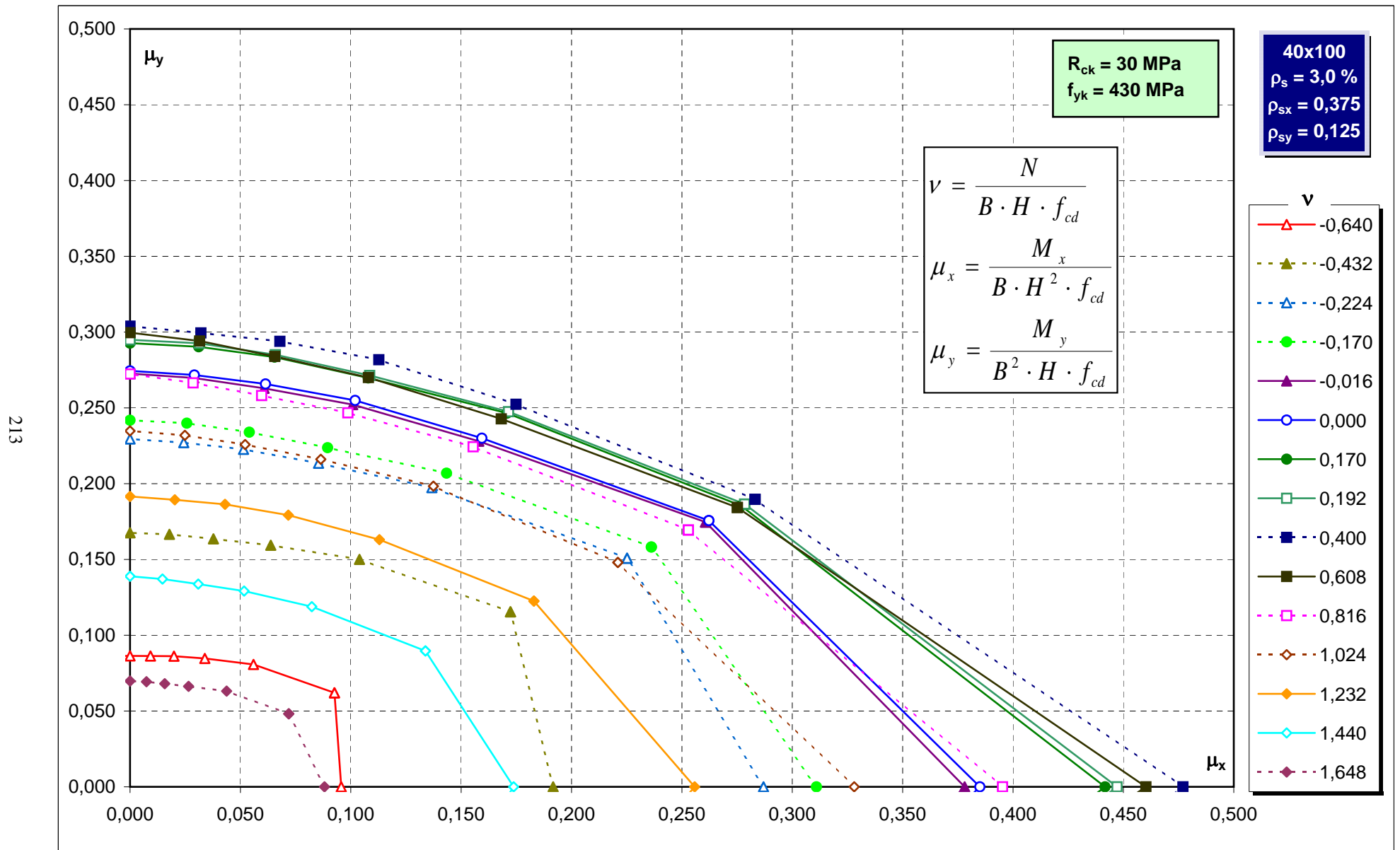


Abachi di verifica

212

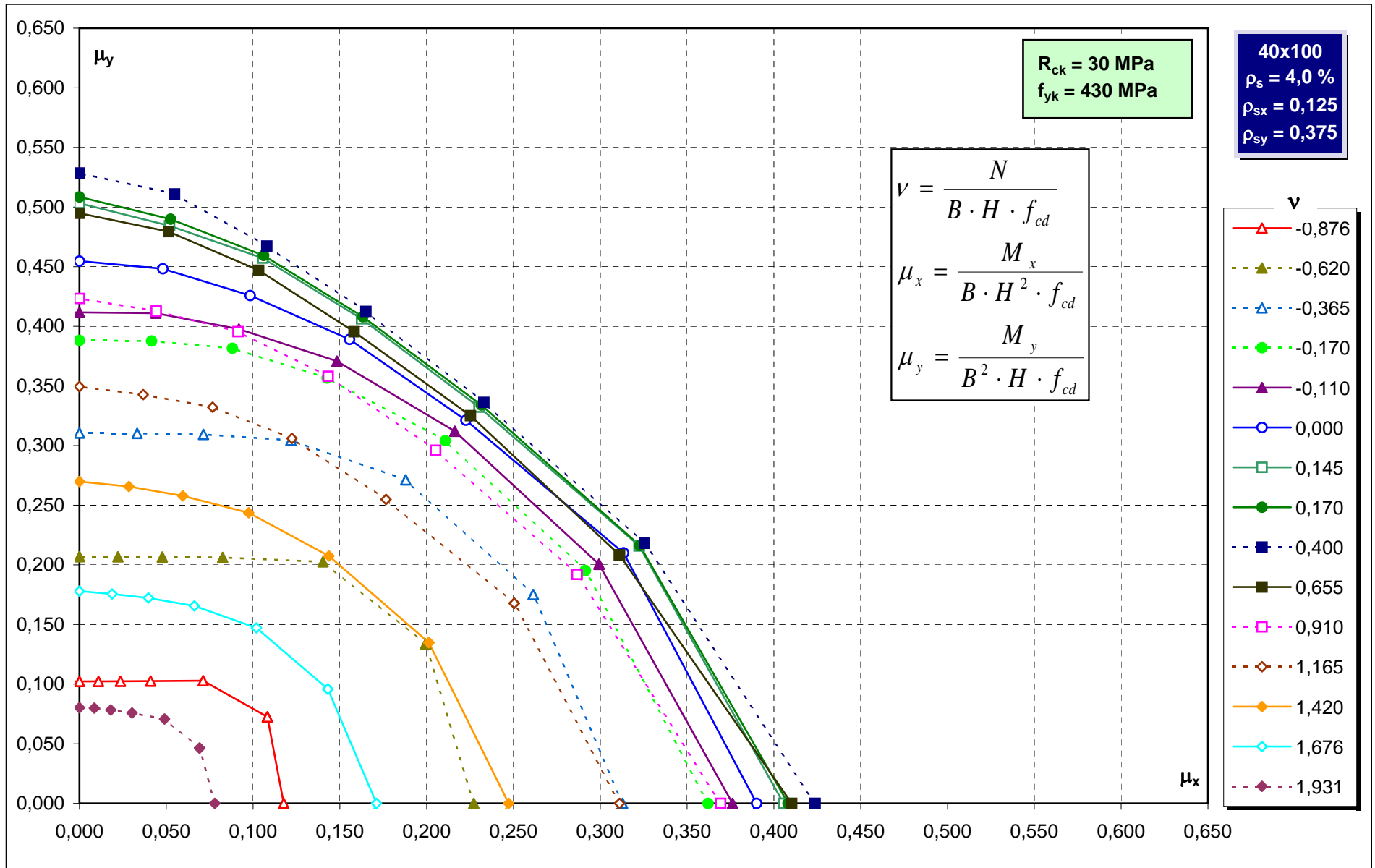


Abachi di verifica

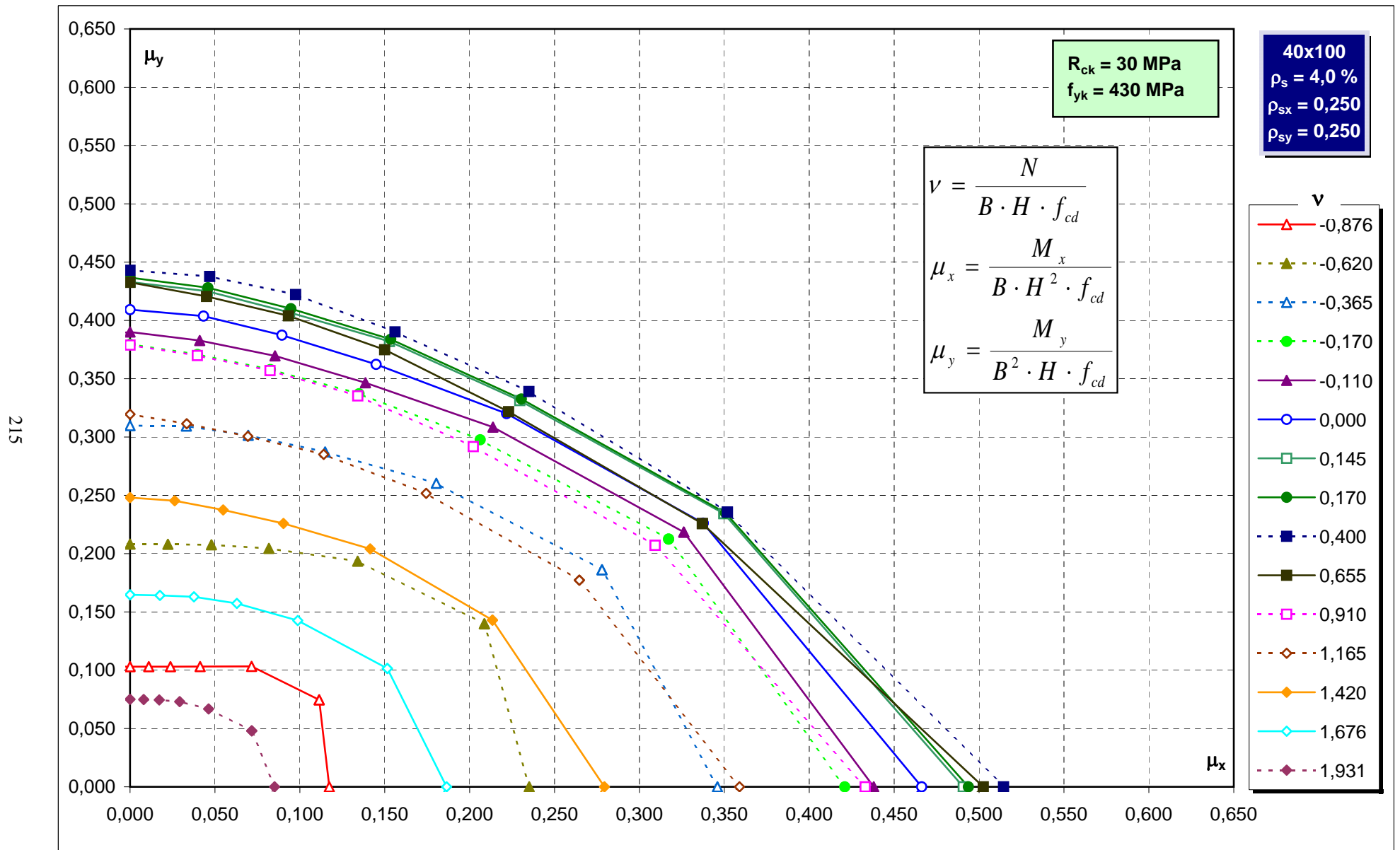


Abachi di verifica

214

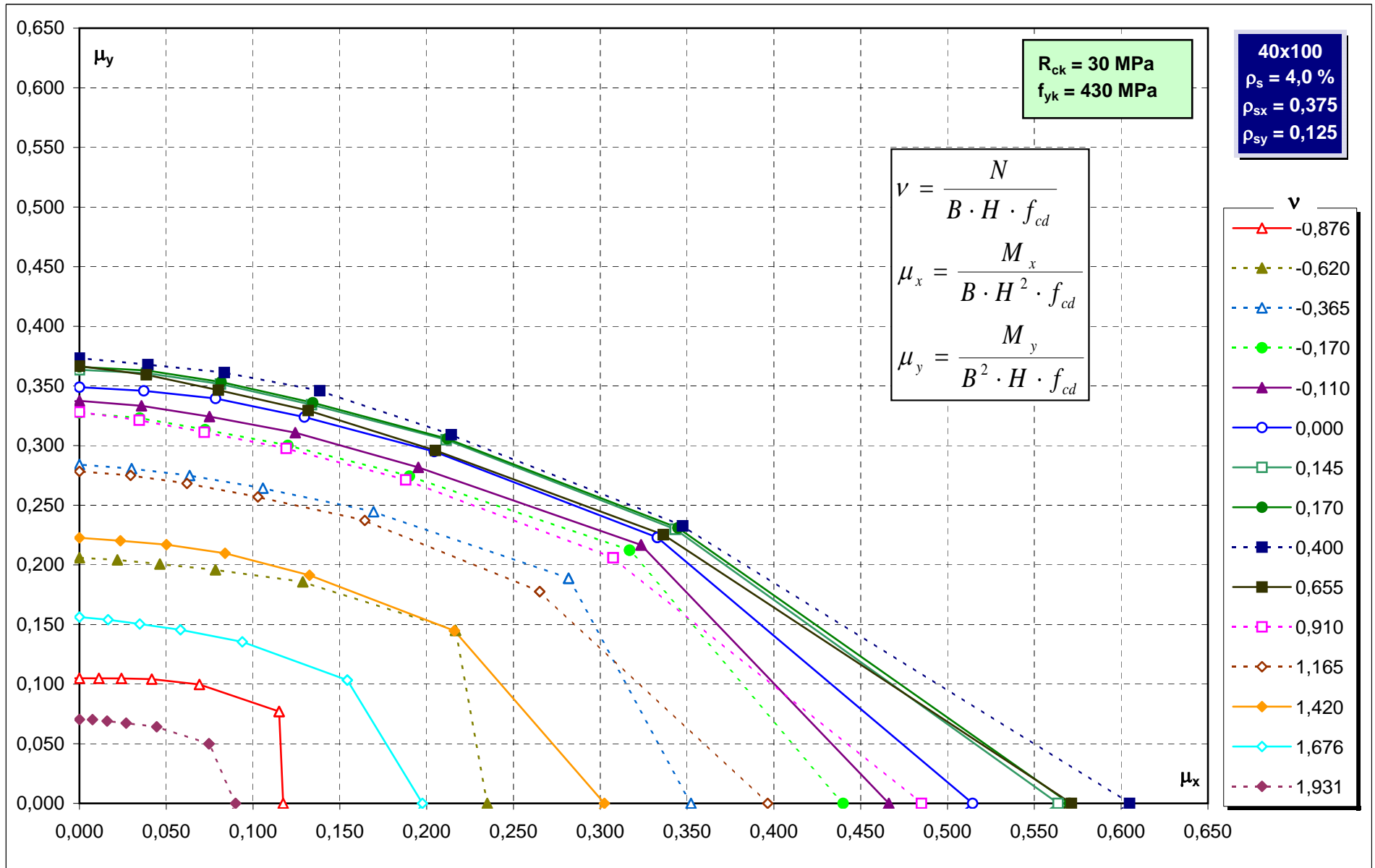


Abachi di verifica

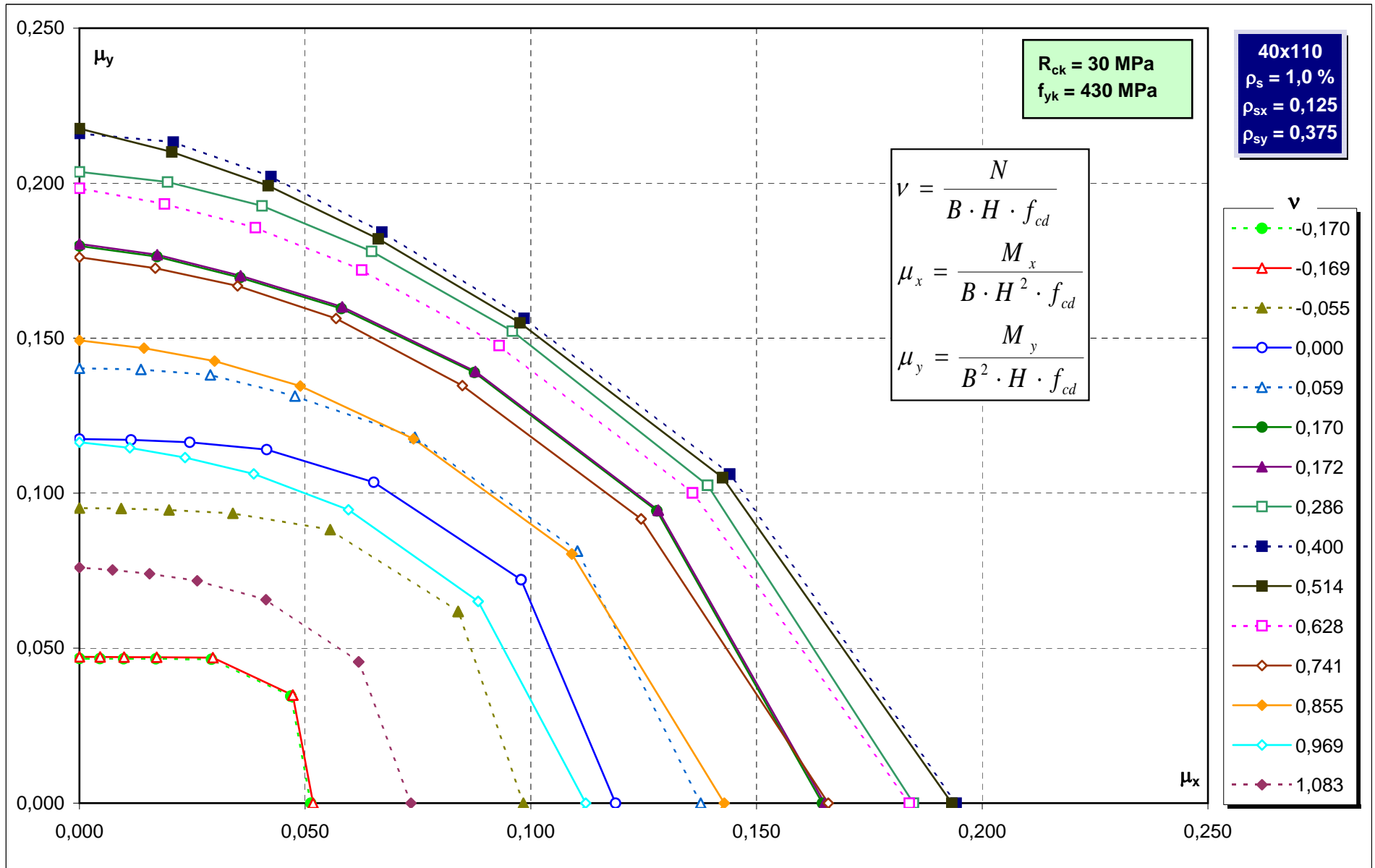


Abachi di verifica

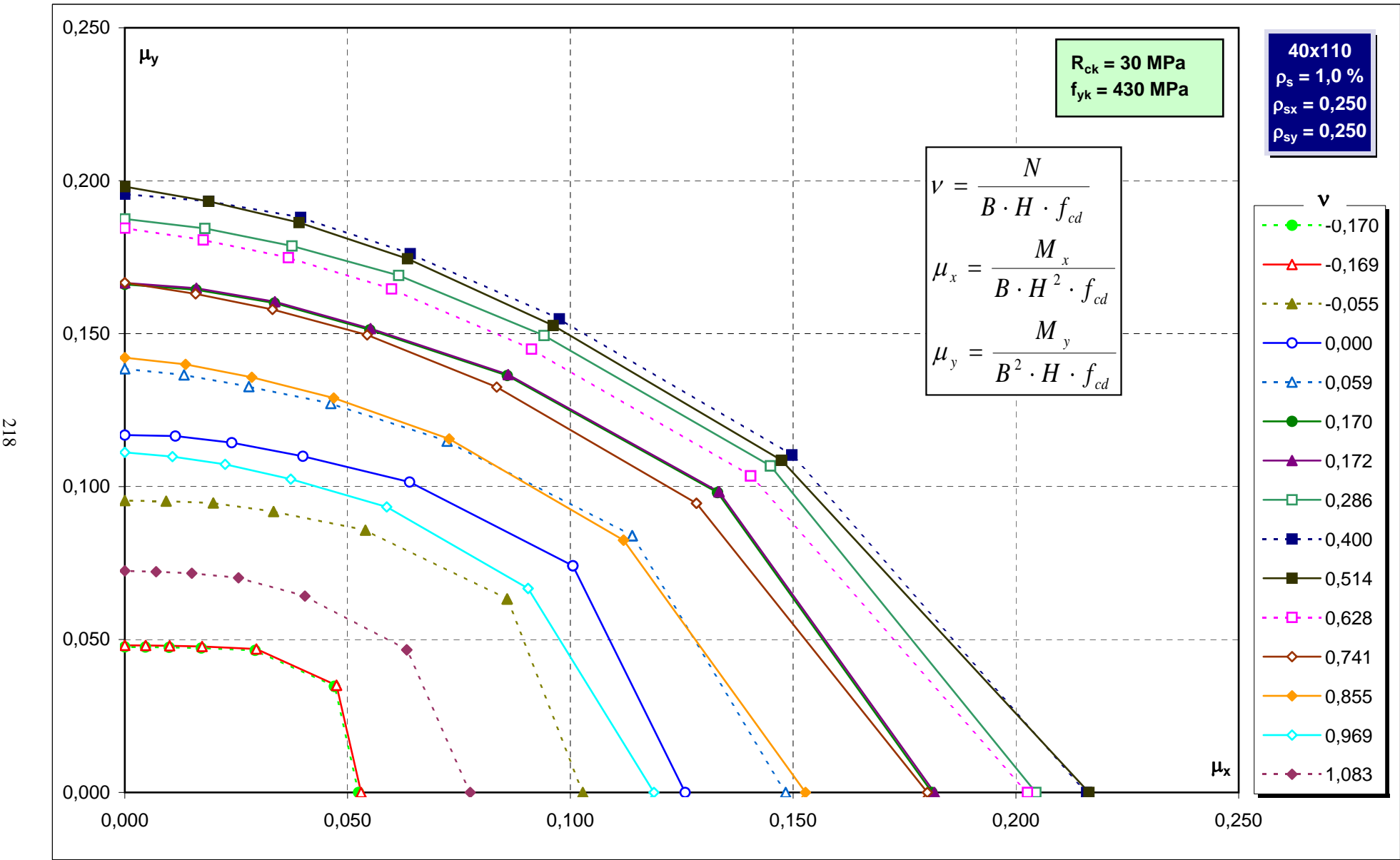
216



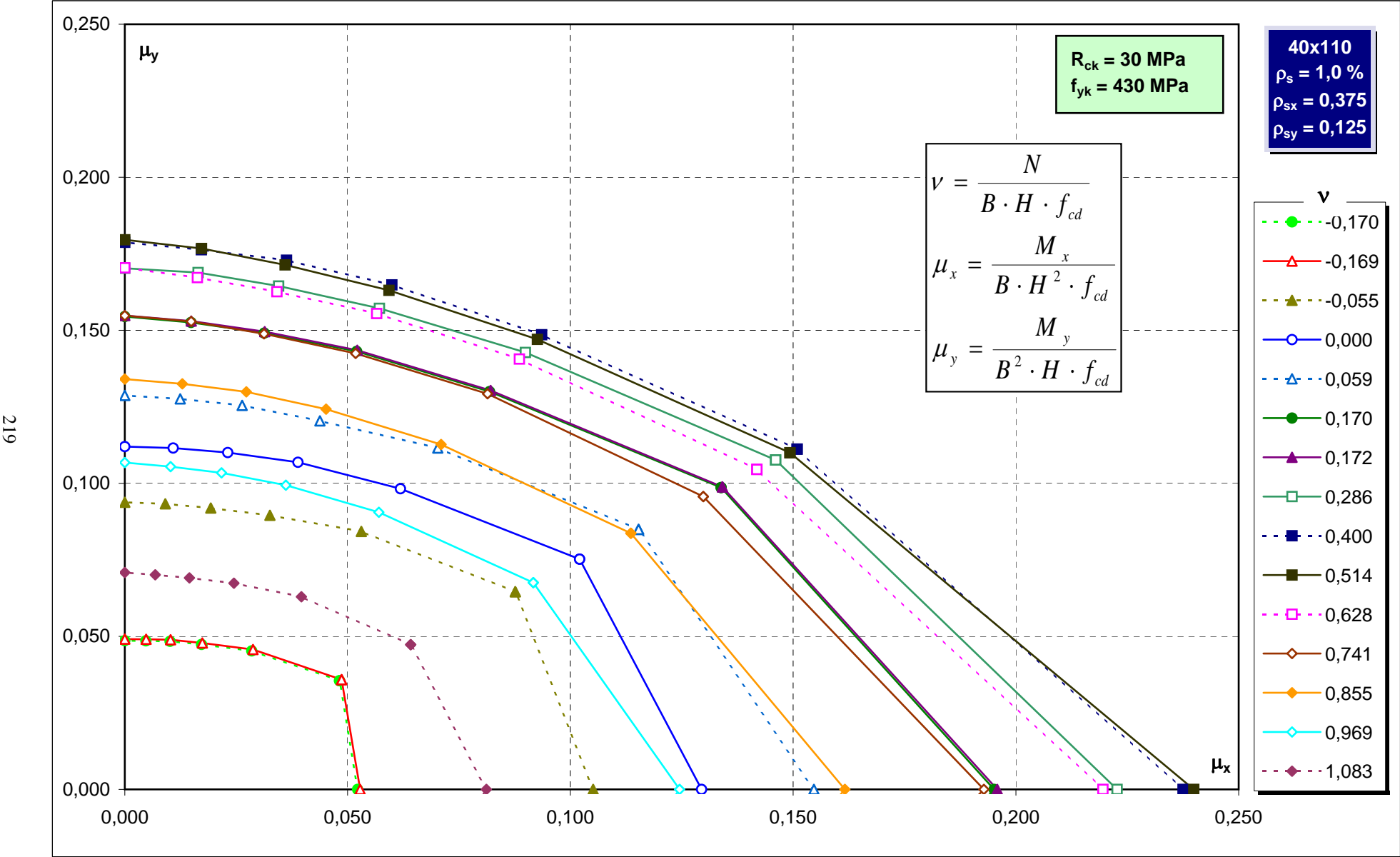
Abachi di verifica



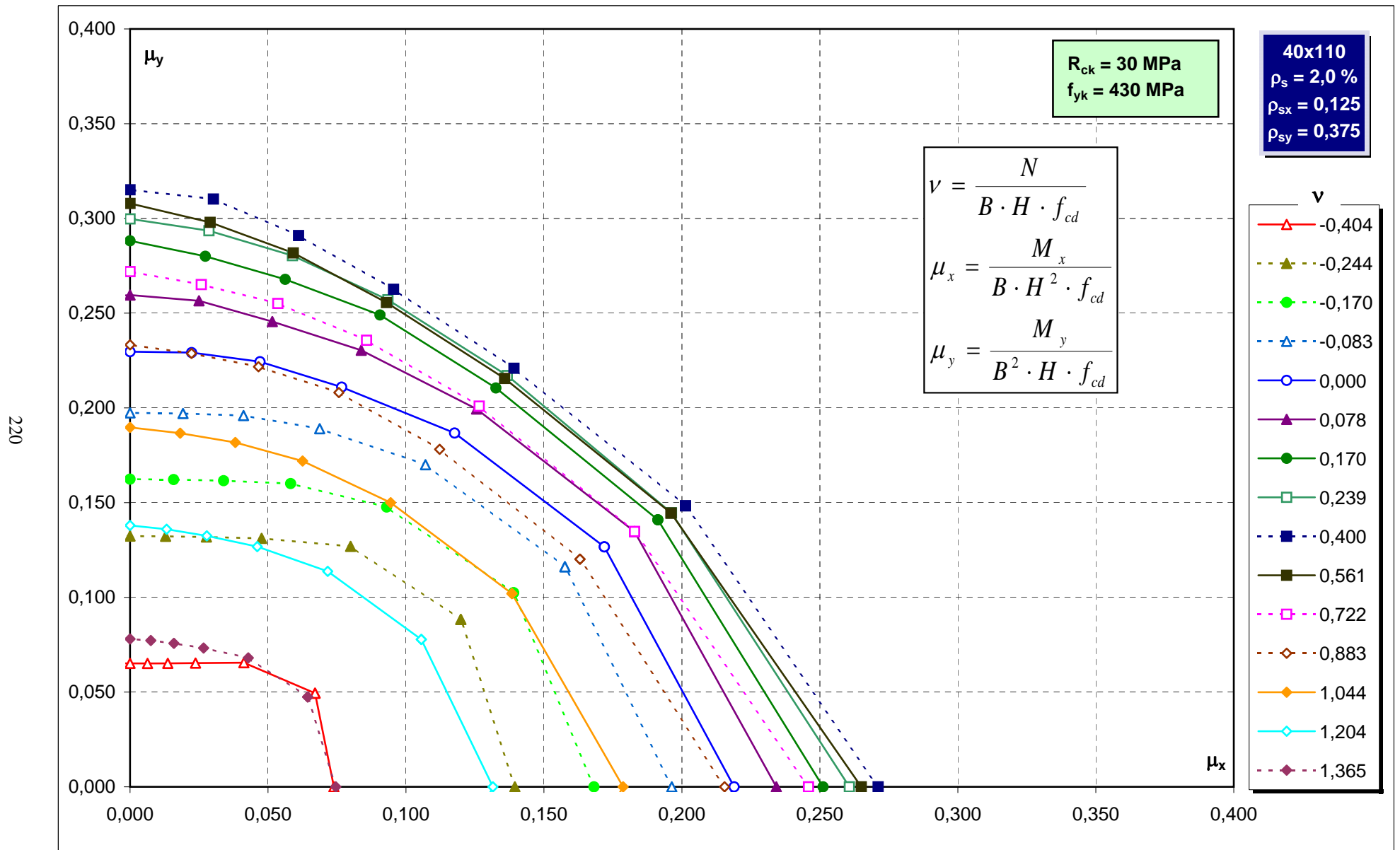
Abachi di verifica



Abachi di verifica

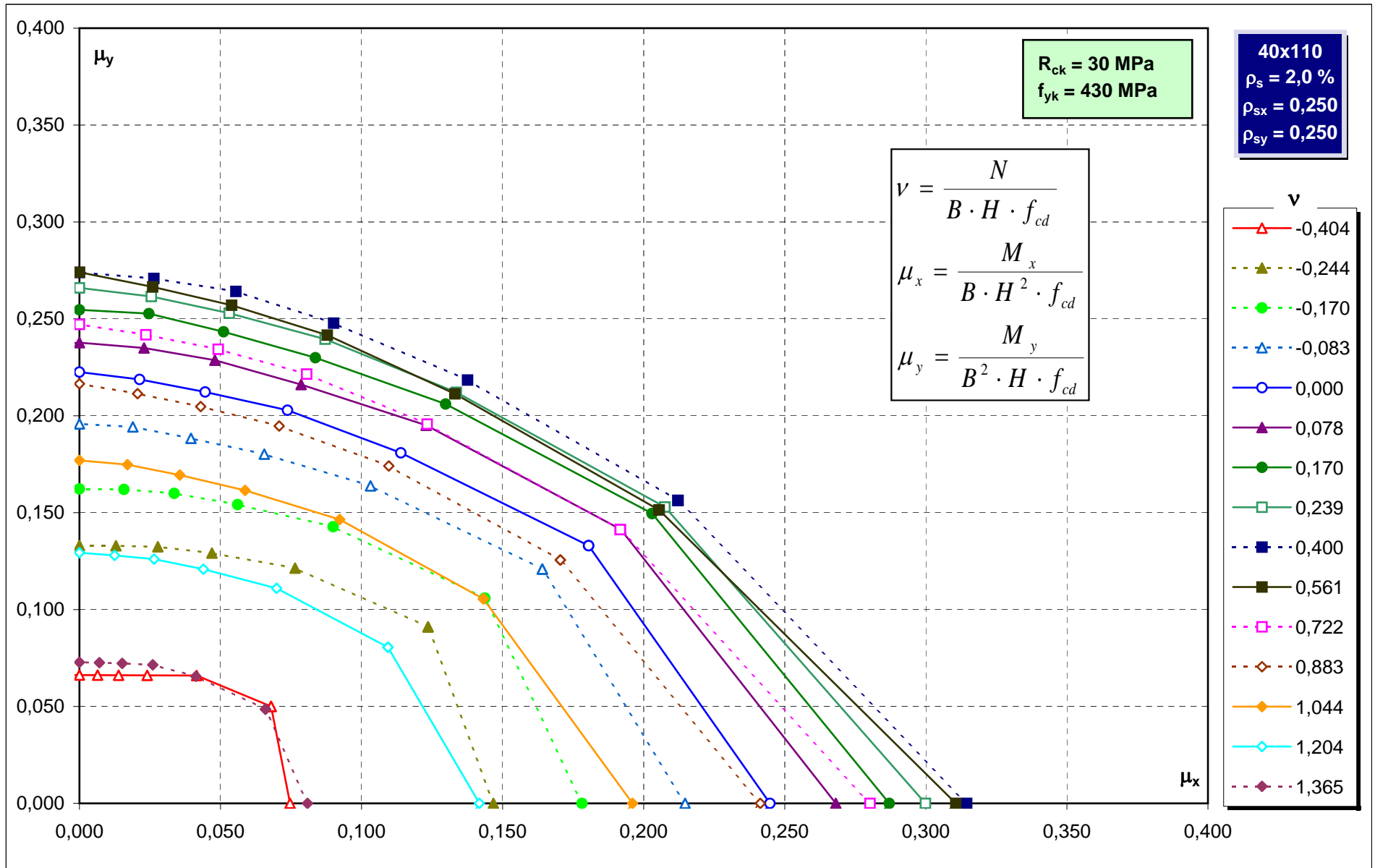


Abachi di verifica

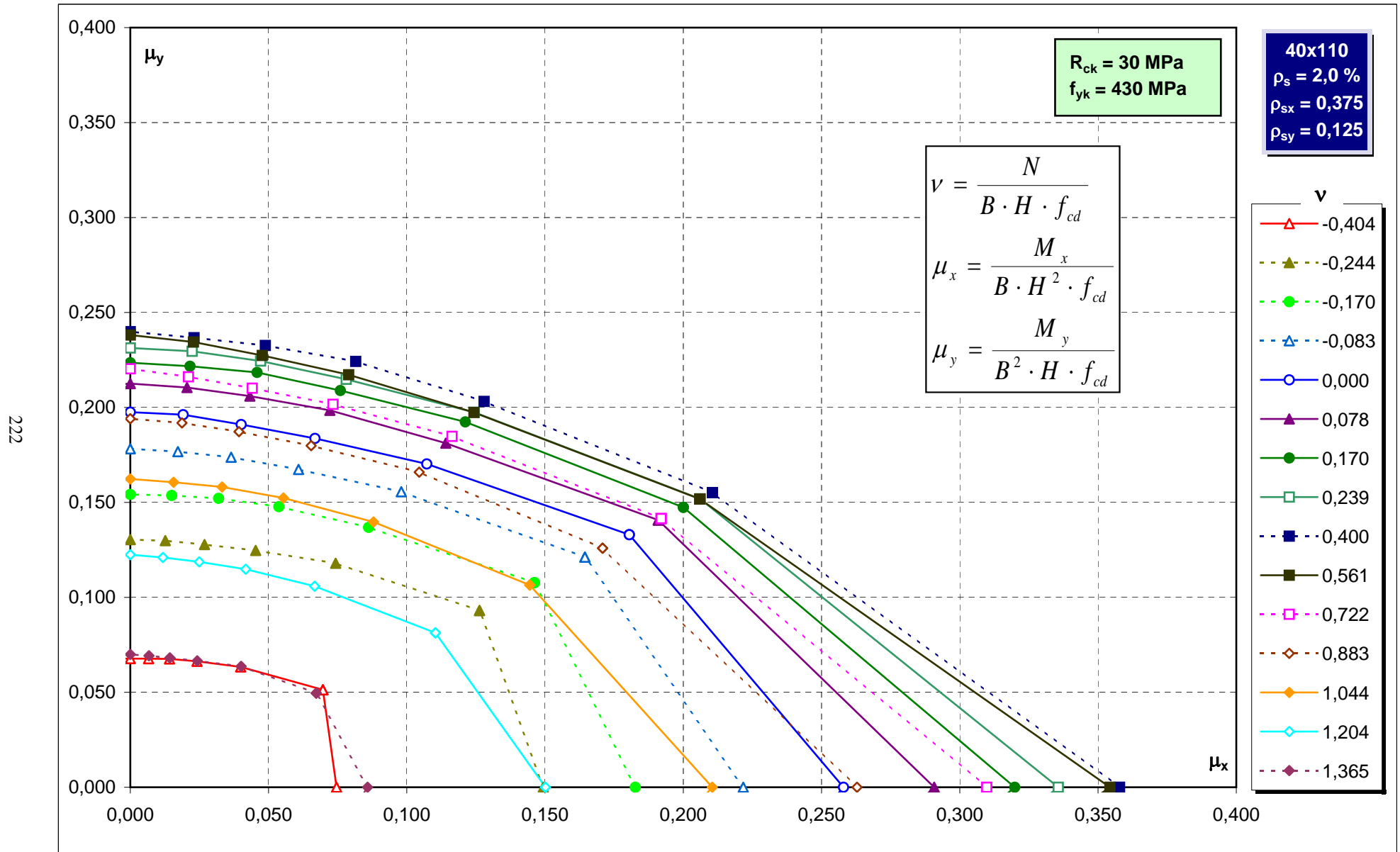


Abachi di verifica

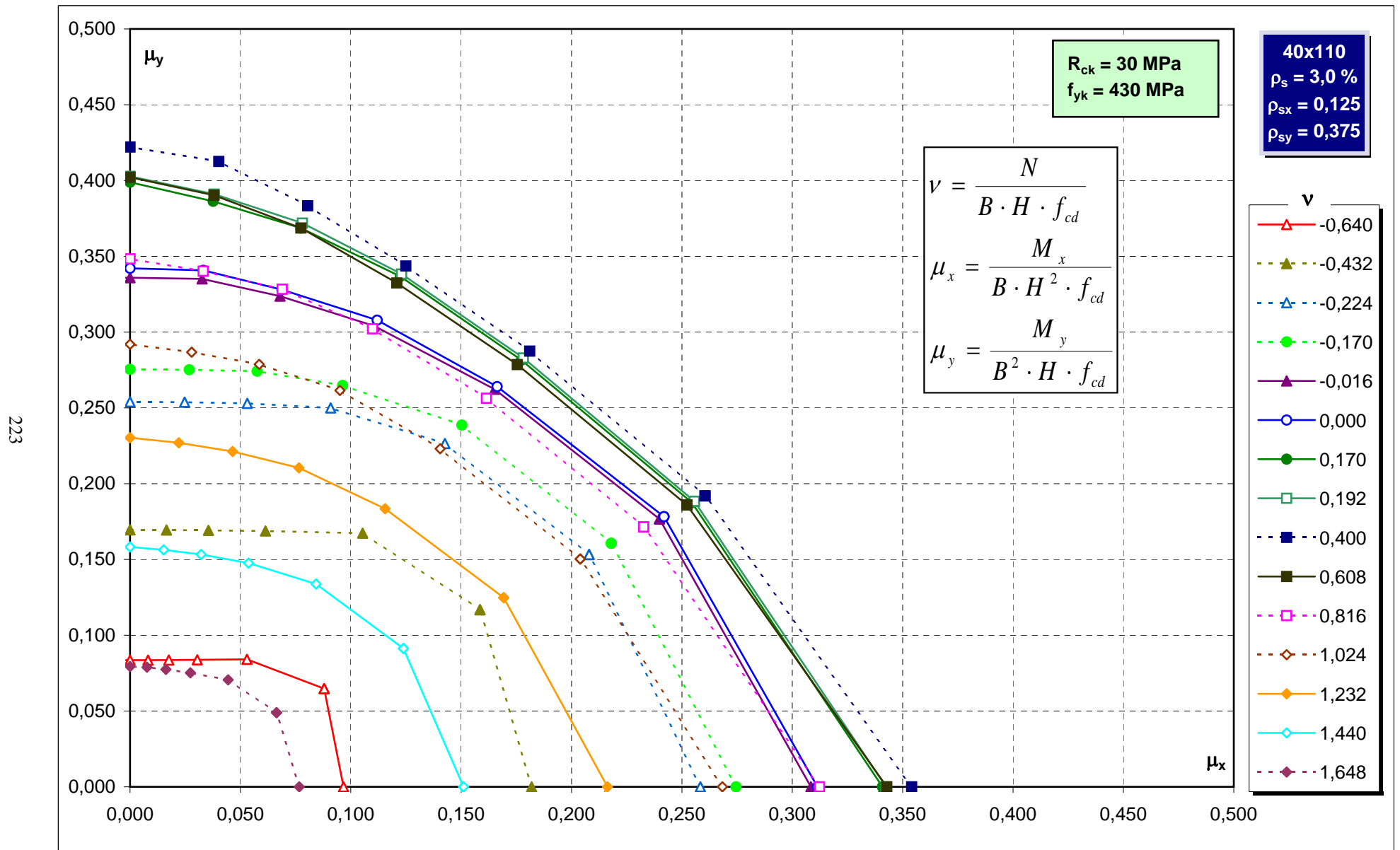
221



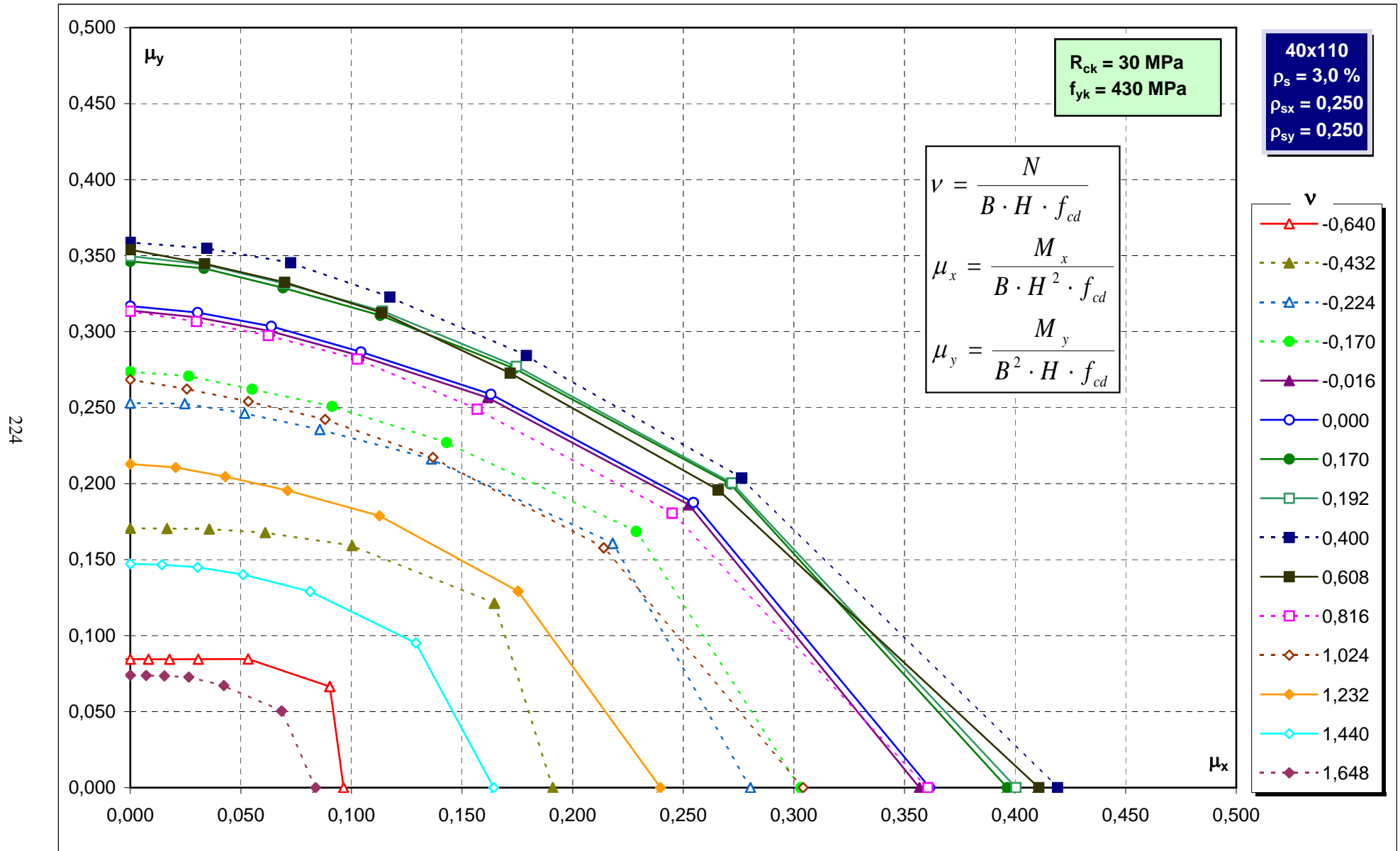
Abachi di verifica



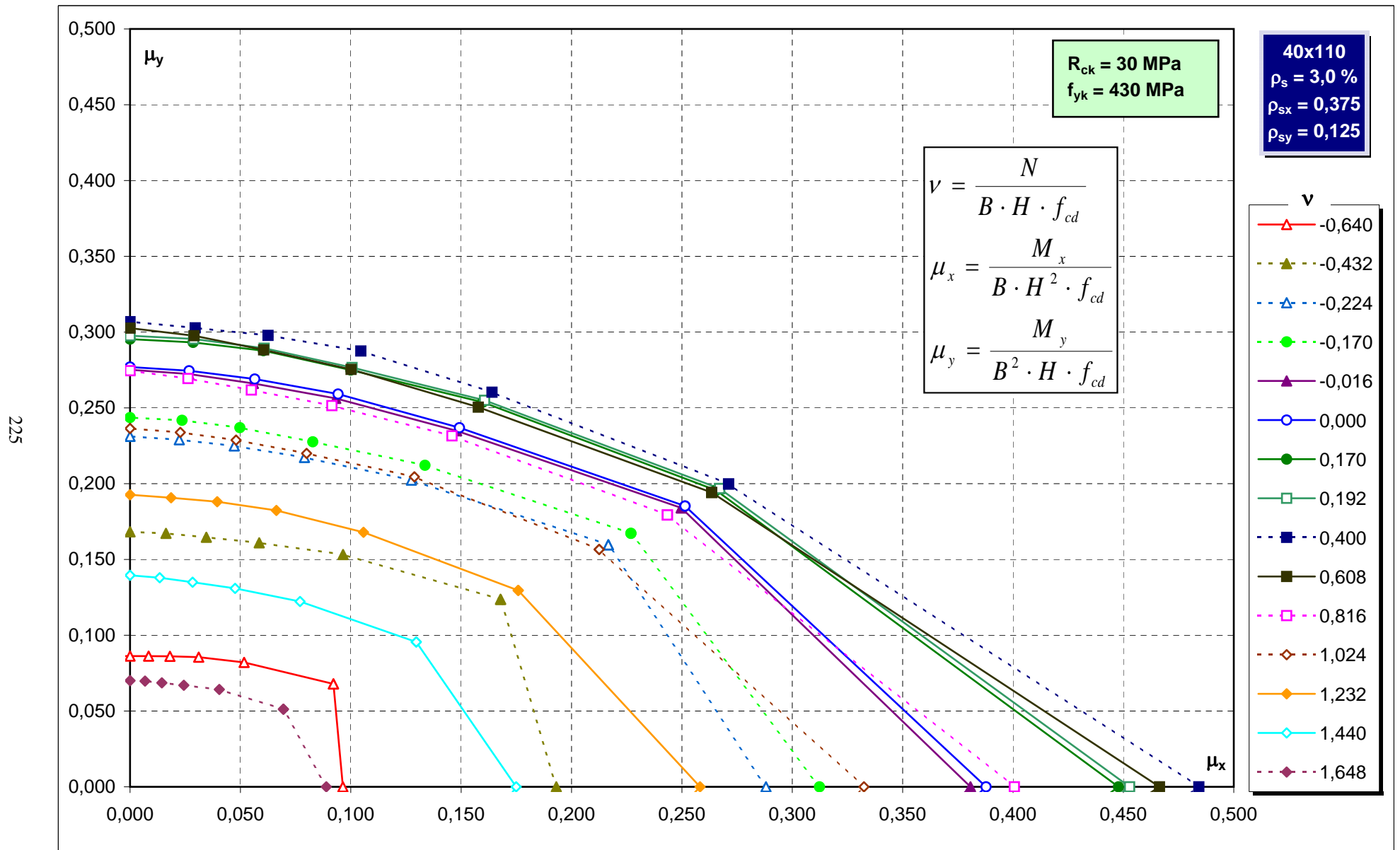
Abachi di verifica



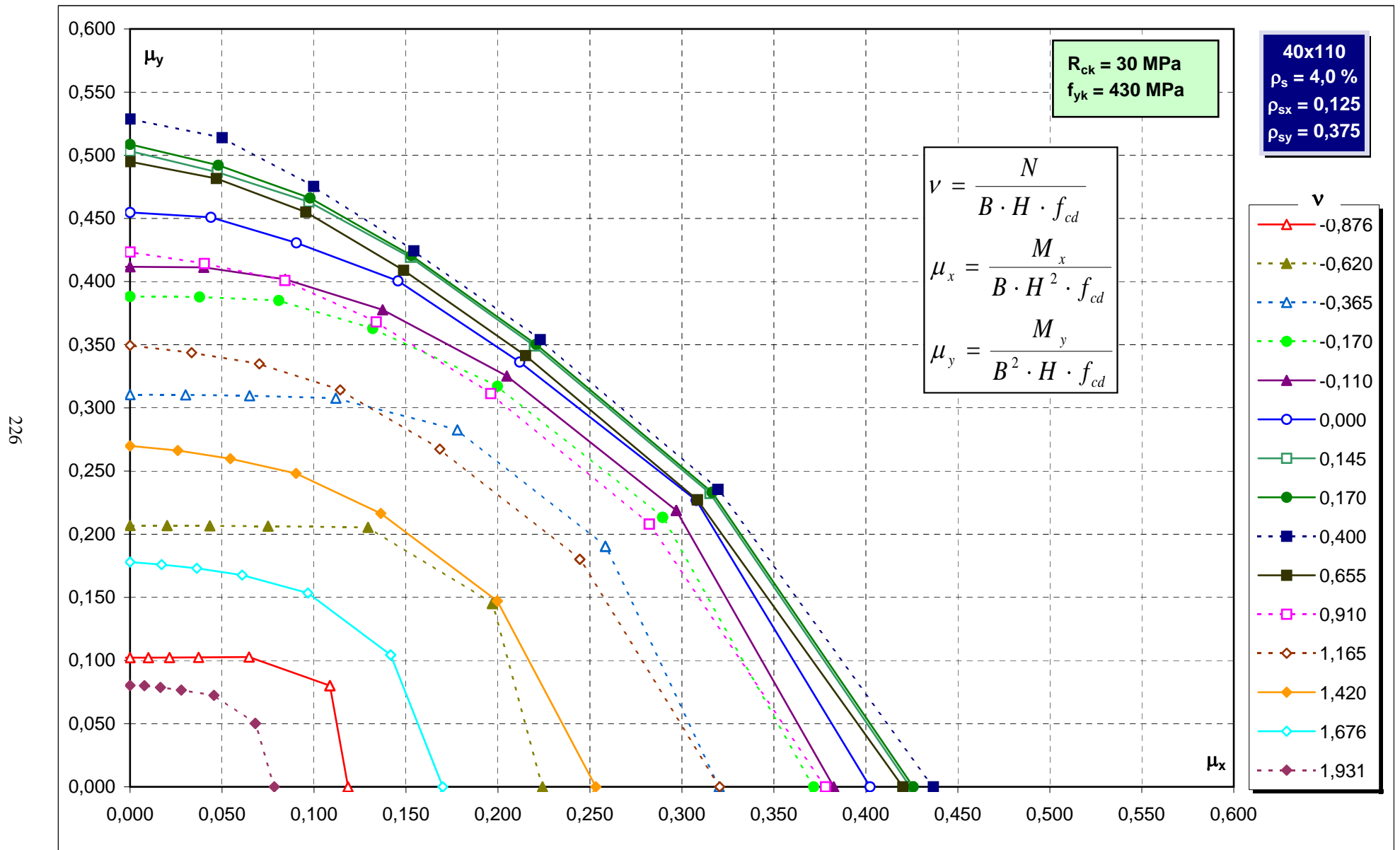
Abachi di verifica



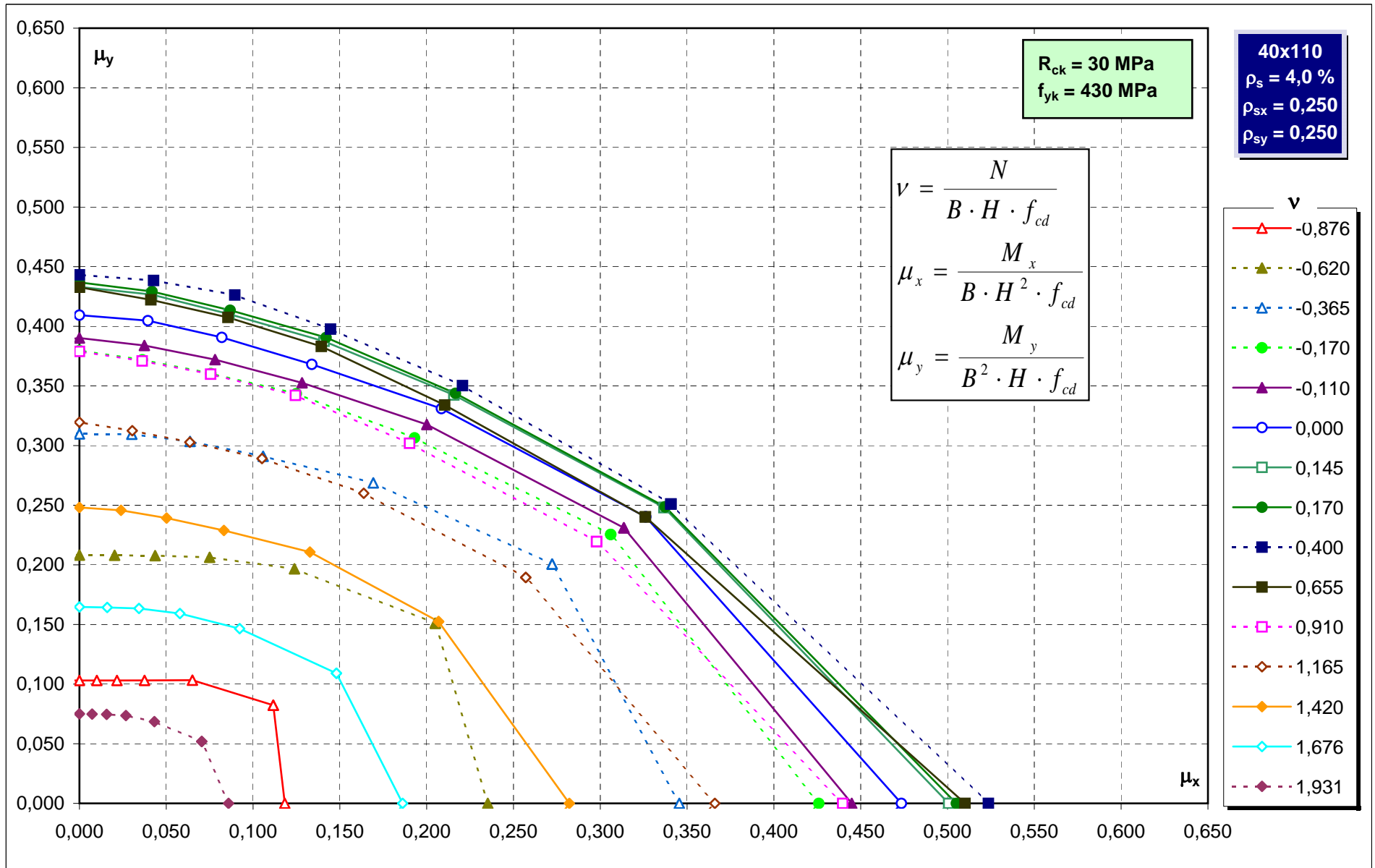
Abachi di verifica



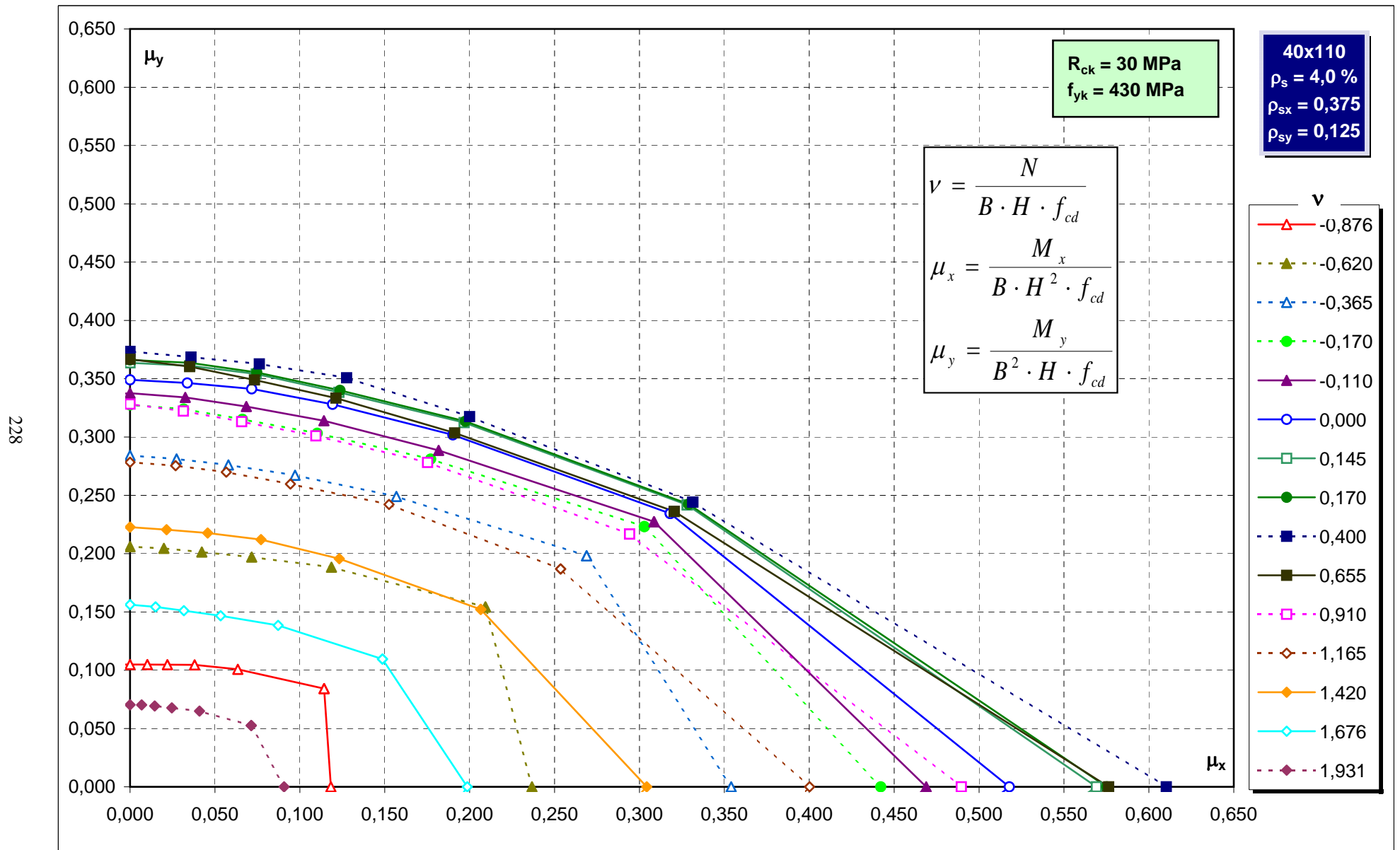
Abachi di verifica



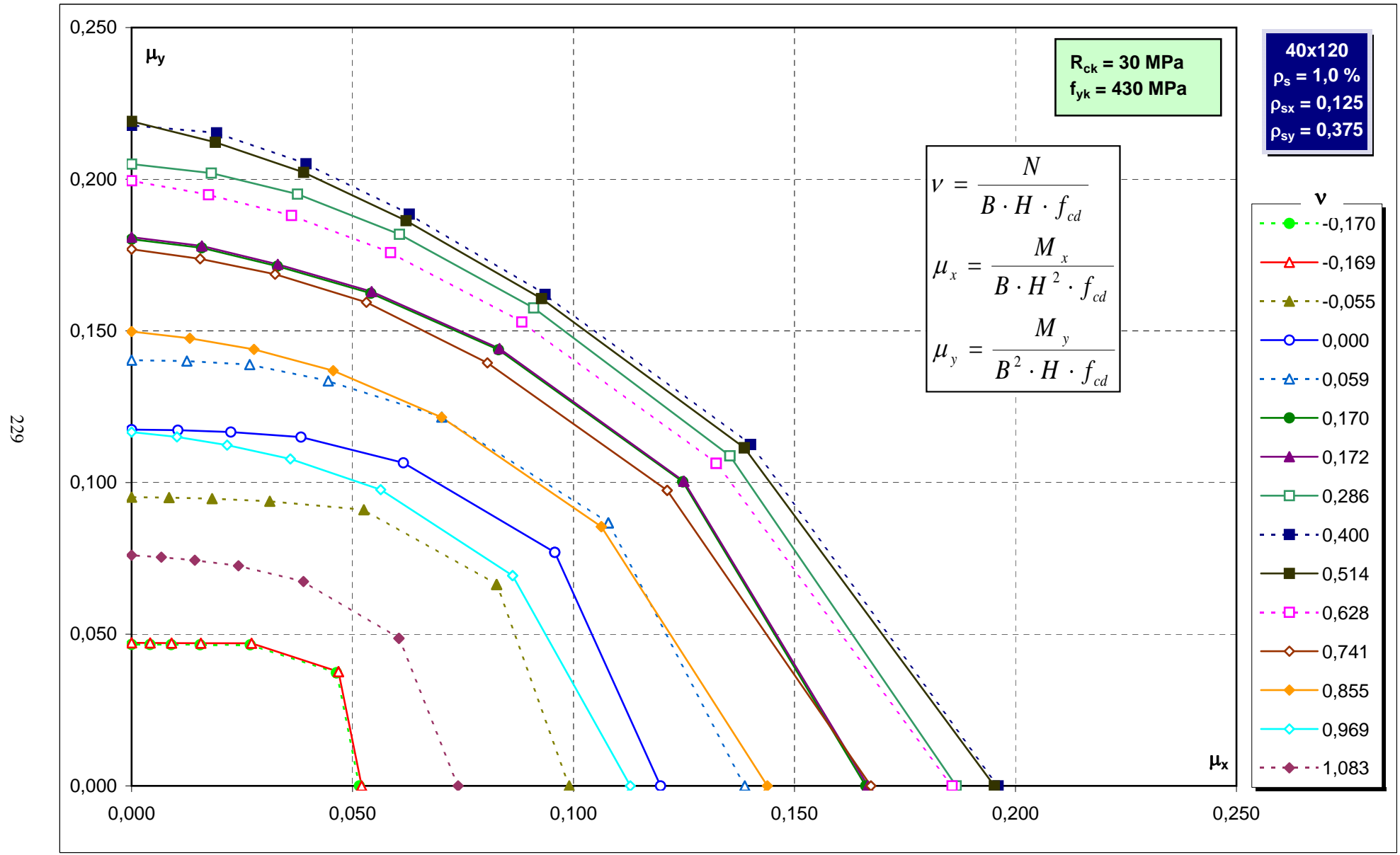
Abachi di verifica



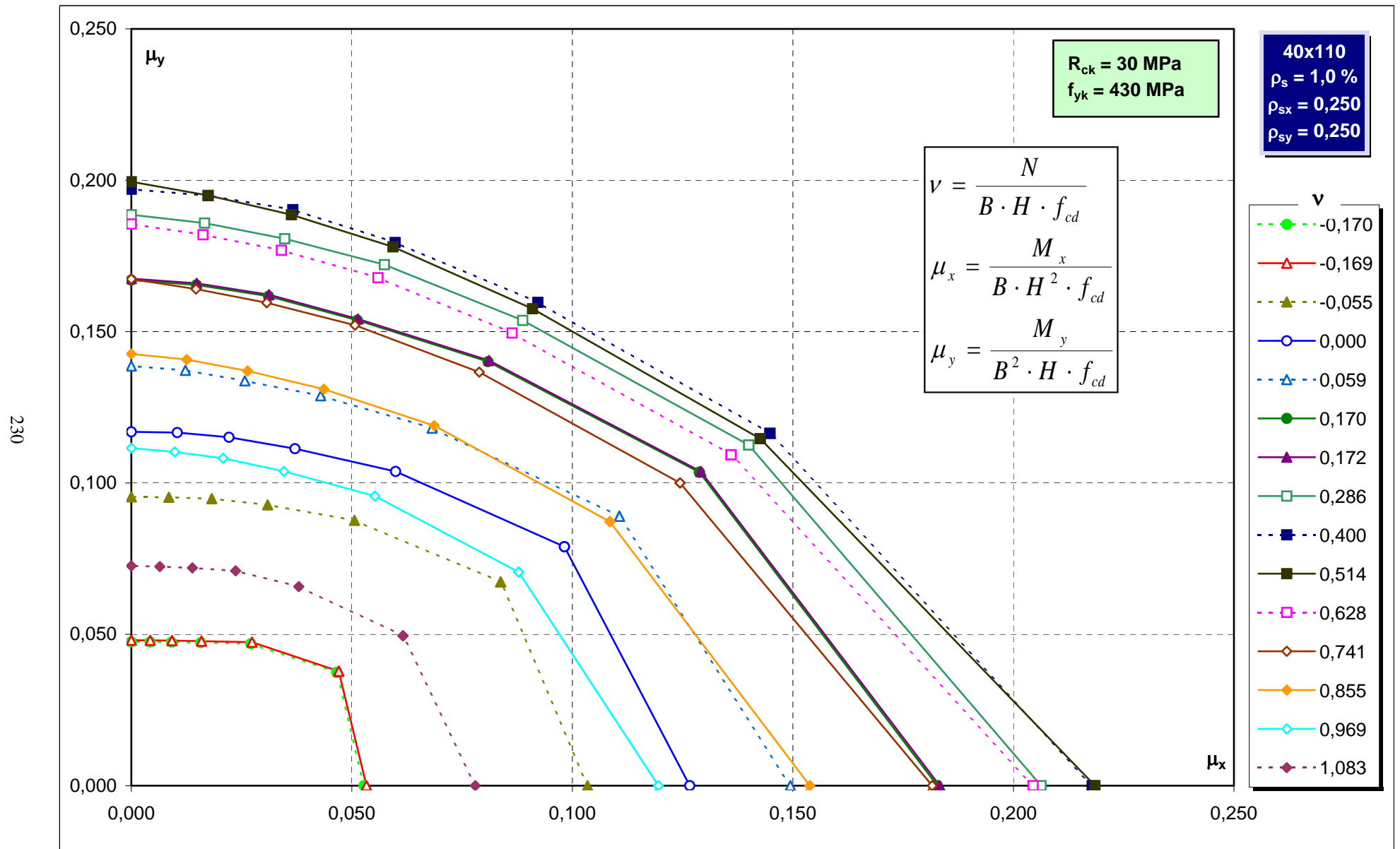
Abachi di verifica



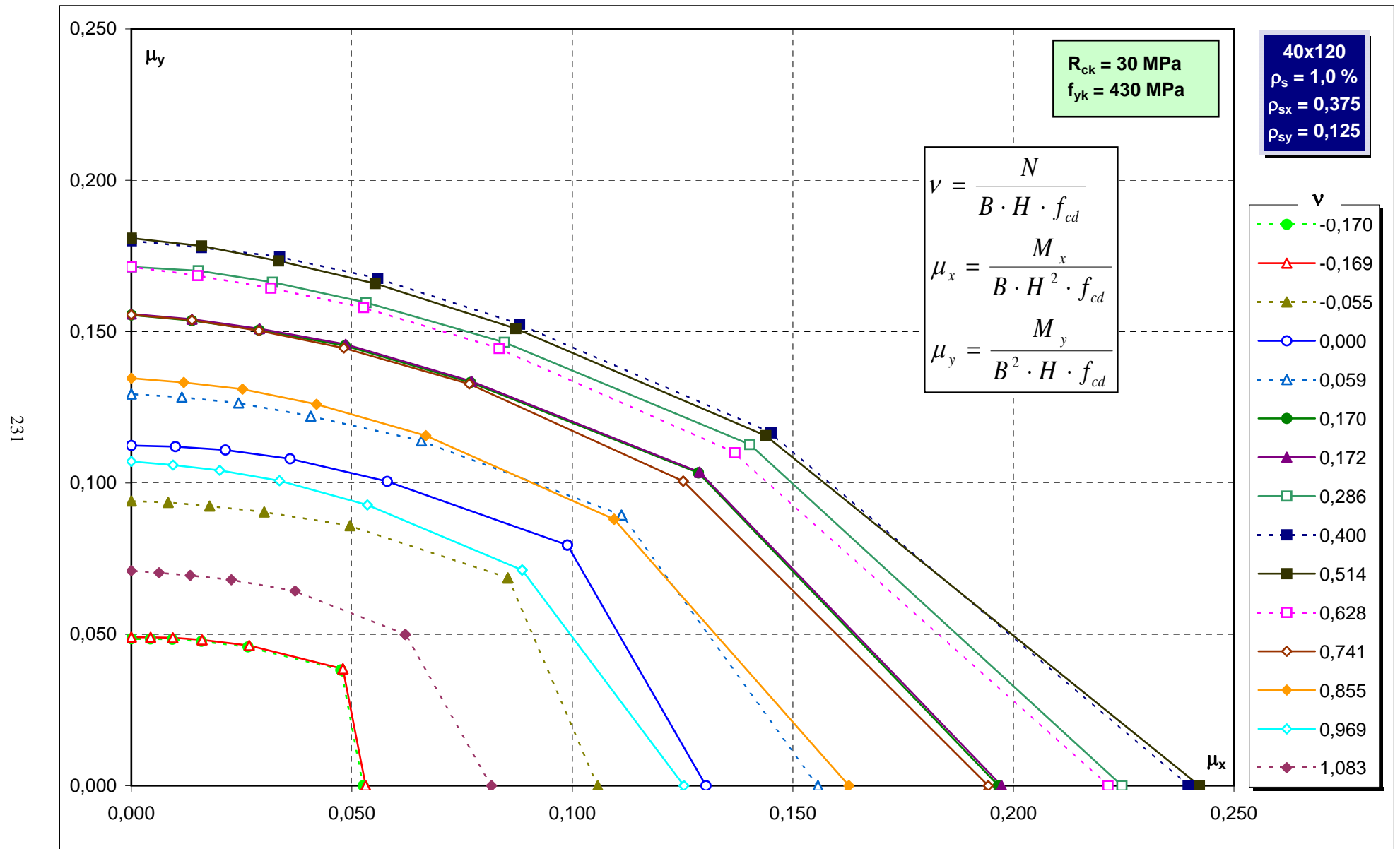
Abachi di verifica



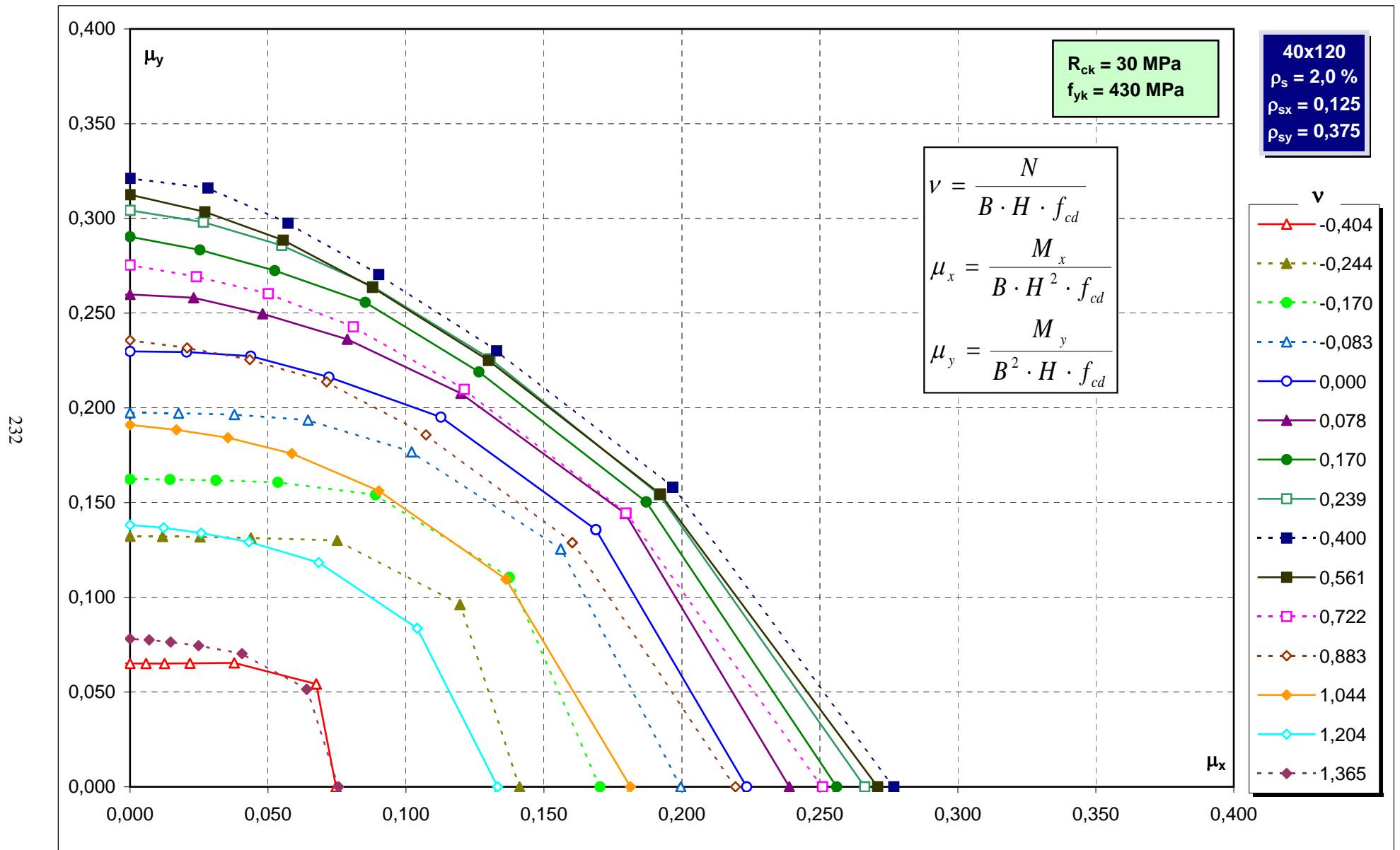
Abachi di verifica



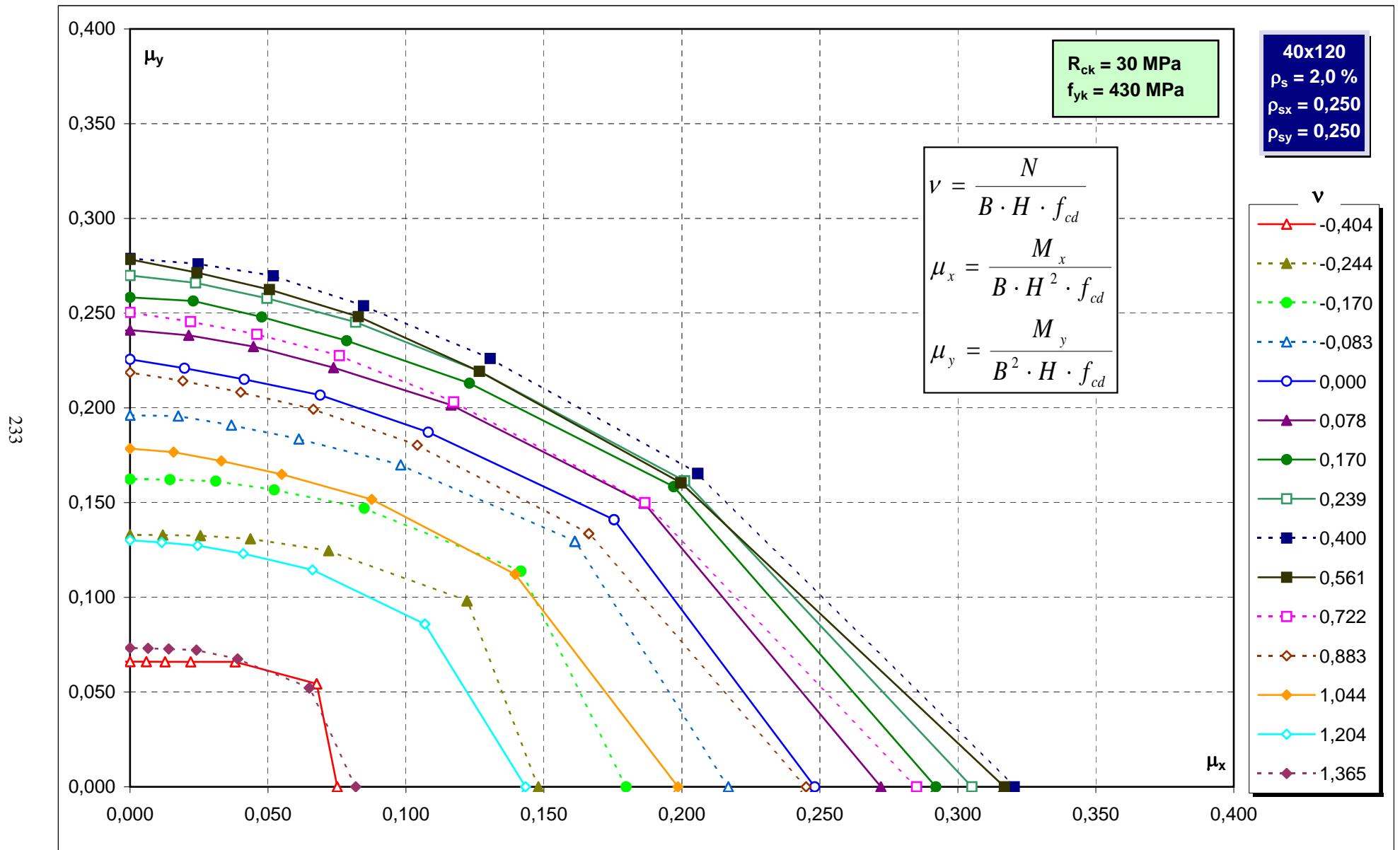
Abachi di verifica



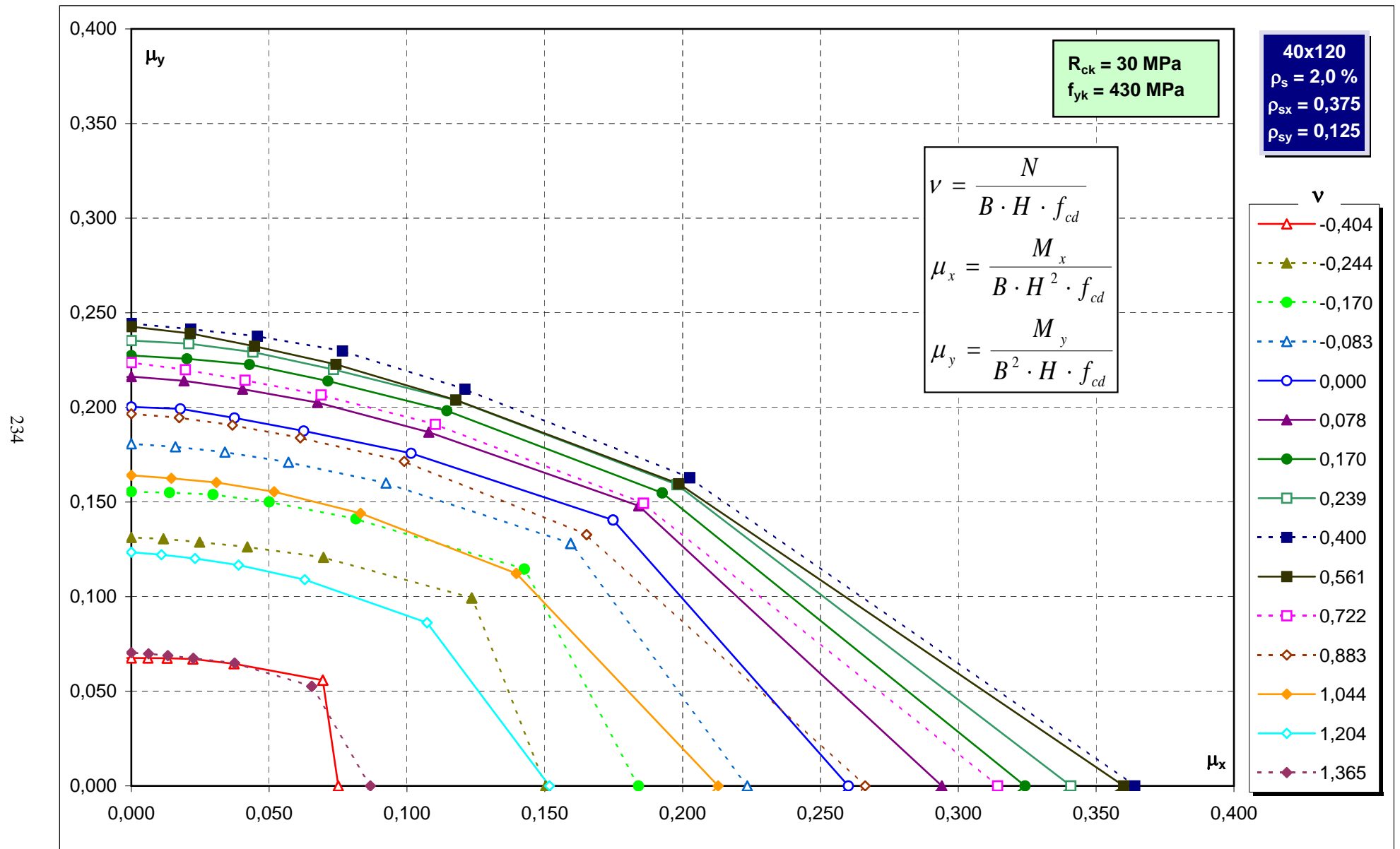
Abachi di verifica



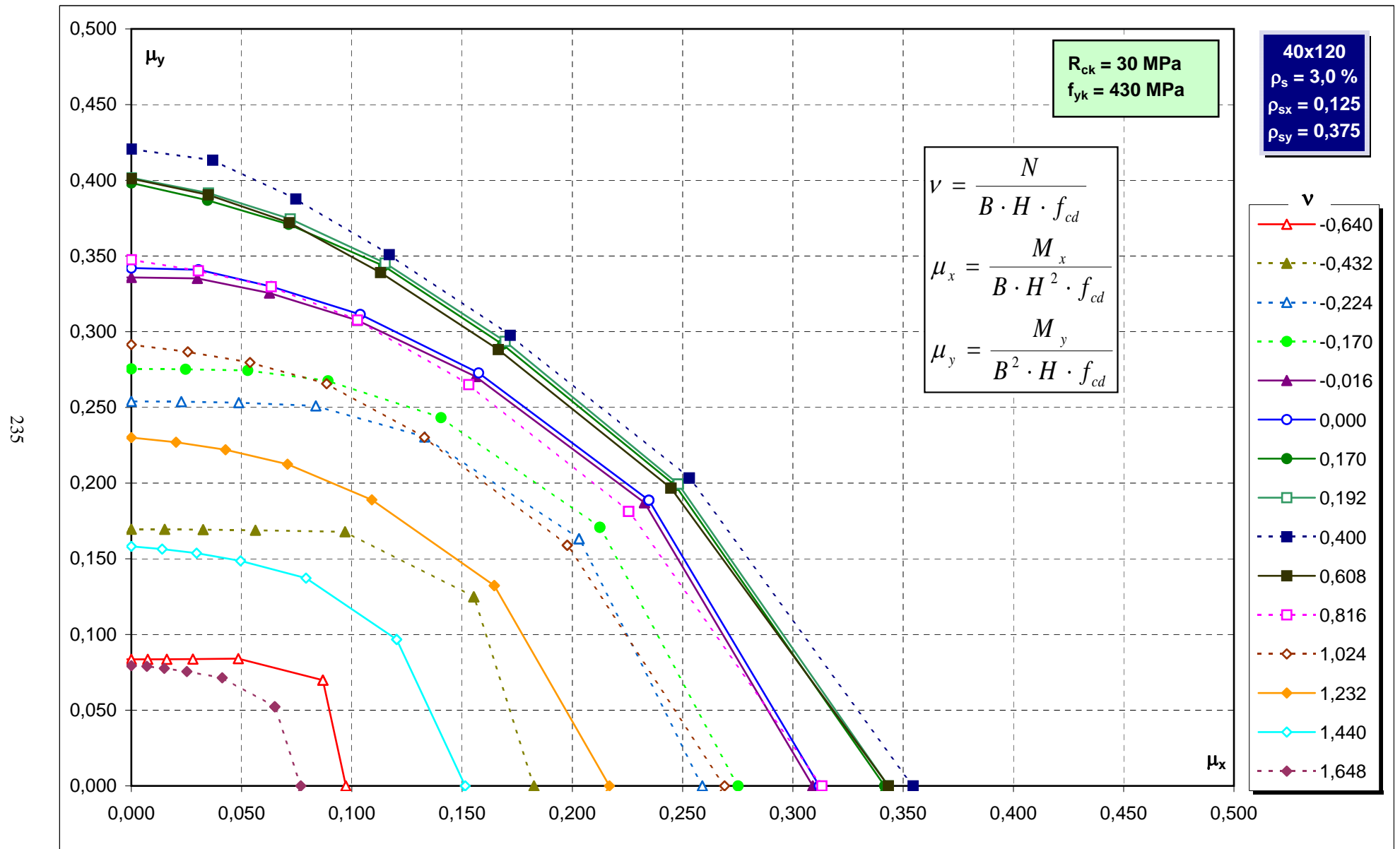
Abachi di verifica



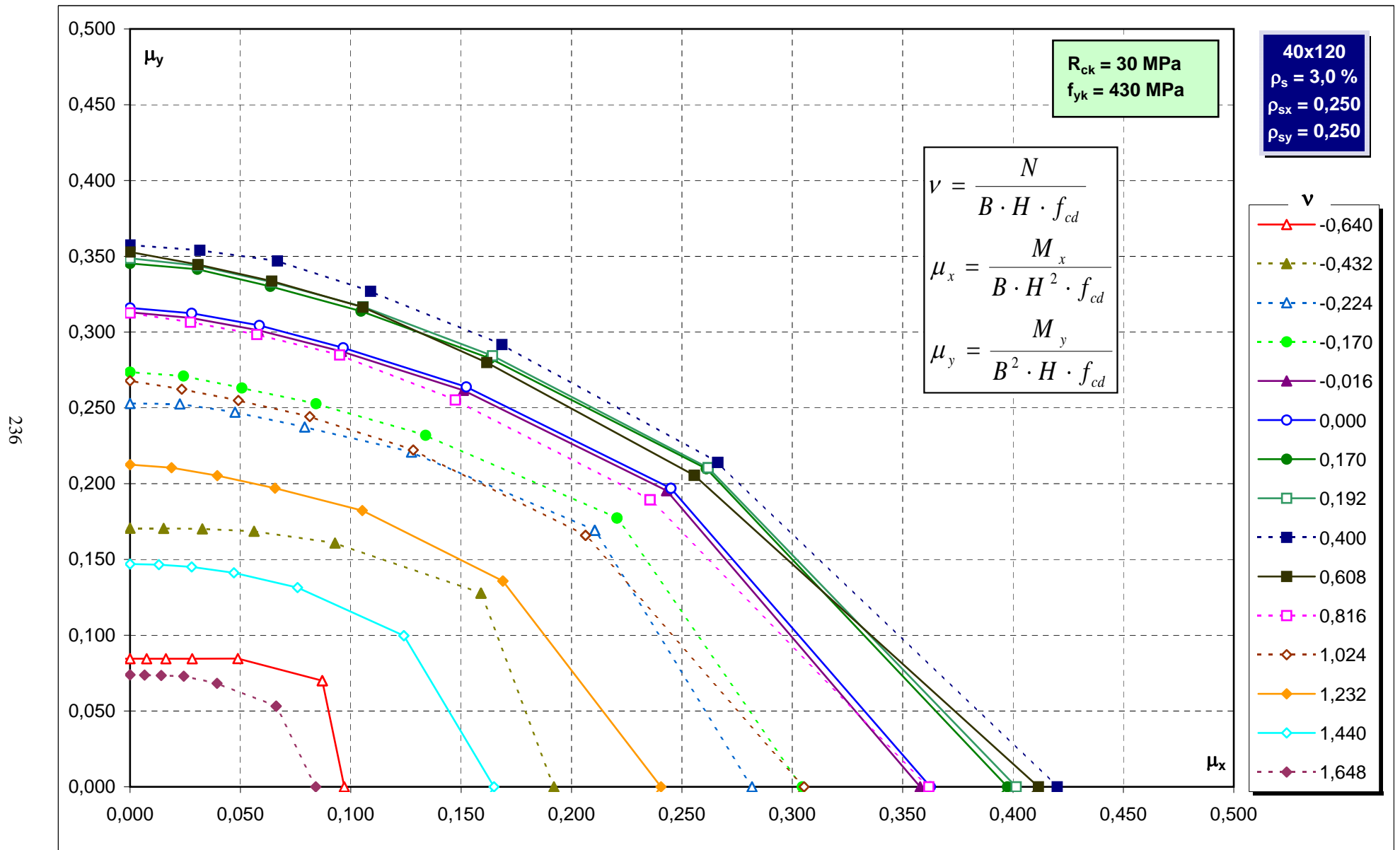
Abachi di verifica



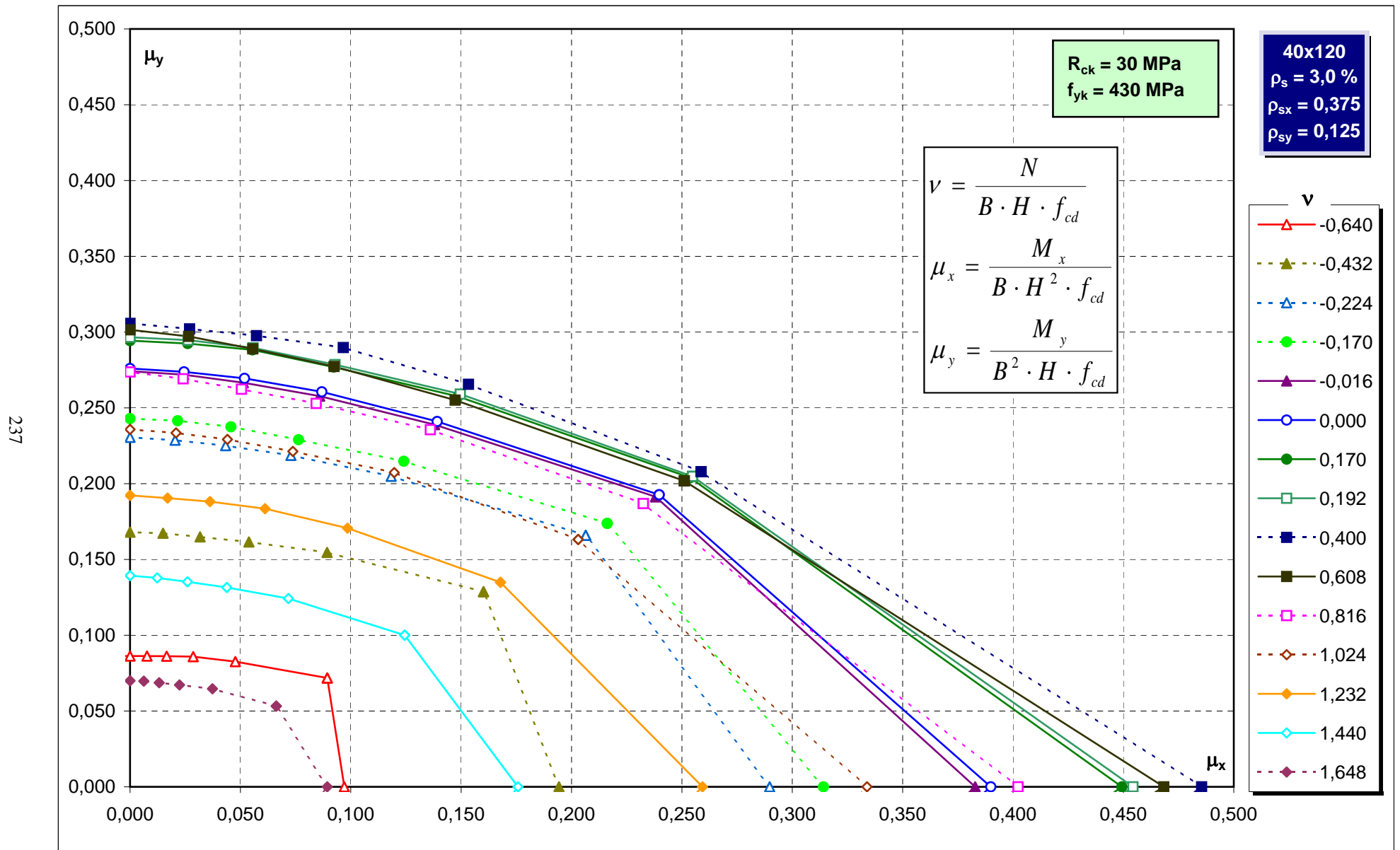
Abachi di verifica



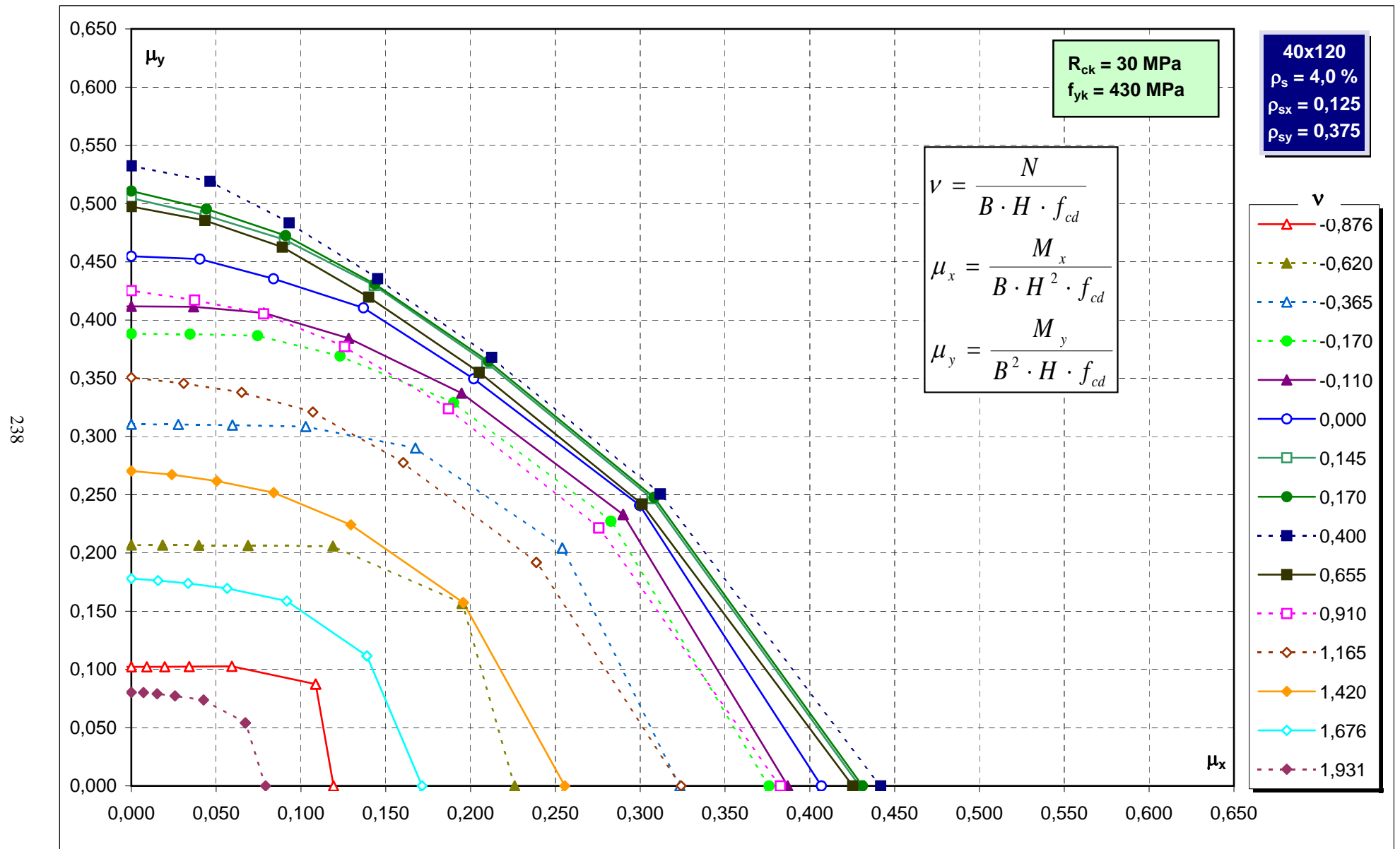
Abachi di verifica



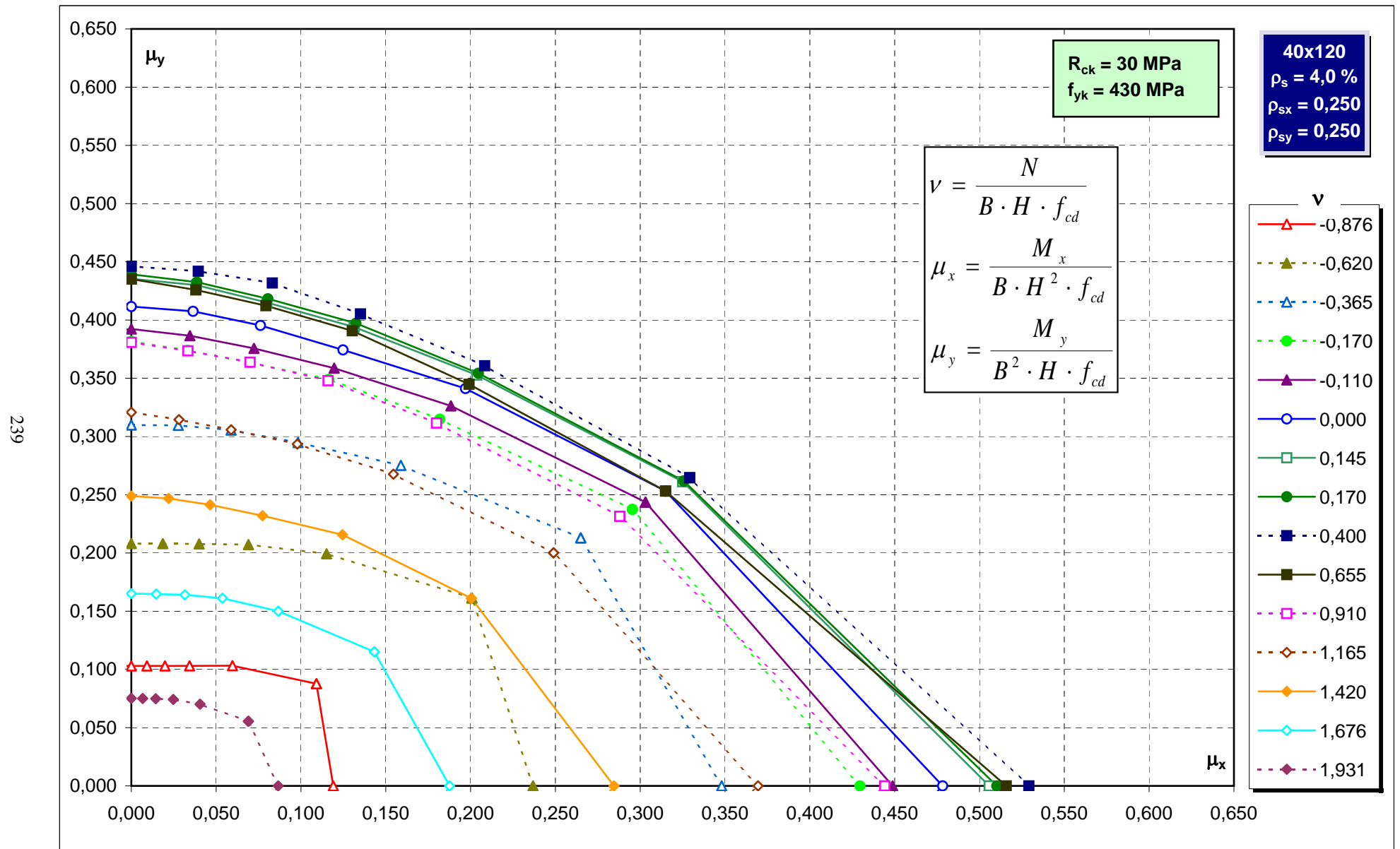
Abachi di verifica



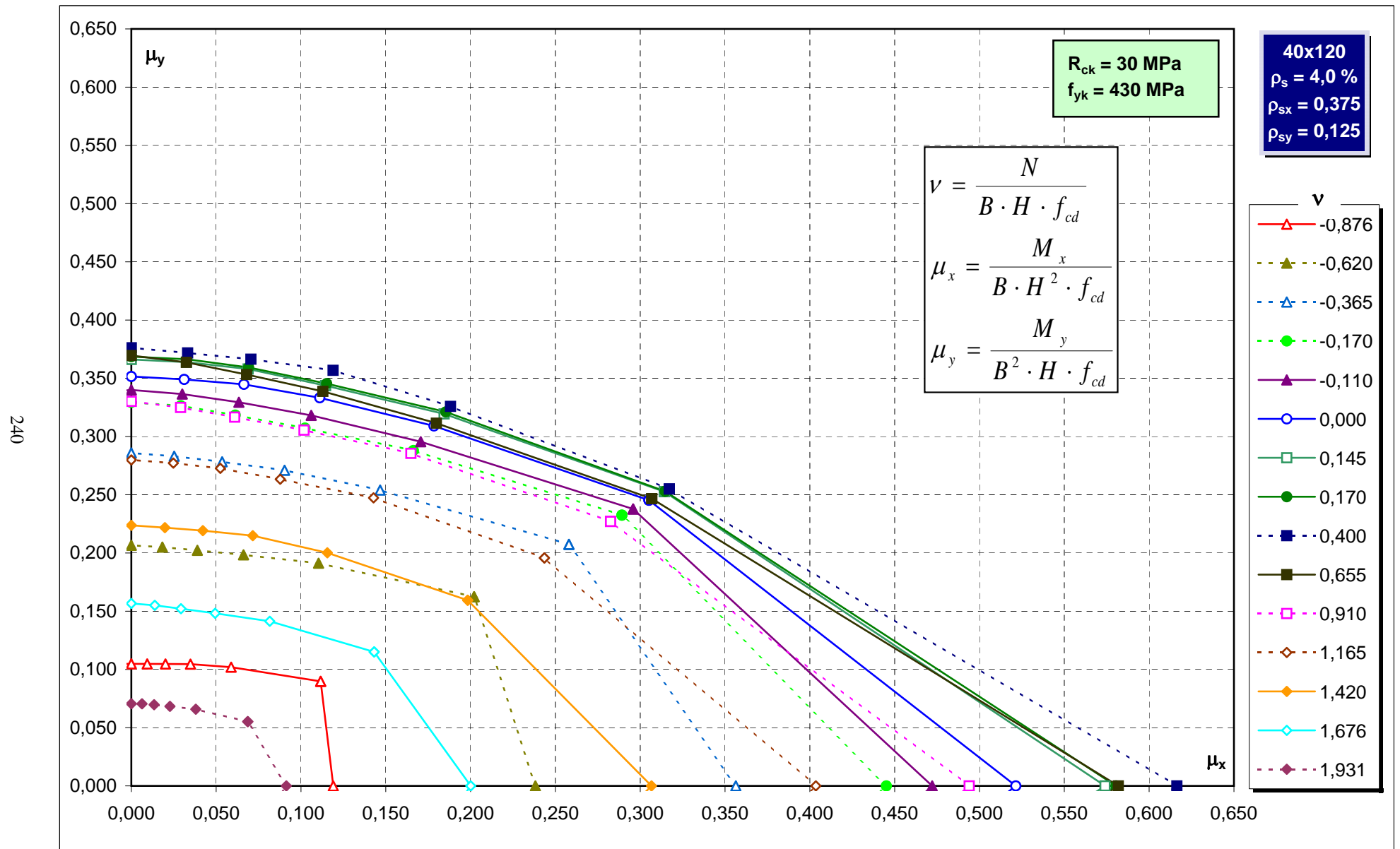
Abachi di verifica



Abachi di verifica

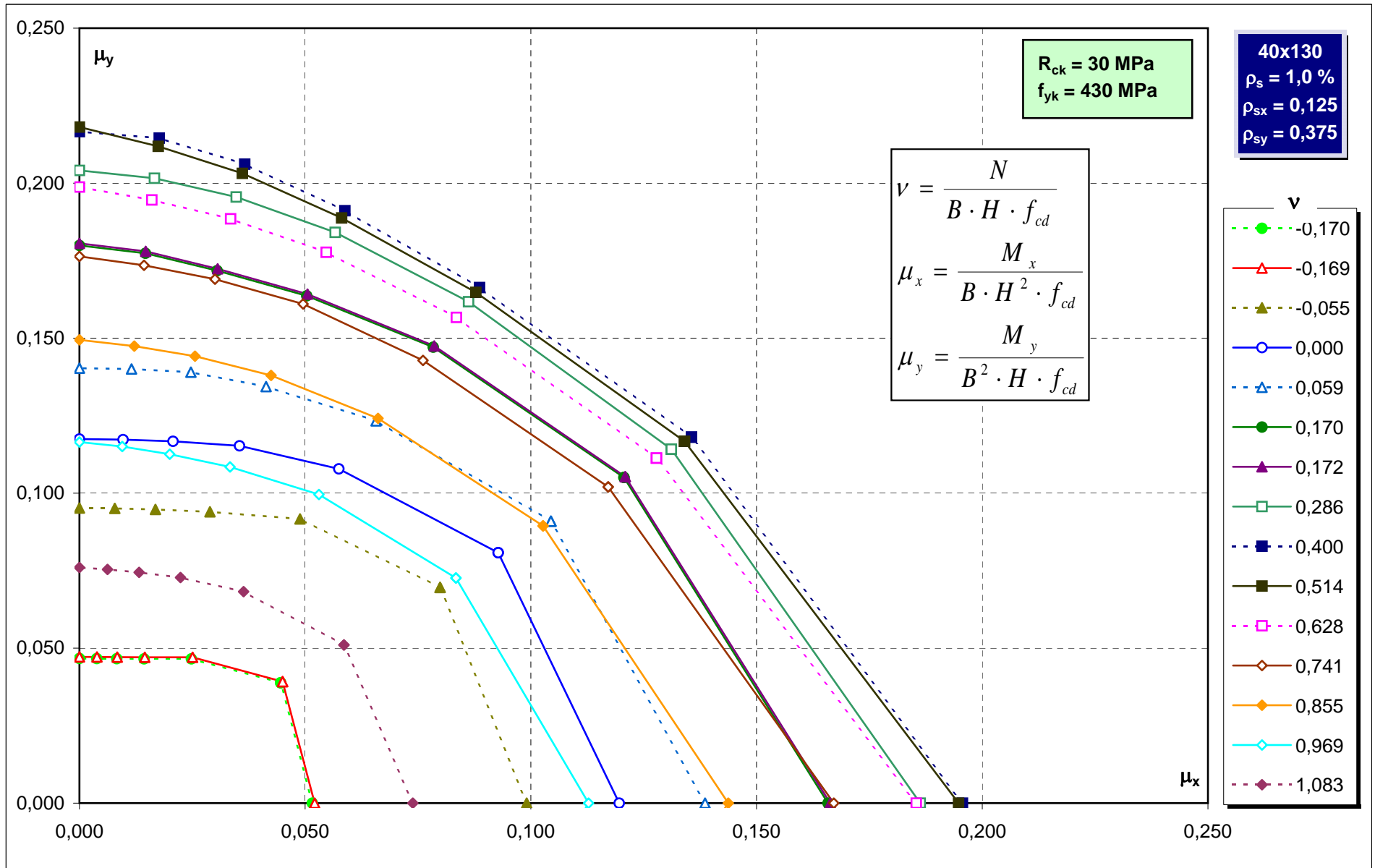


Abachi di verifica

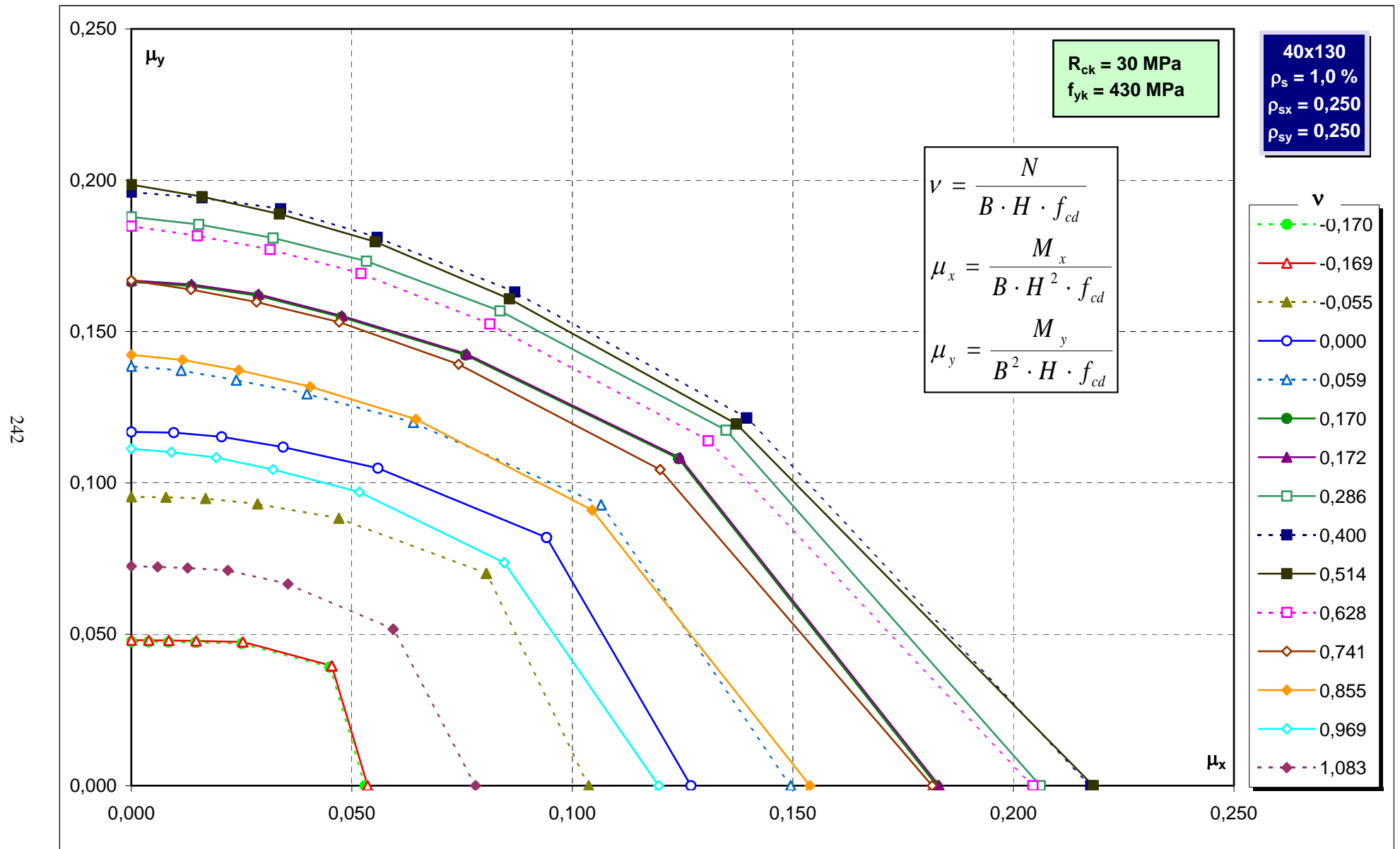


Abachi di verifica

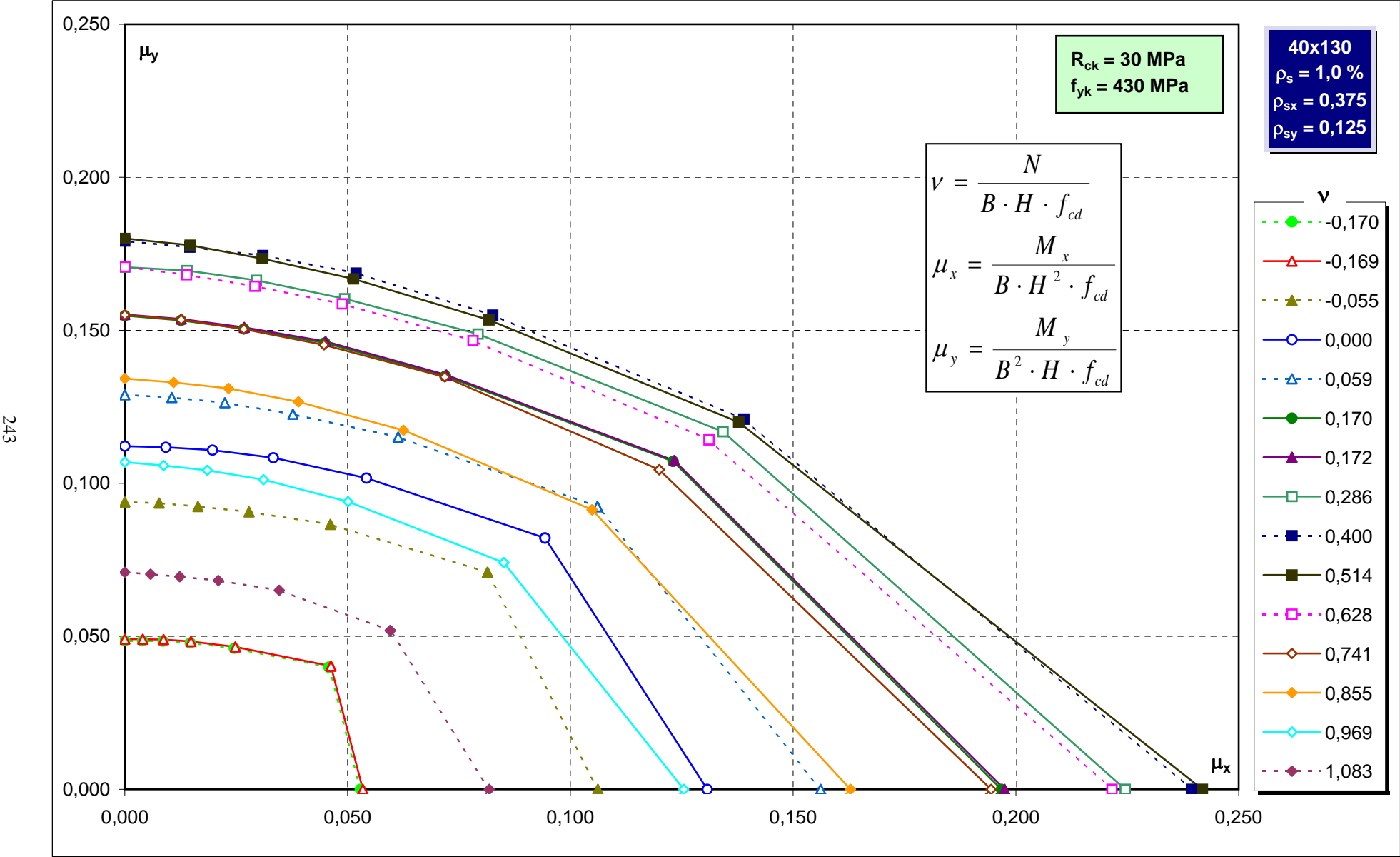
241



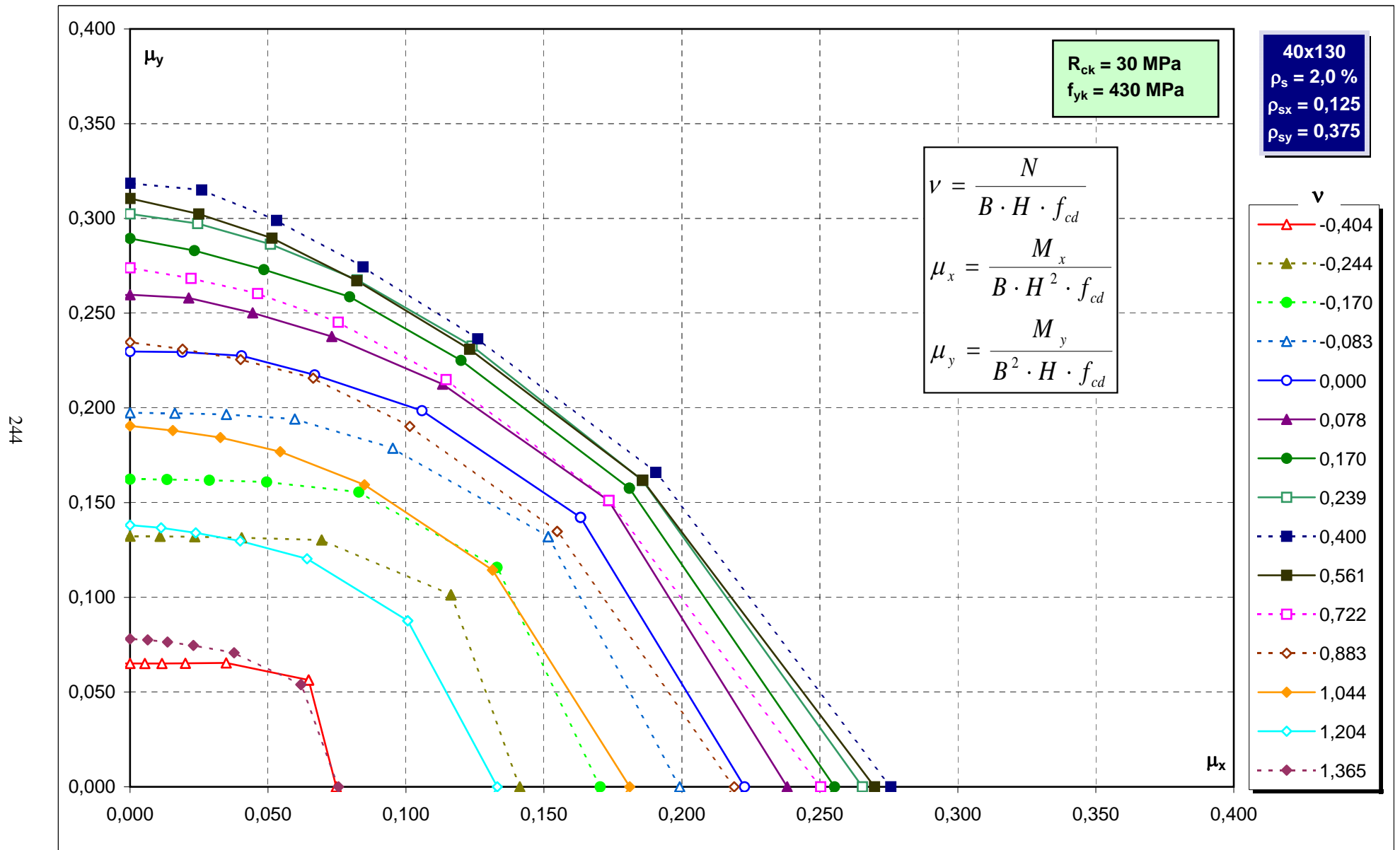
Abachi di verifica



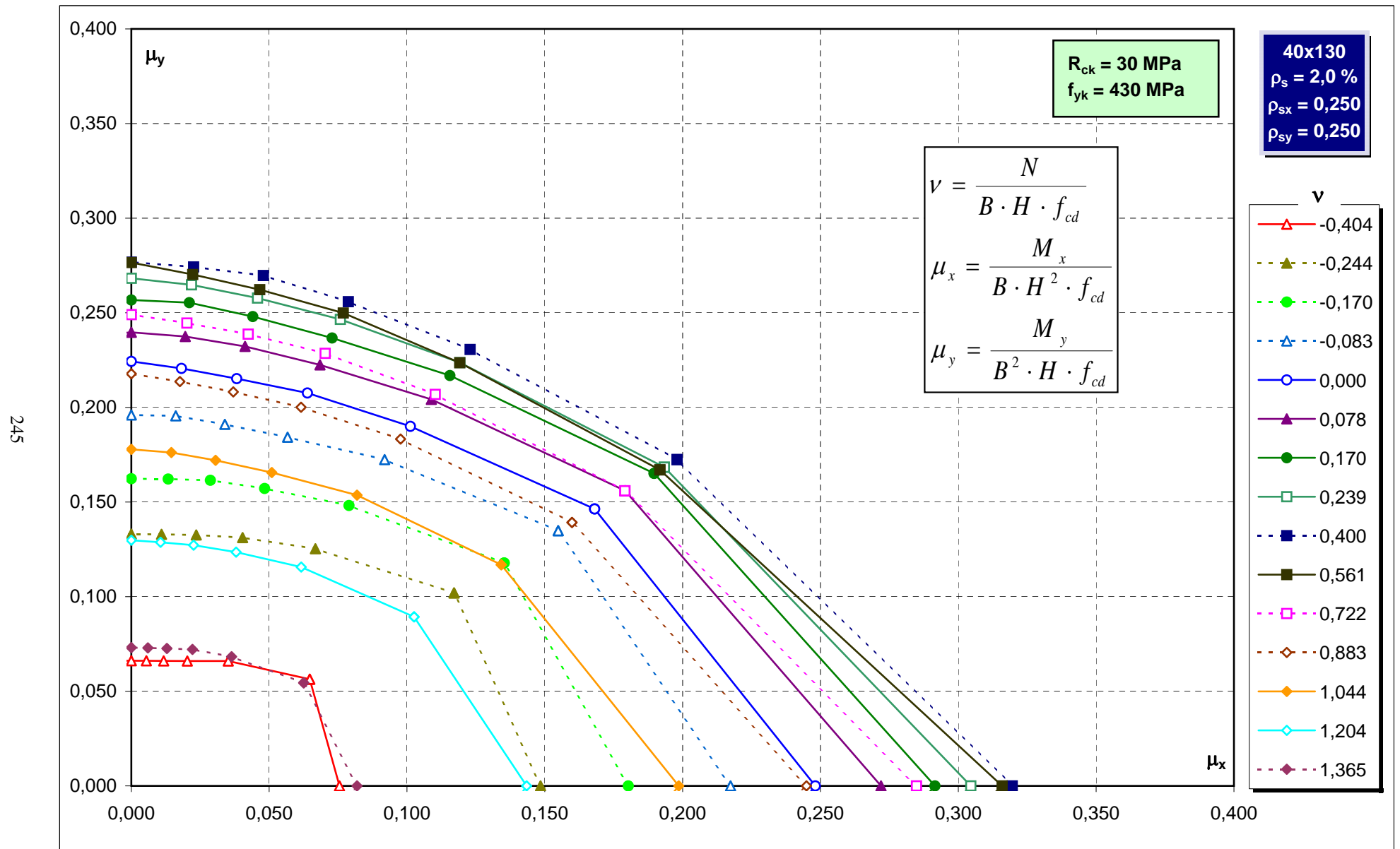
Abachi di verifica



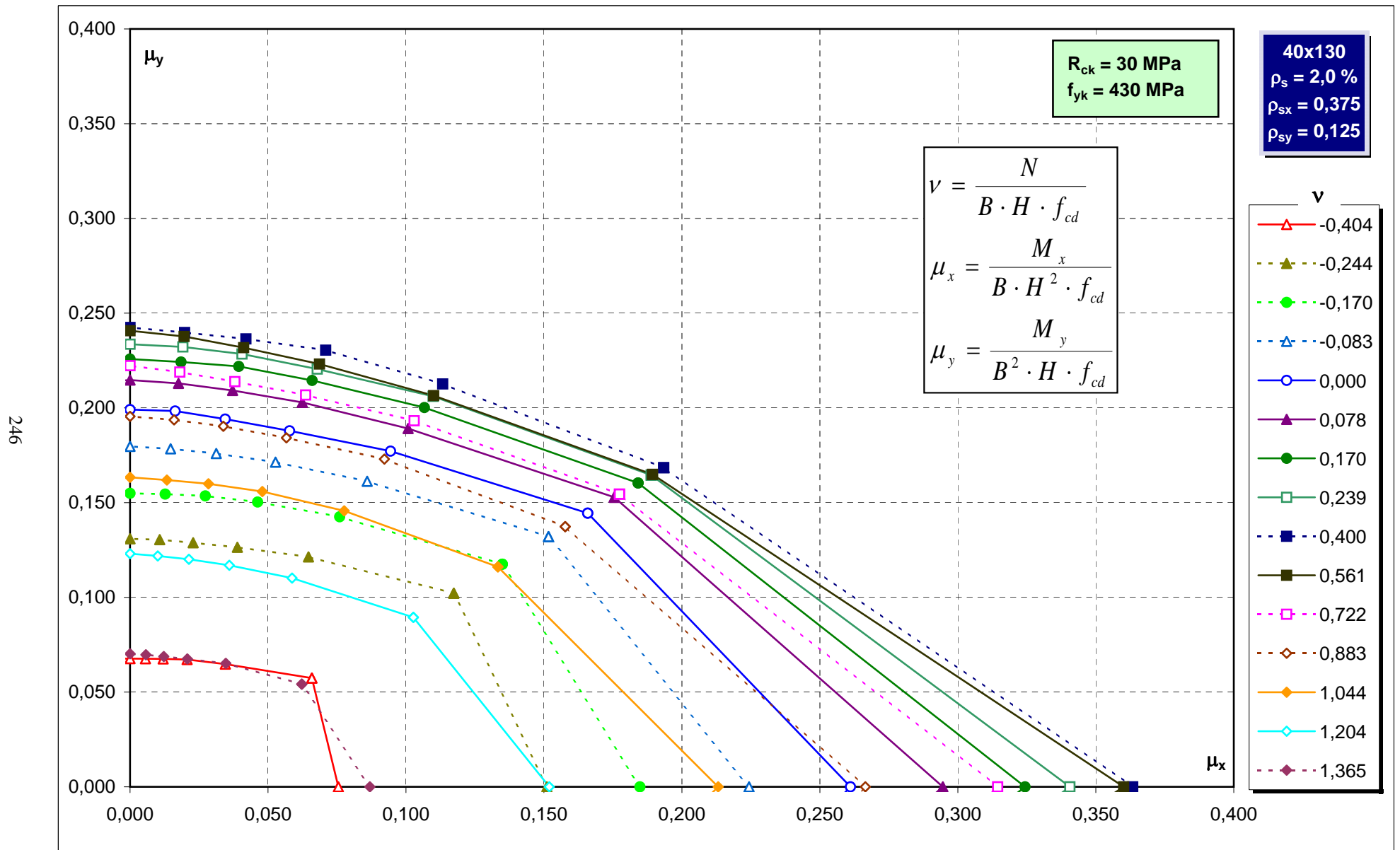
Abachi di verifica



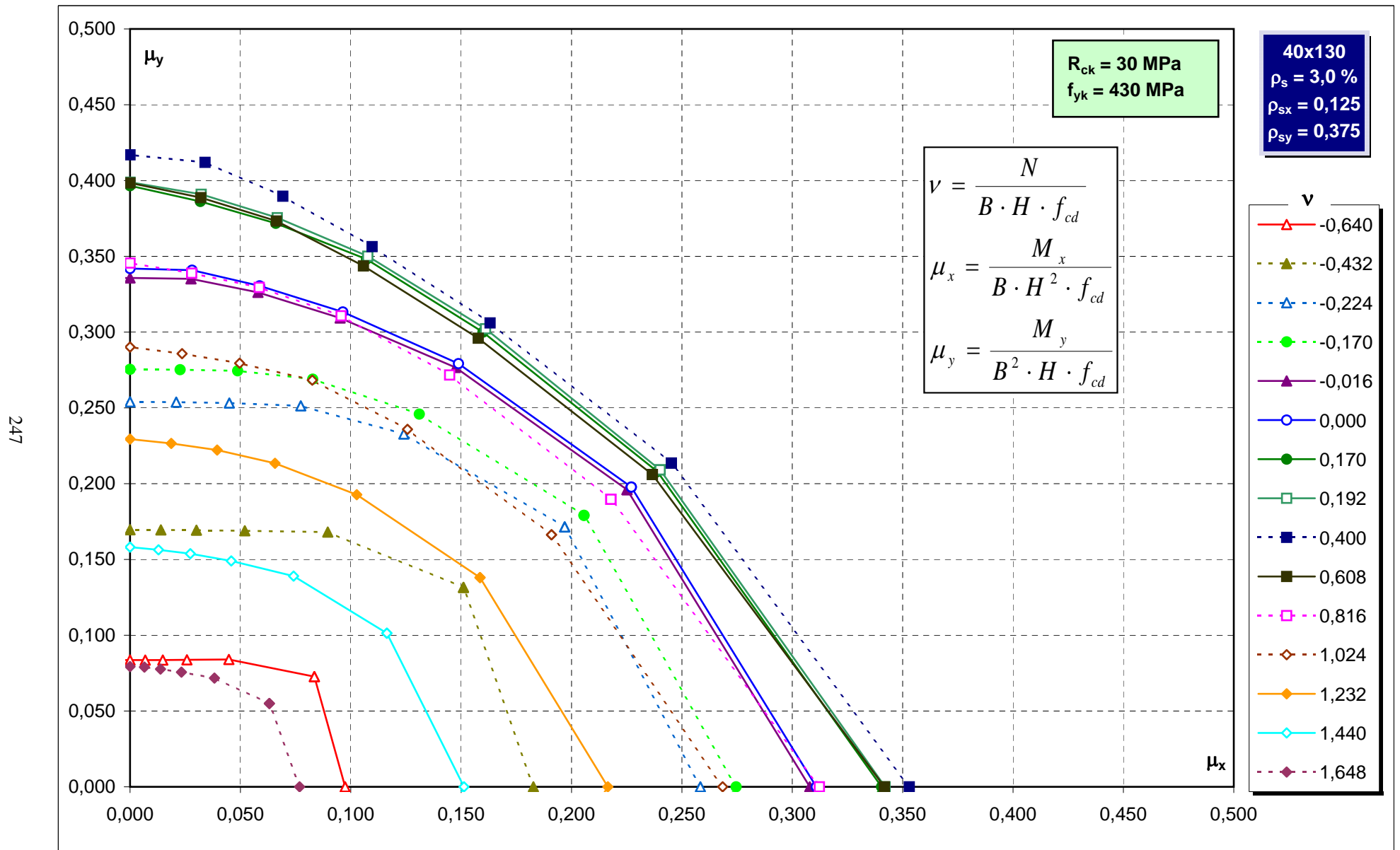
Abachi di verifica



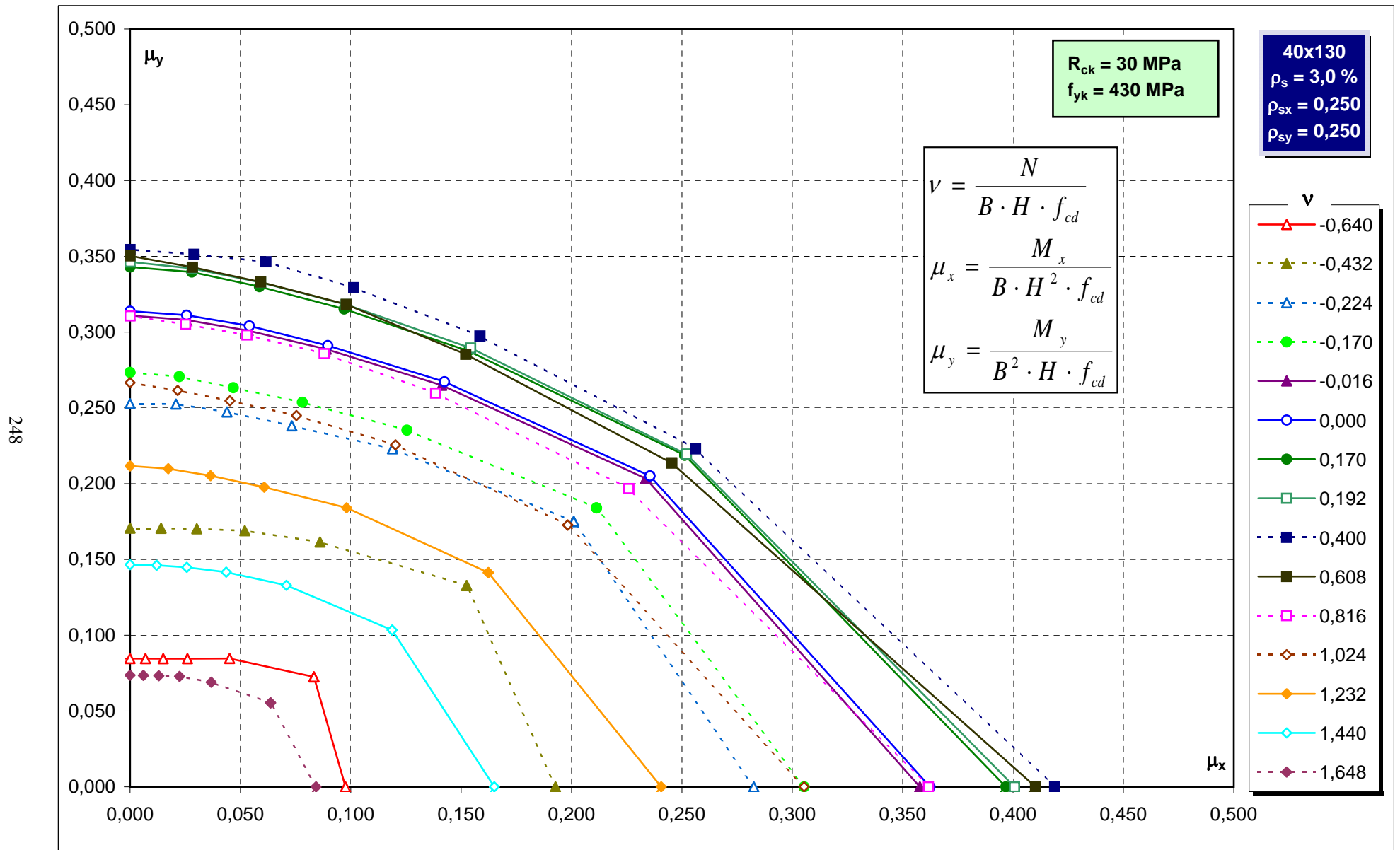
Abachi di verifica



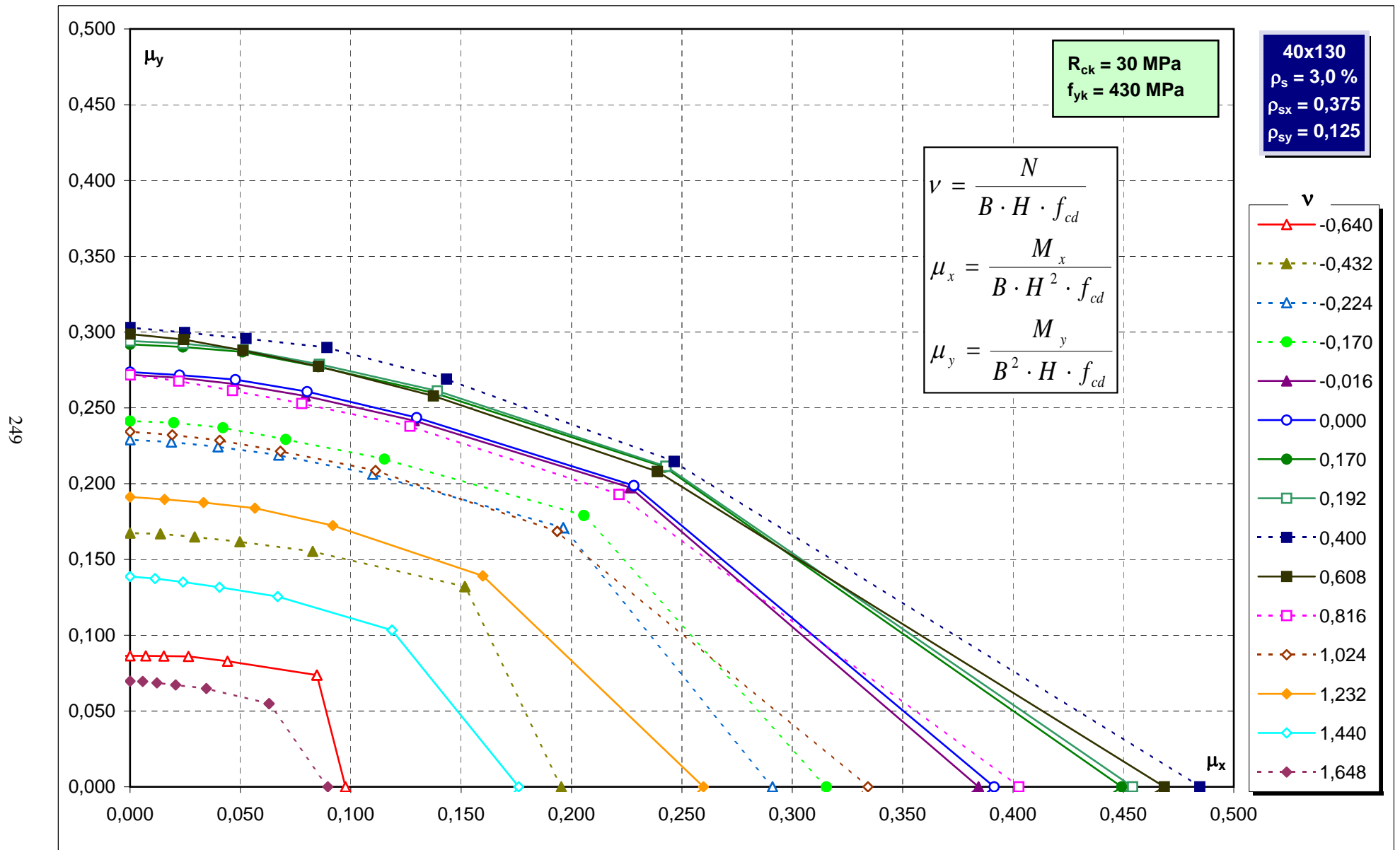
Abachi di verifica



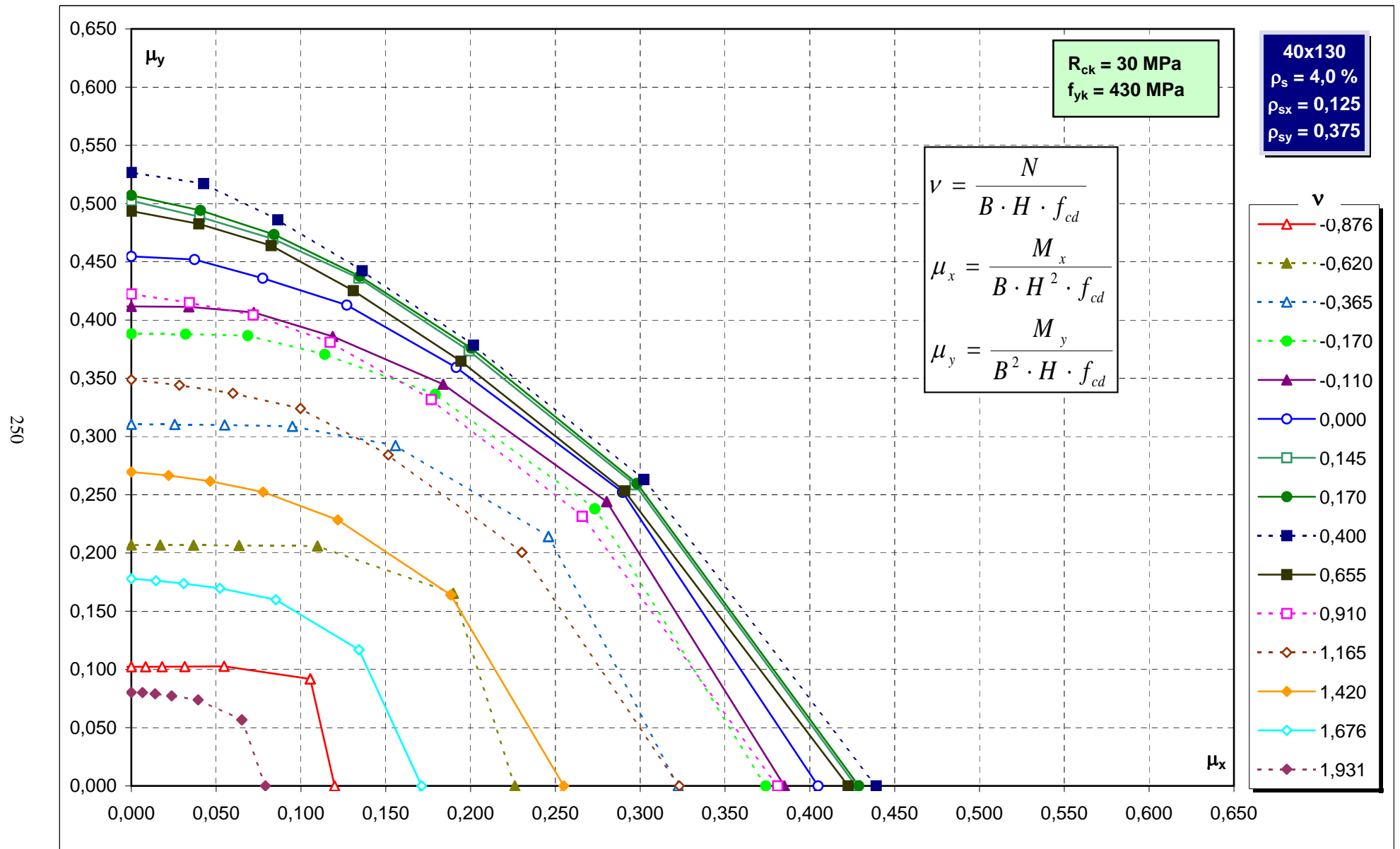
Abachi di verifica



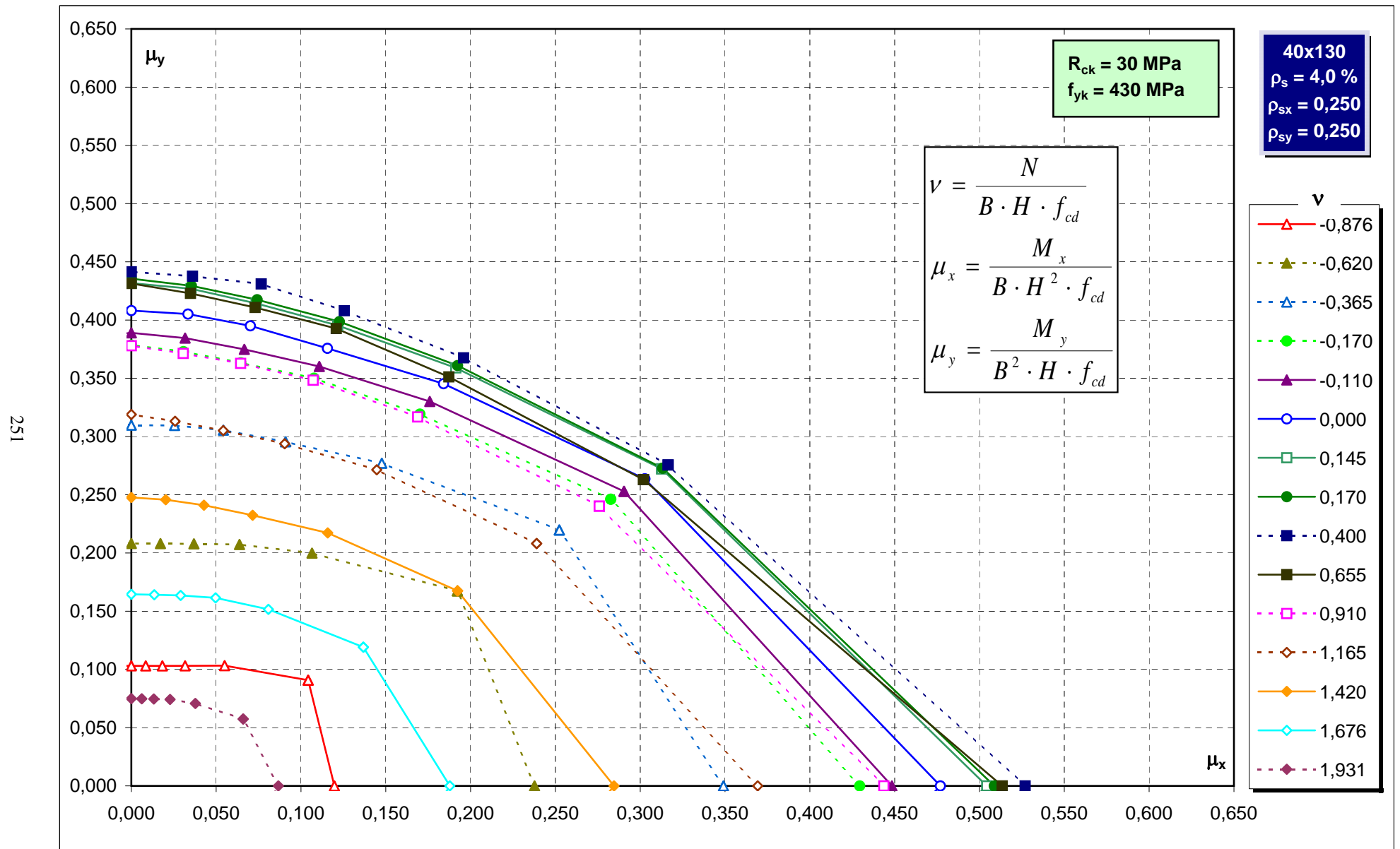
Abachi di verifica



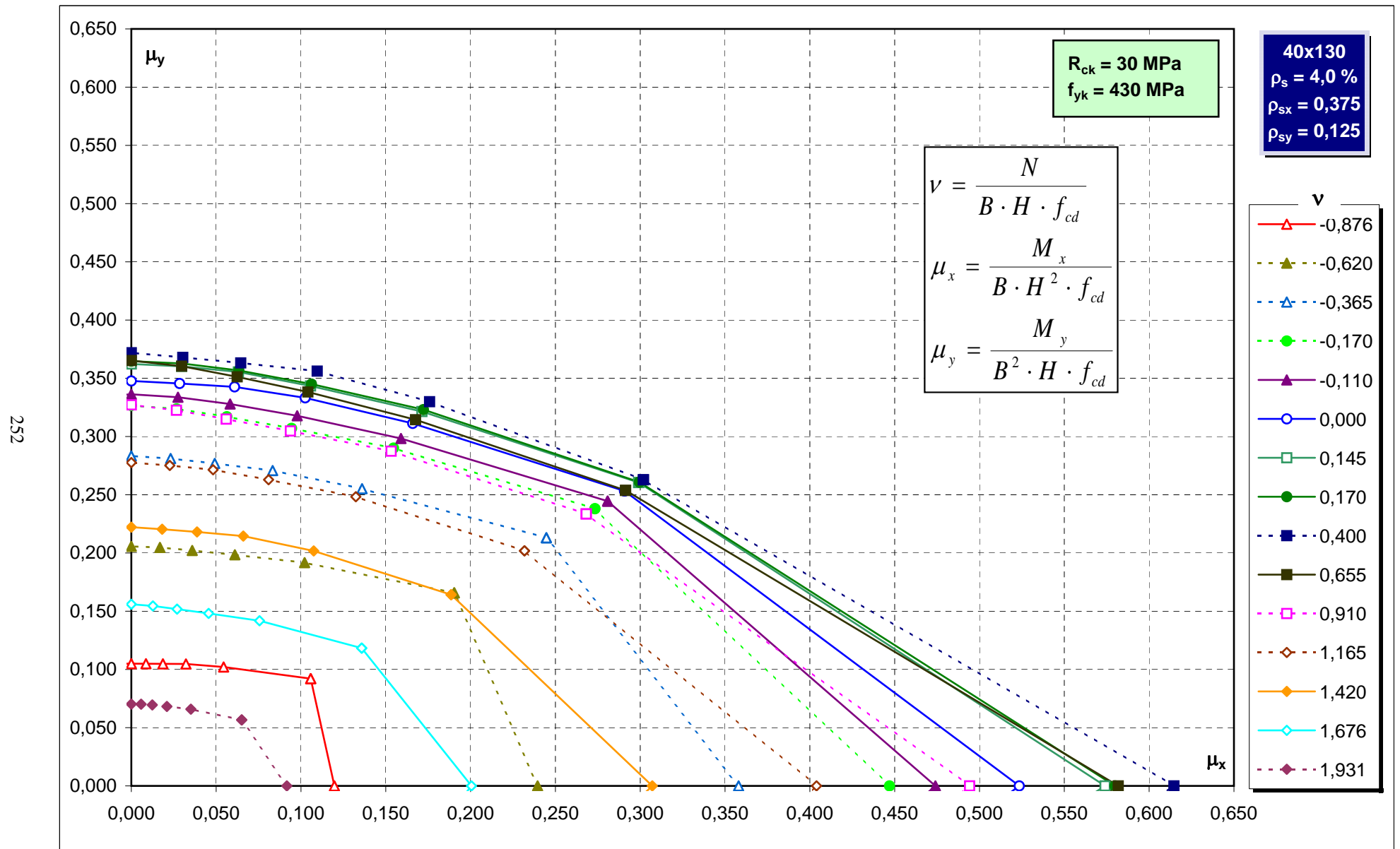
Abachi di verifica



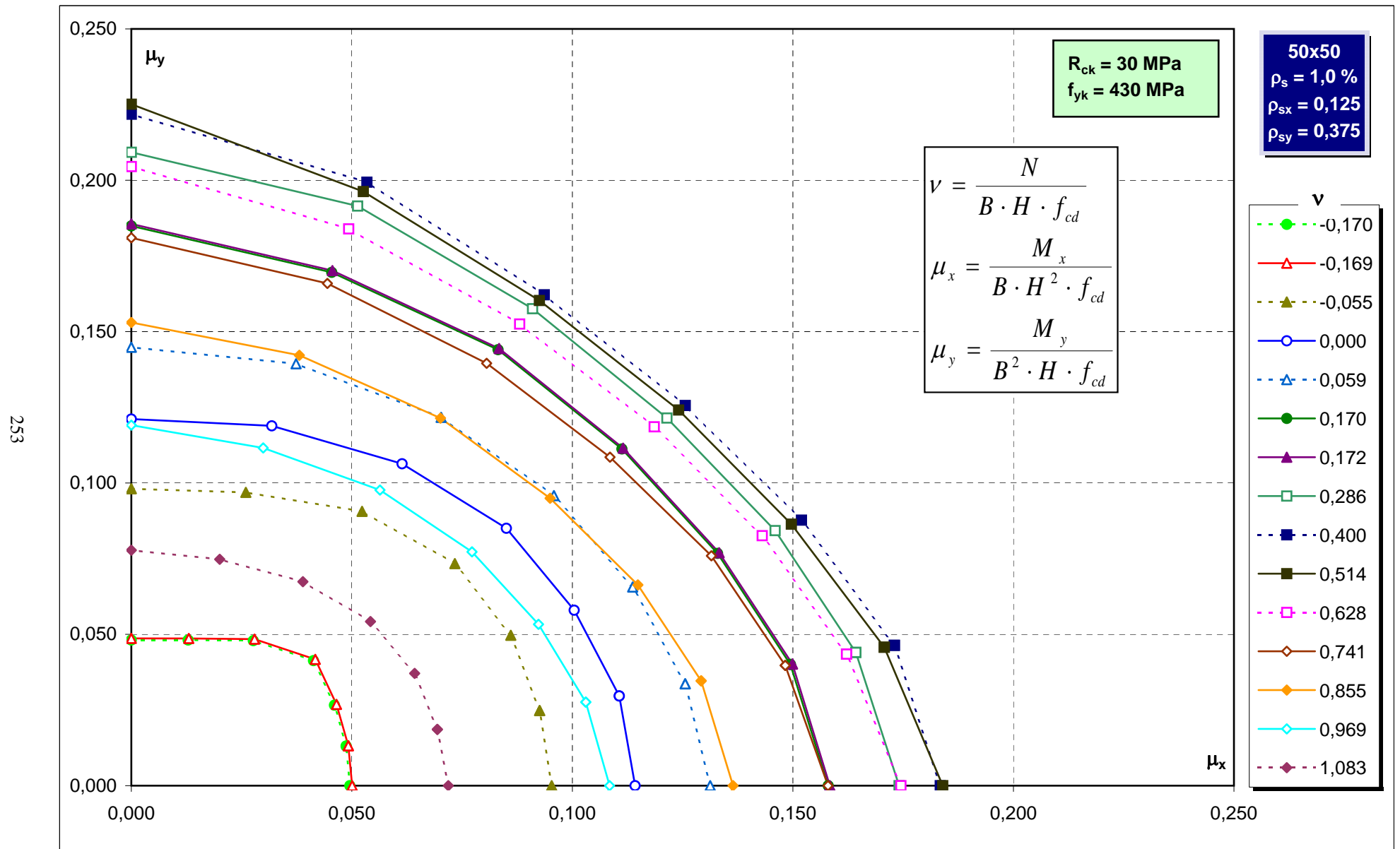
Abachi di verifica



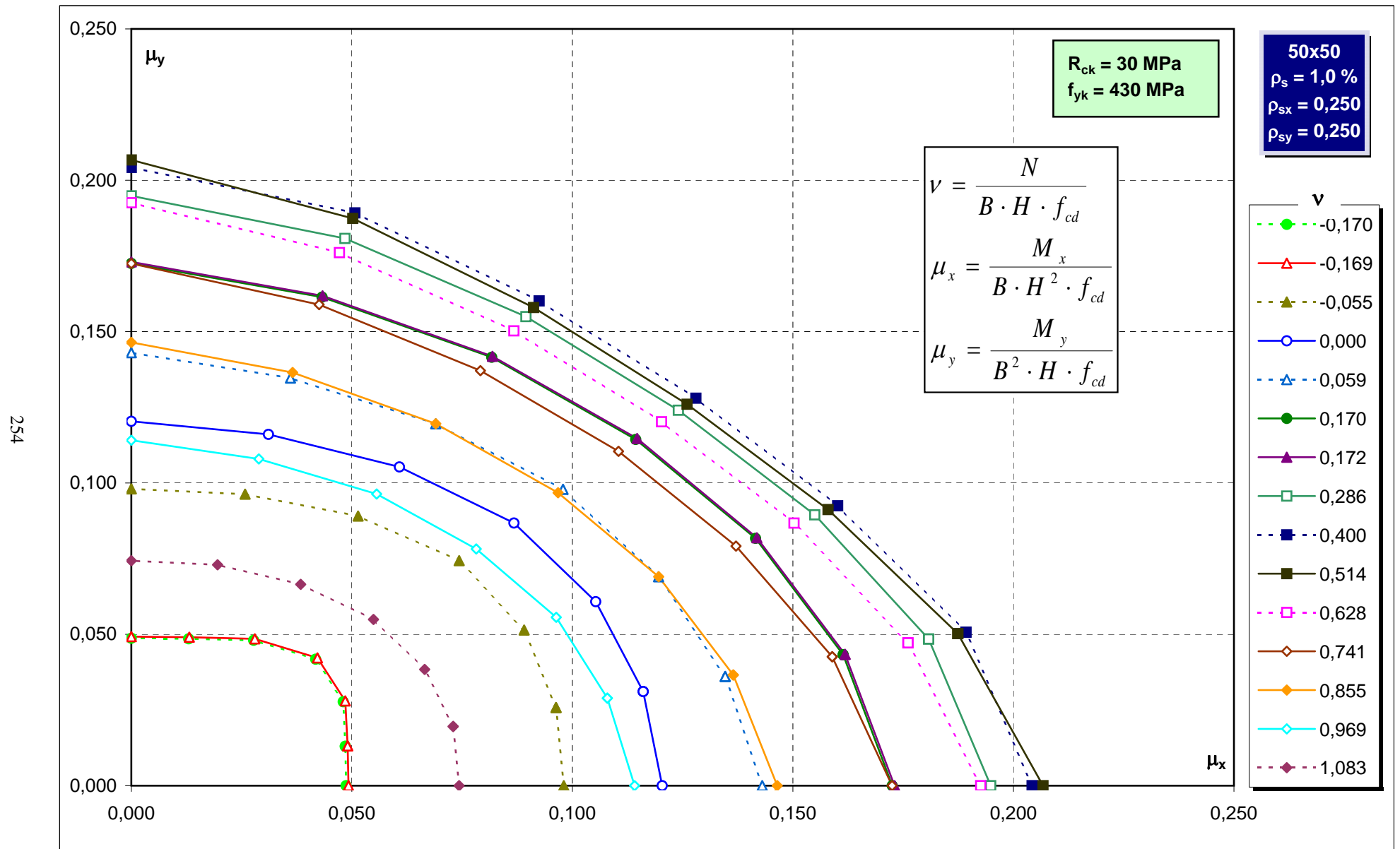
Abachi di verifica



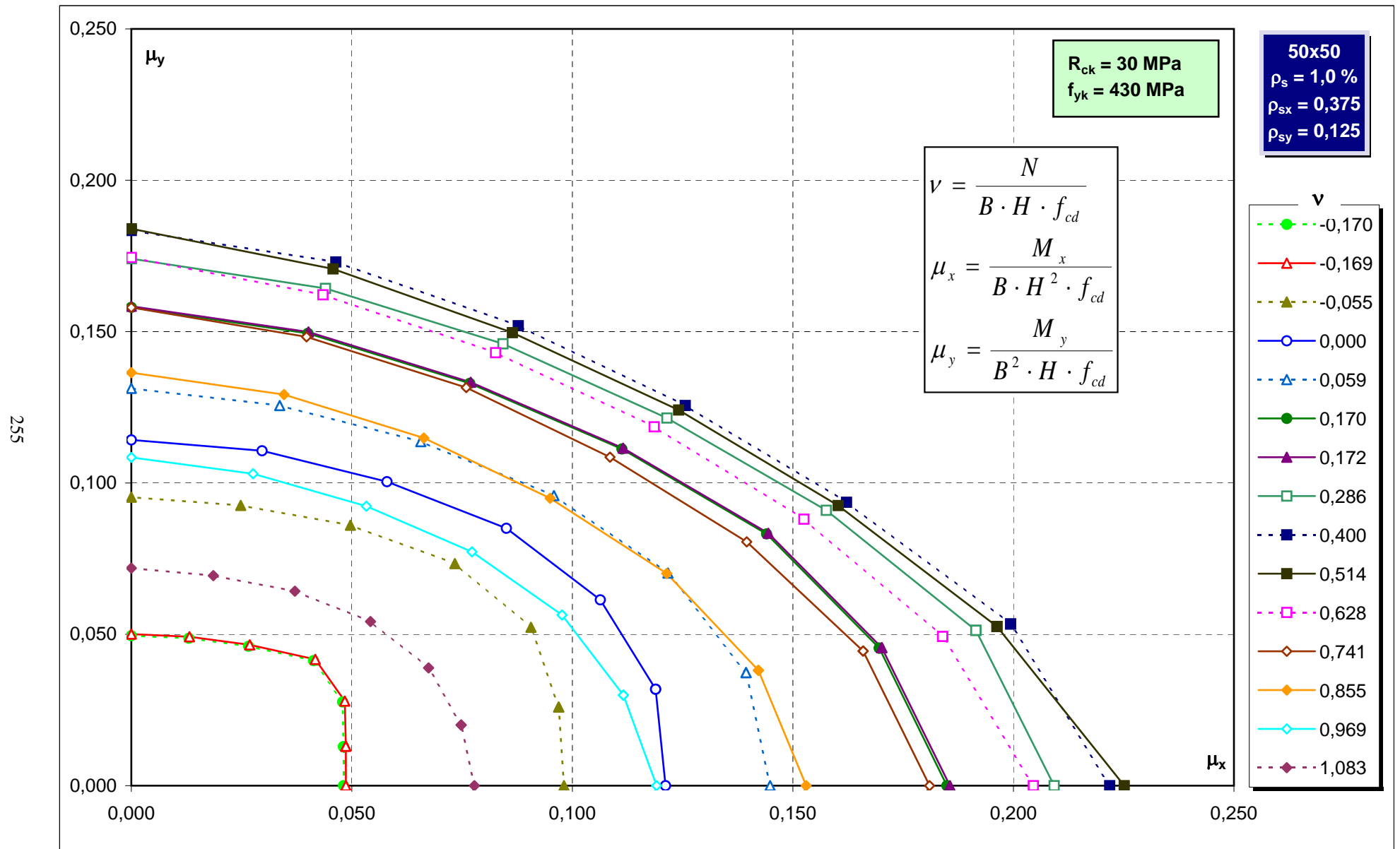
Abachi di verifica



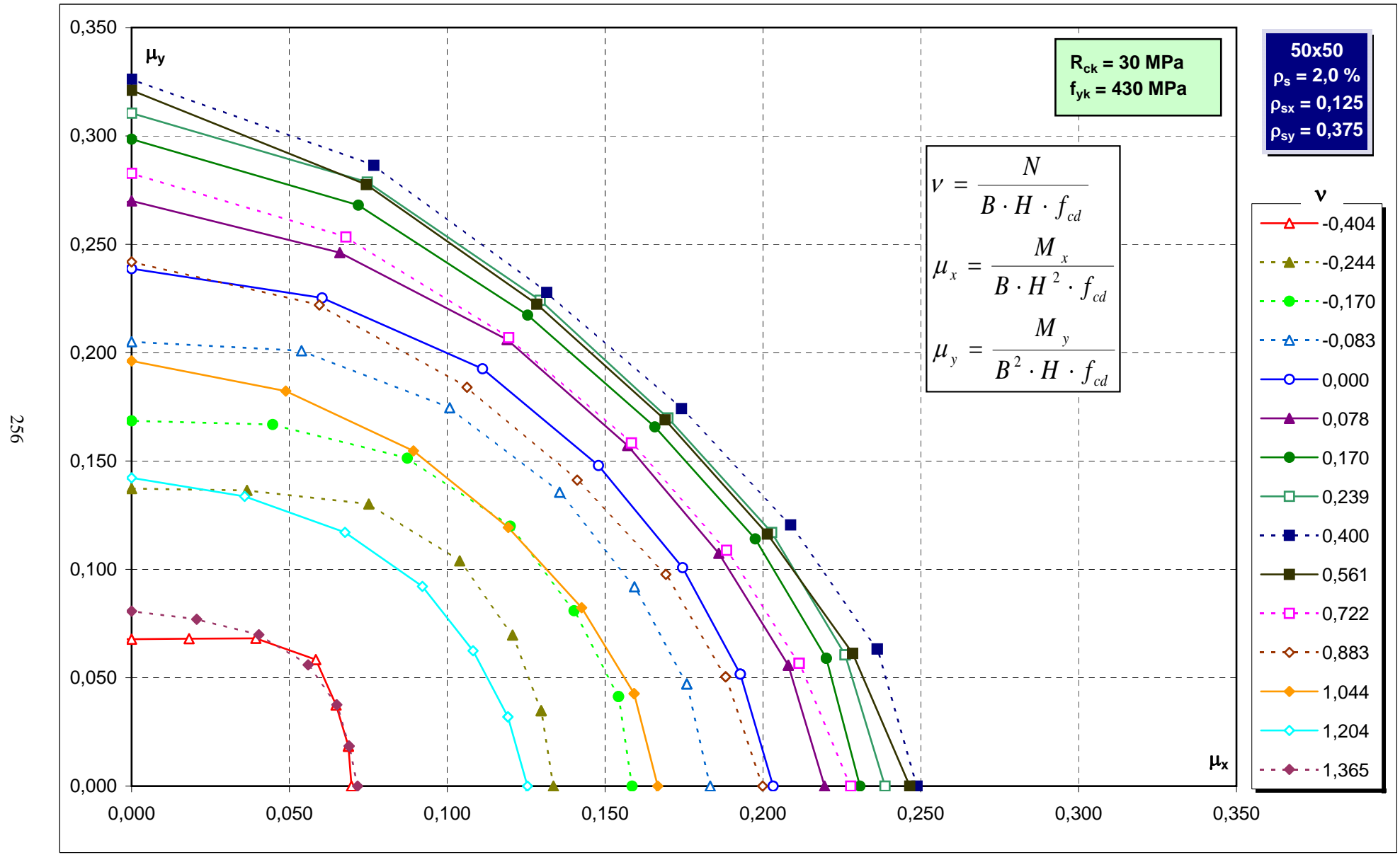
Abachi di verifica



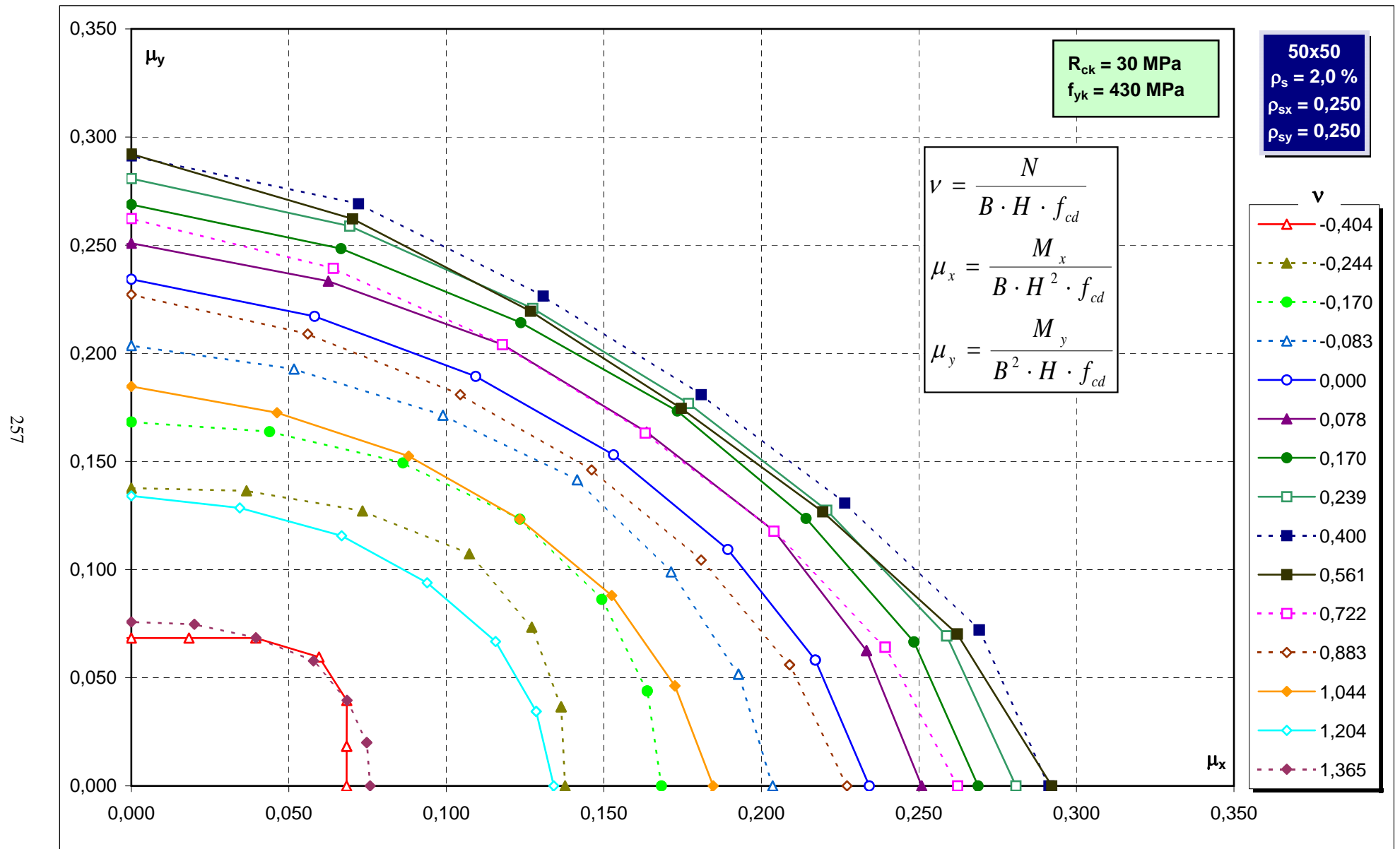
Abachi di verifica



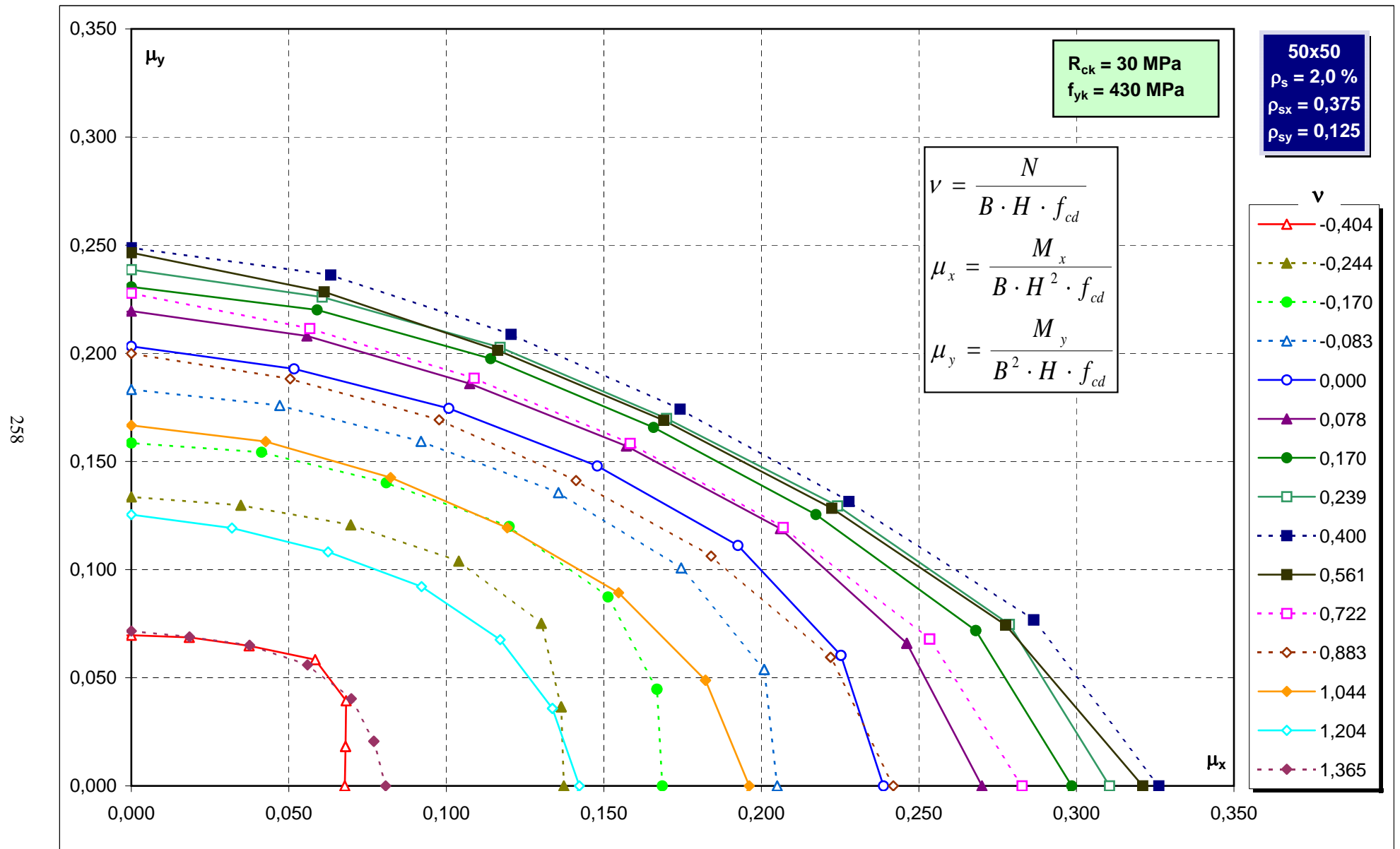
Abachi di verifica



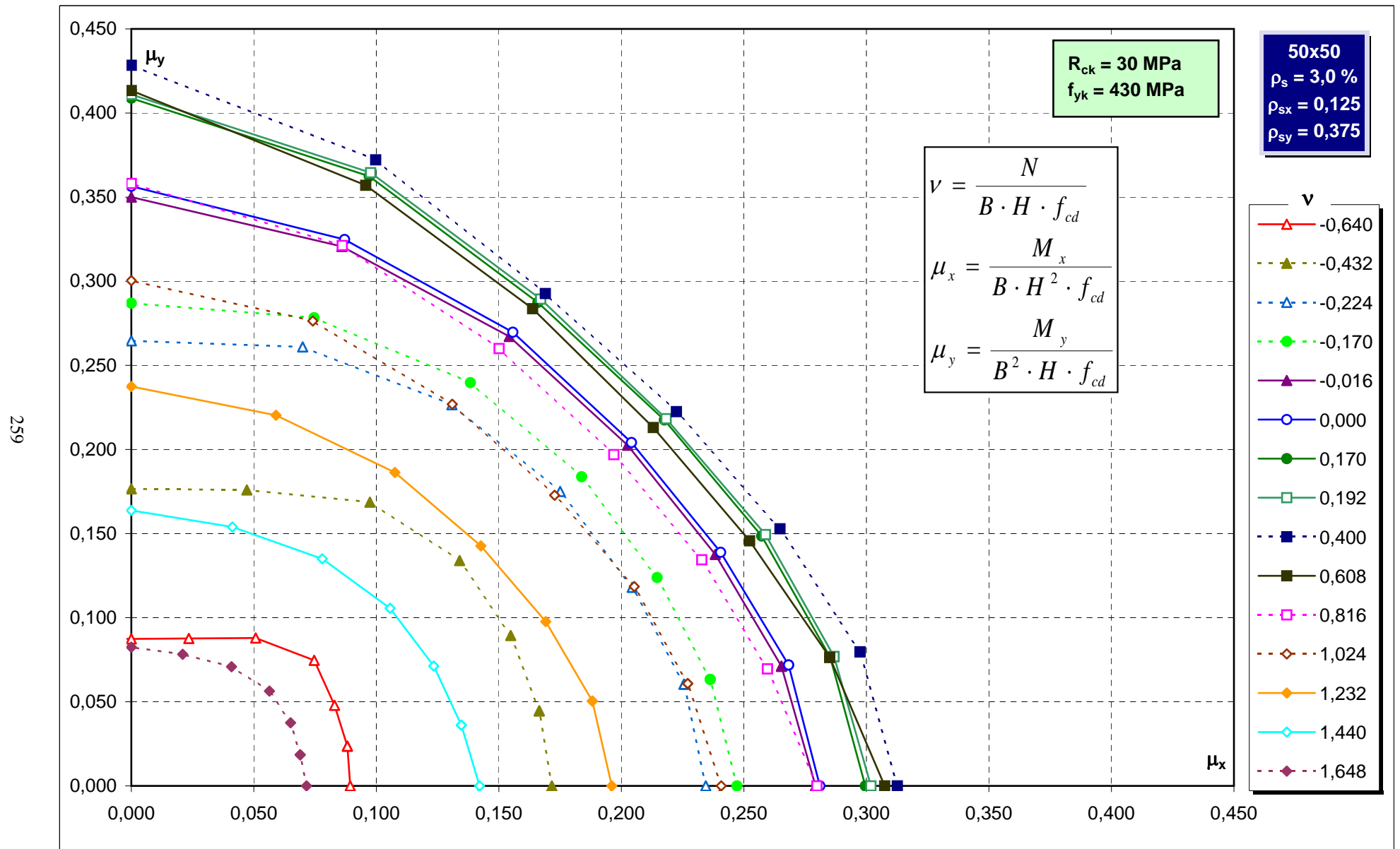
Abachi di verifica



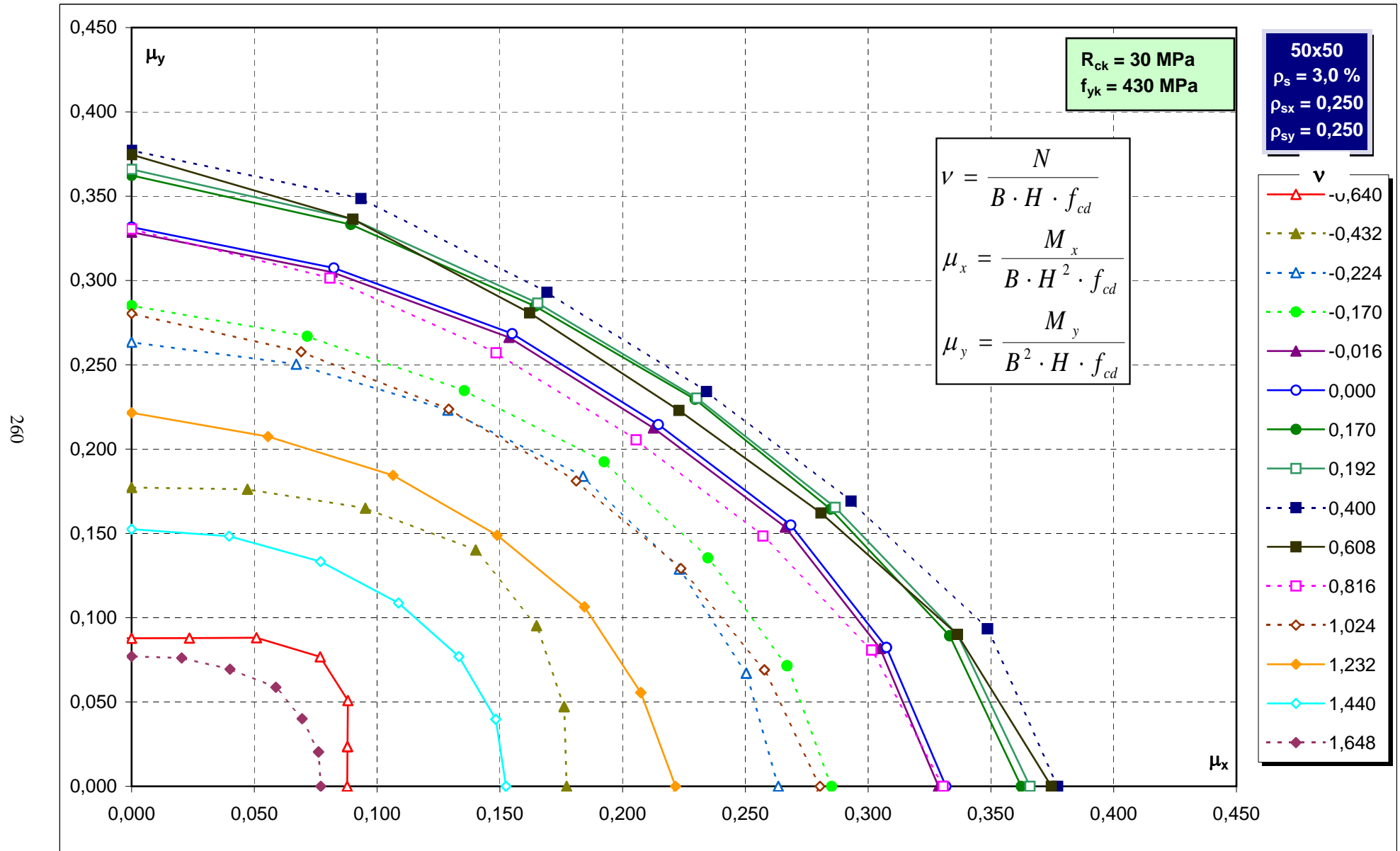
Abachi di verifica



Abachi di verifica

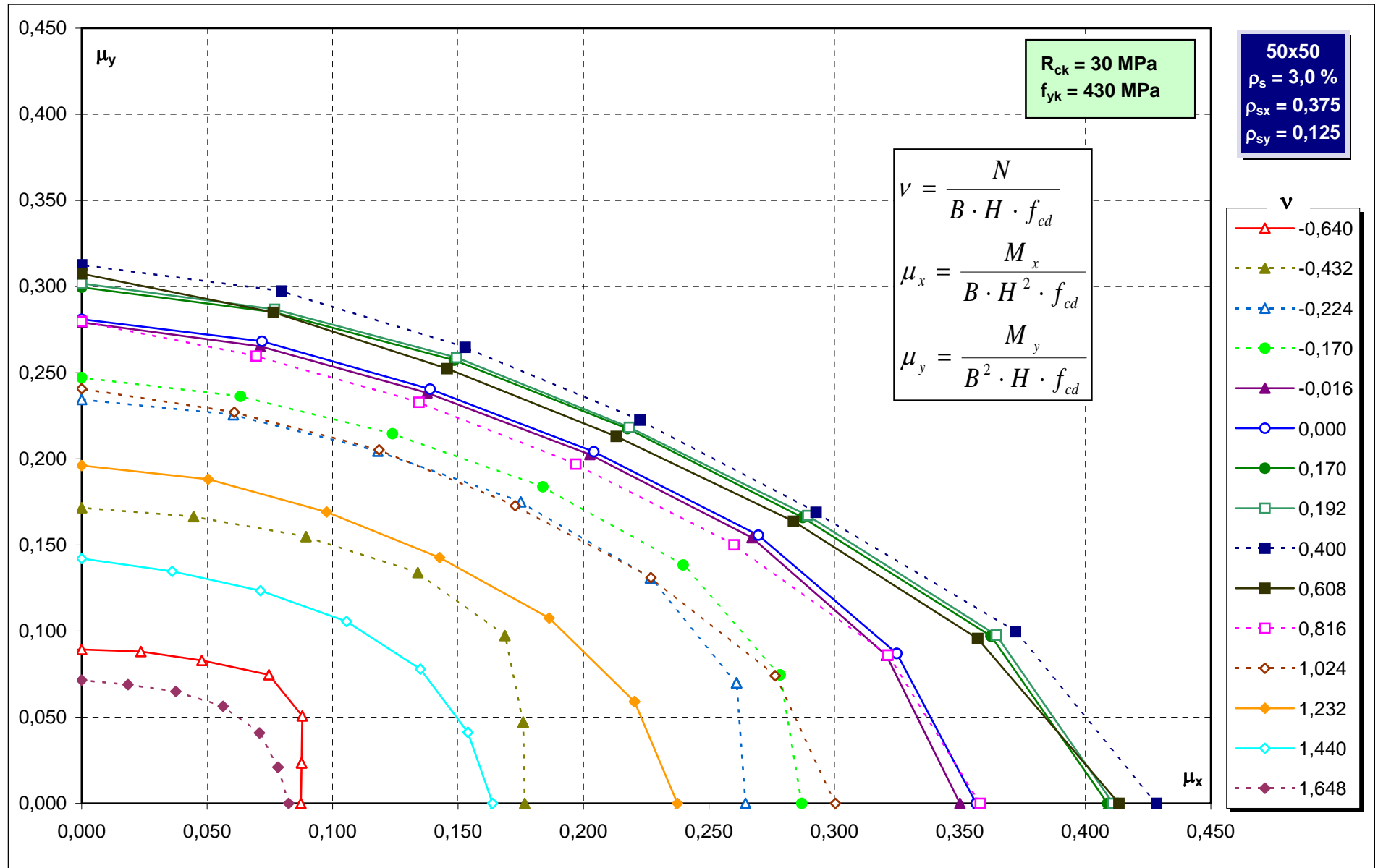


Abachi di verifica

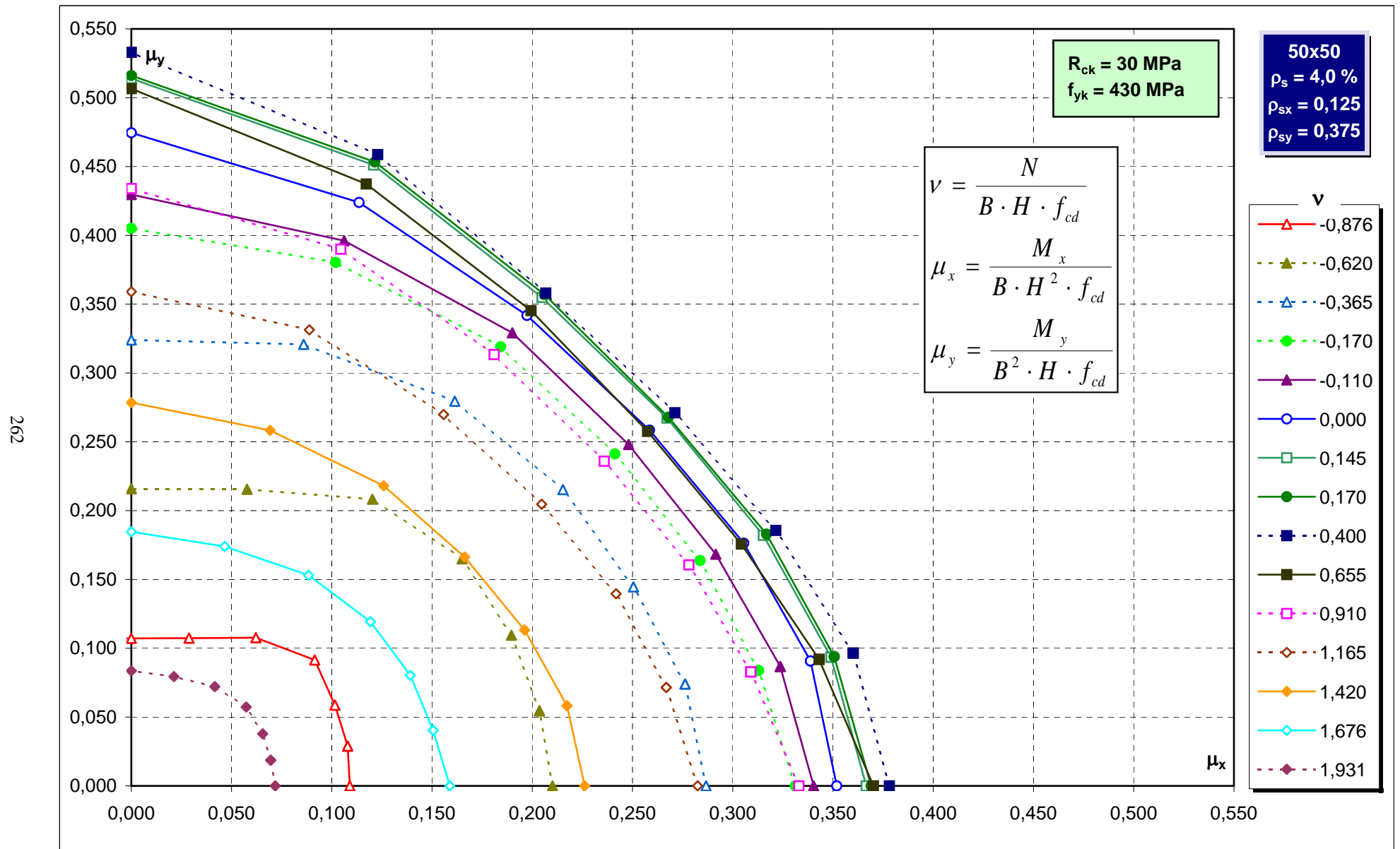


Abachi di verifica

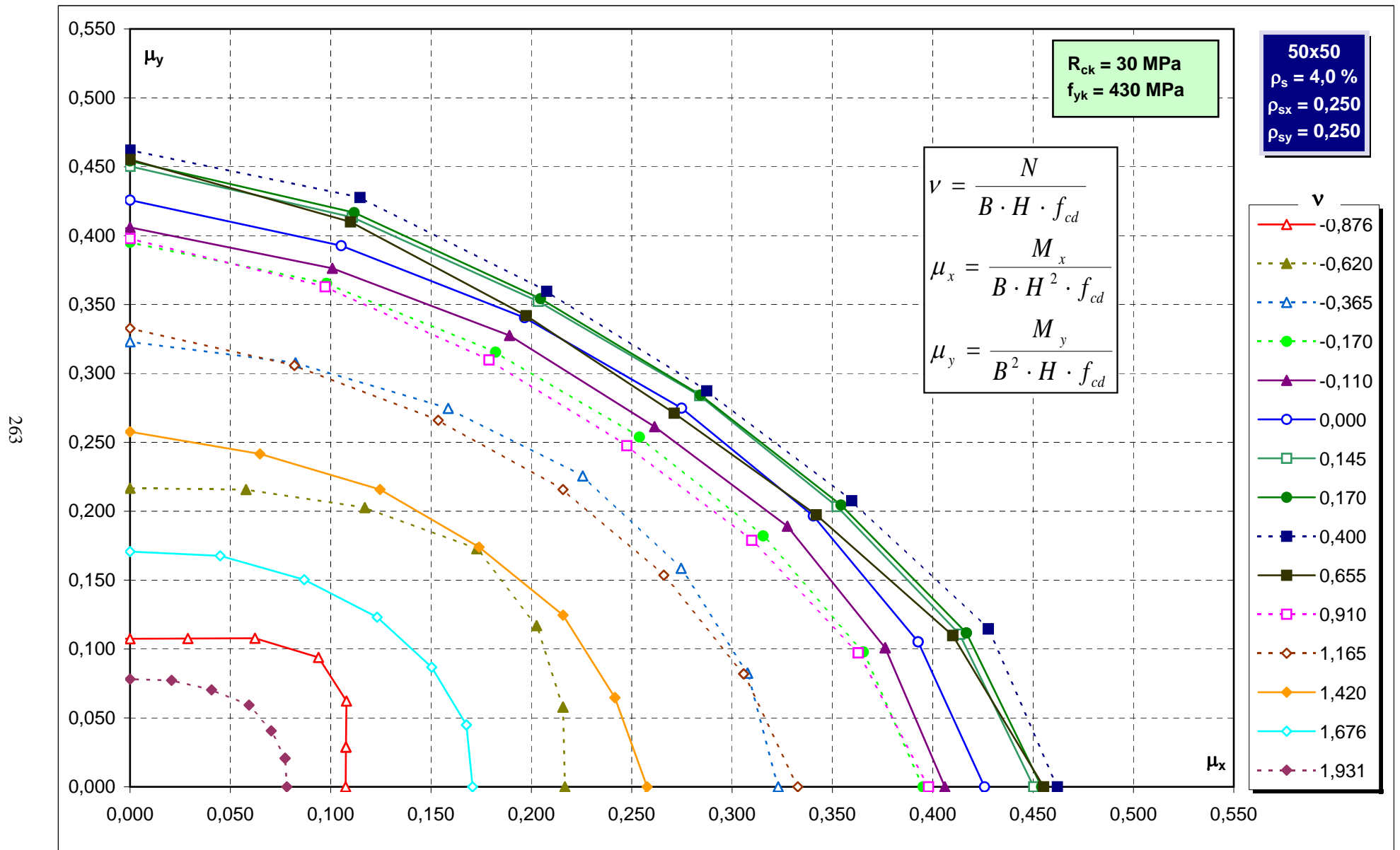
261



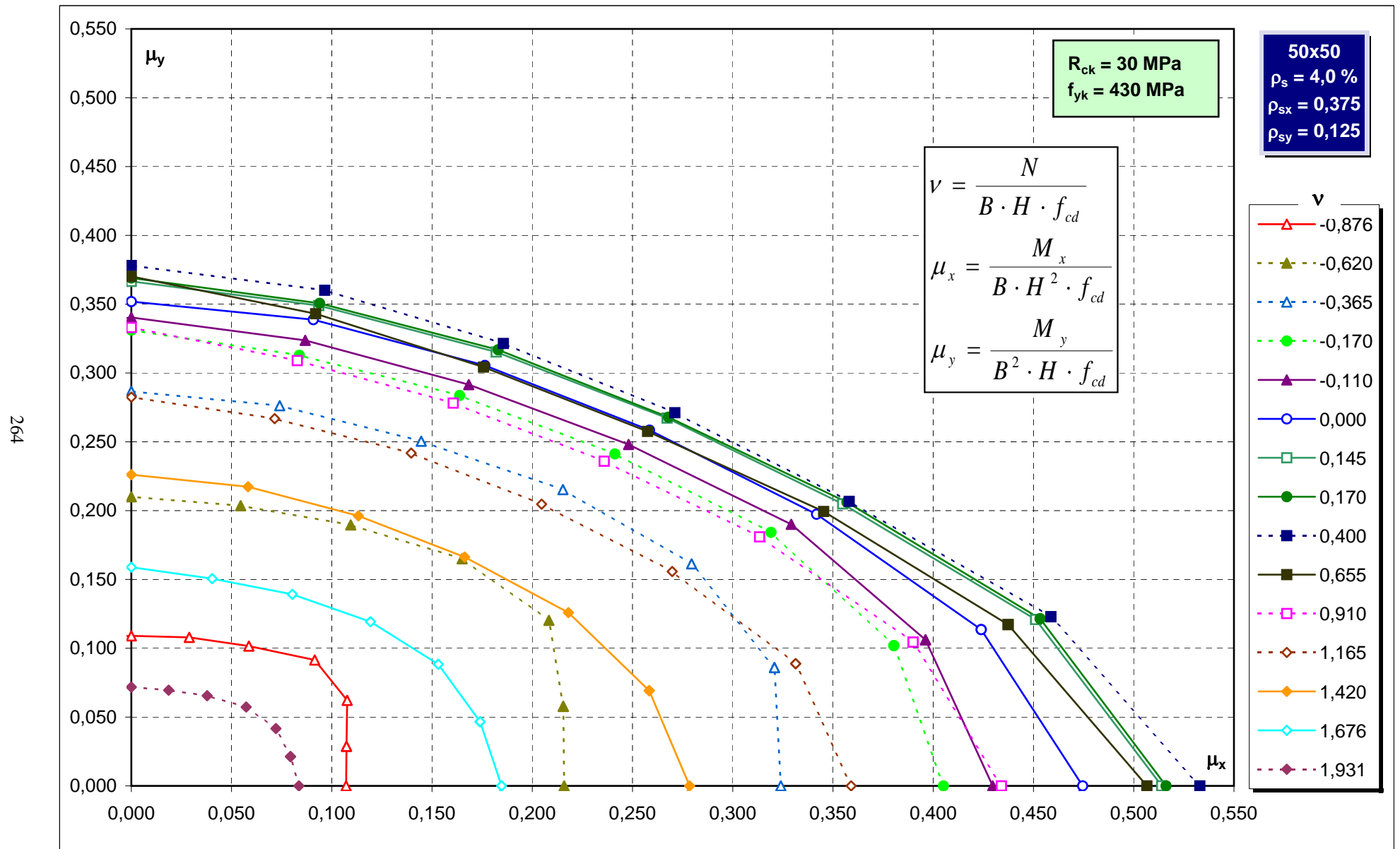
Abachi di verifica



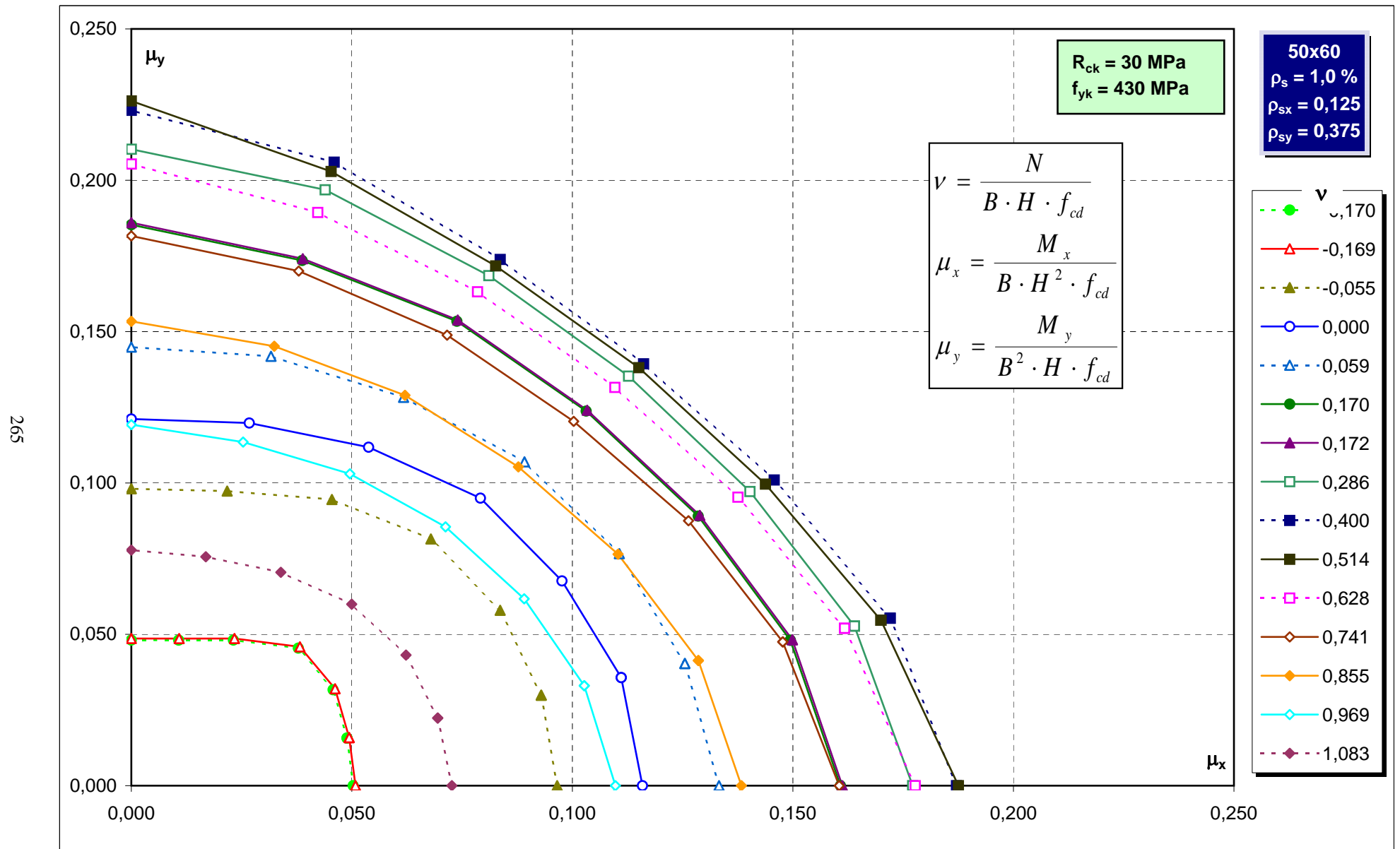
Abachi di verifica



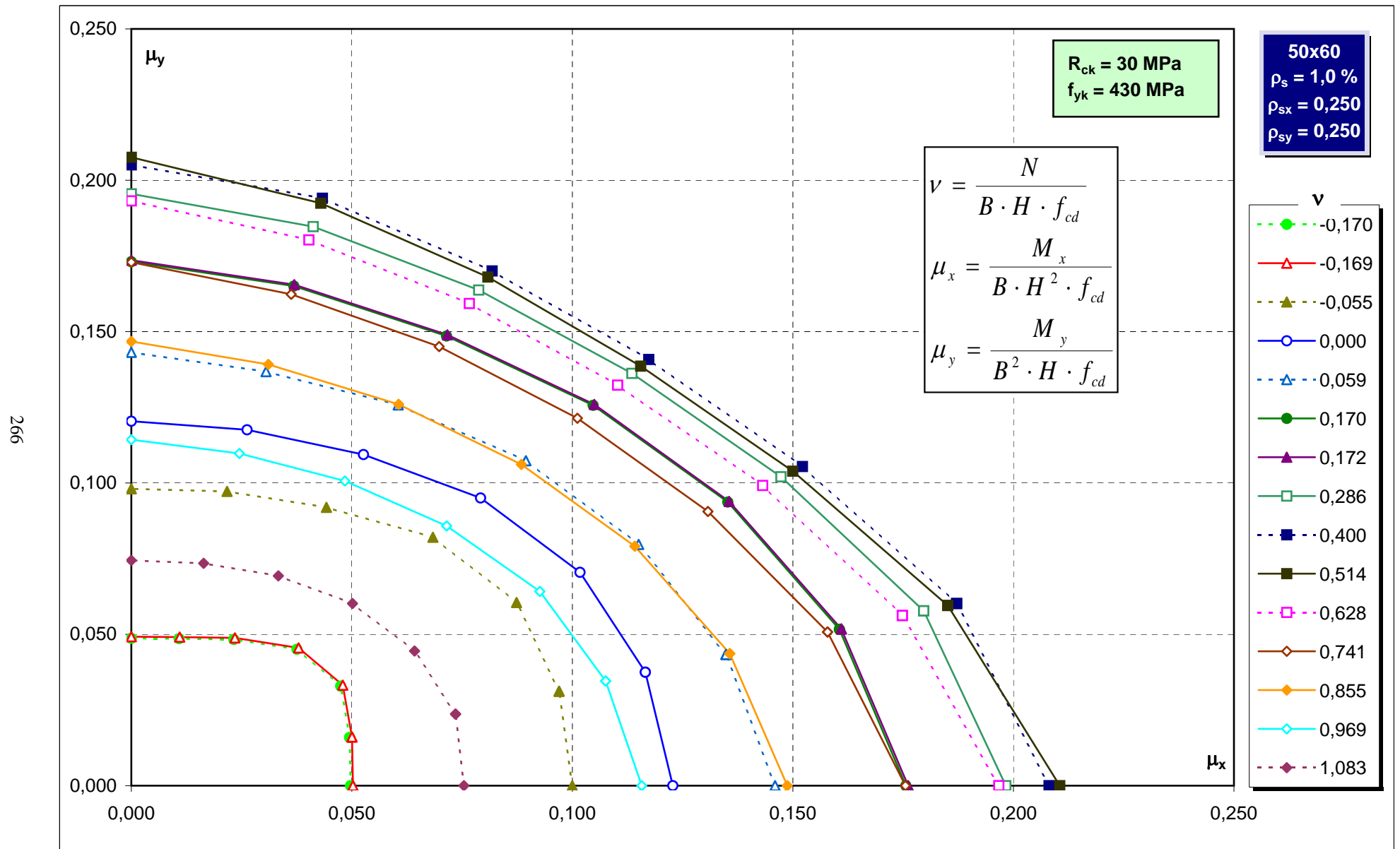
Abachi di verifica



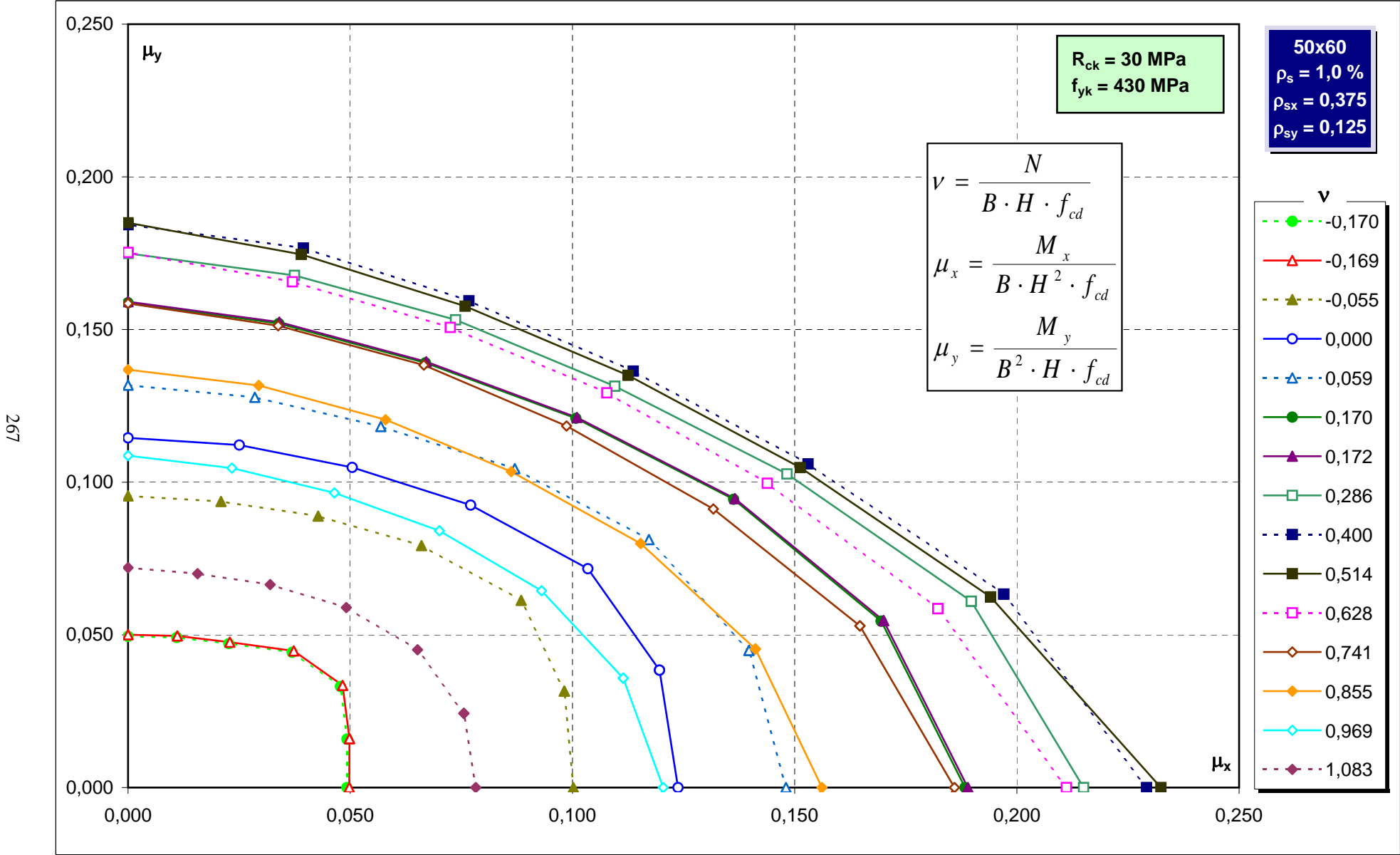
Abachi di verifica



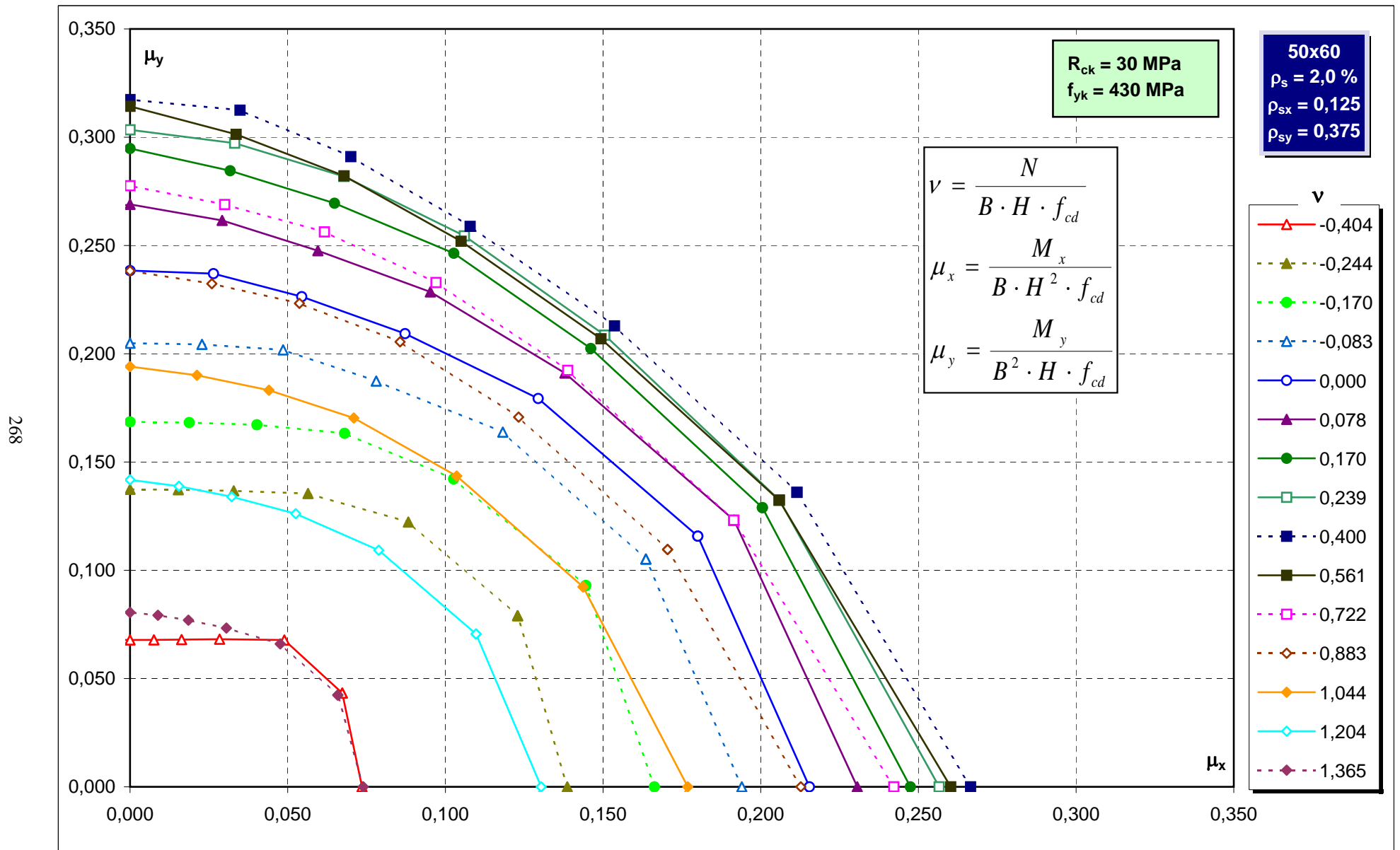
Abachi di verifica



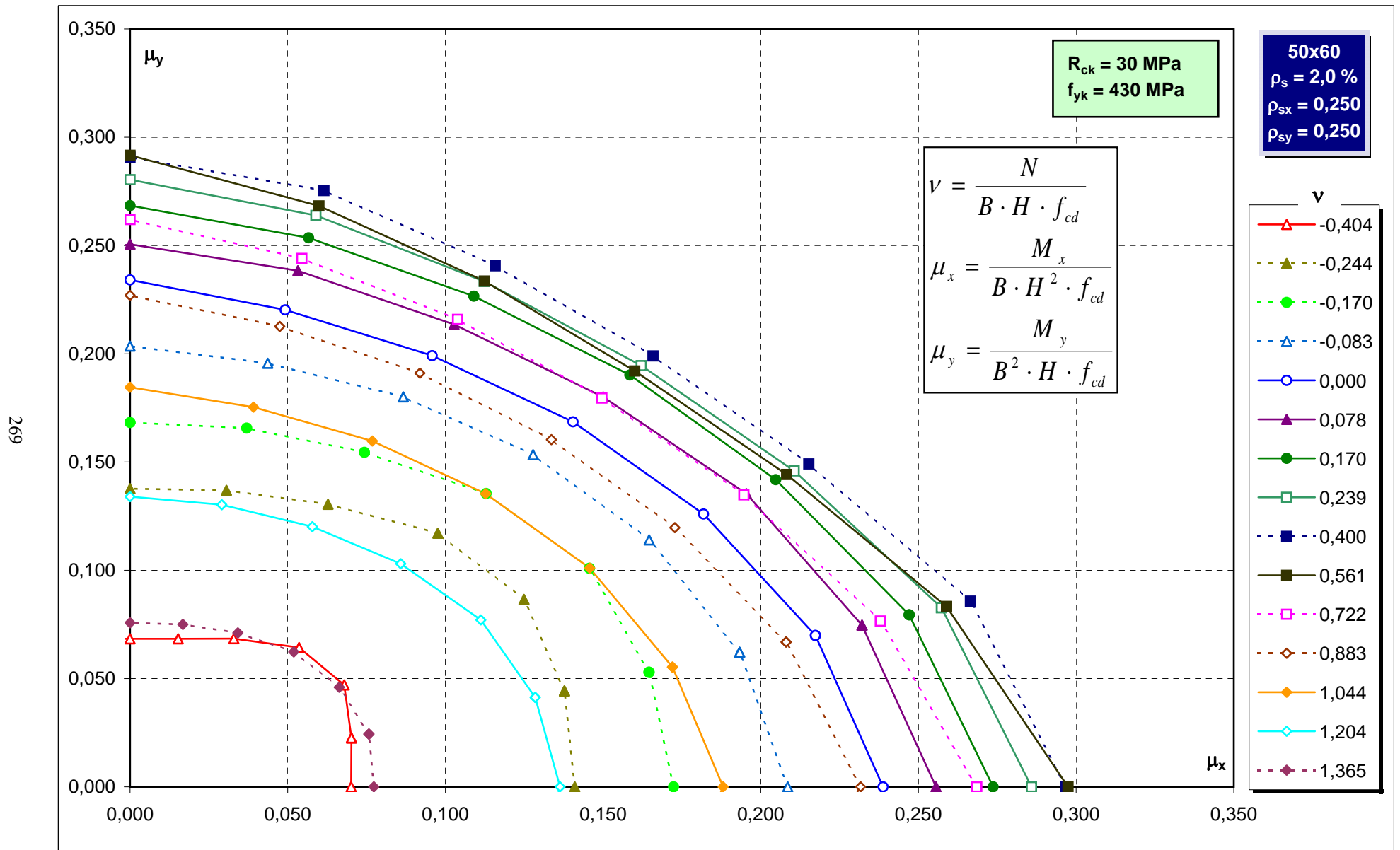
Abachi di verifica



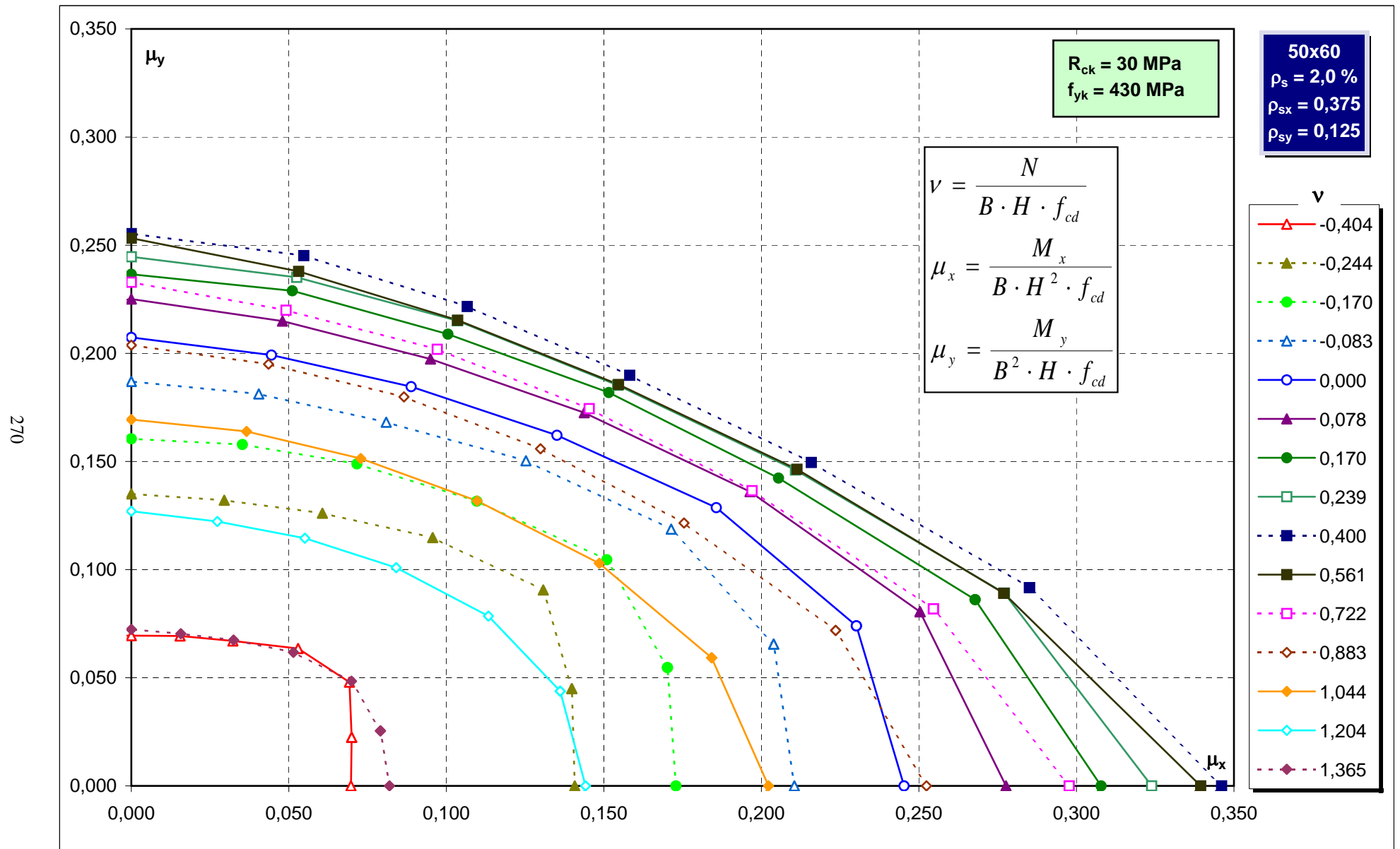
Abachi di verifica



Abachi di verifica

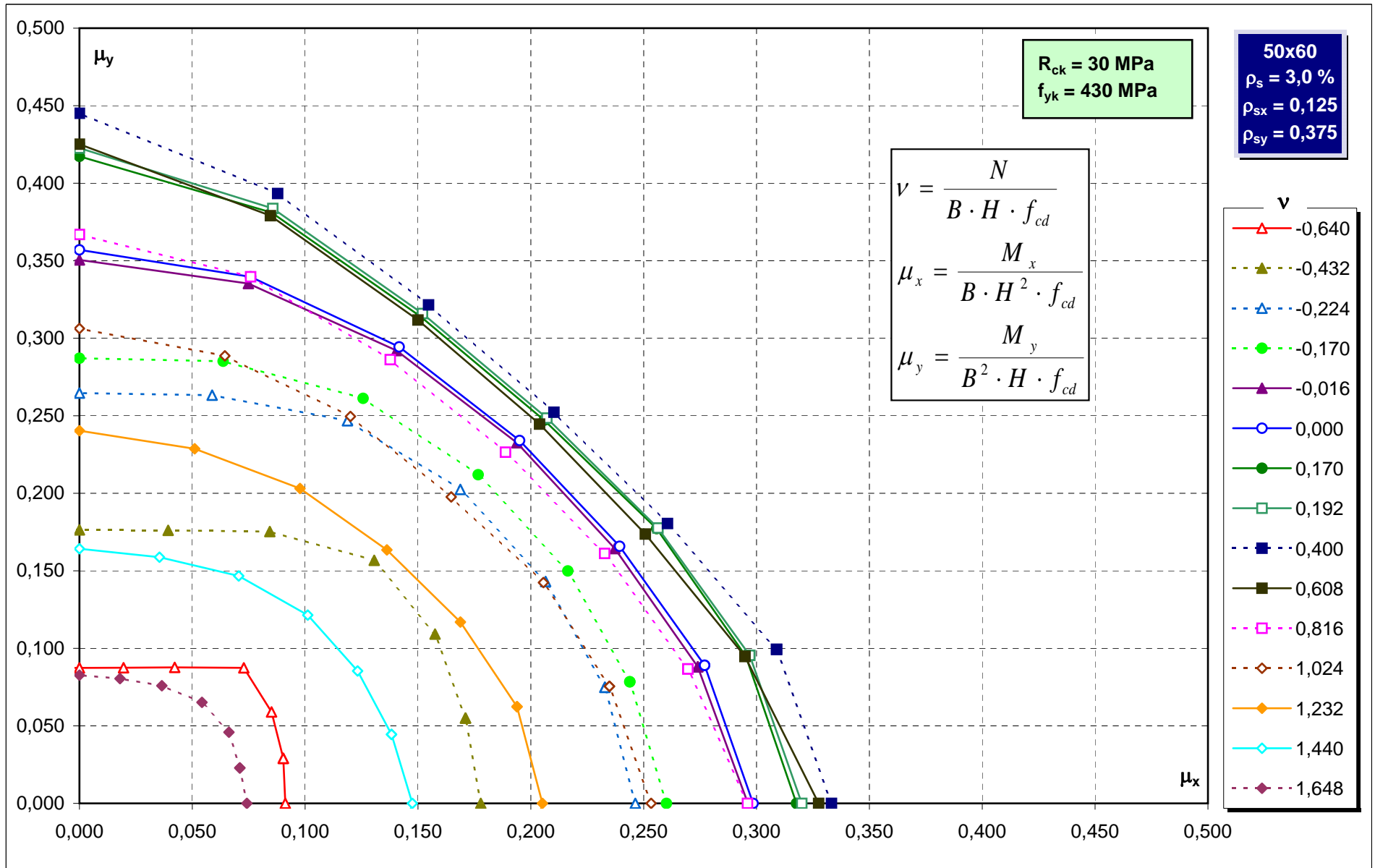


Abachi di verifica

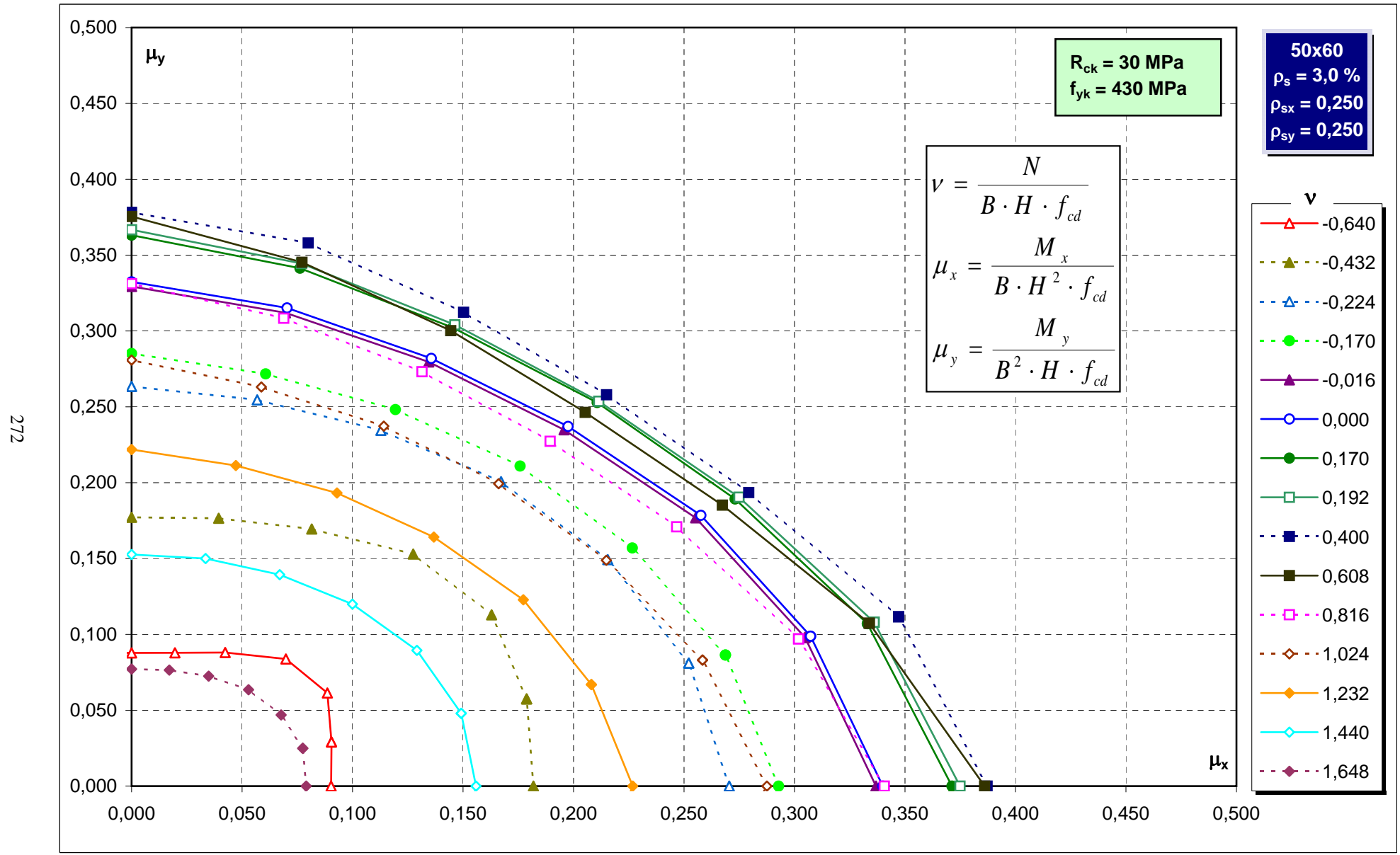


Abachi di verifica

271

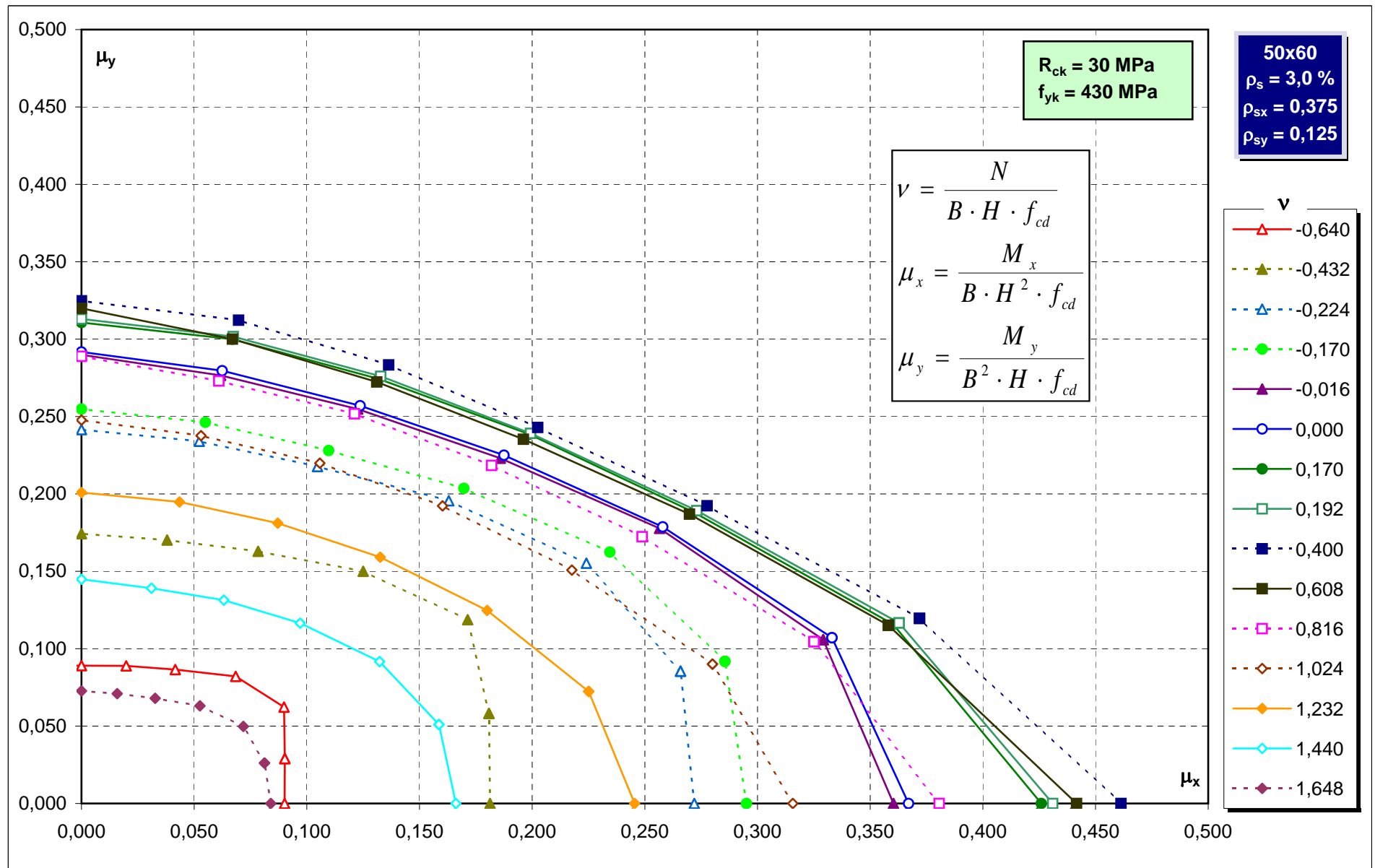


Abachi di verifica



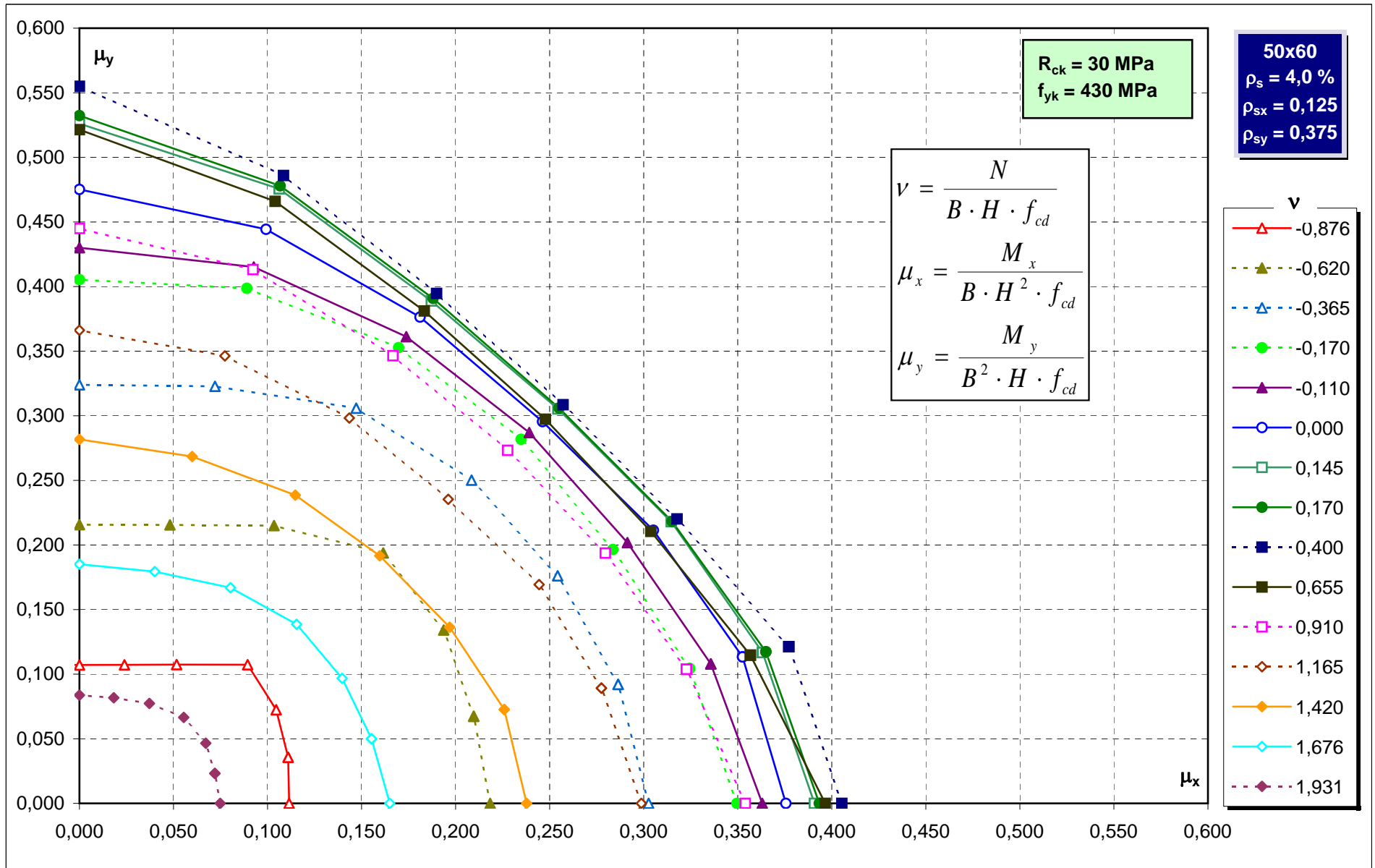
Abachi di verifica

273

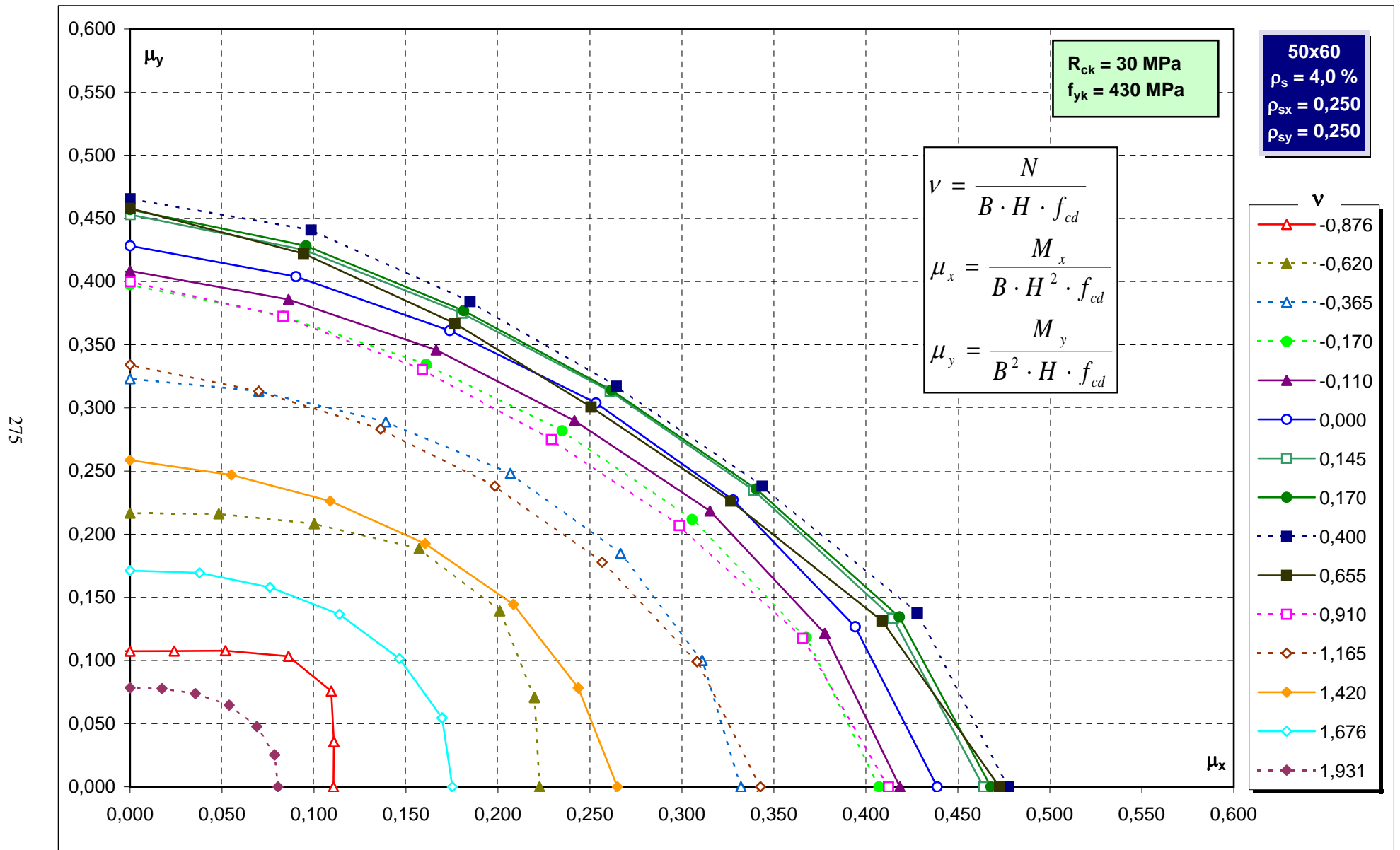


Abachi di verifica

274

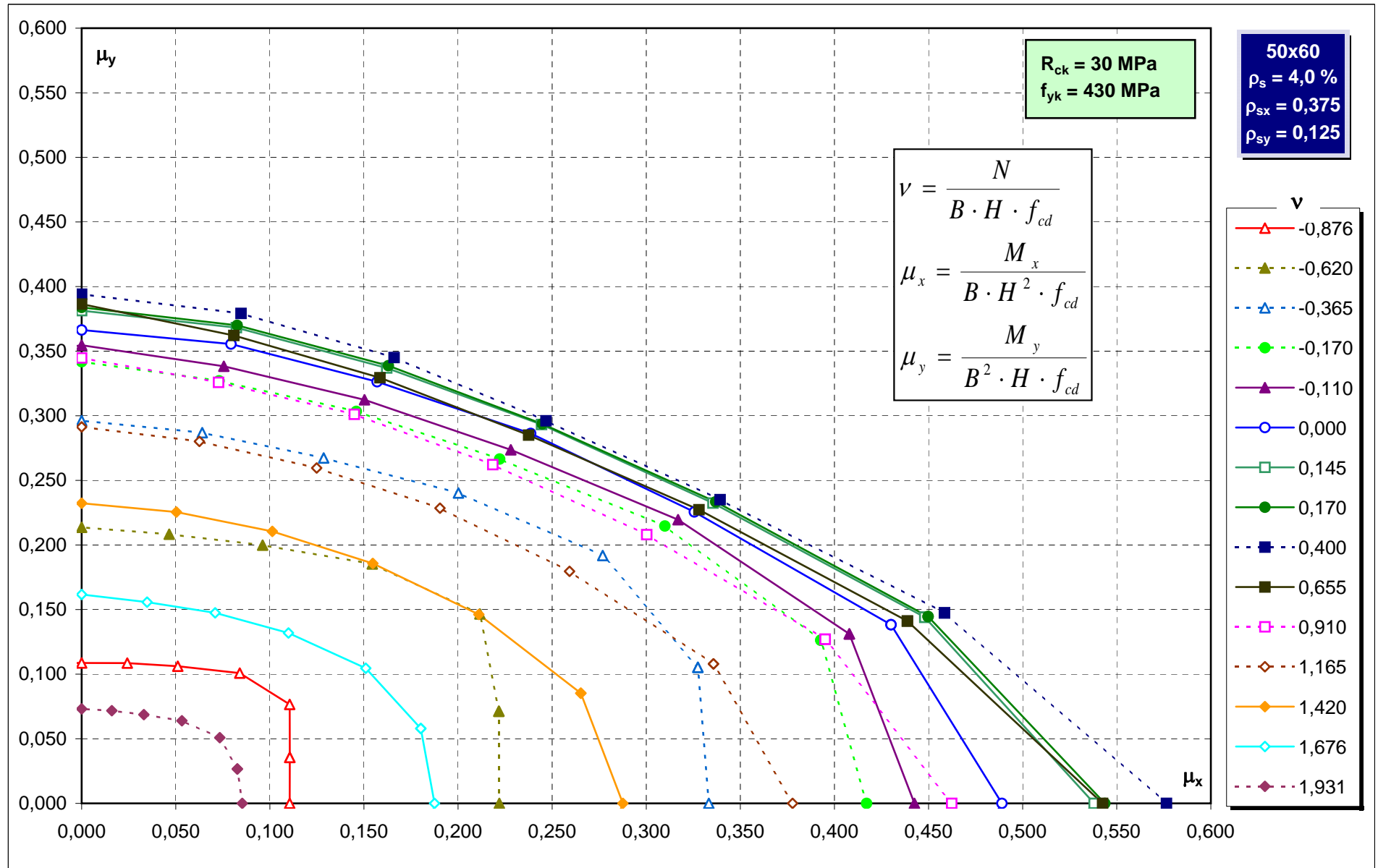


Abachi di verifica

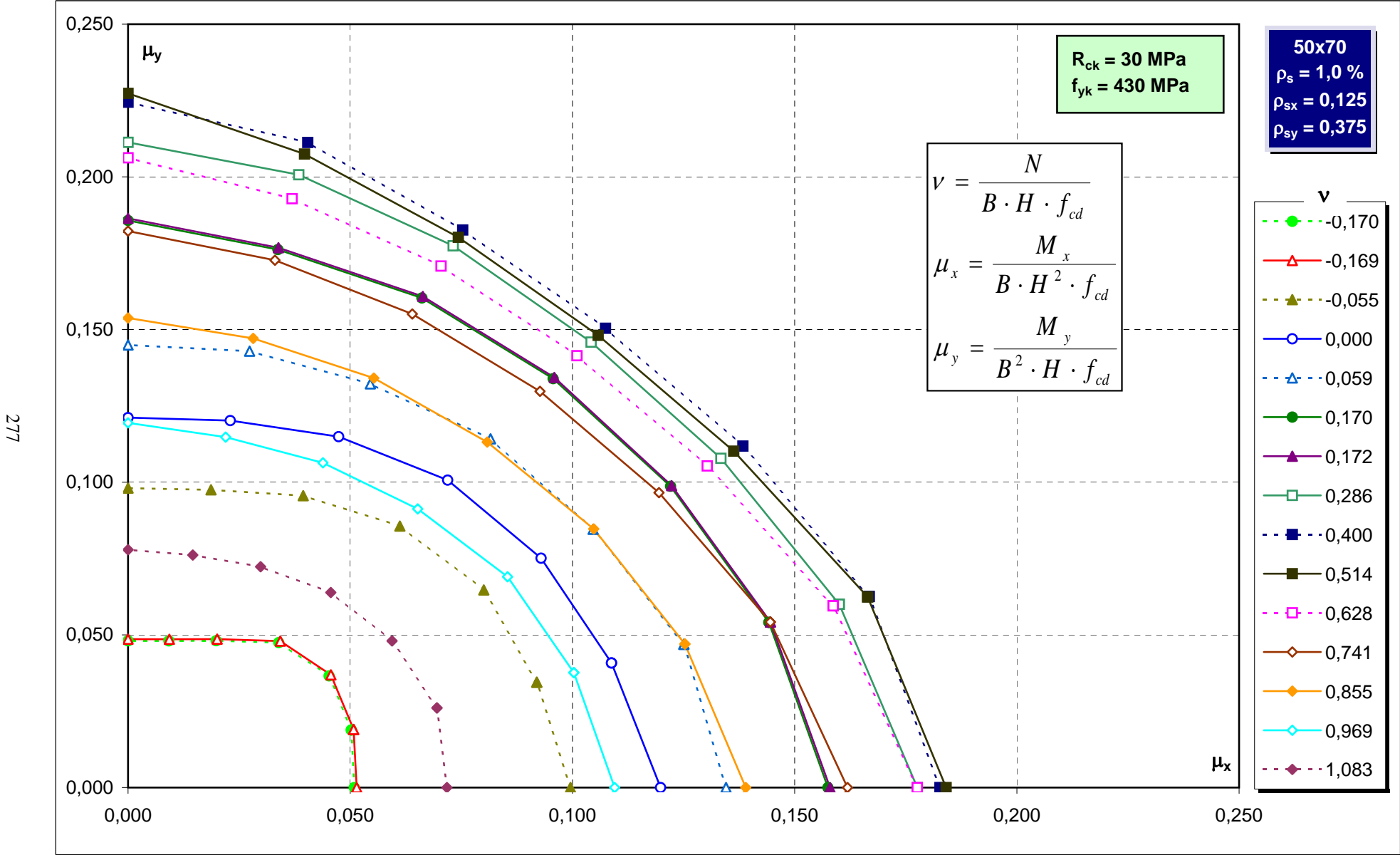


Abachi di verifica

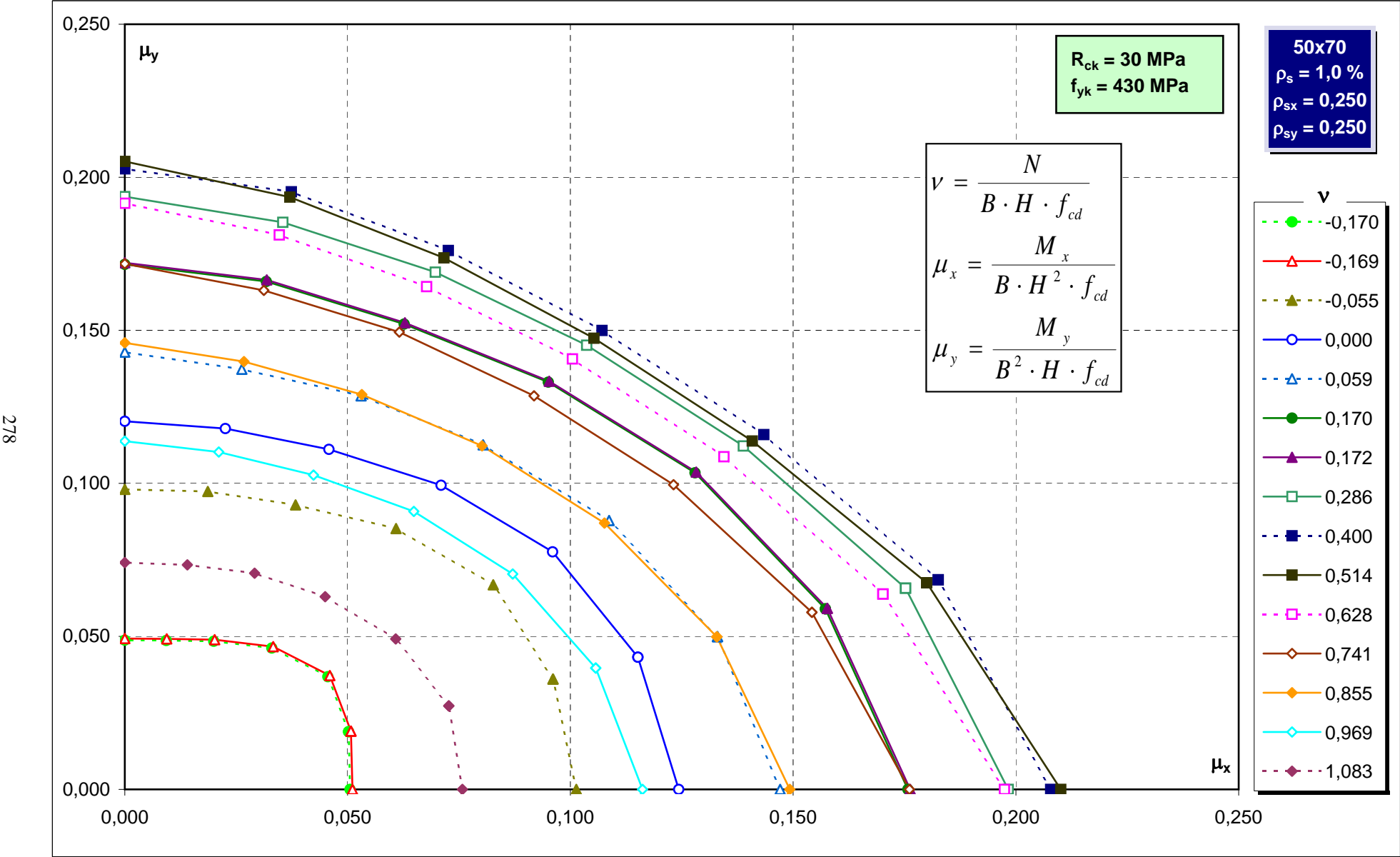
276



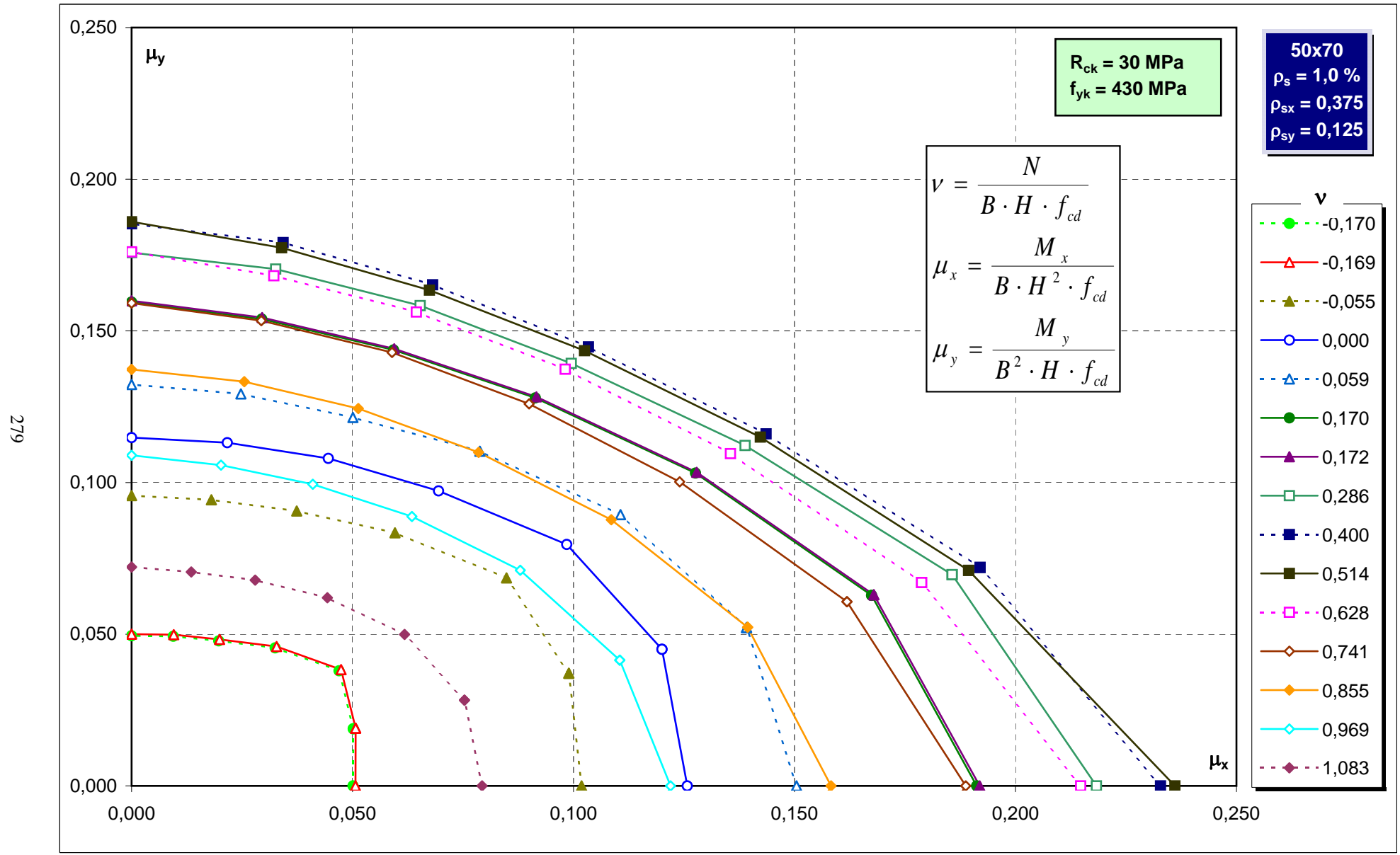
Abachi di verifica



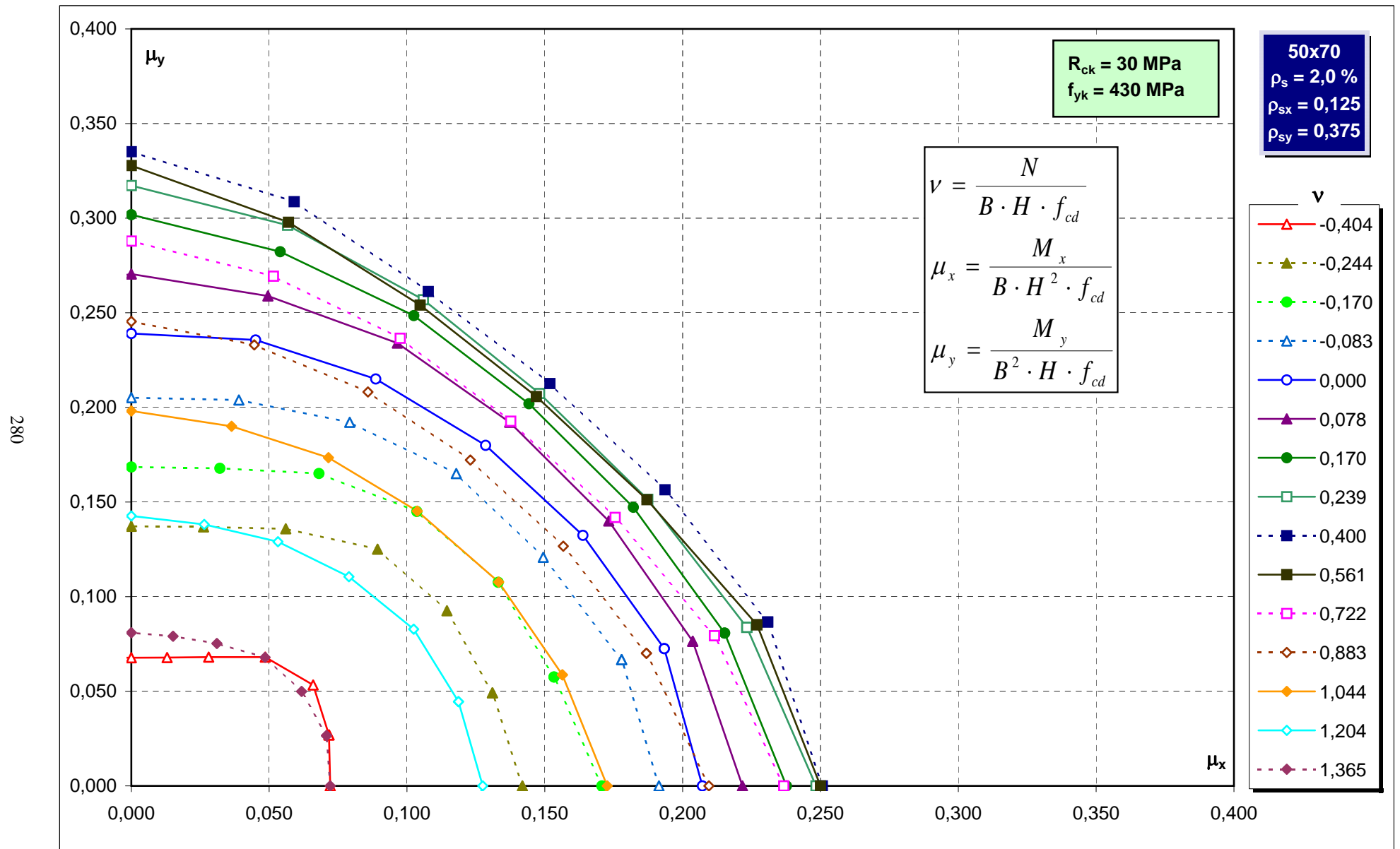
Abachi di verifica



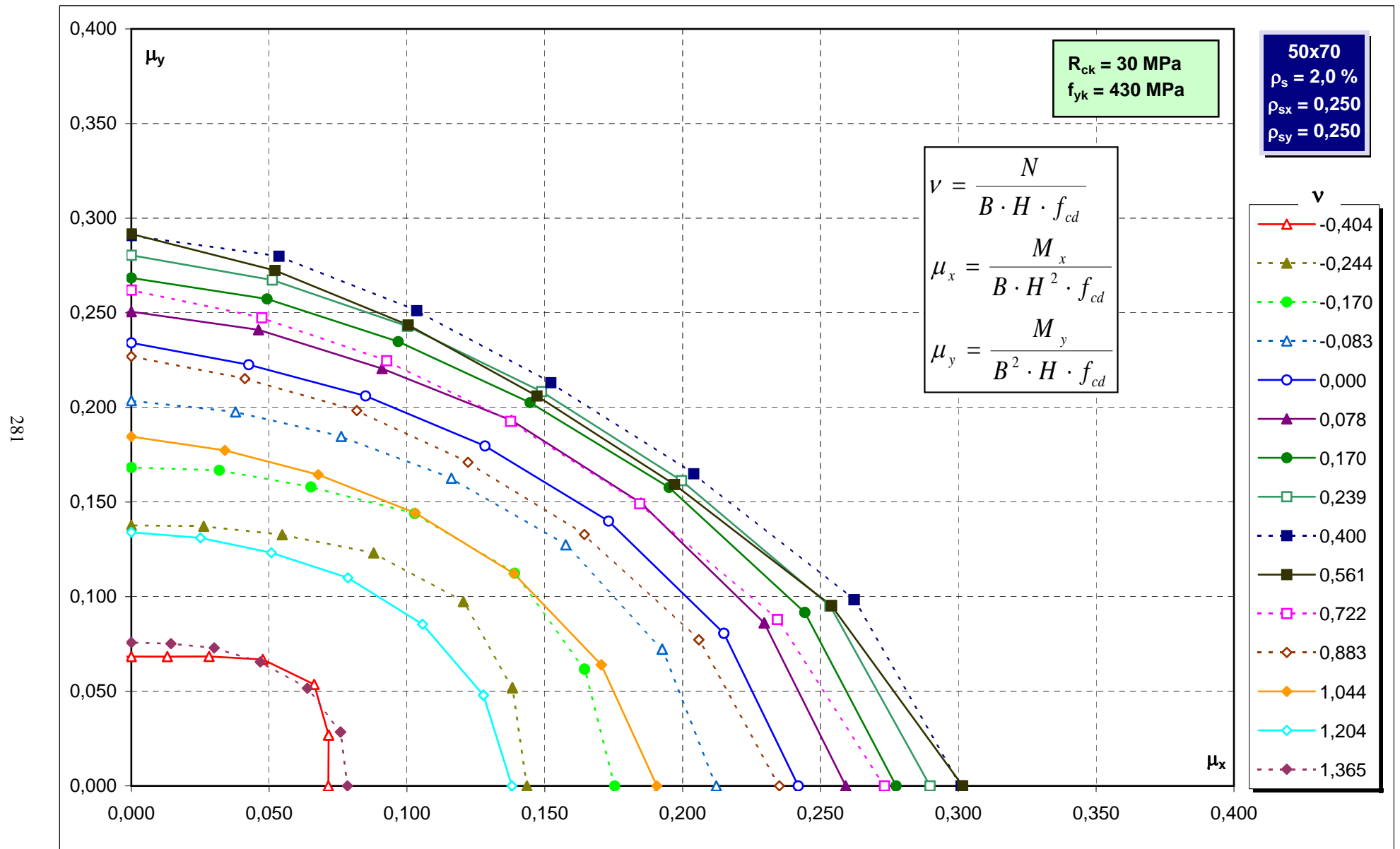
Abachi di verifica



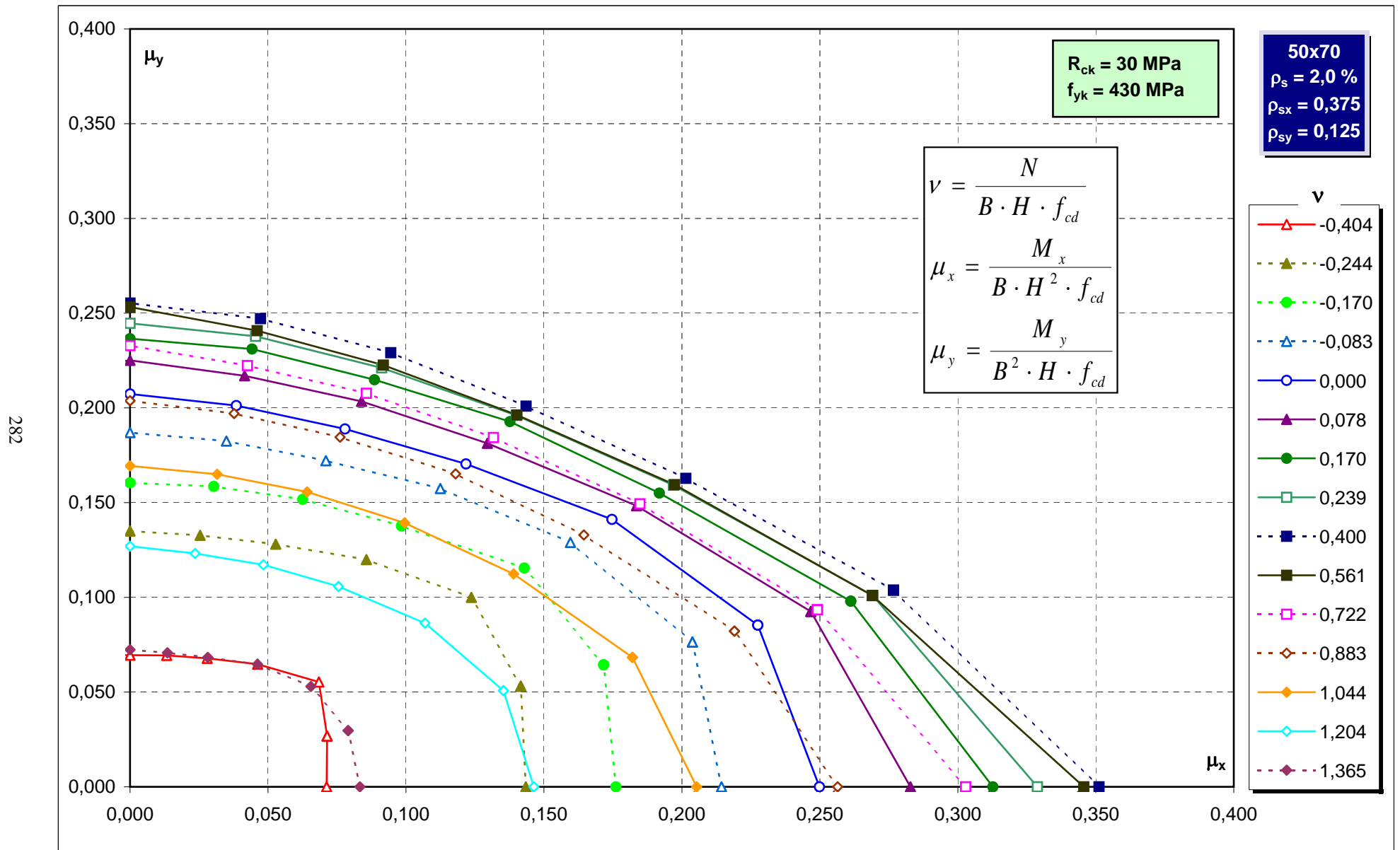
Abachi di verifica



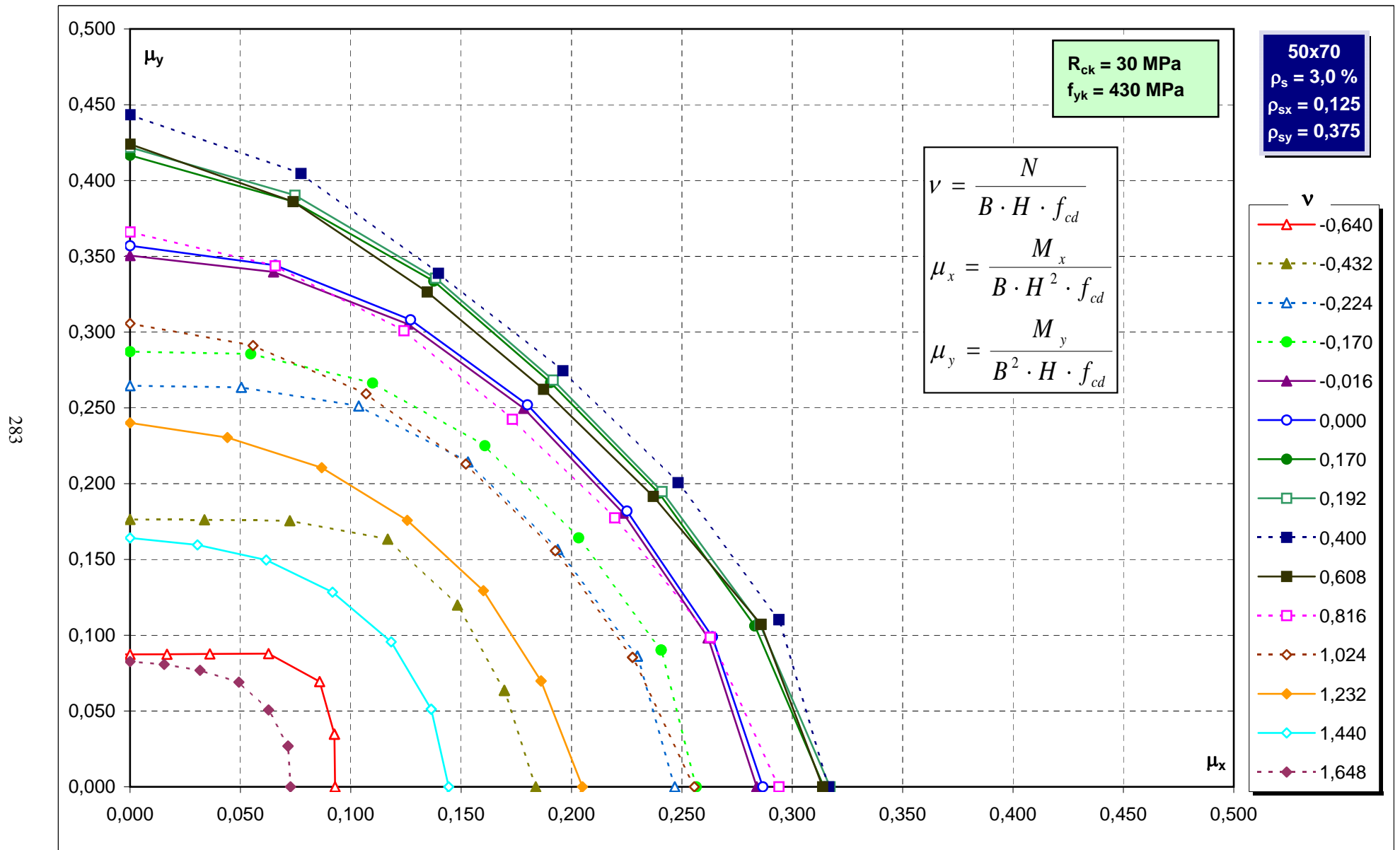
Abachi di verifica



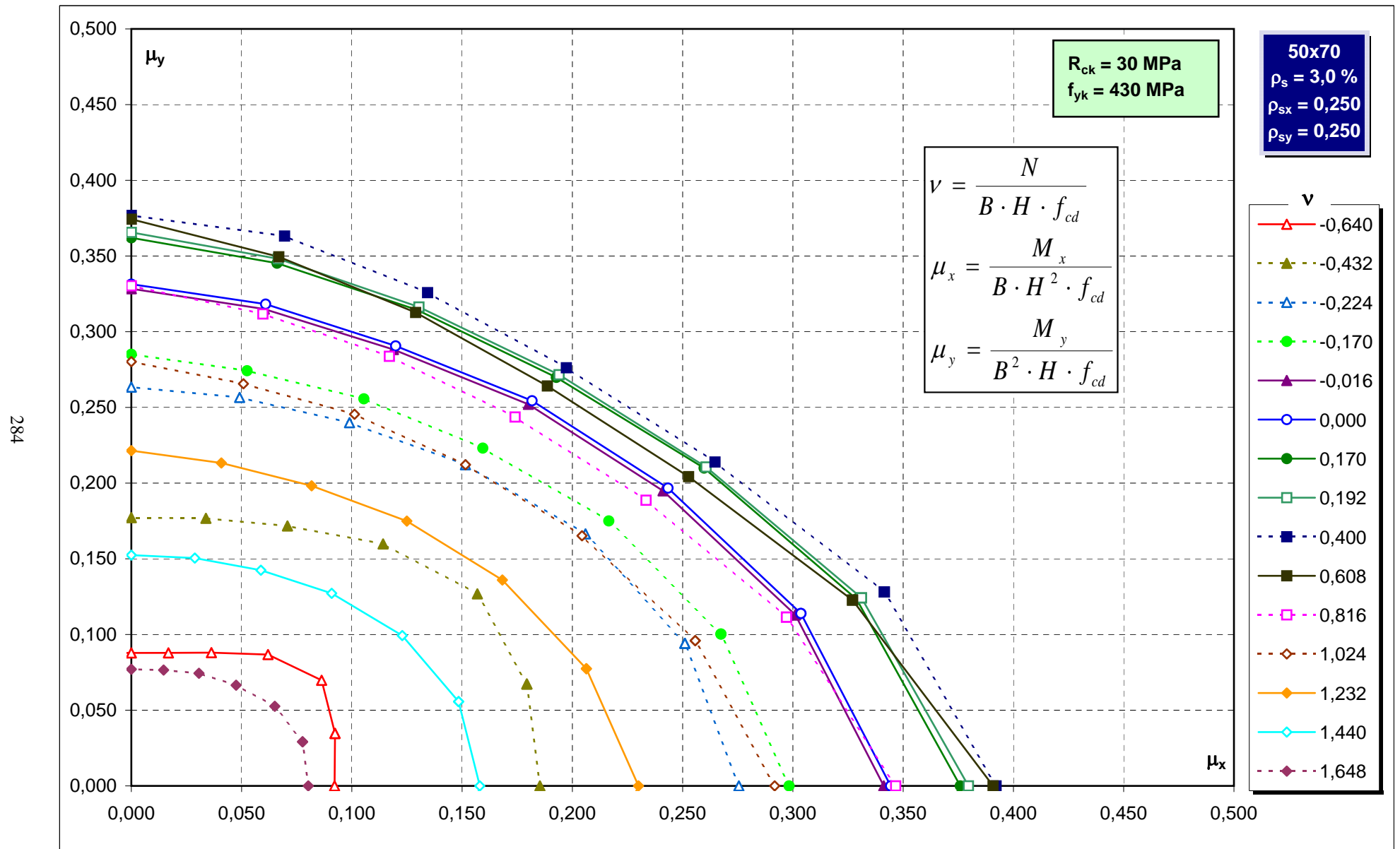
Abachi di verifica



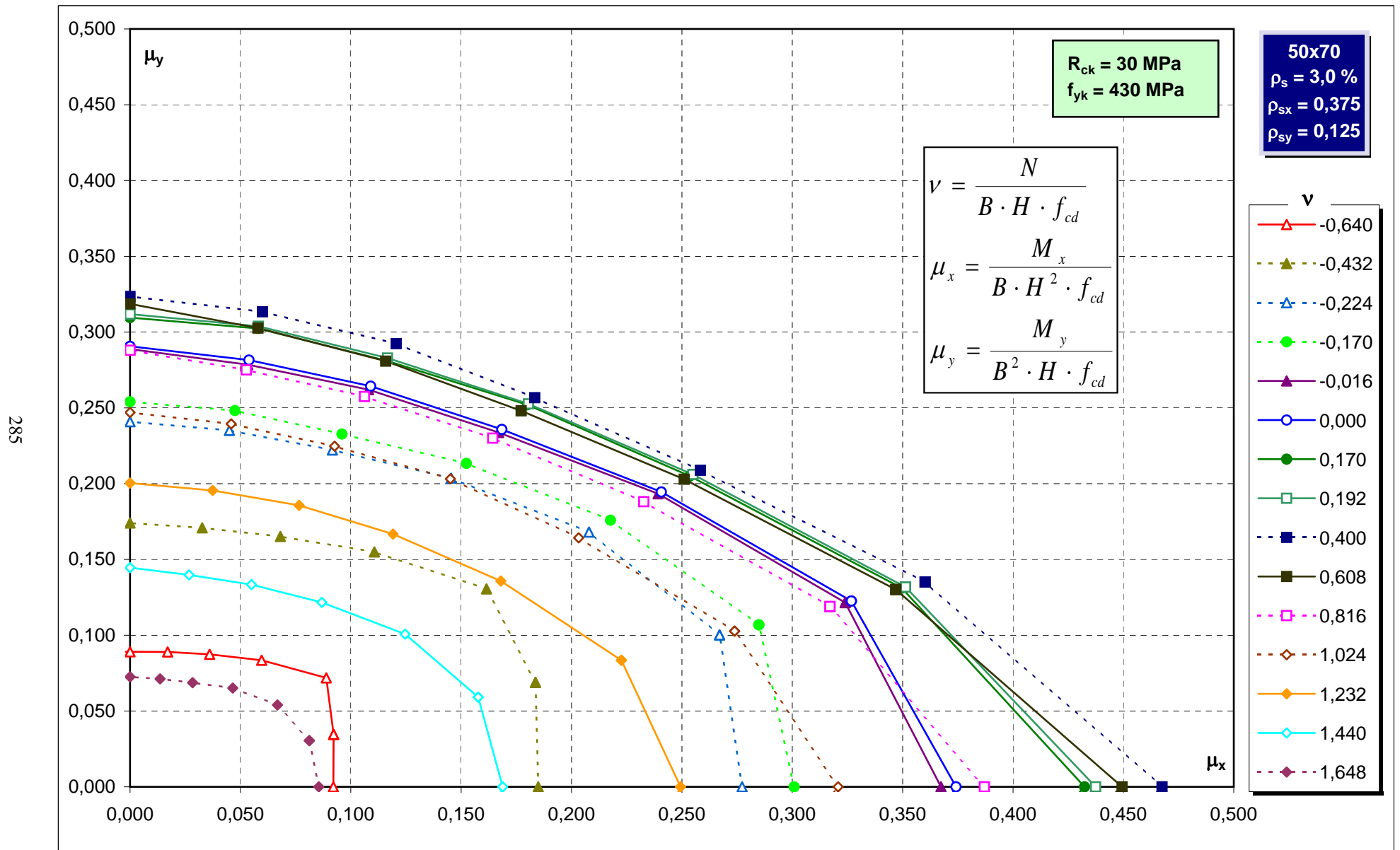
Abachi di verifica



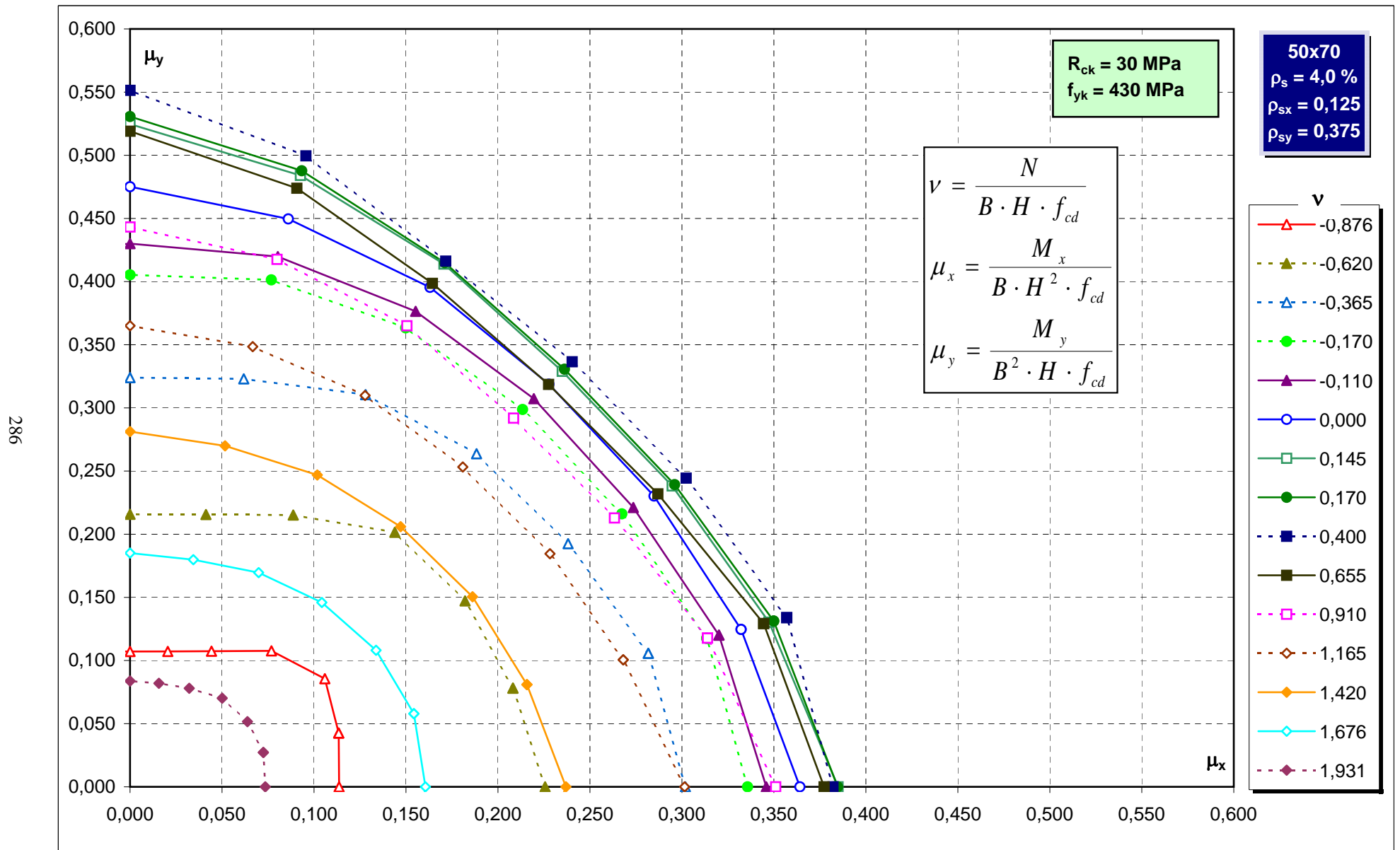
Abachi di verifica



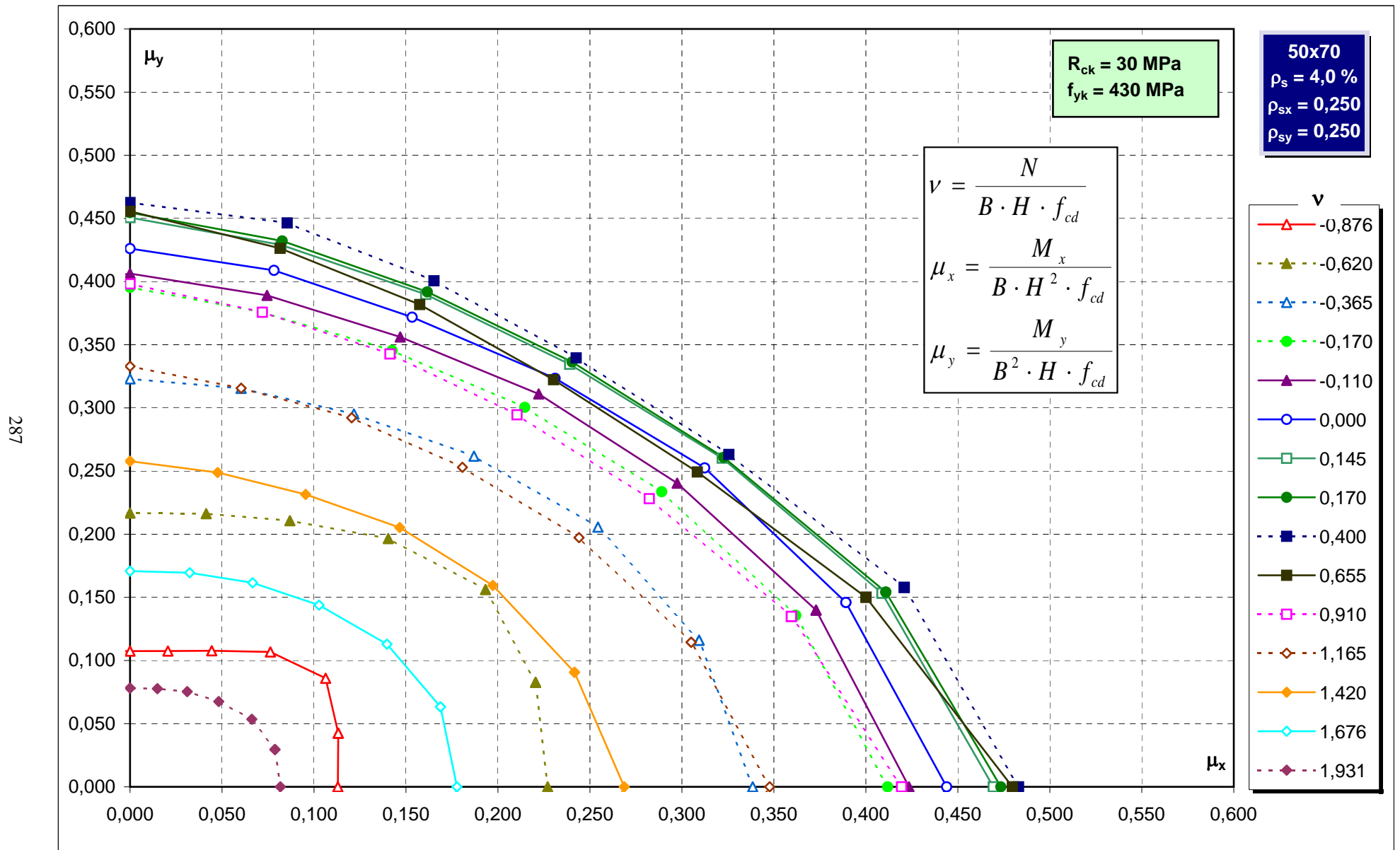
Abachi di verifica



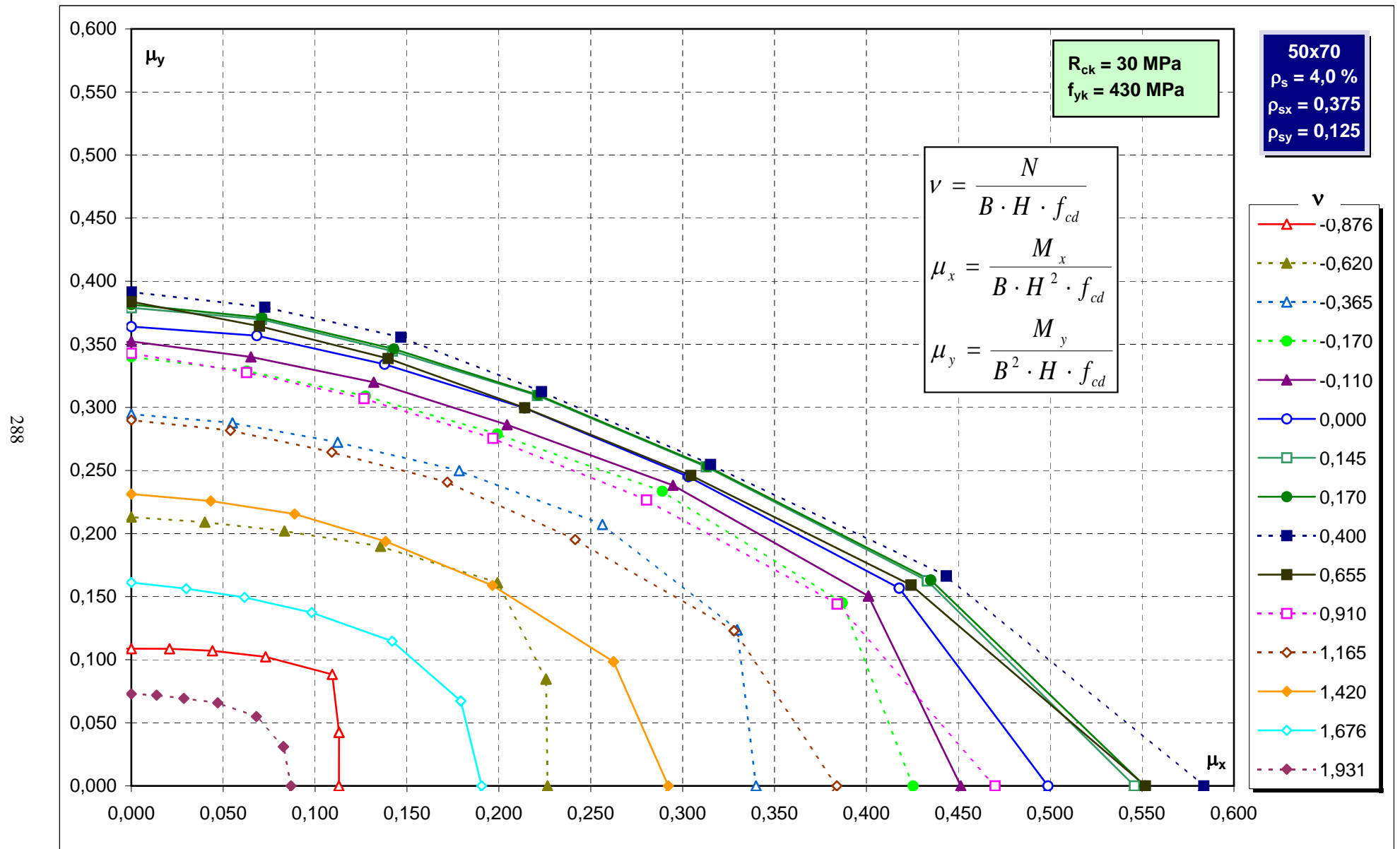
Abachi di verifica



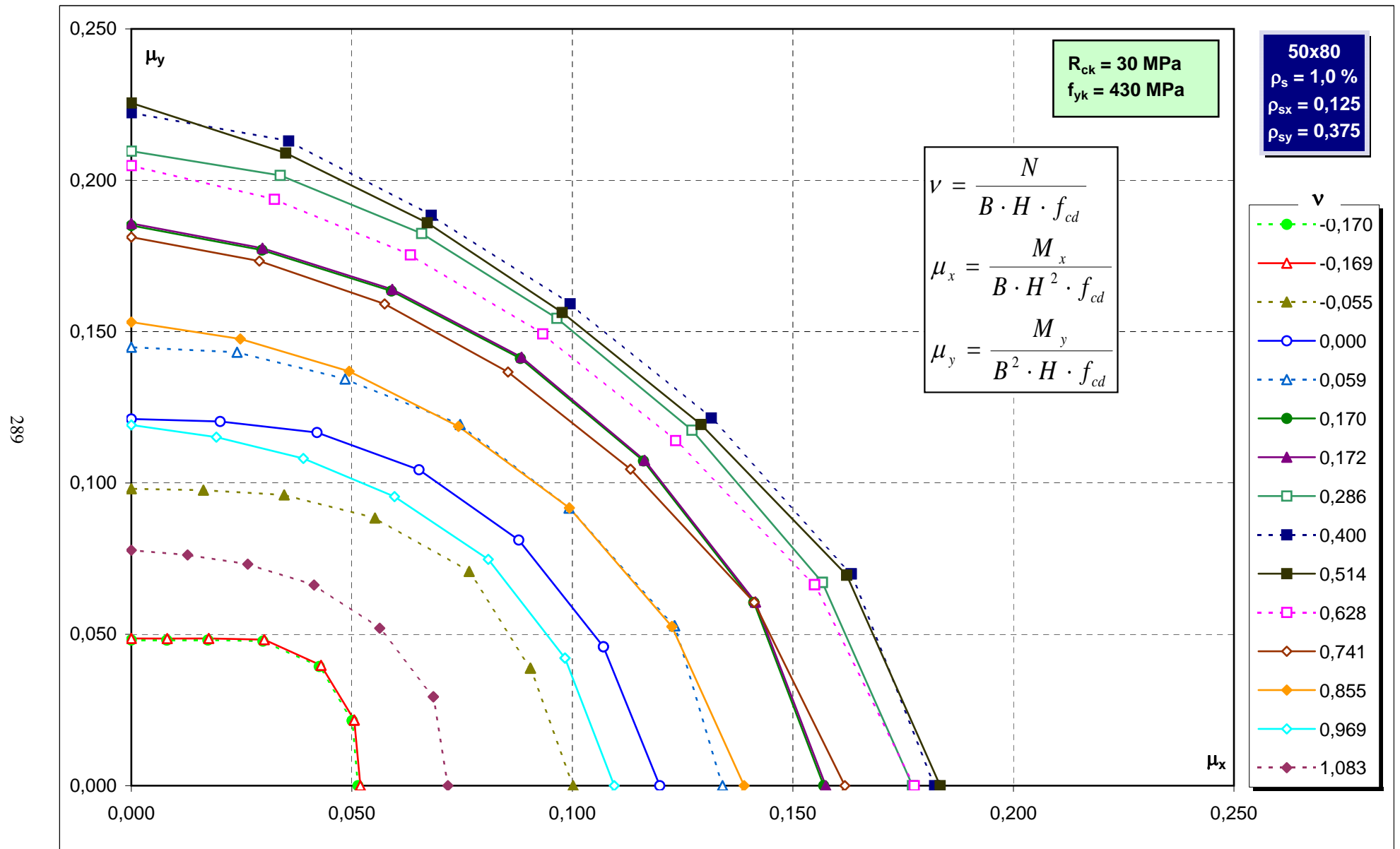
Abachi di verifica



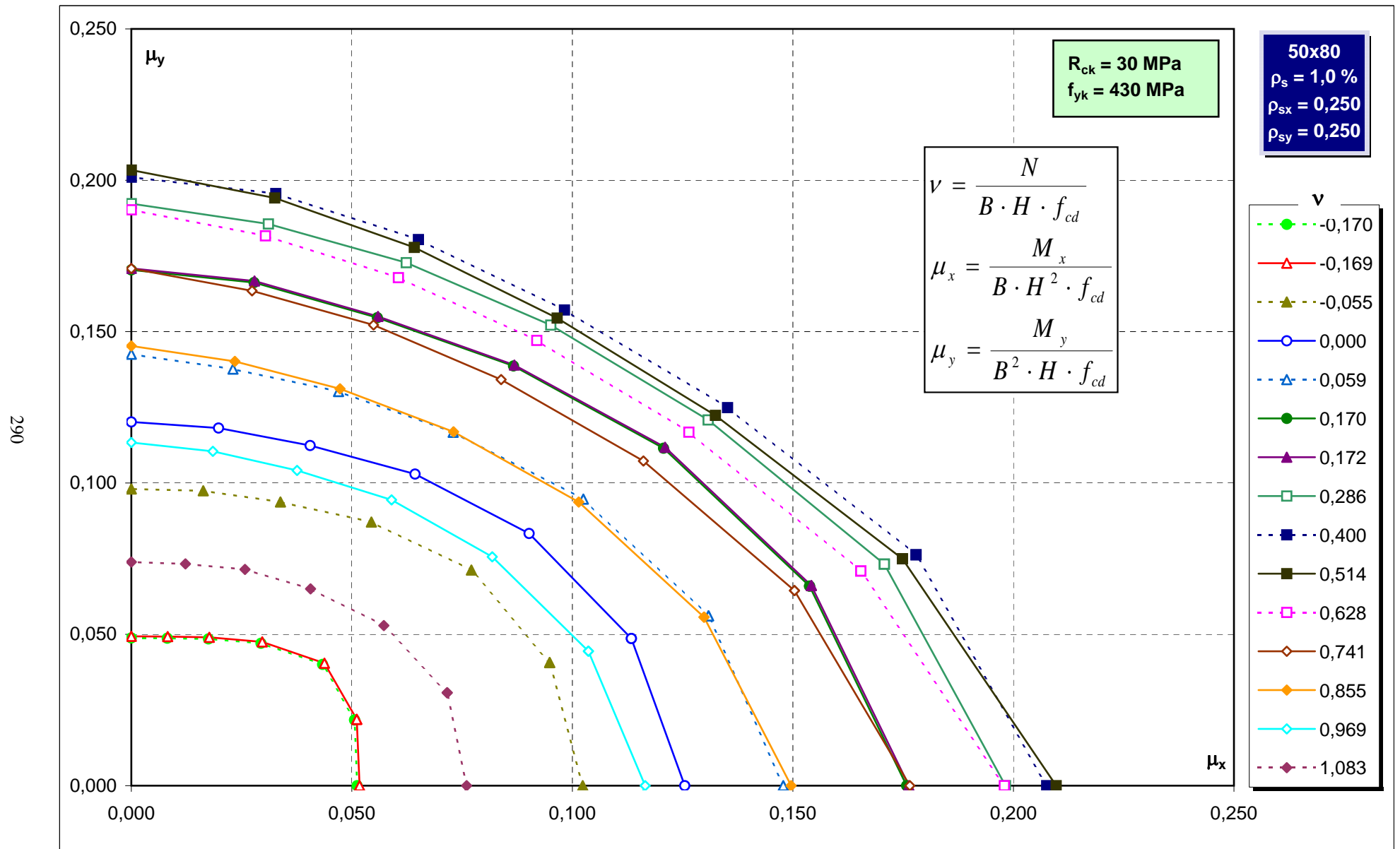
Abachi di verifica



Abachi di verifica

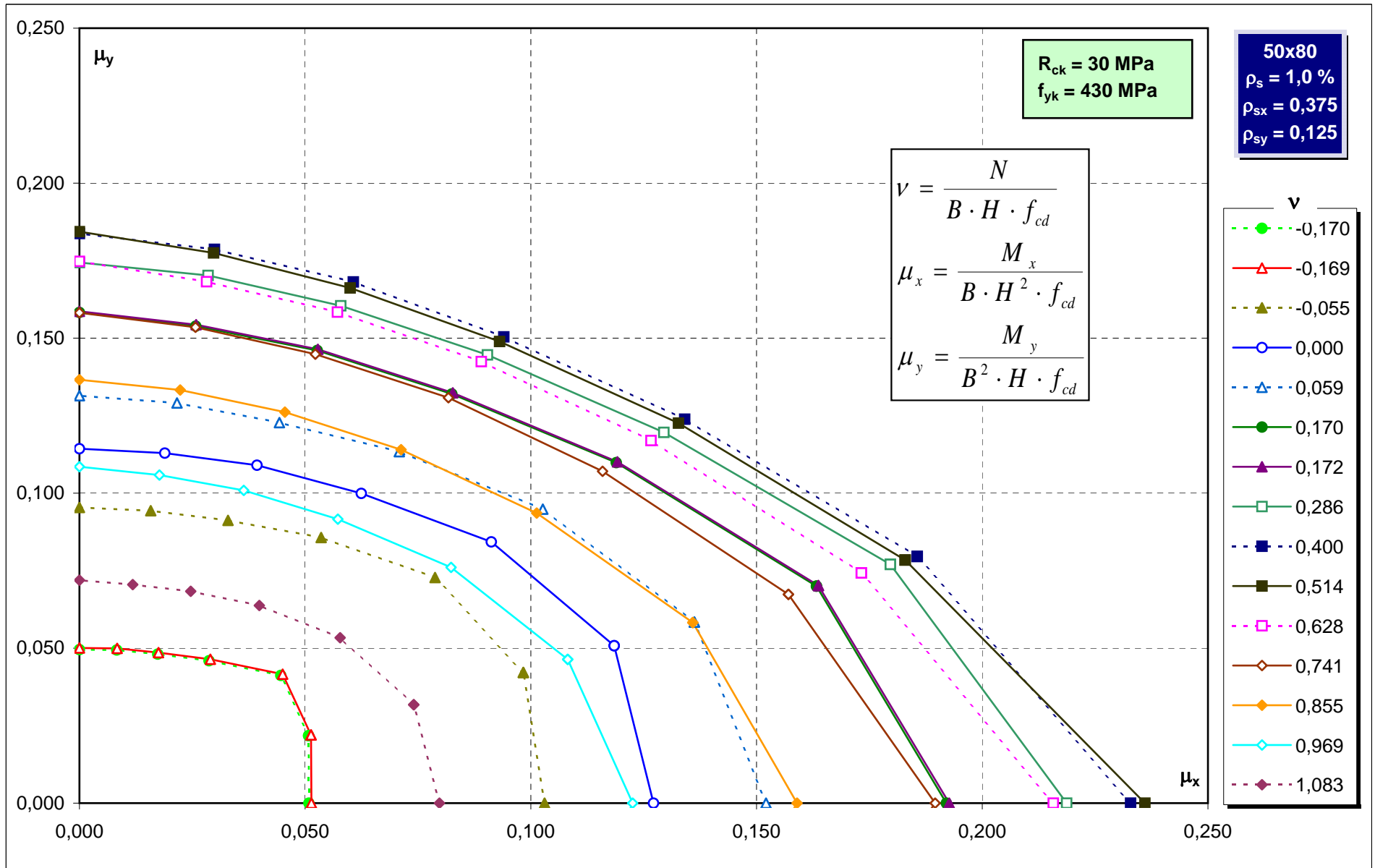


Abachi di verifica

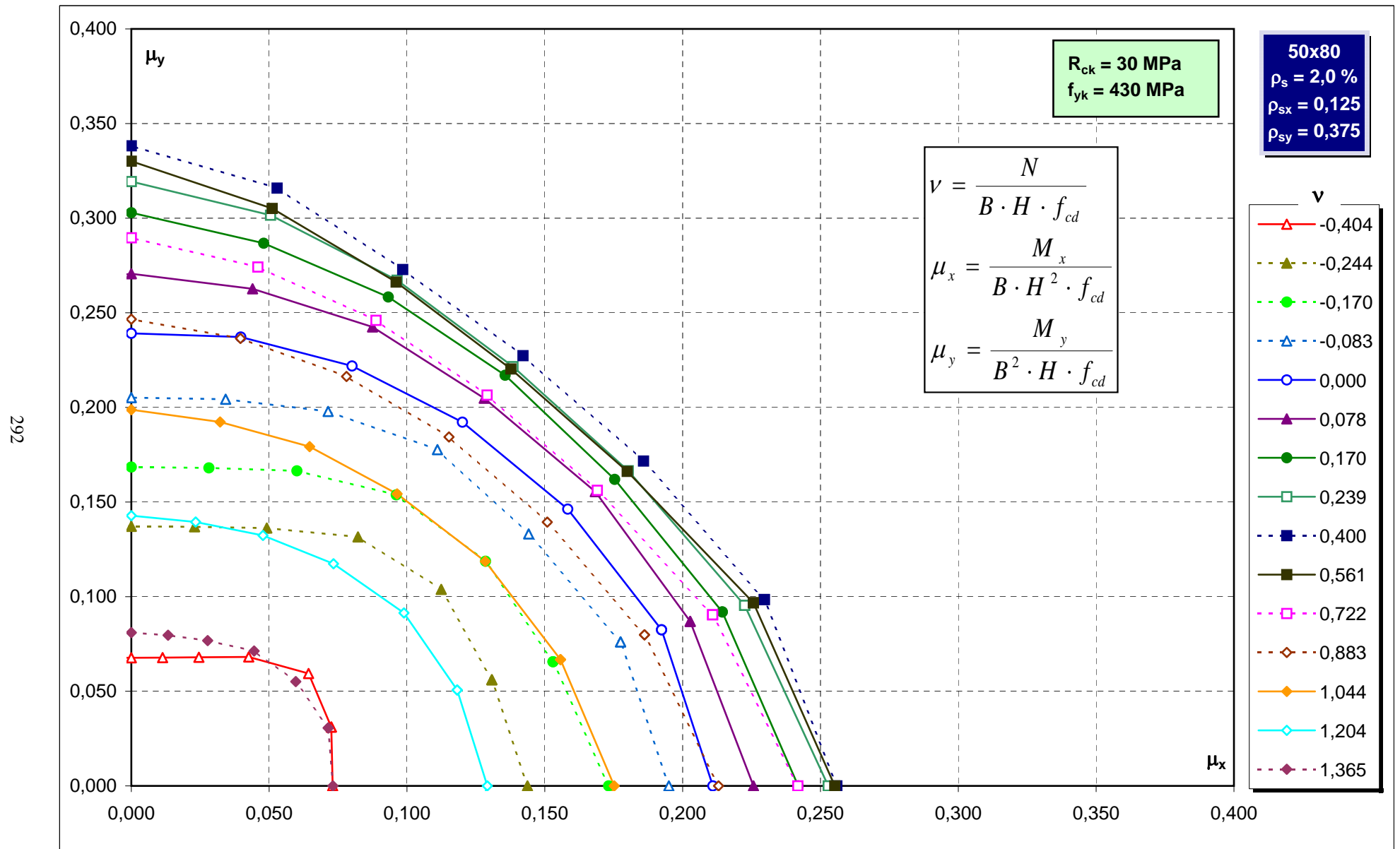


Abachi di verifica

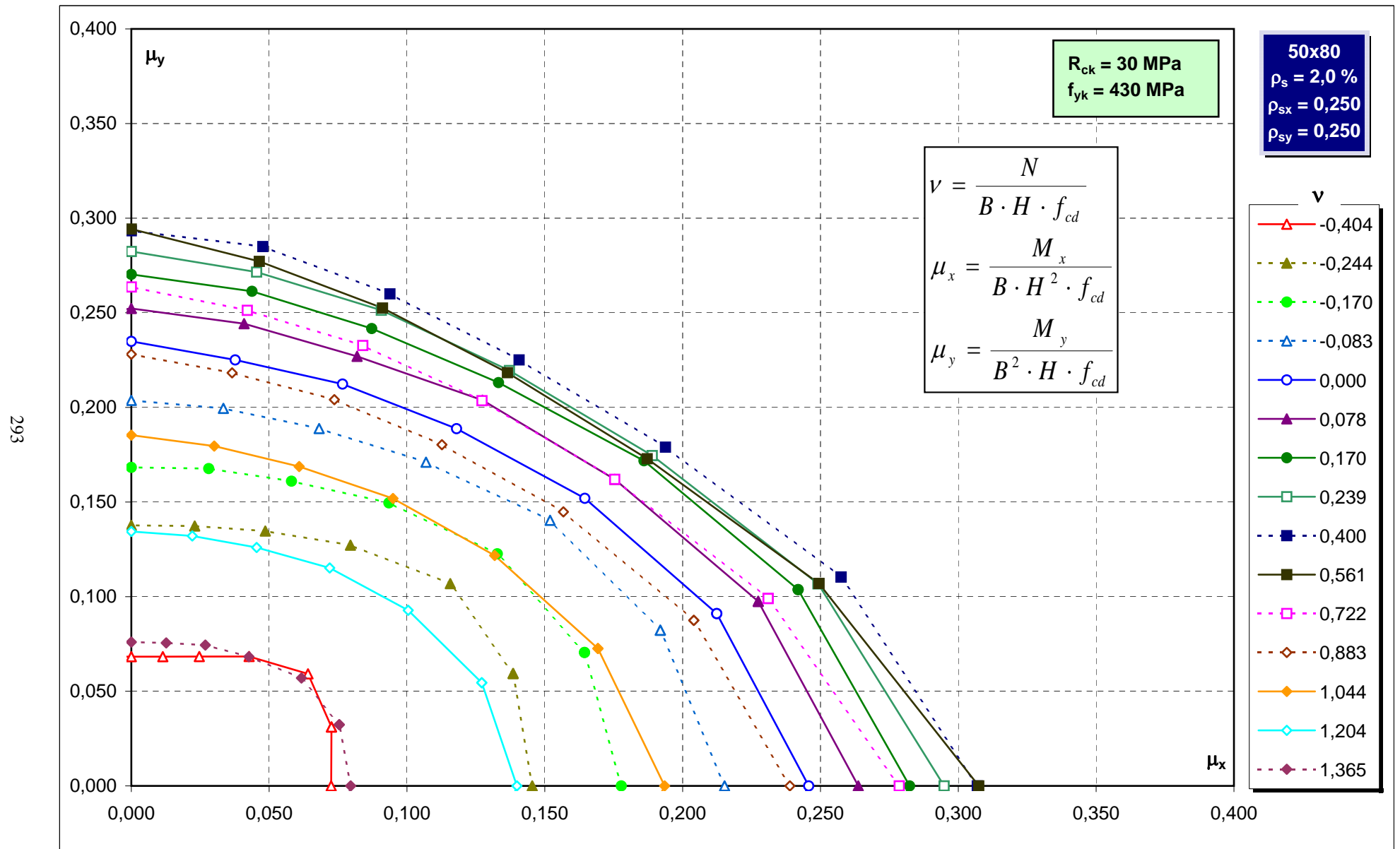
291



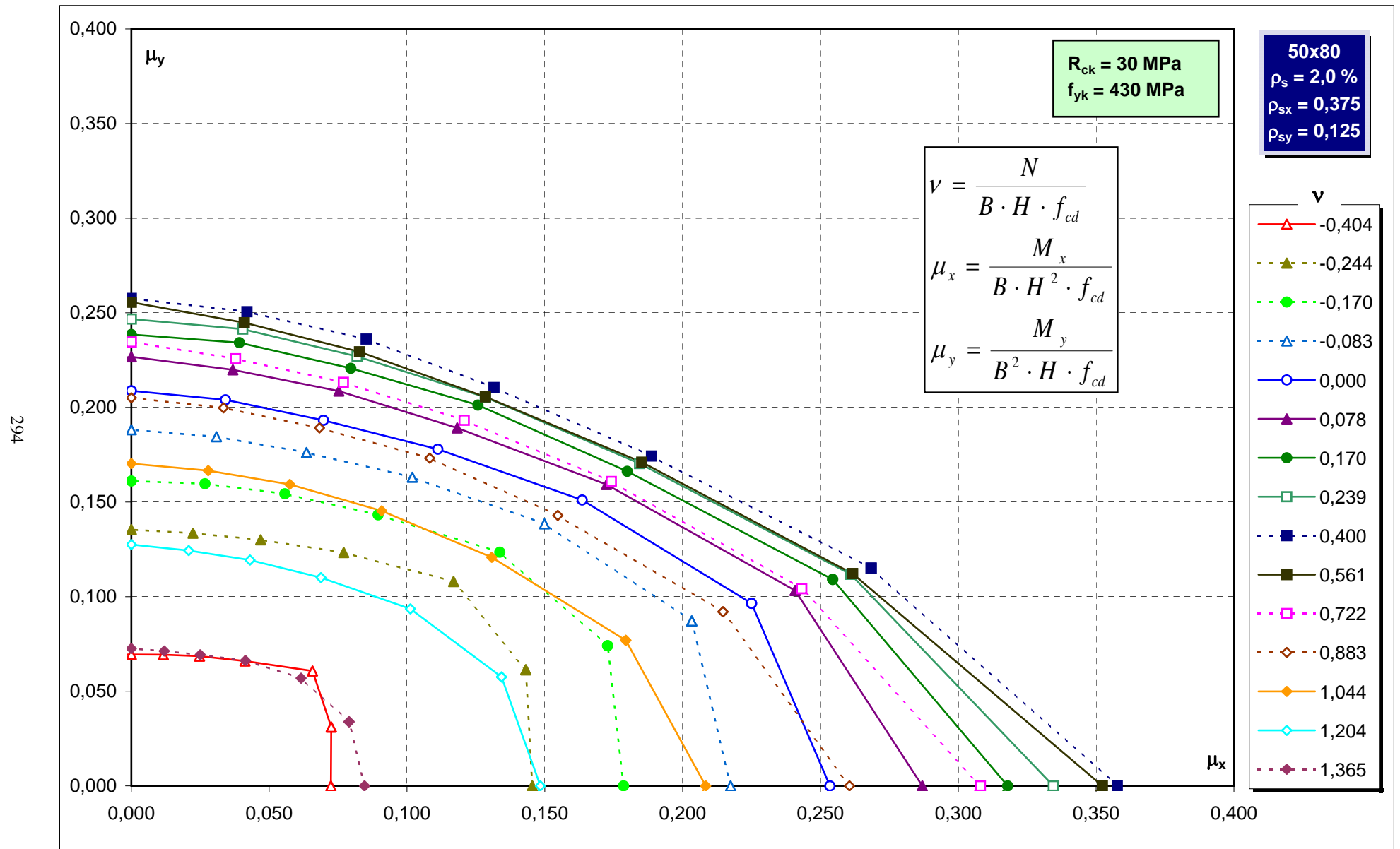
Abachi di verifica



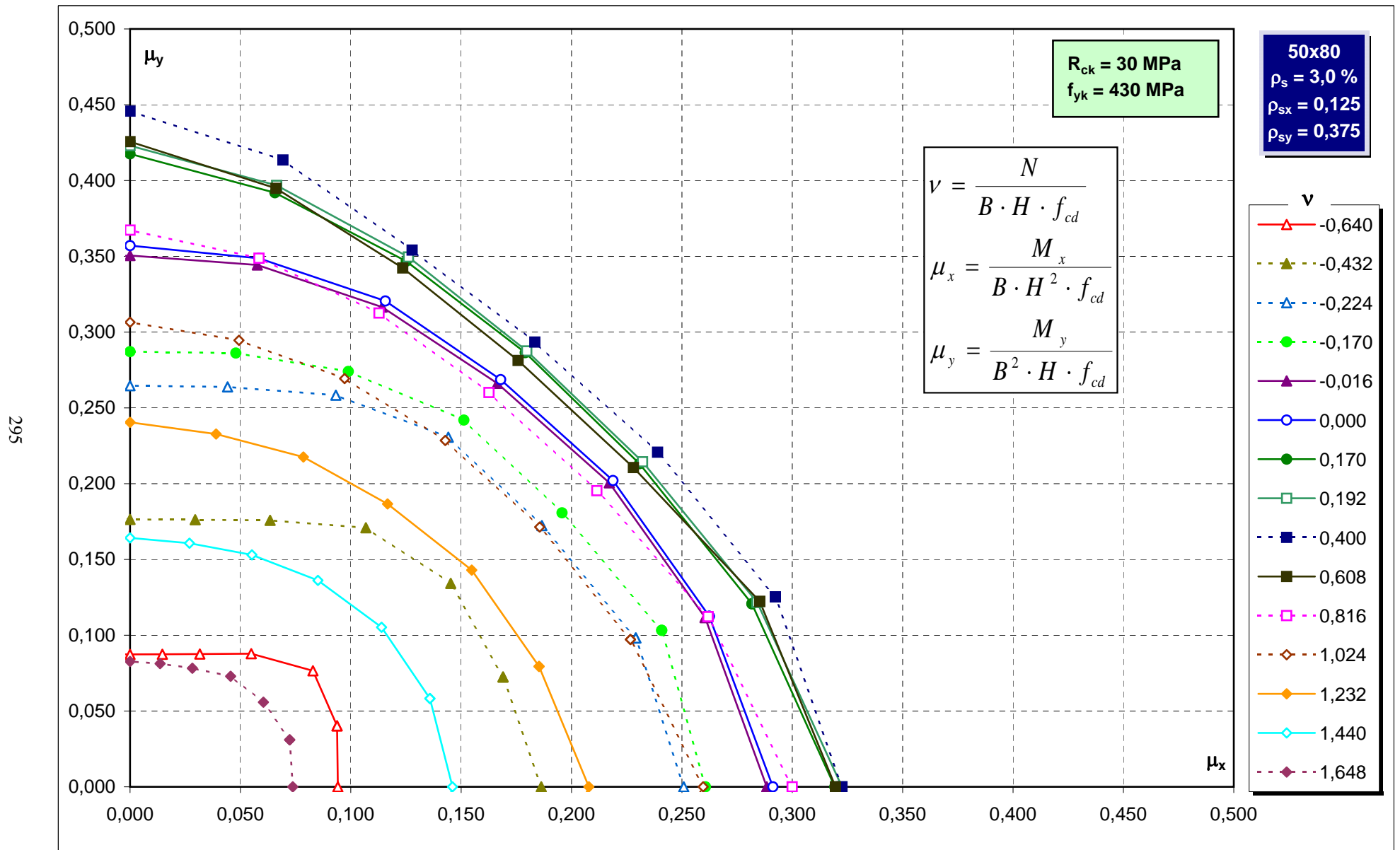
Abachi di verifica



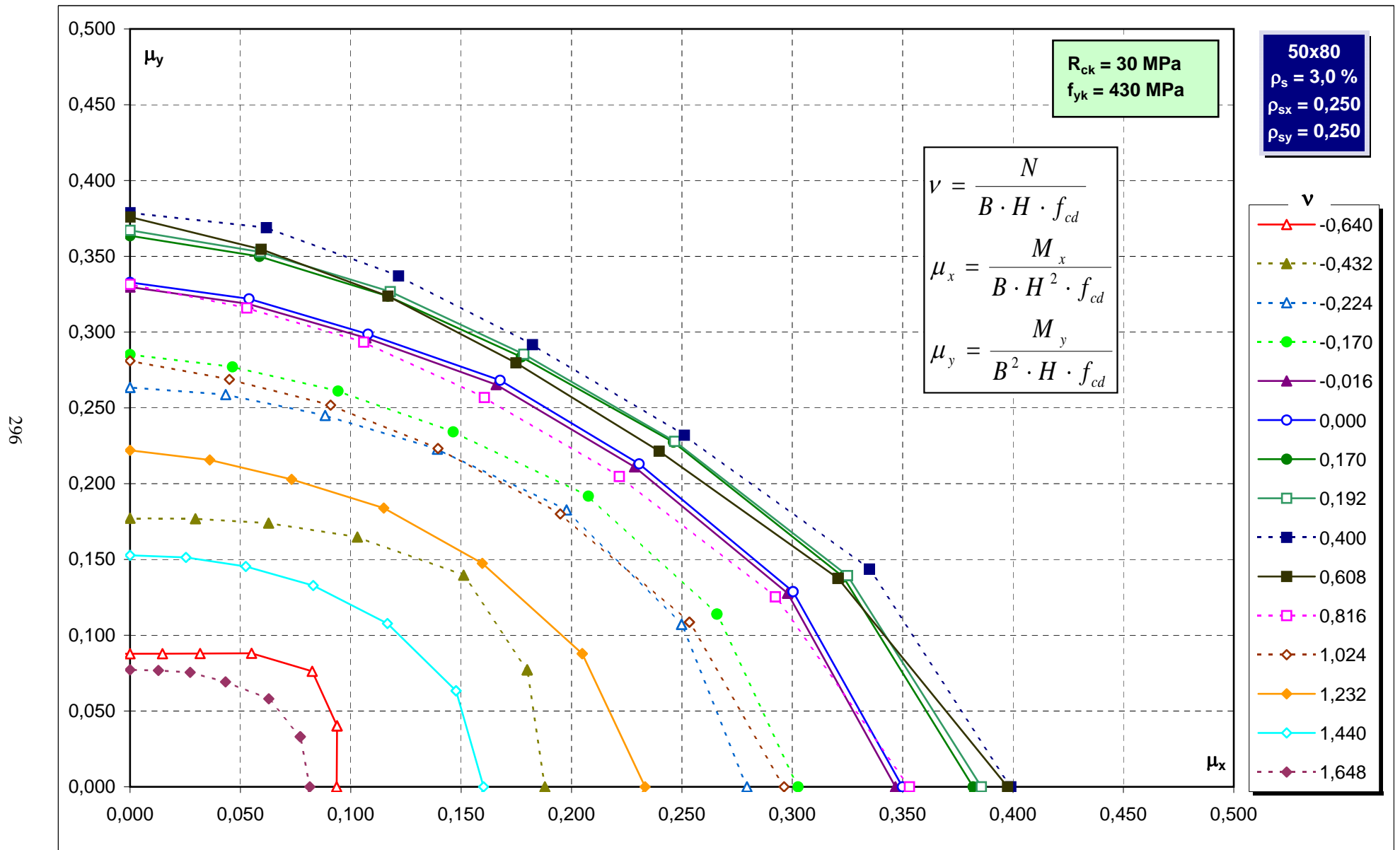
Abachi di verifica



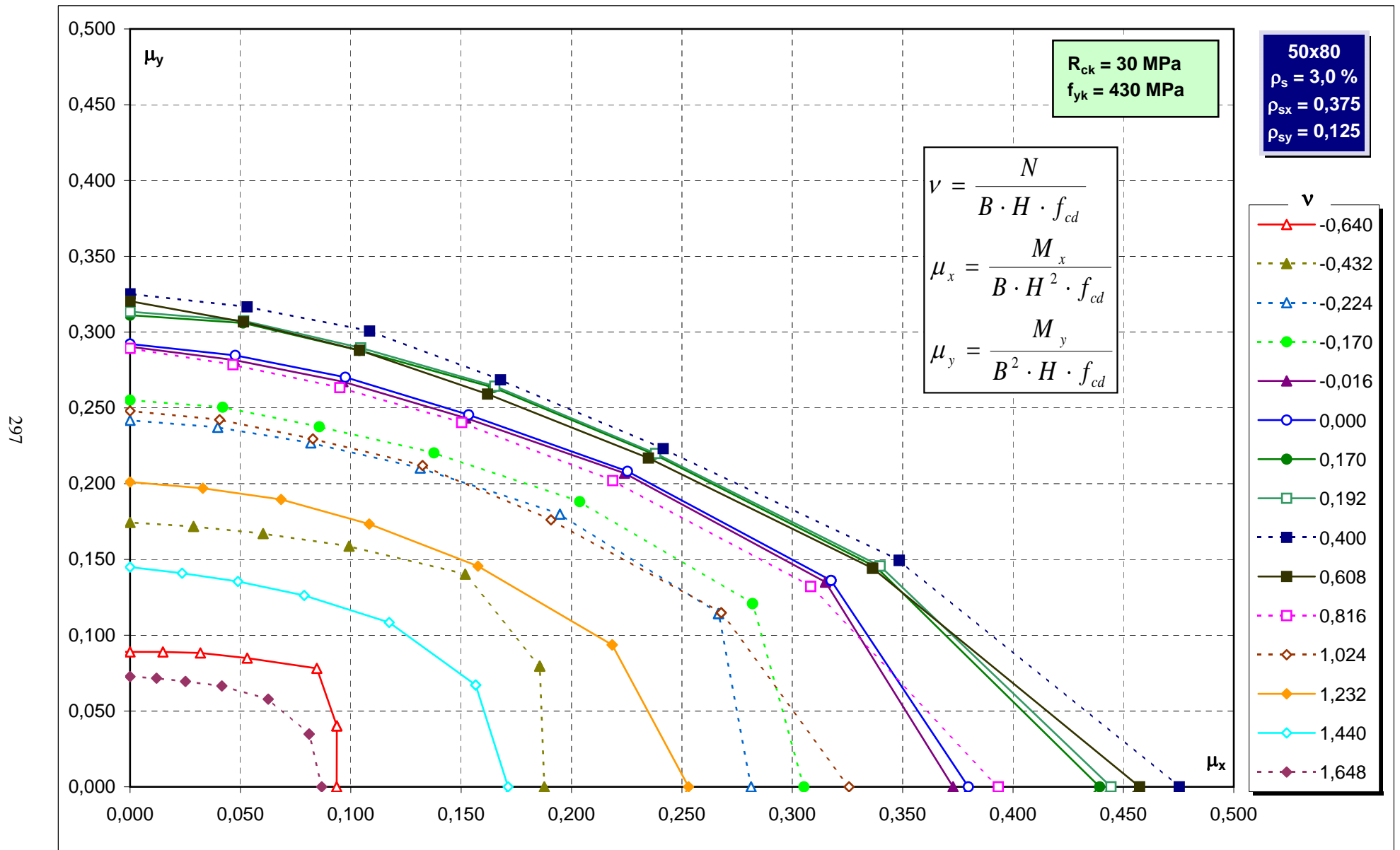
Abachi di verifica



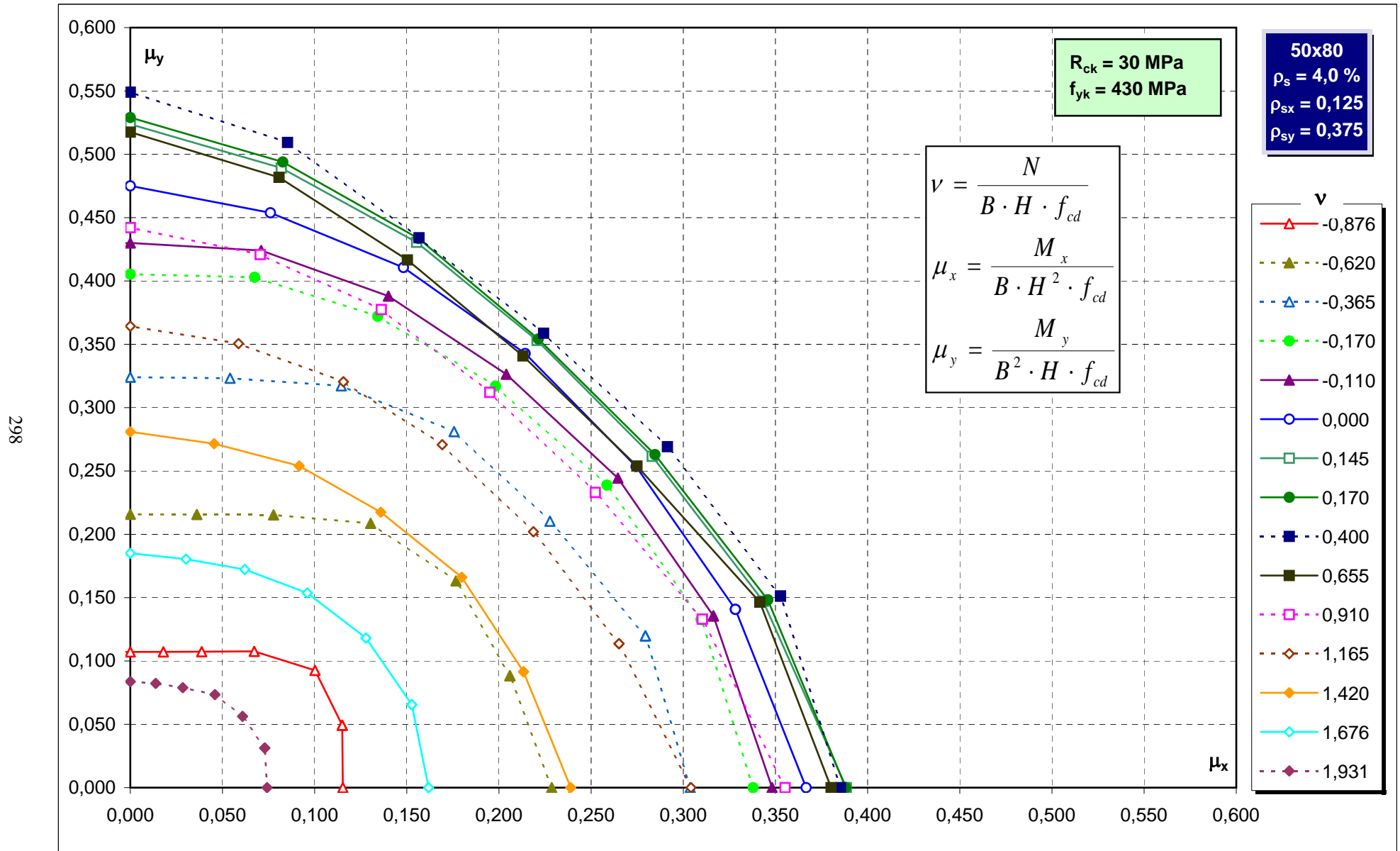
Abachi di verifica



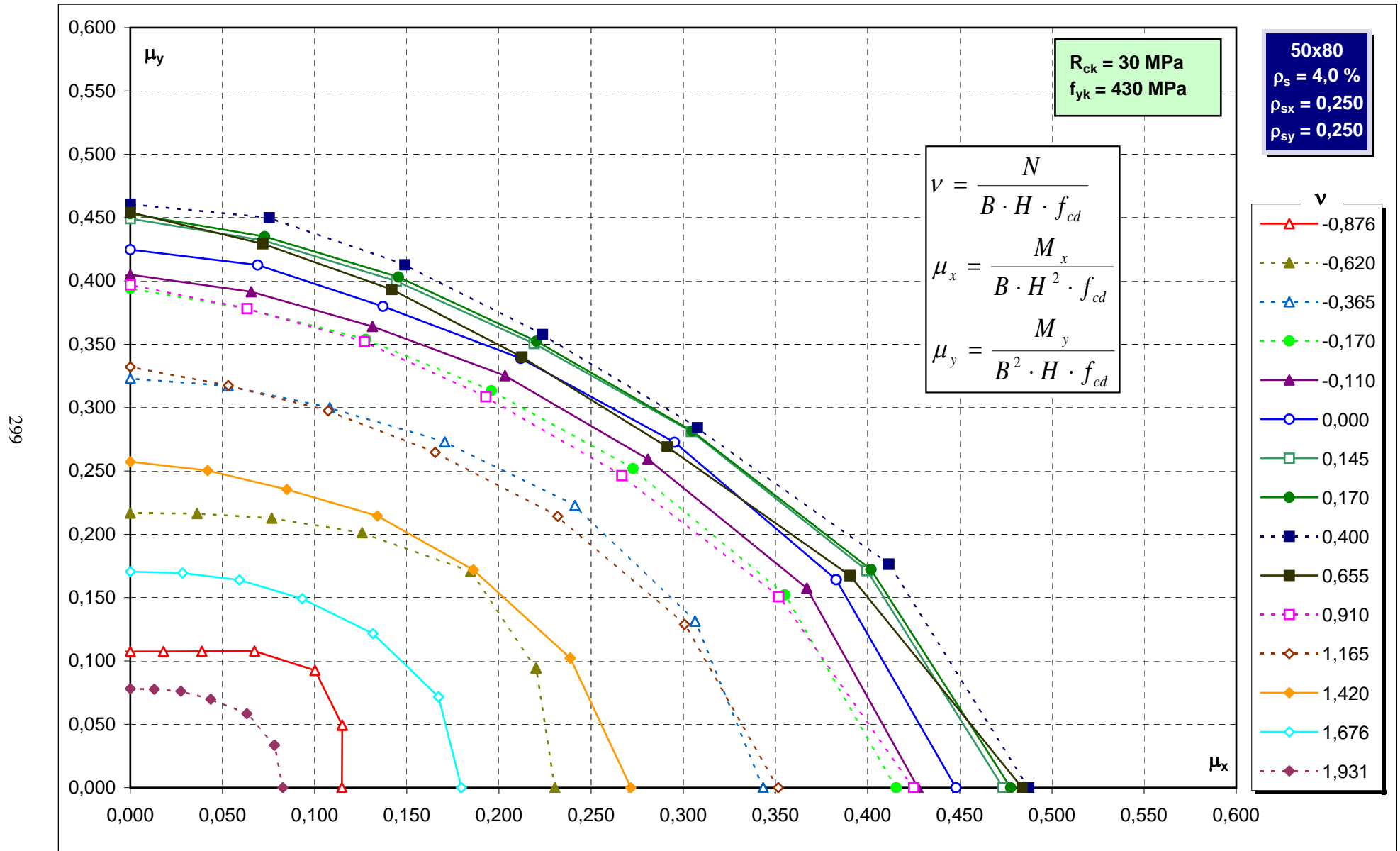
Abachi di verifica



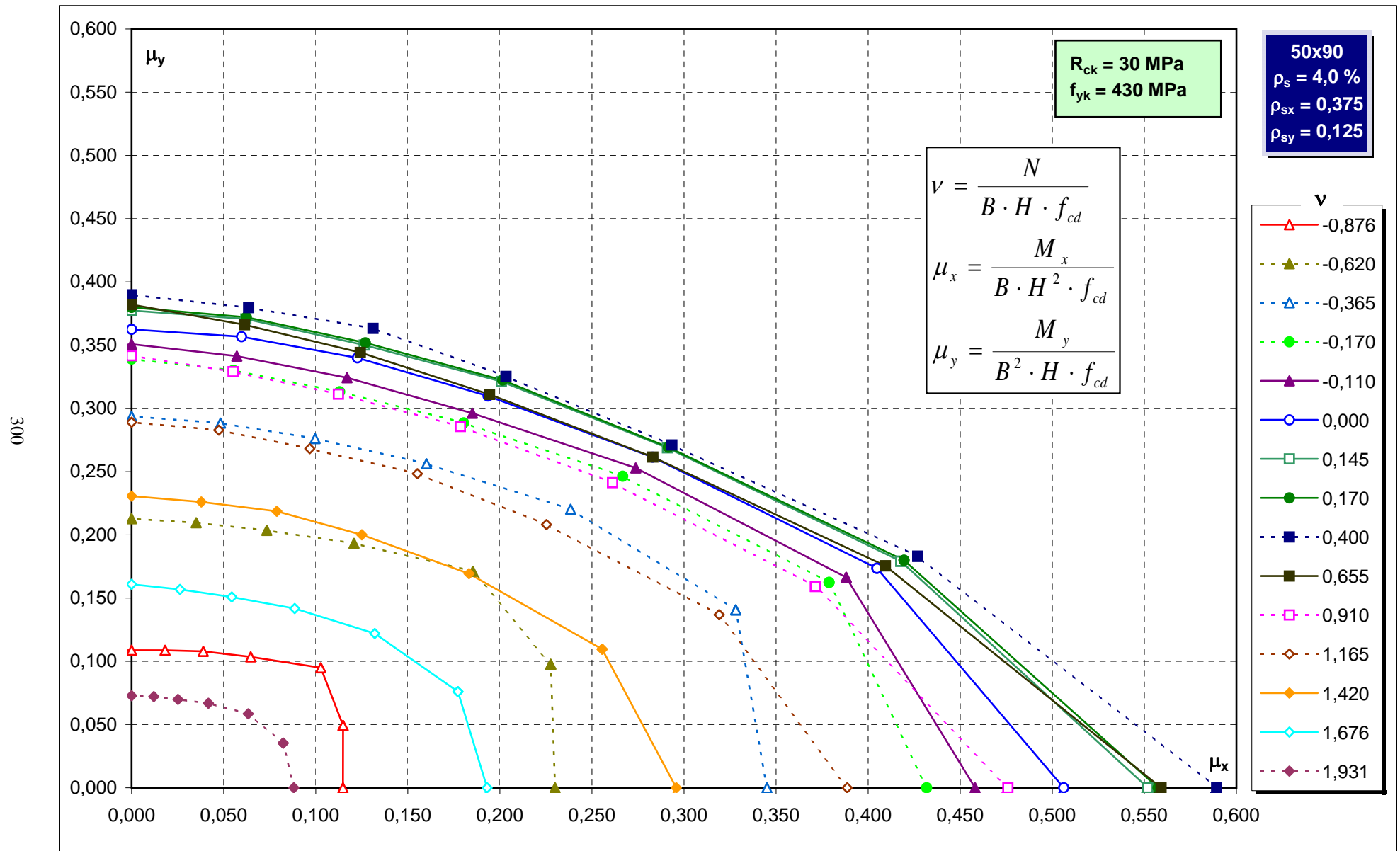
Abachi di verifica



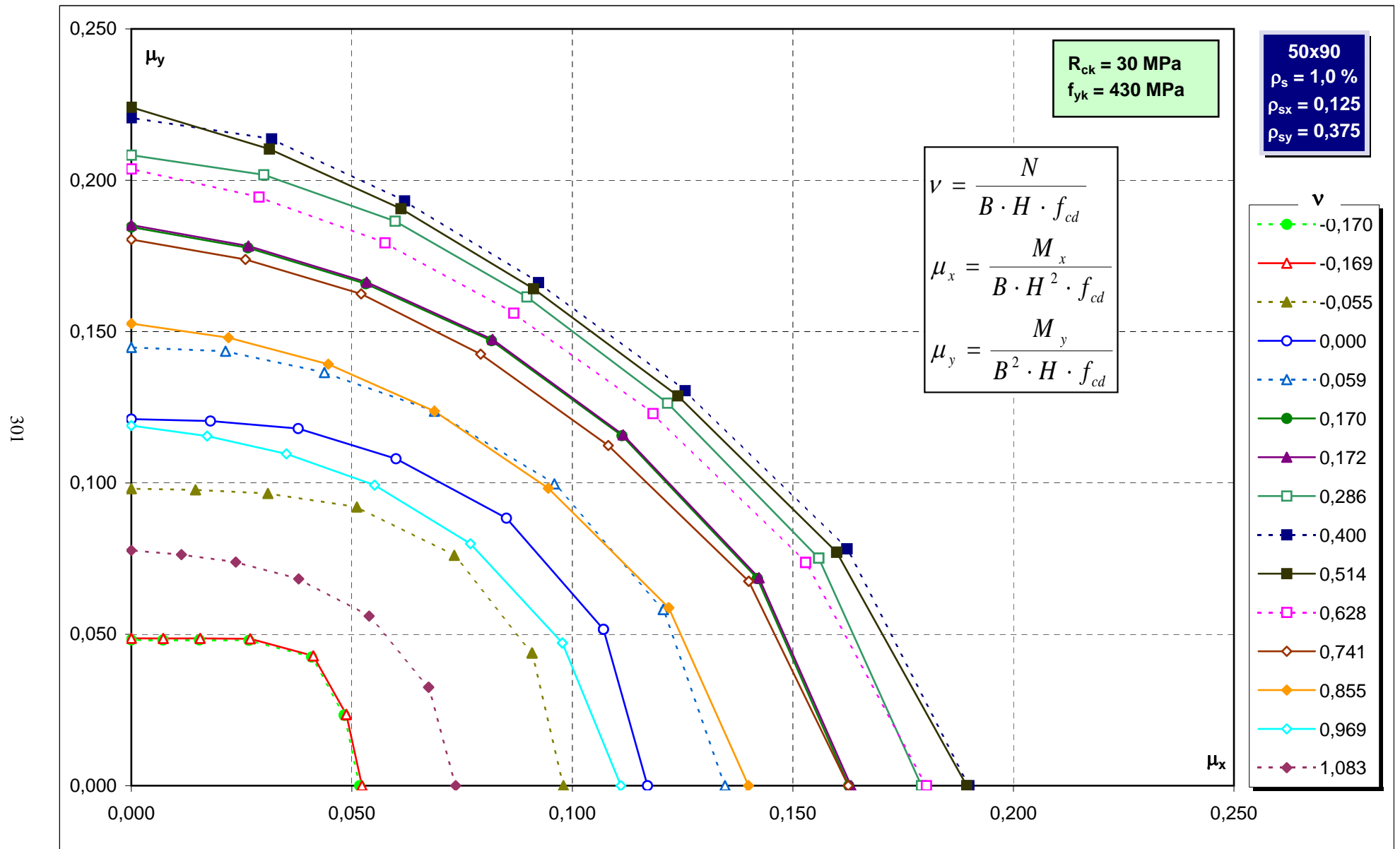
Abachi di verifica



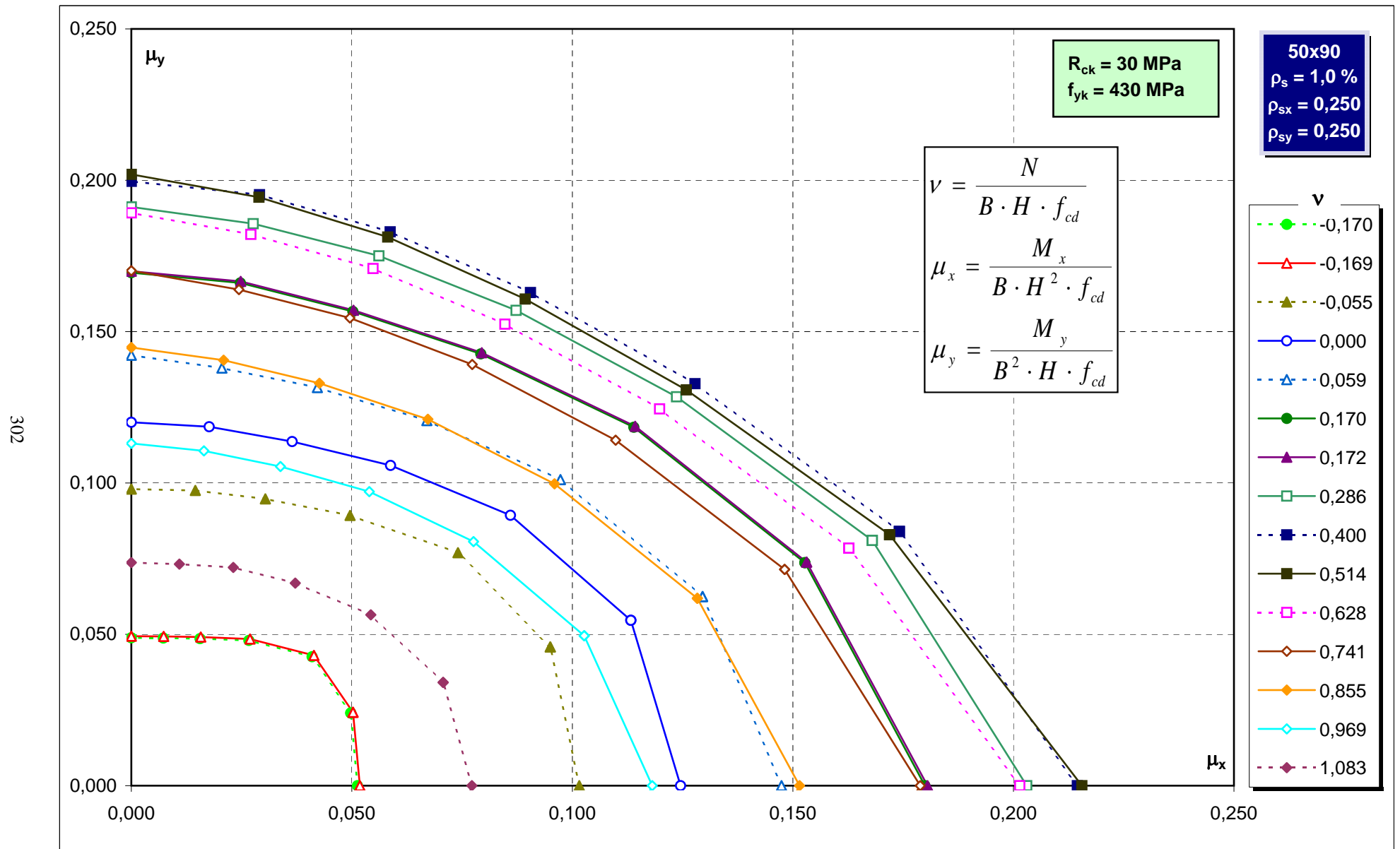
Abachi di verifica



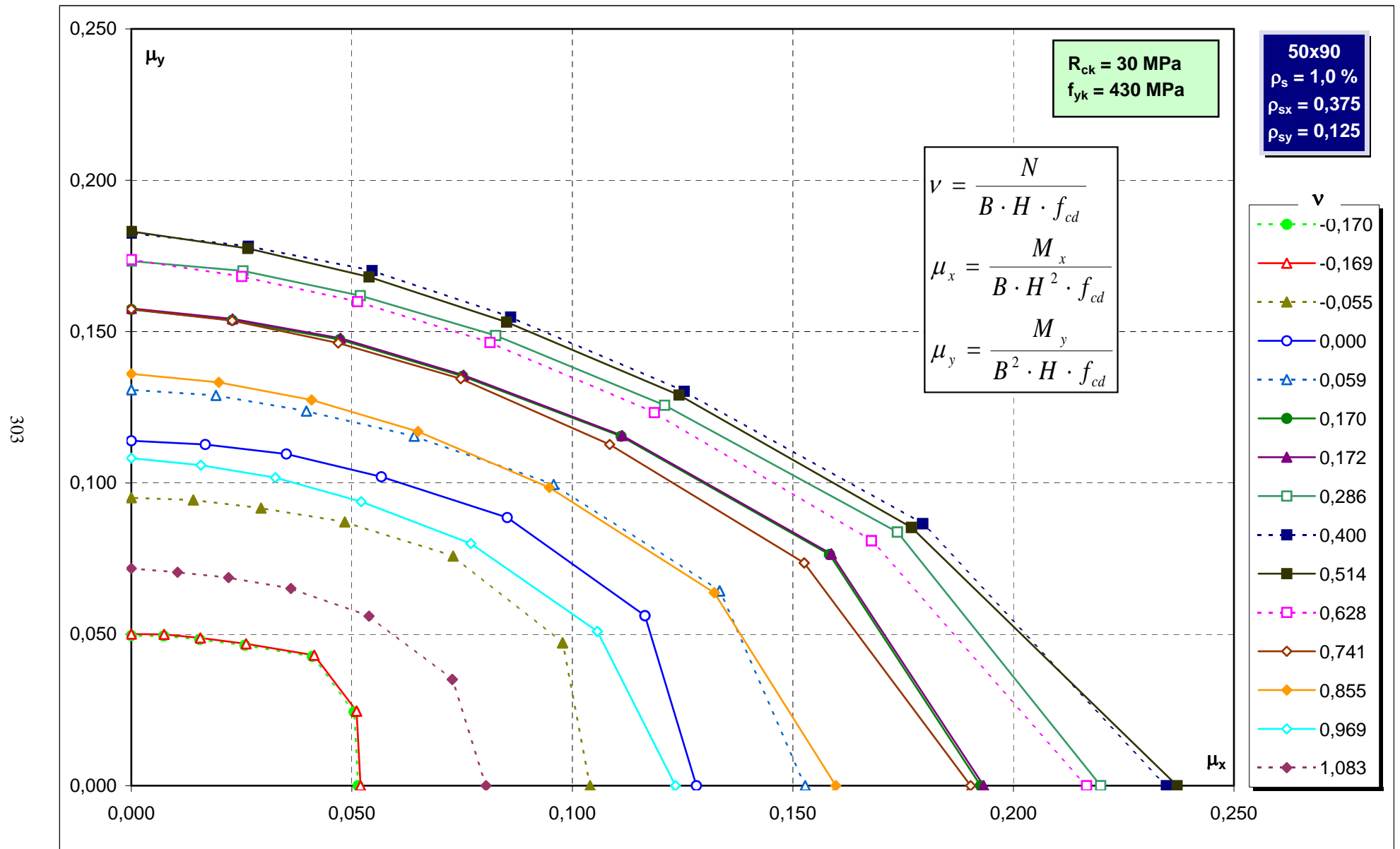
Abachi di verifica



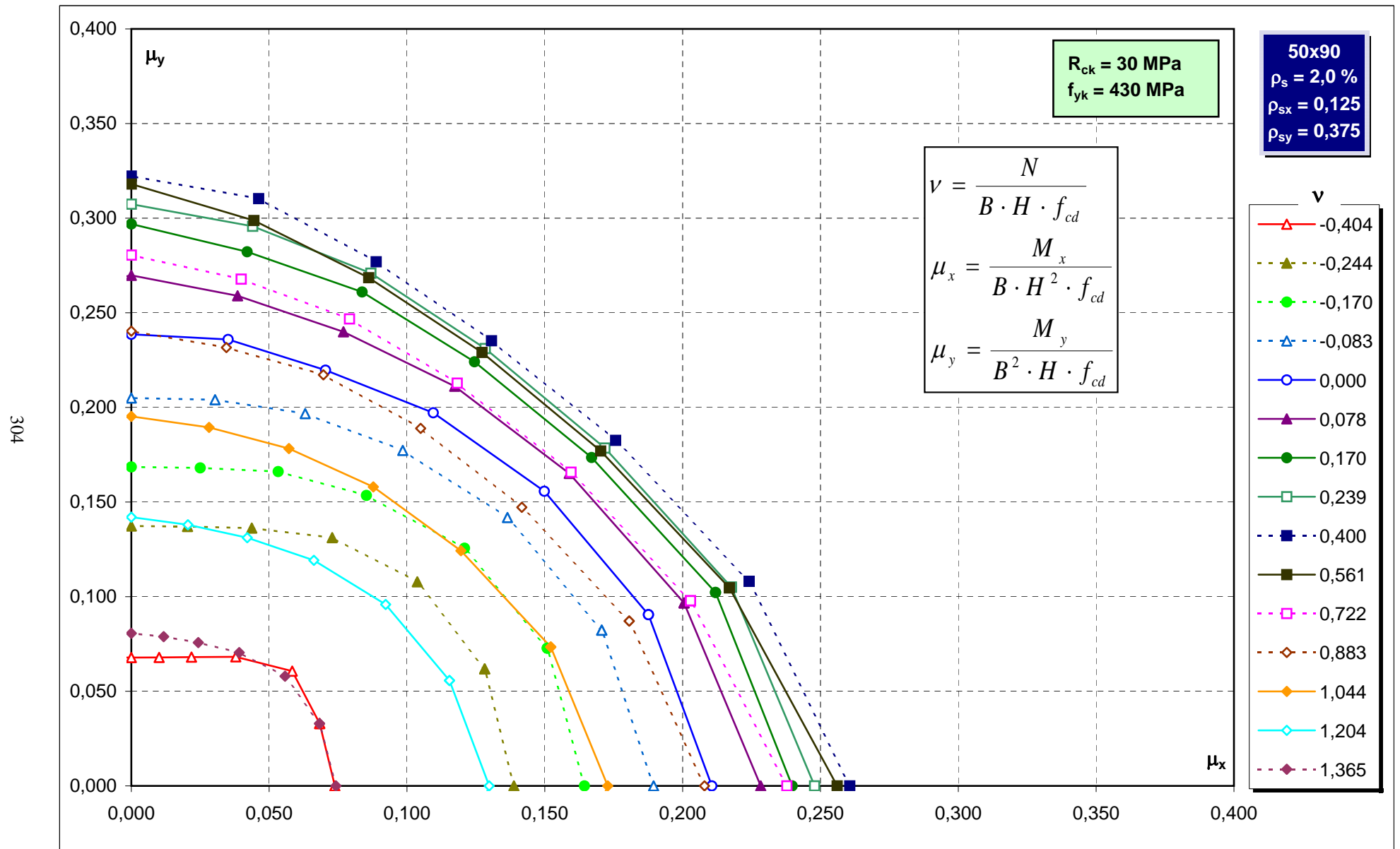
Abachi di verifica



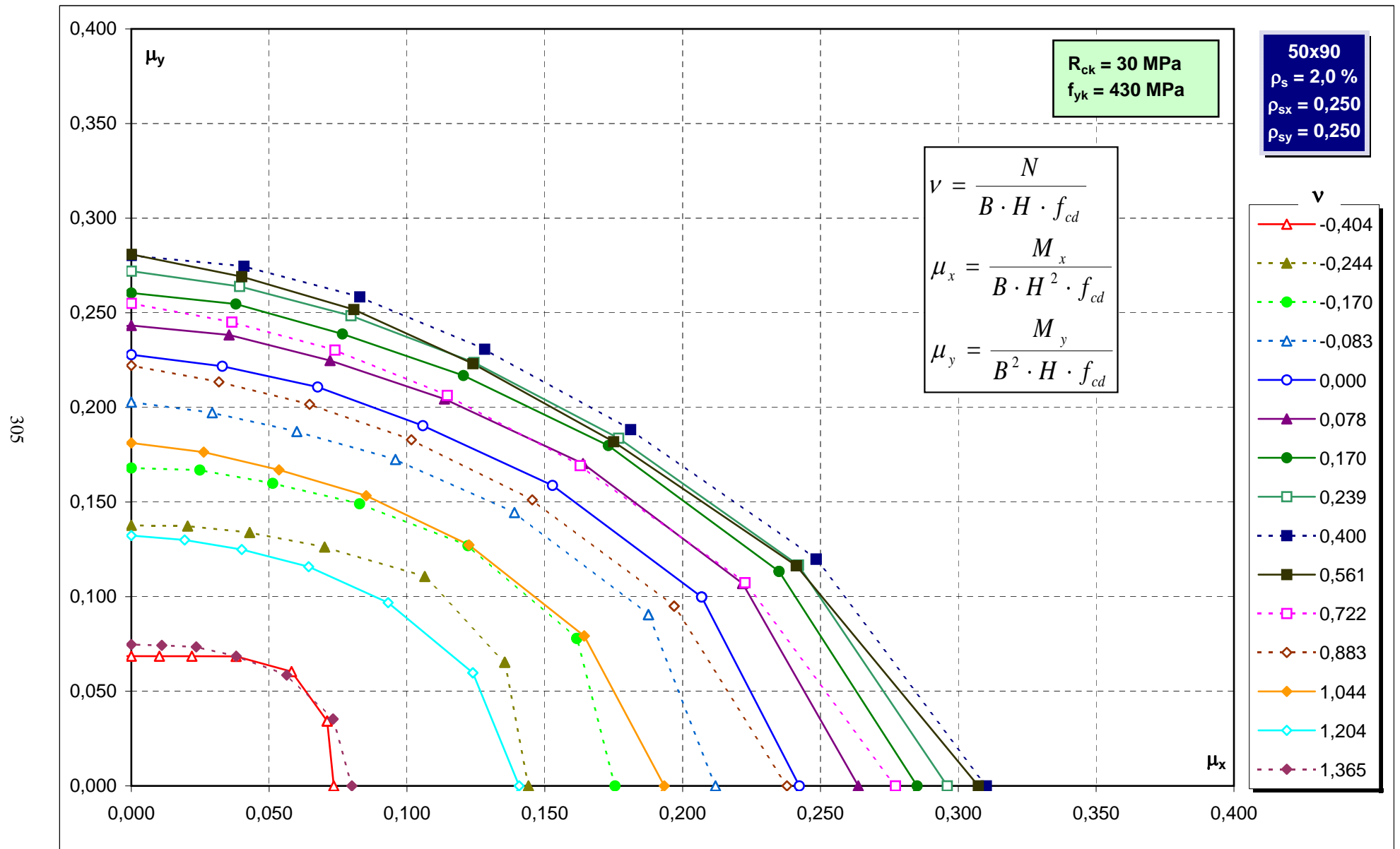
Abachi di verifica



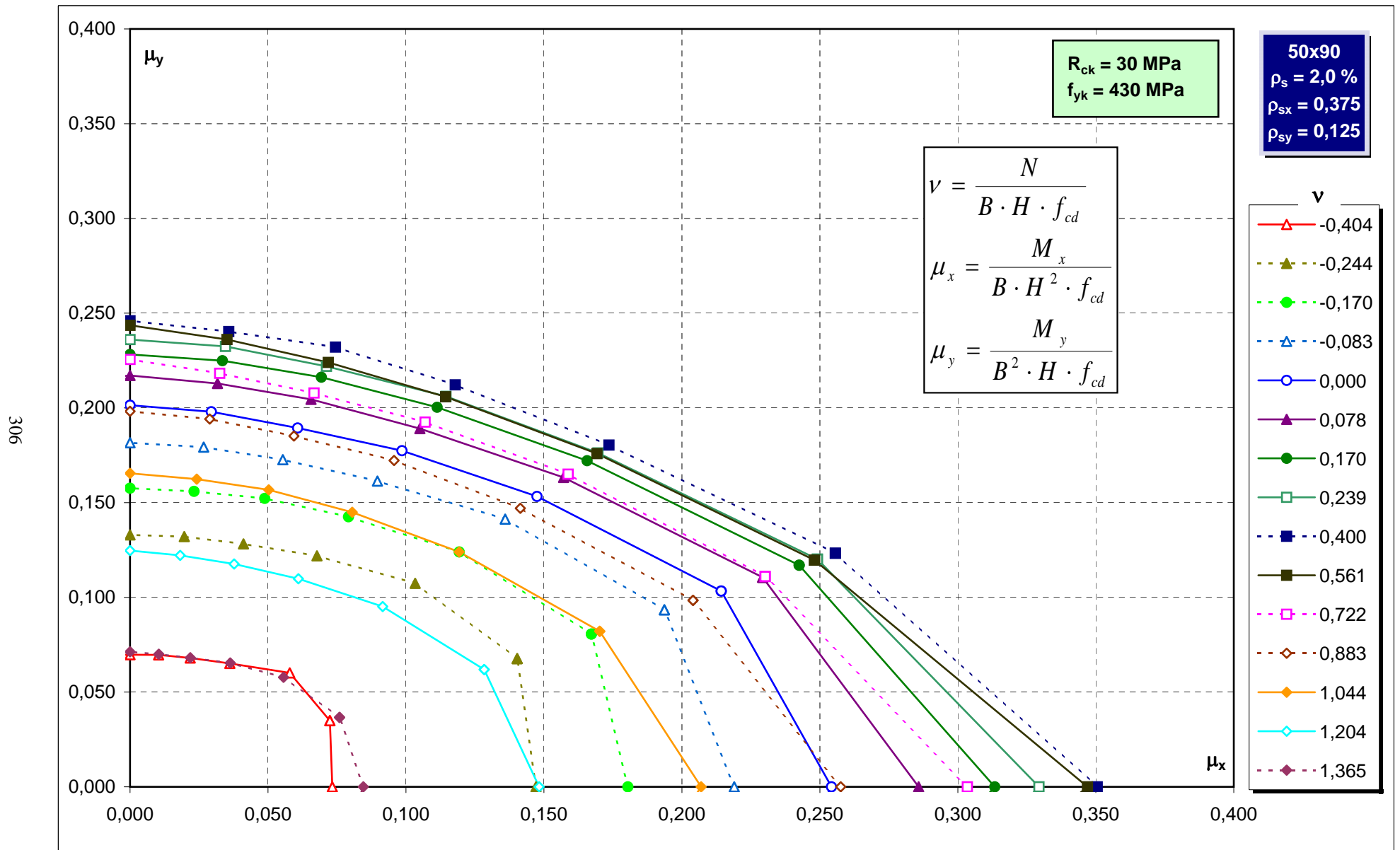
Abachi di verifica



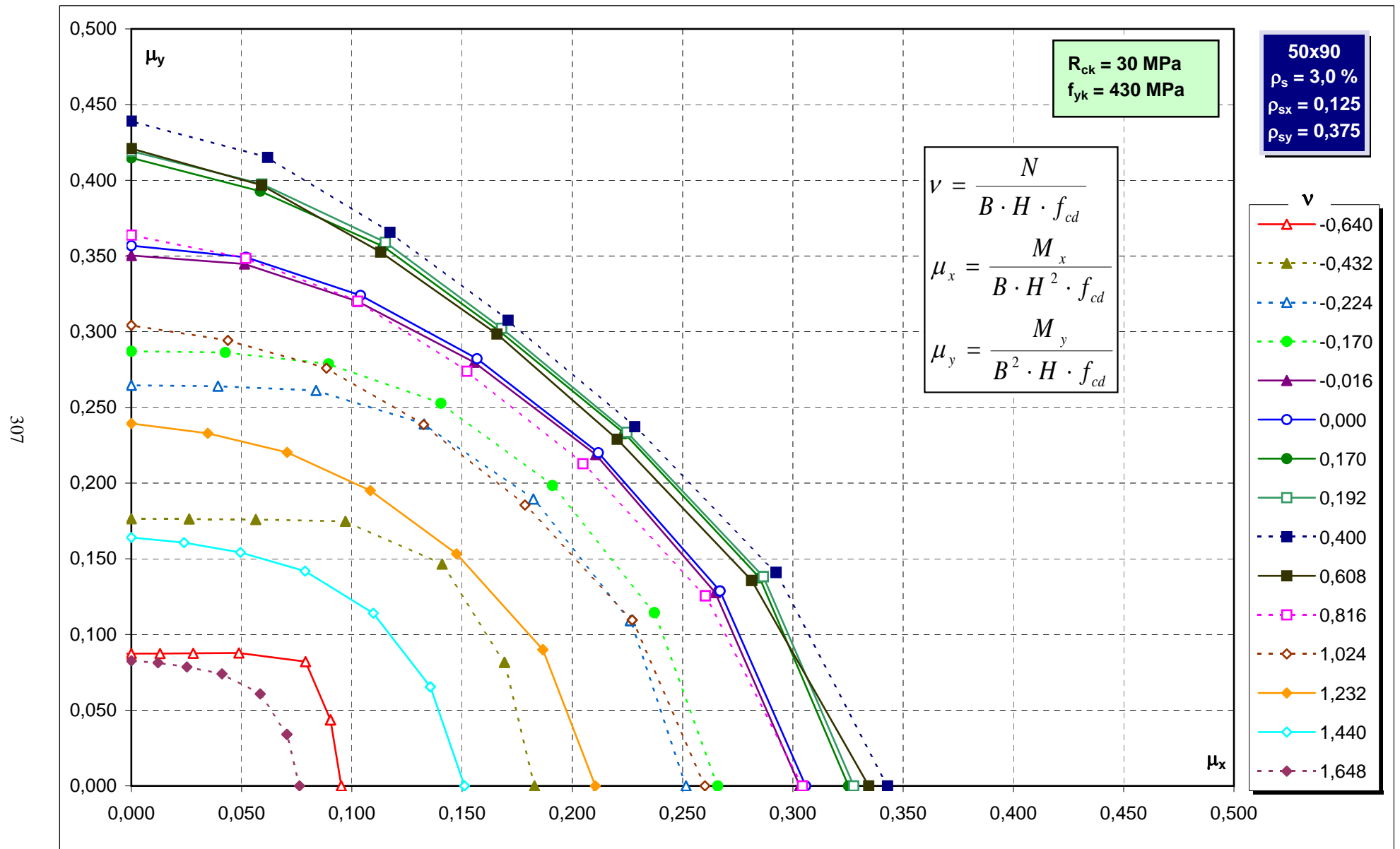
Abachi di verifica



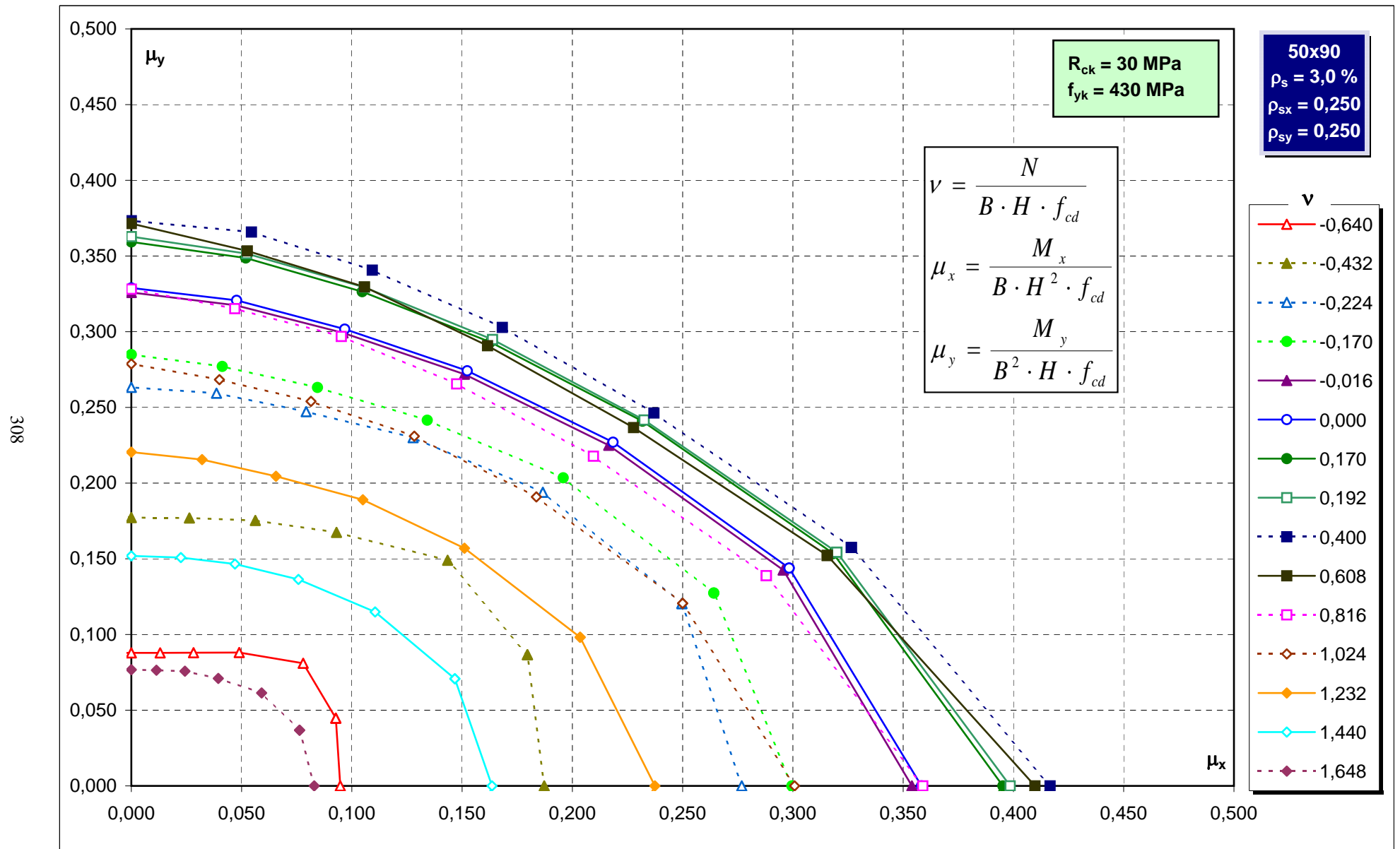
Abachi di verifica



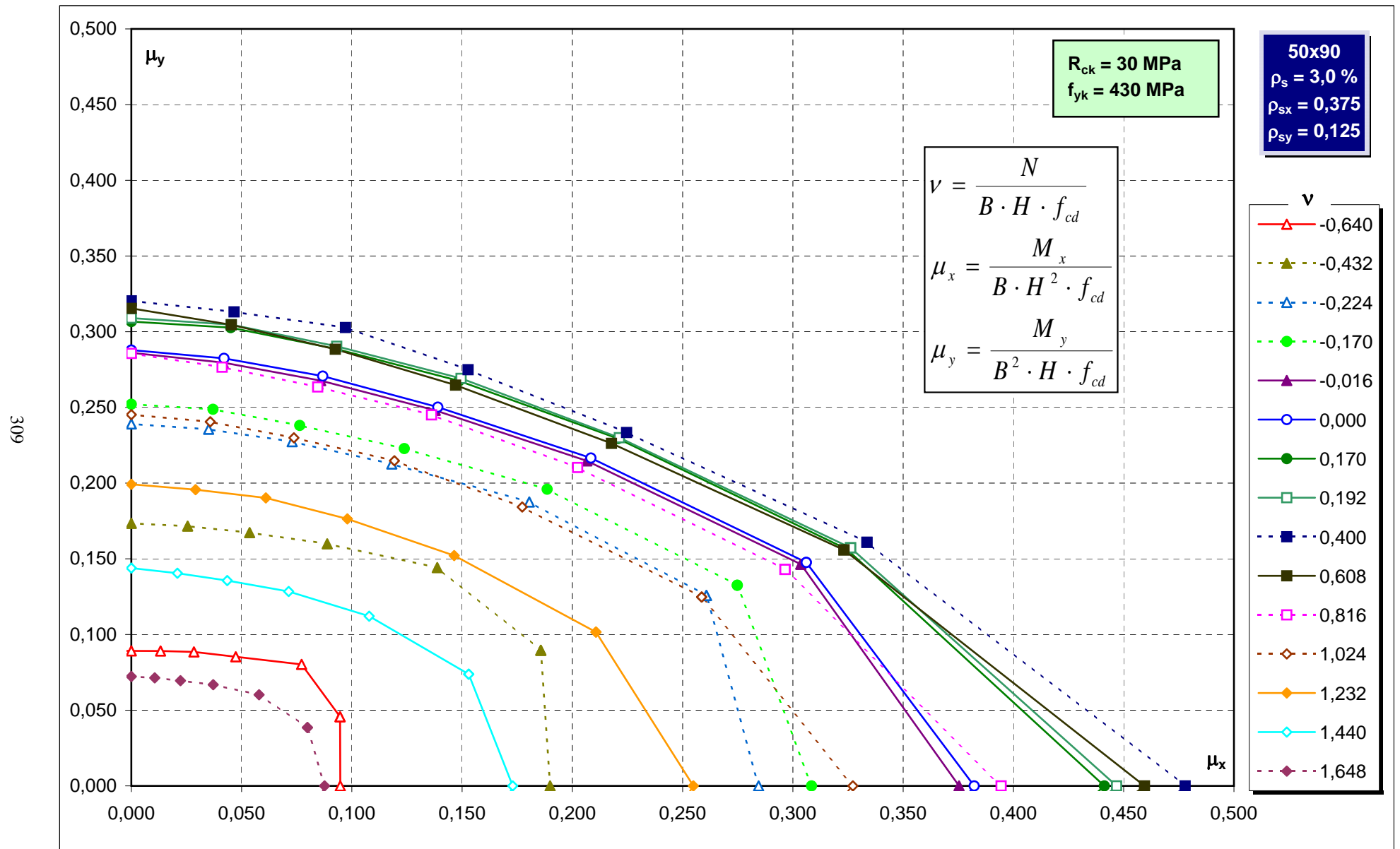
Abachi di verifica



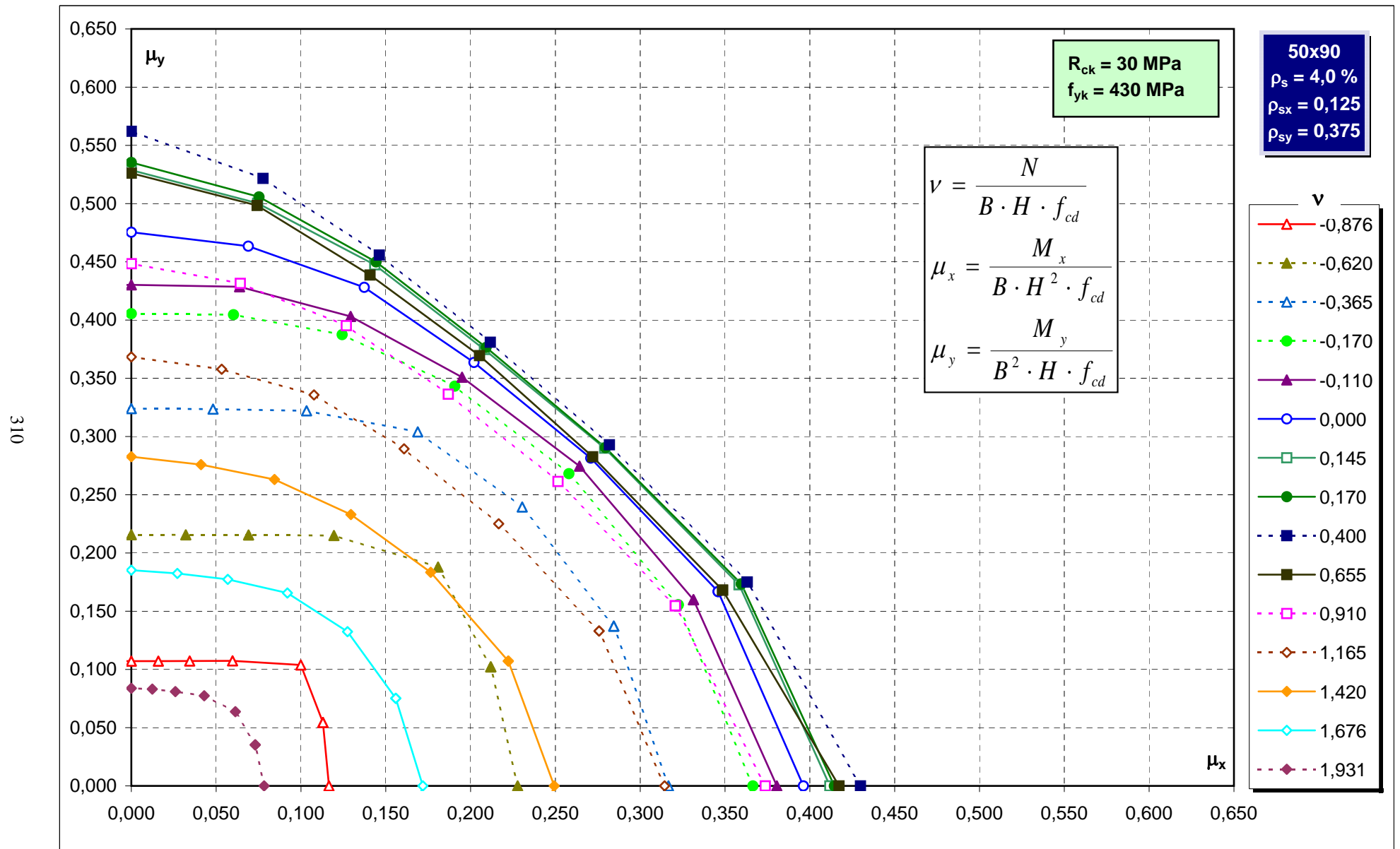
Abachi di verifica



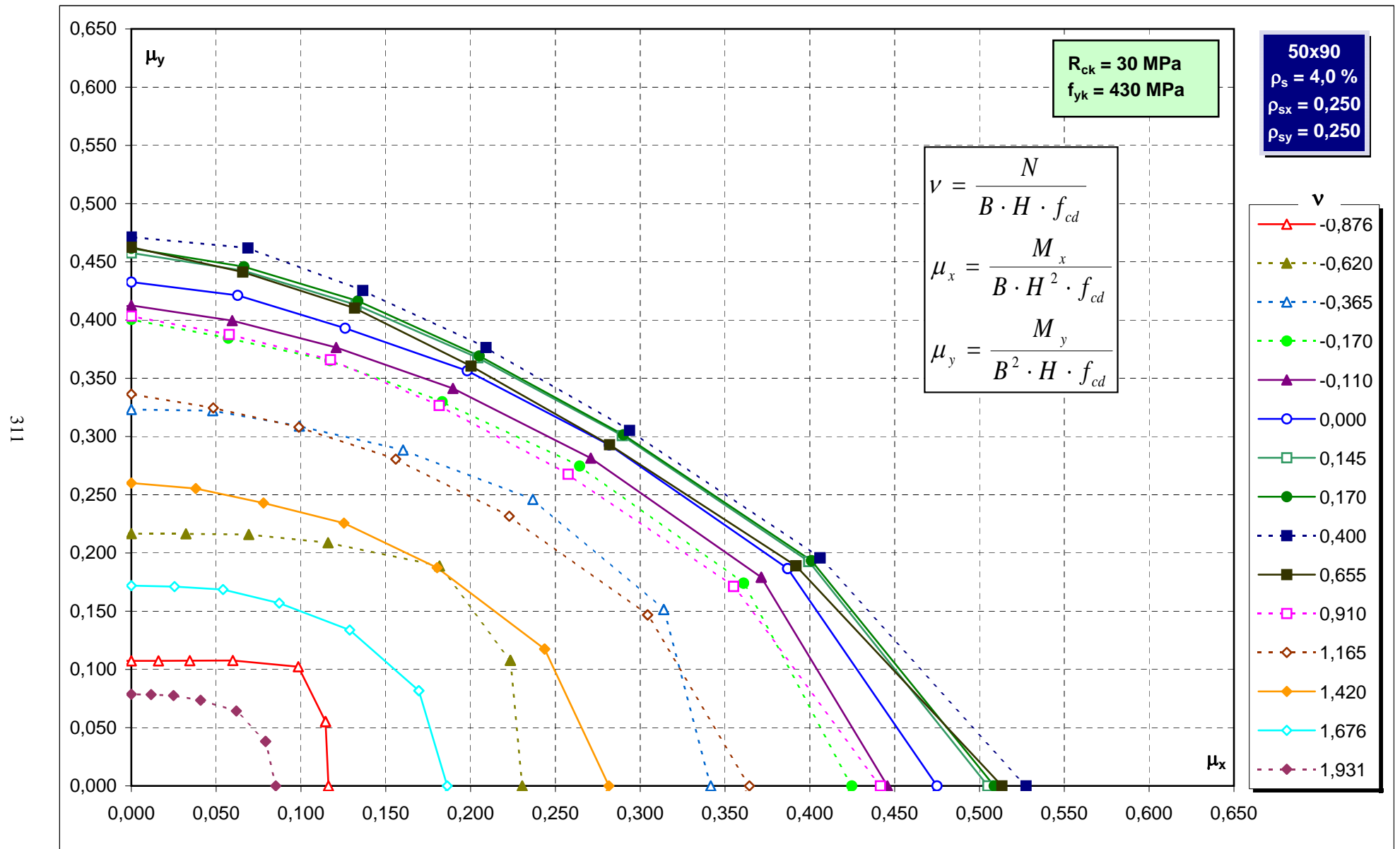
Abachi di verifica



Abachi di verifica

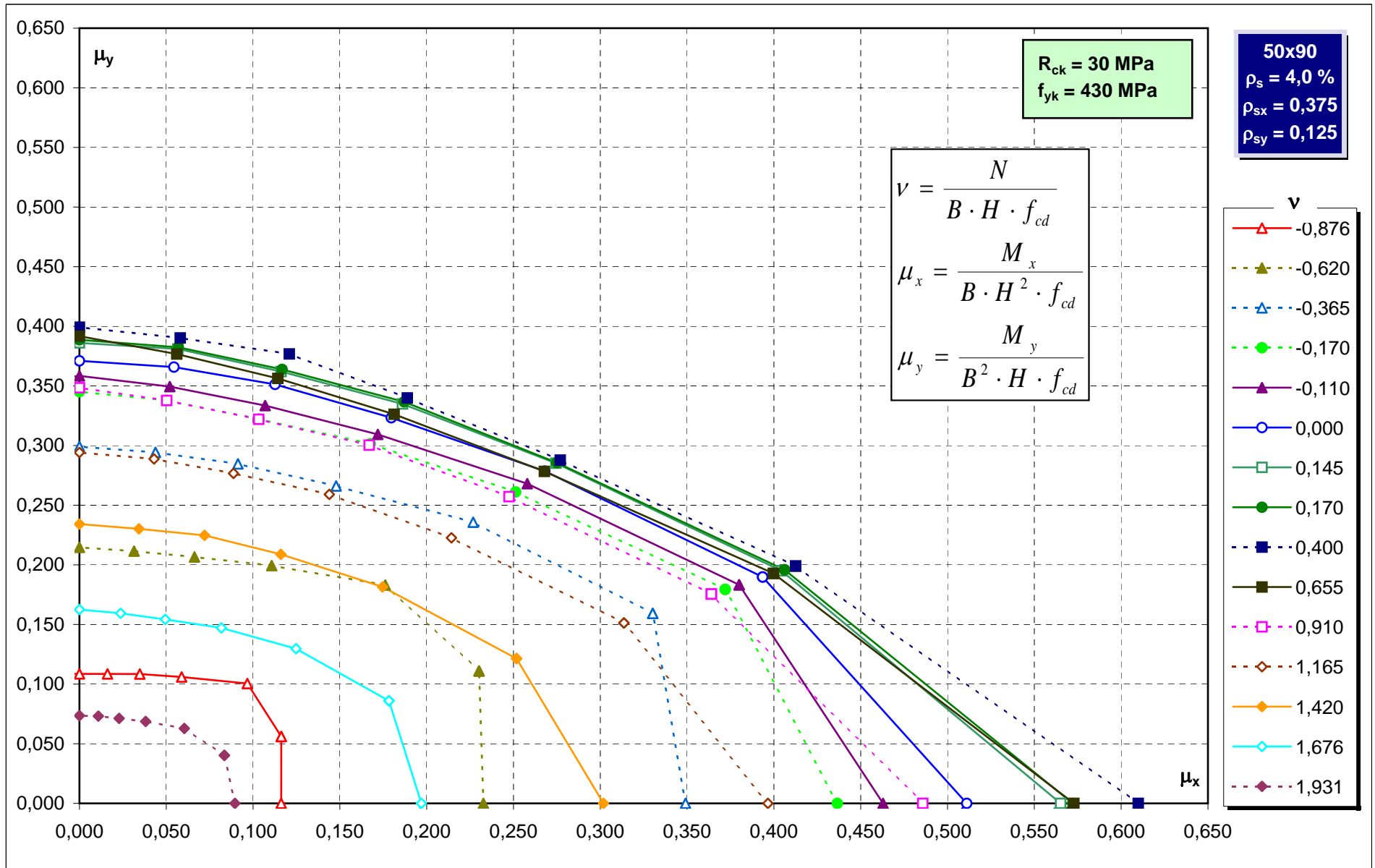


Abachi di verifica

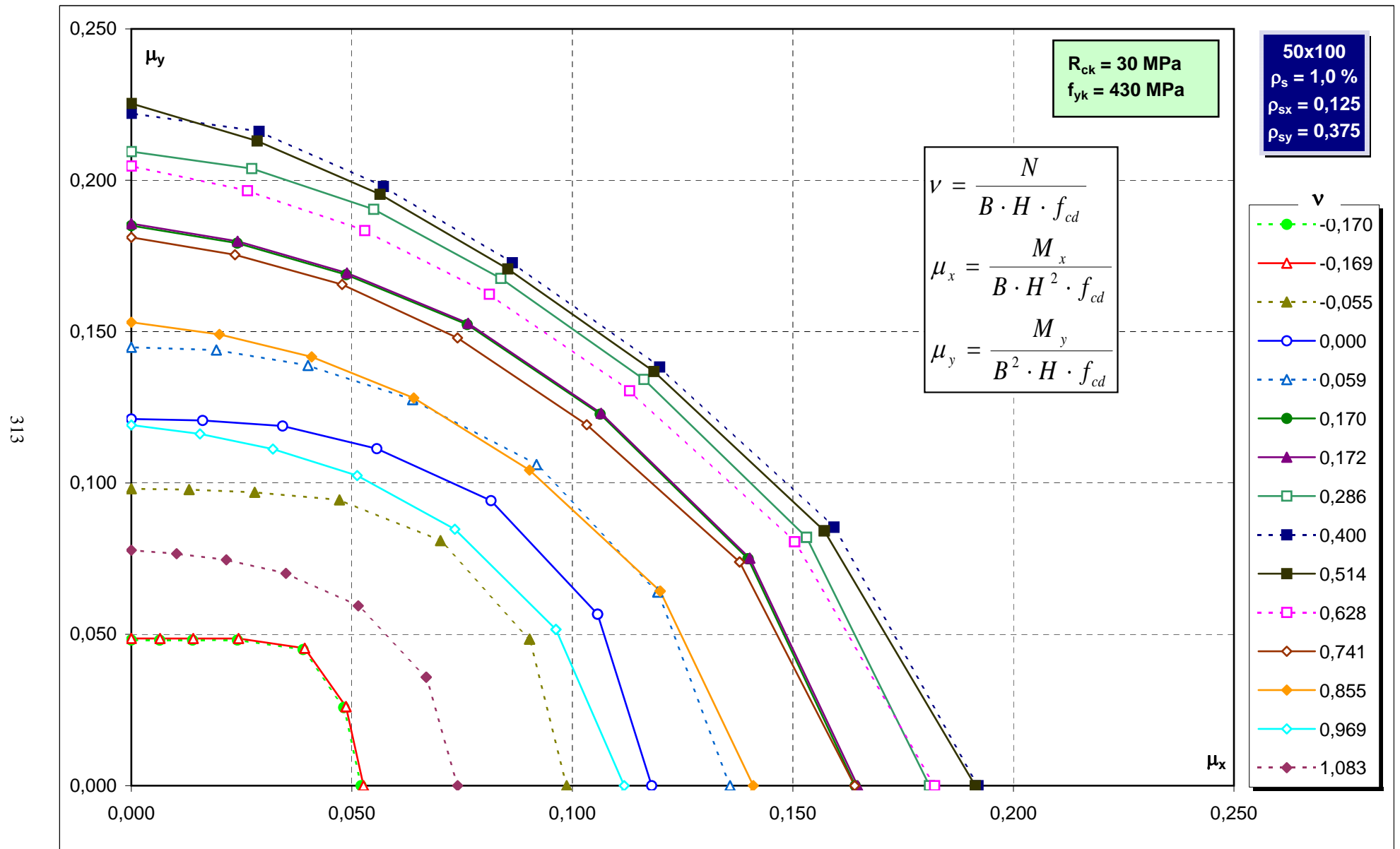


Abachi di verifica

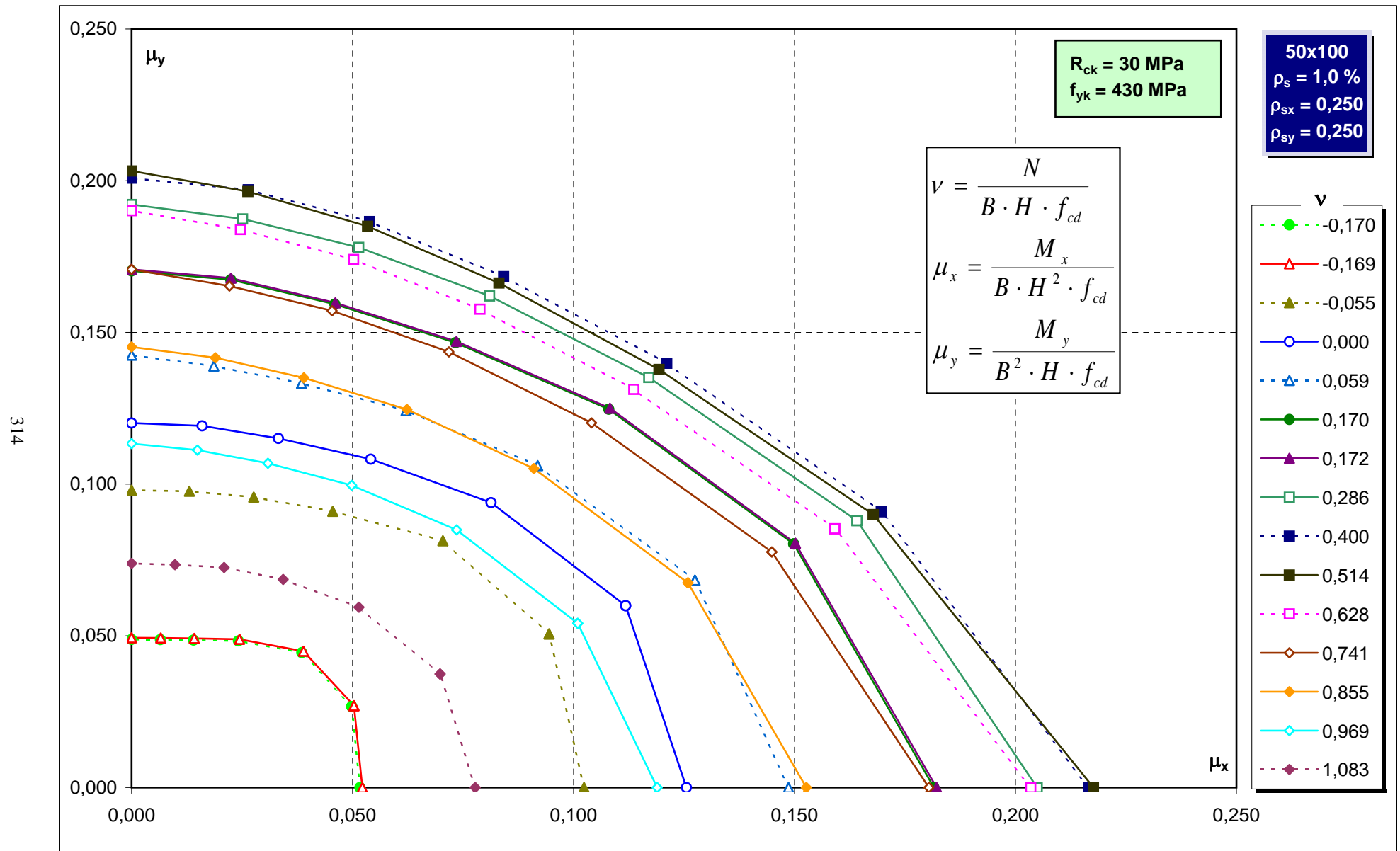
312



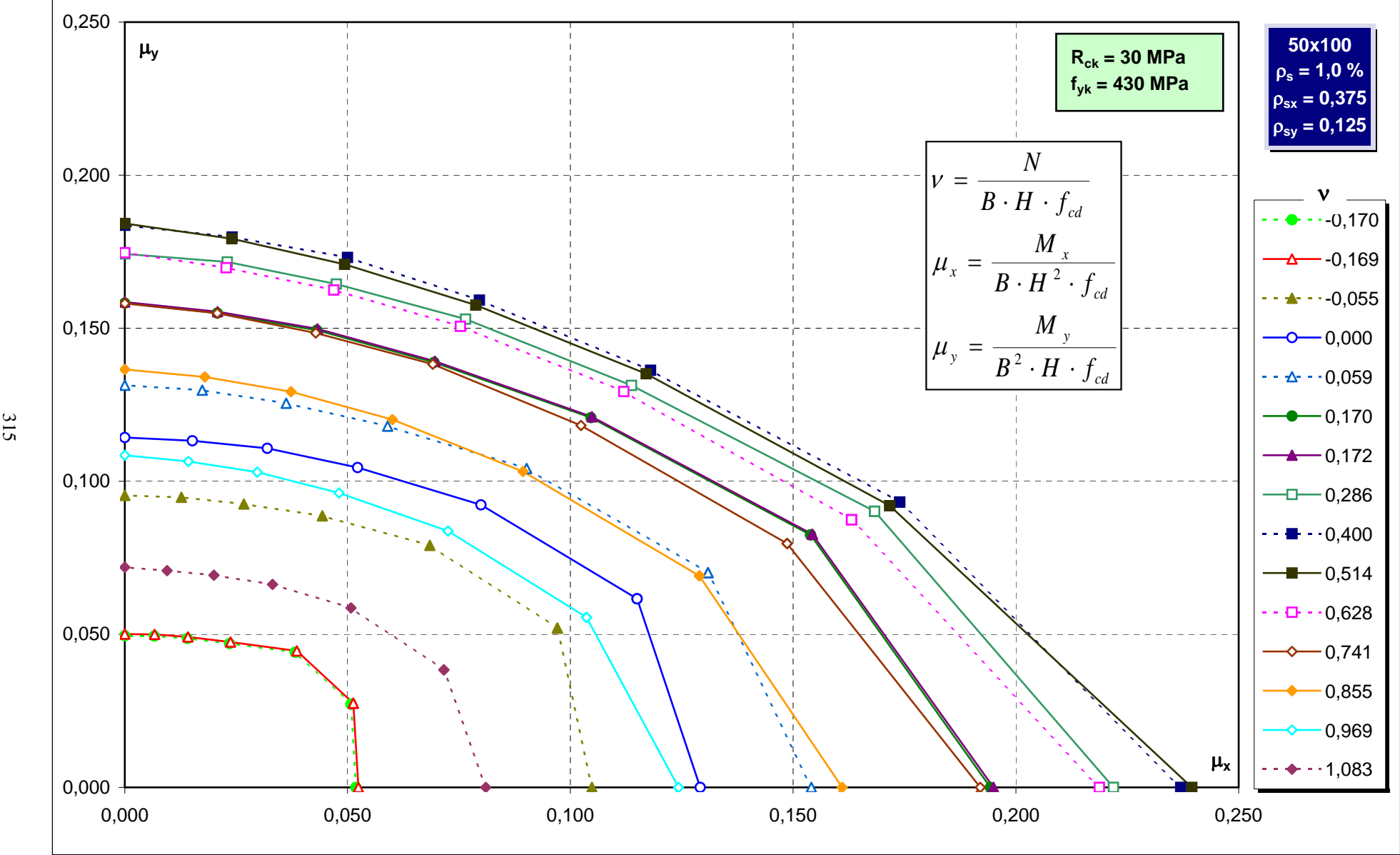
Abachi di verifica



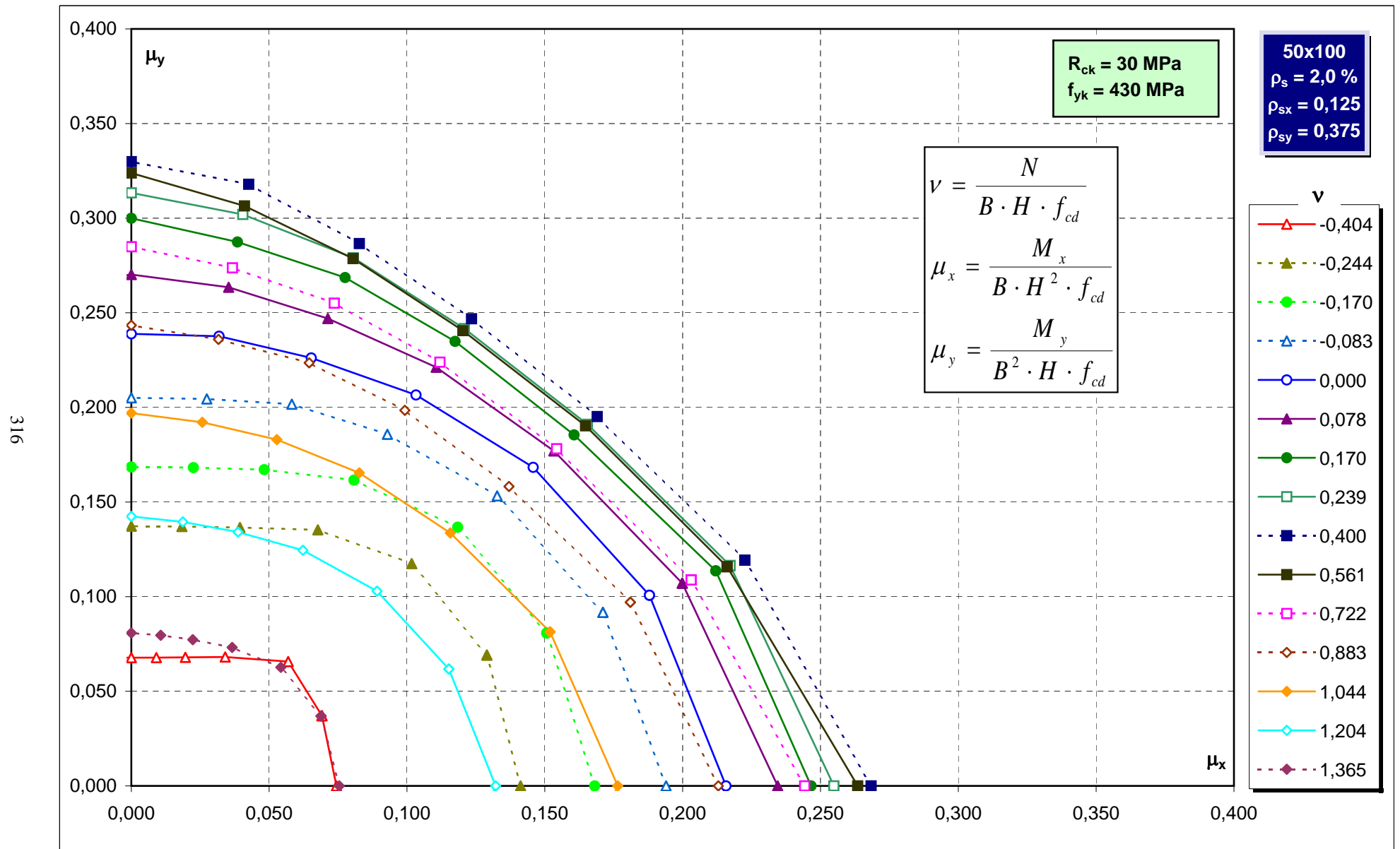
Abachi di verifica



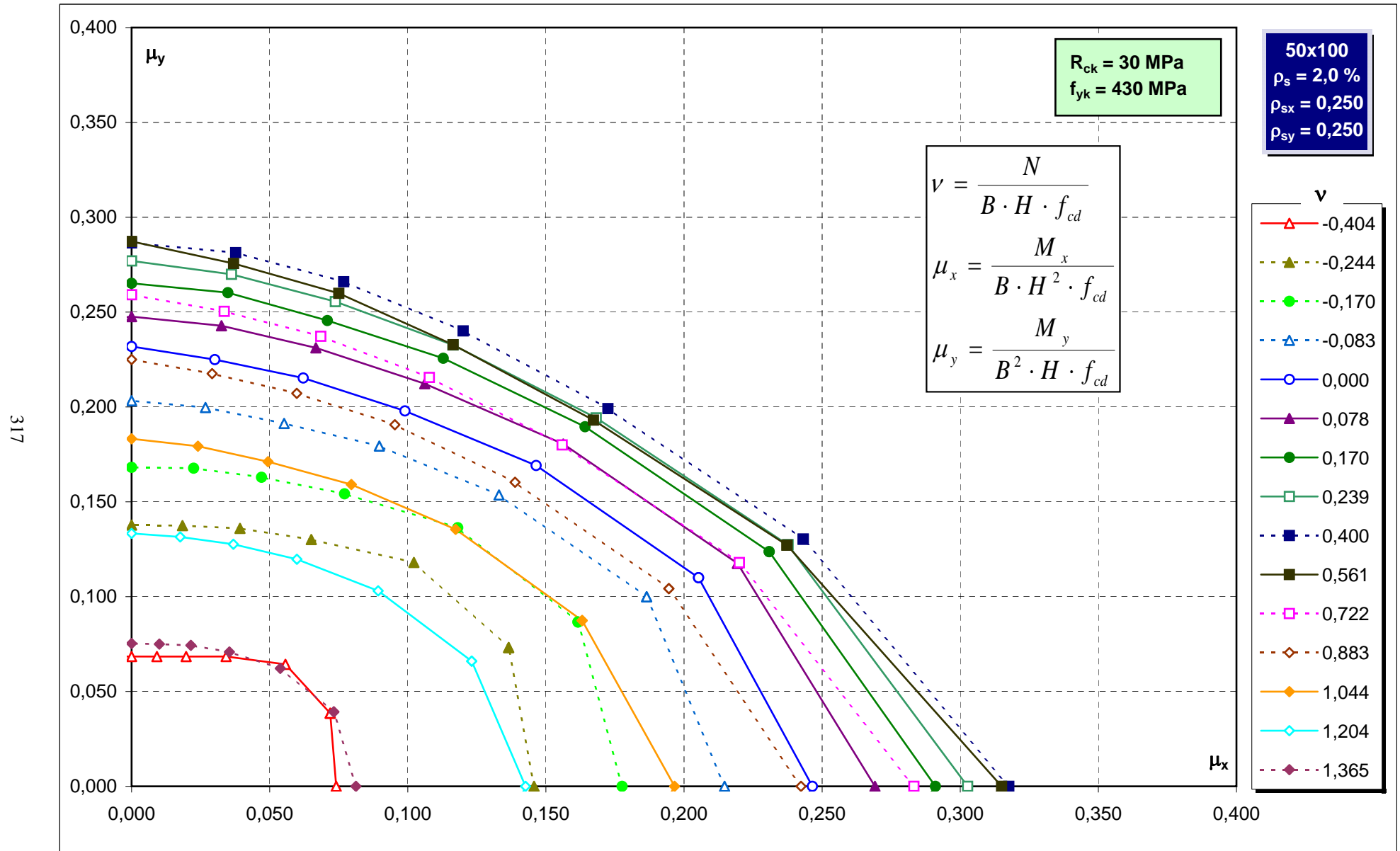
Abachi di verifica



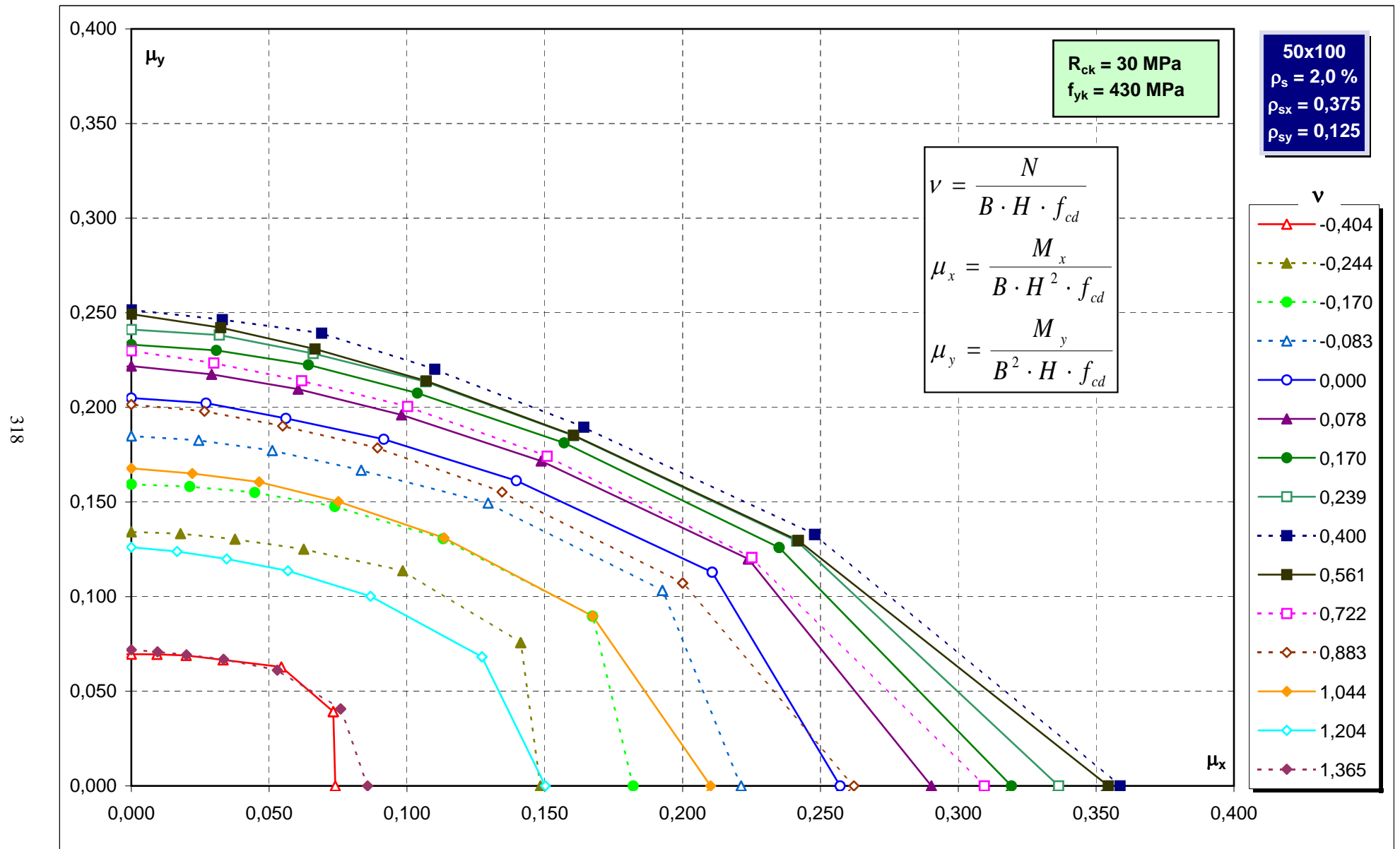
Abachi di verifica



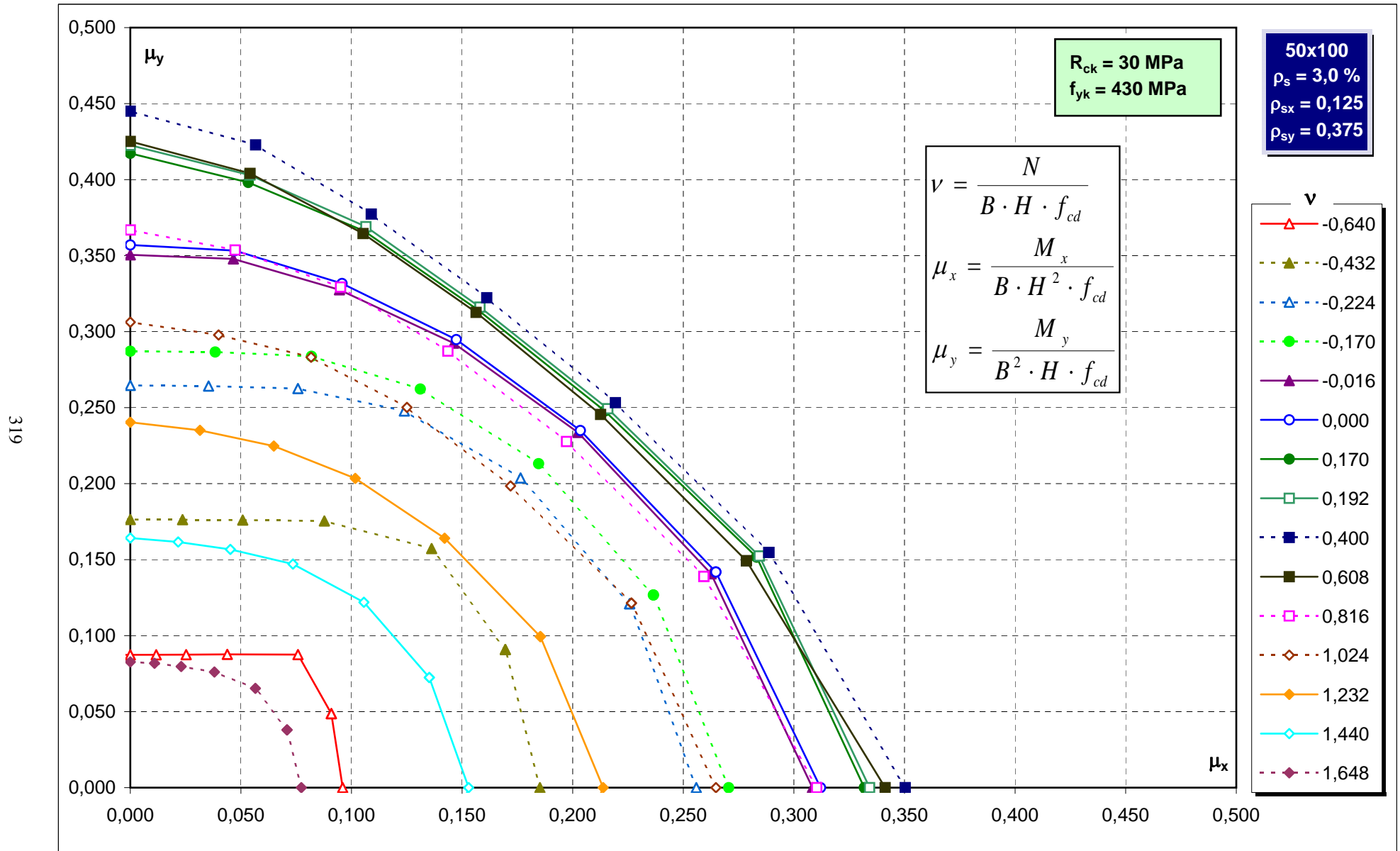
Abachi di verifica



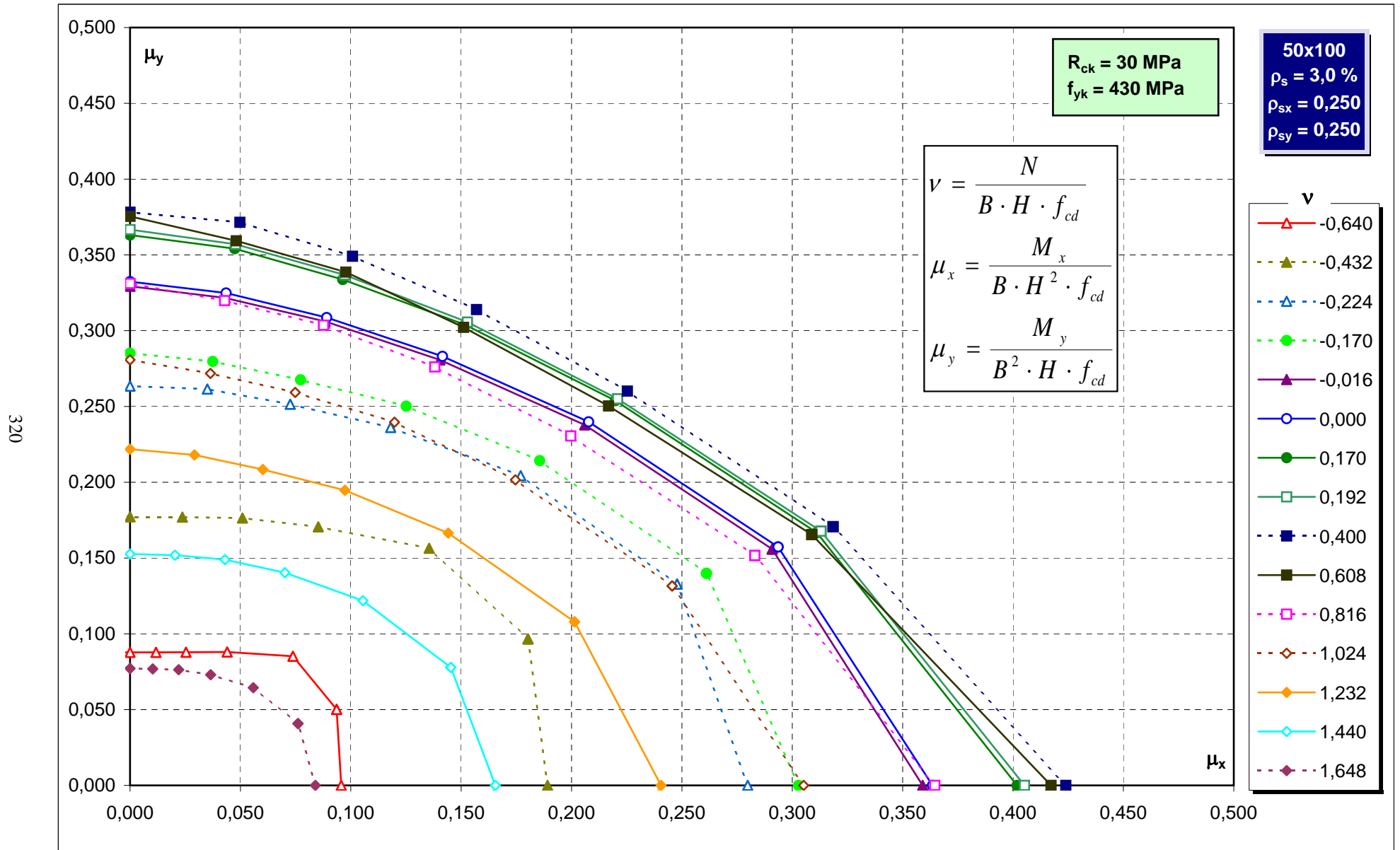
Abachi di verifica



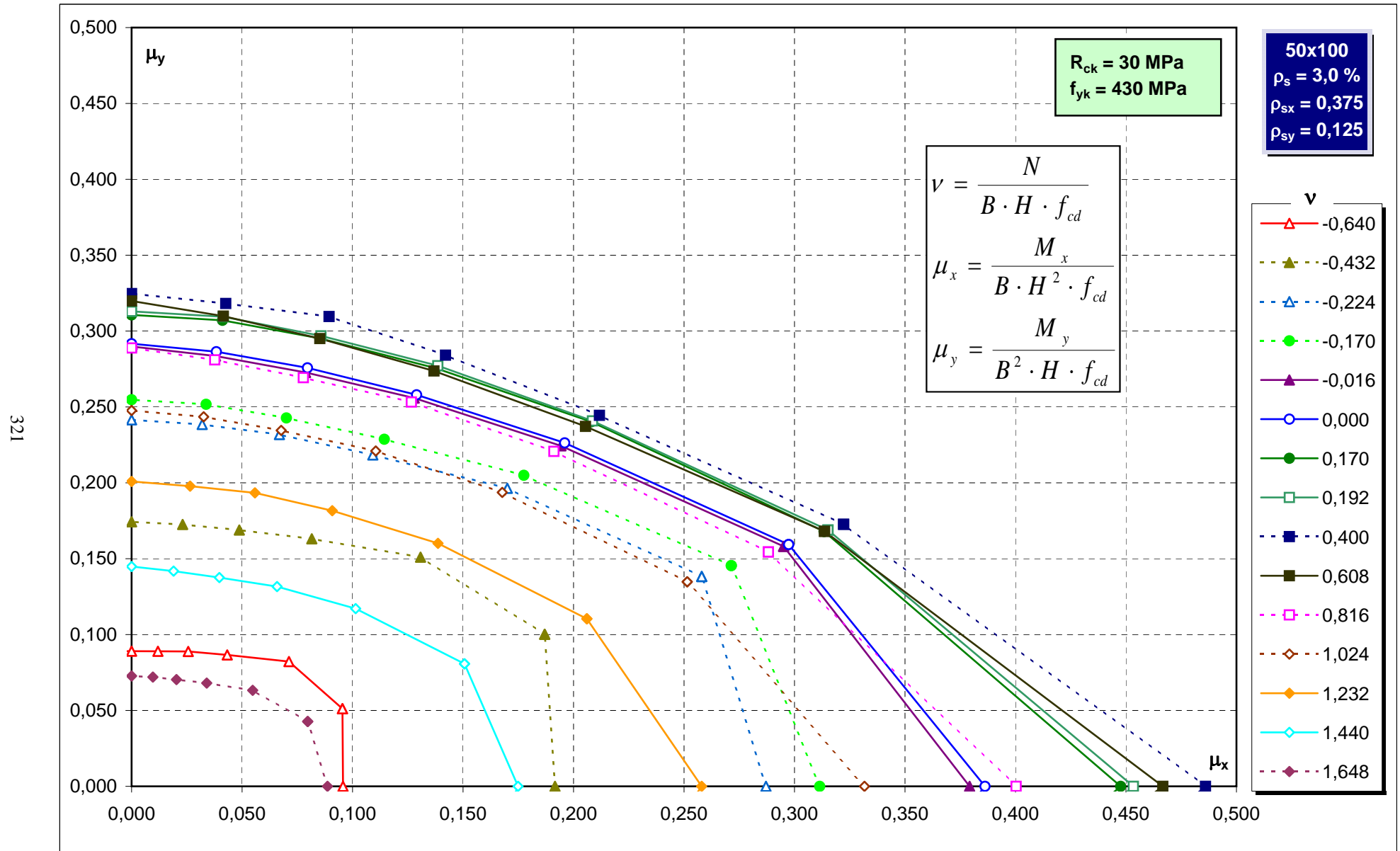
Abachi di verifica



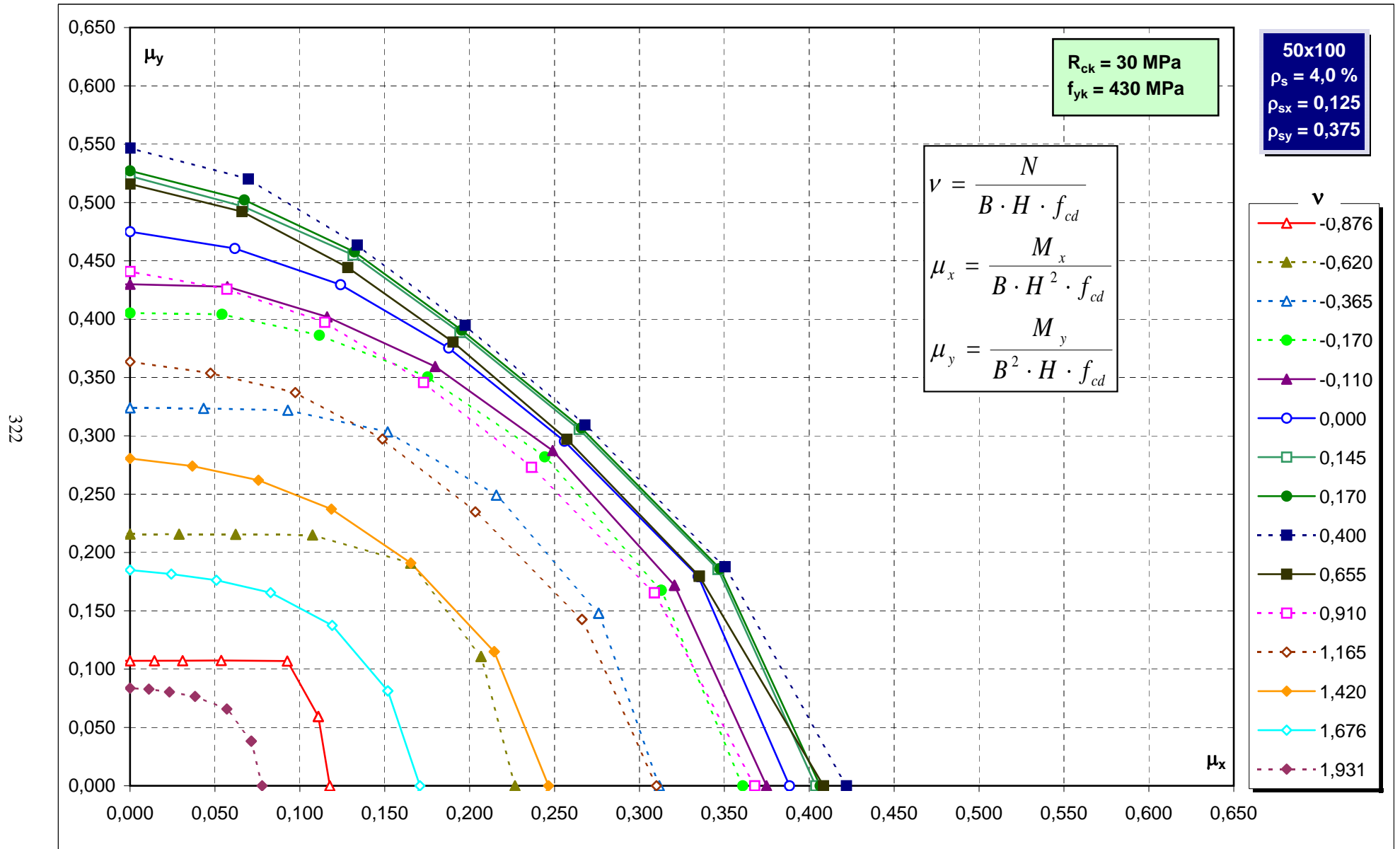
Abachi di verifica



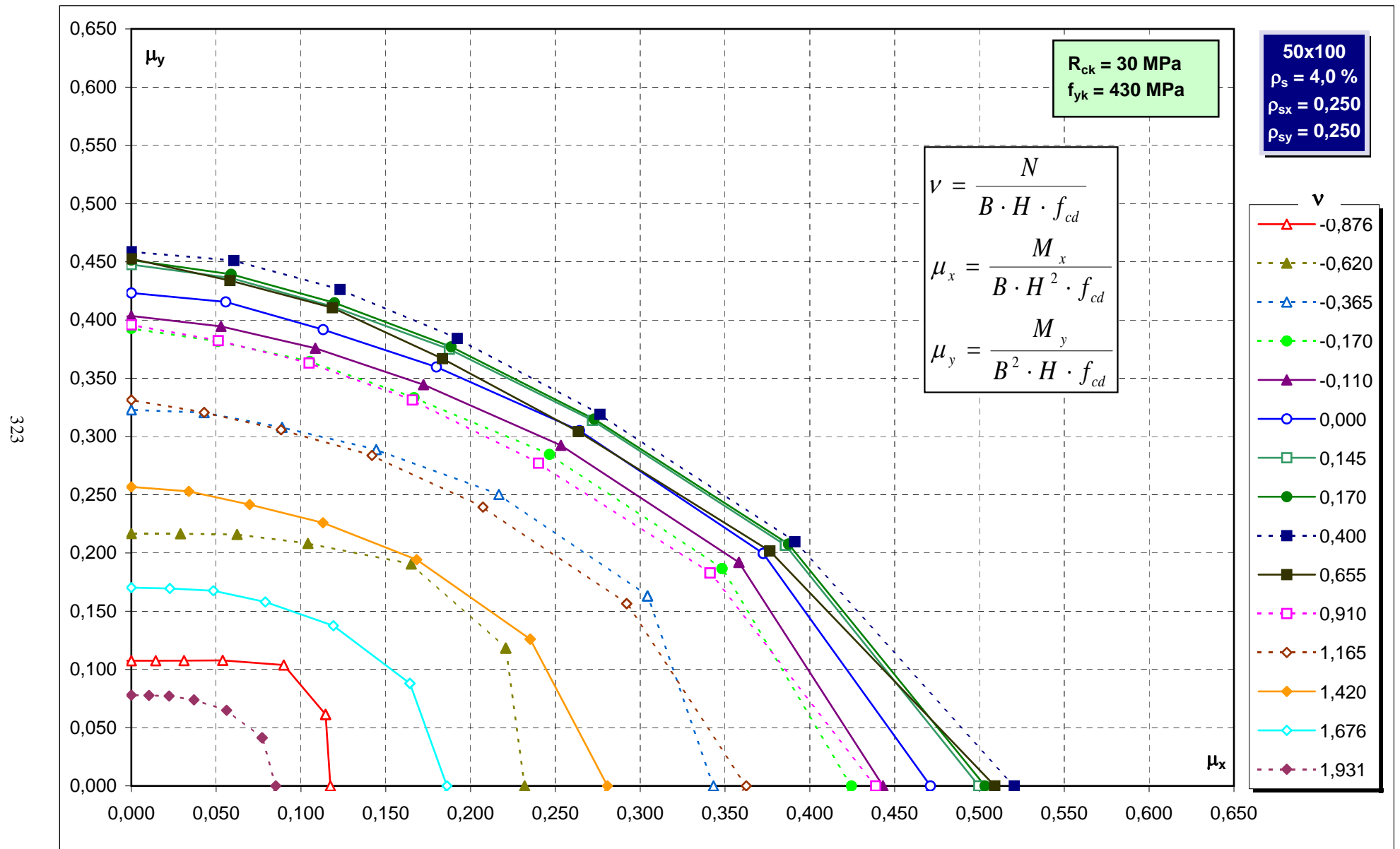
Abachi di verifica



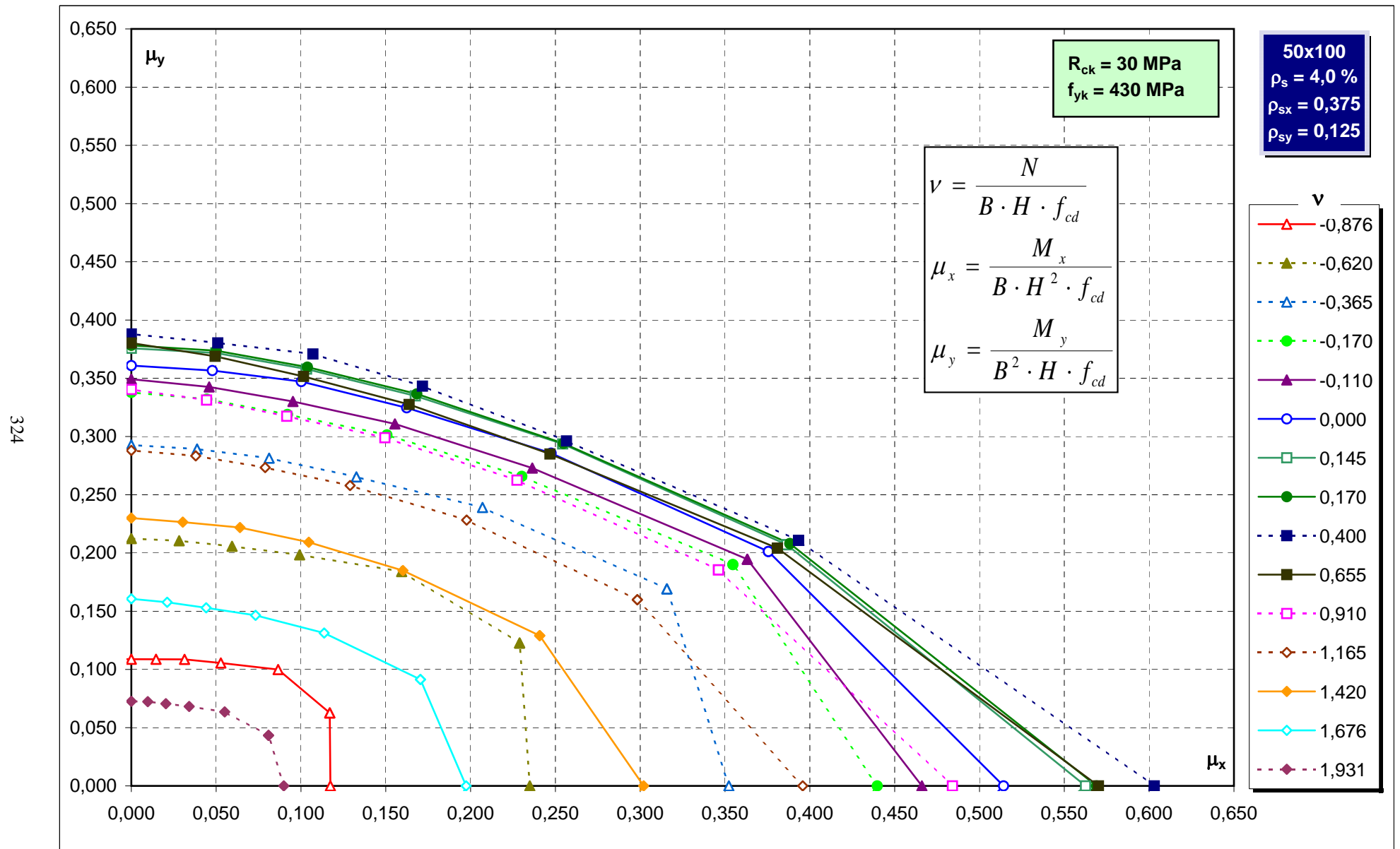
Abachi di verifica



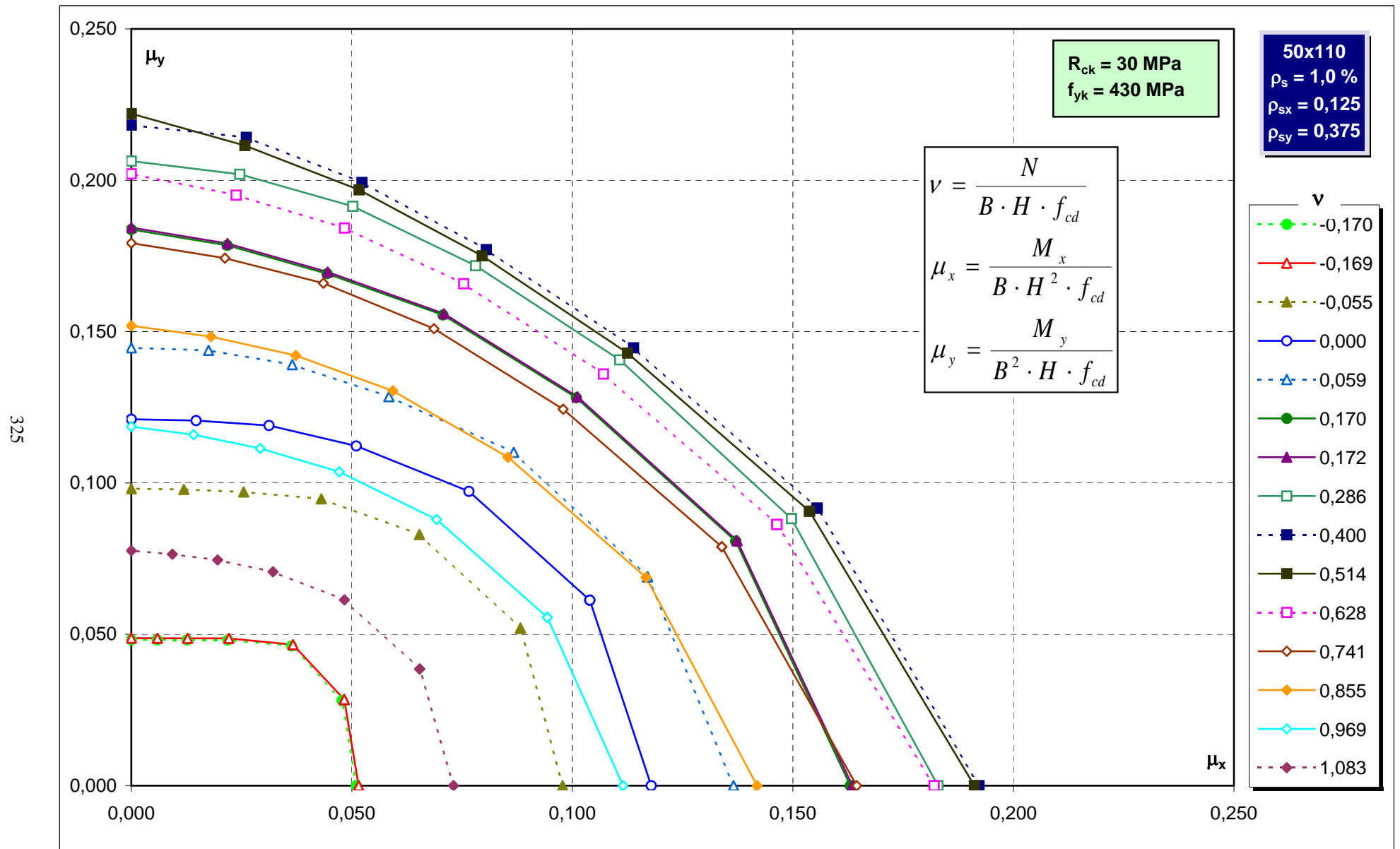
Abachi di verifica



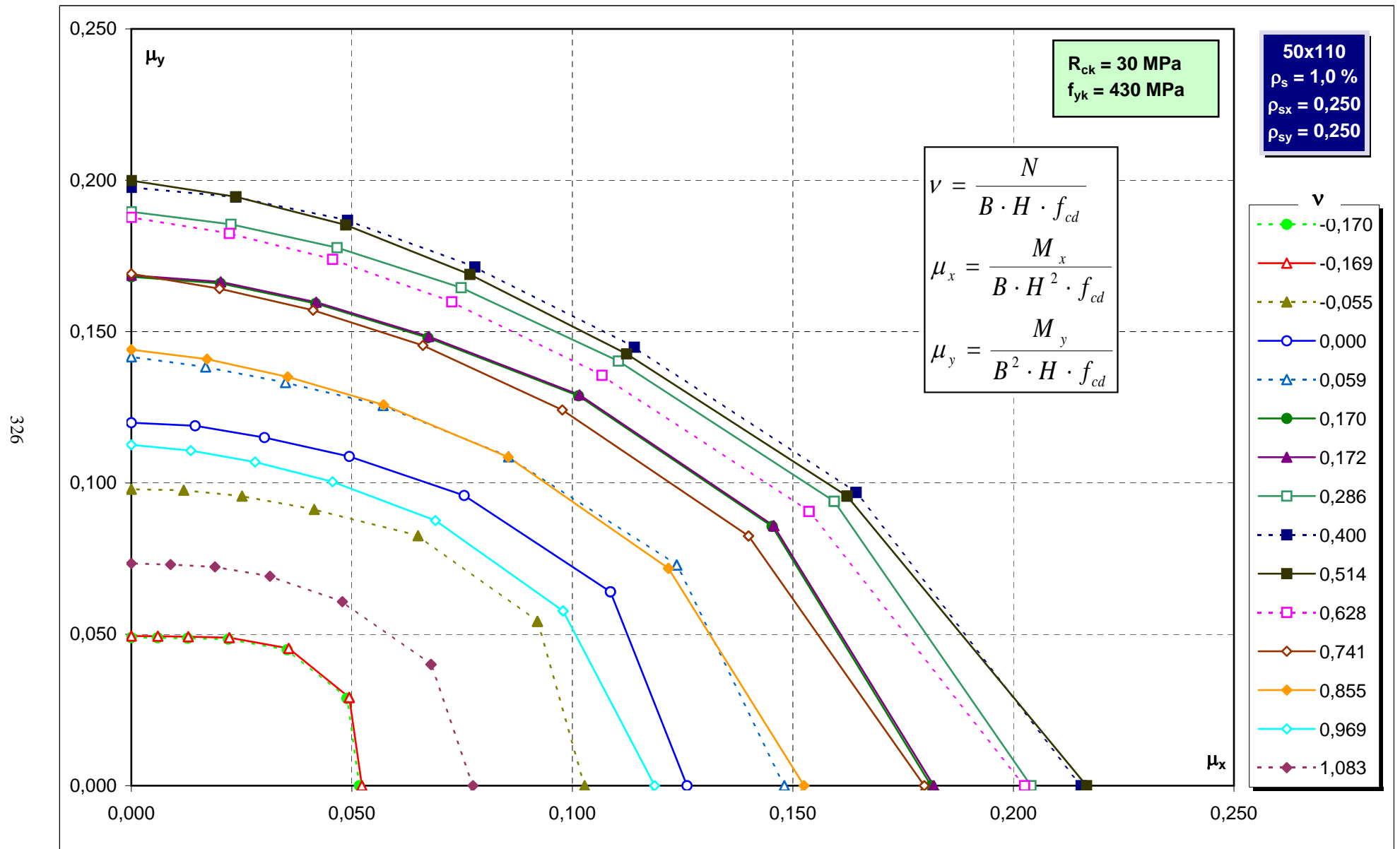
Abachi di verifica



Abachi di verifica

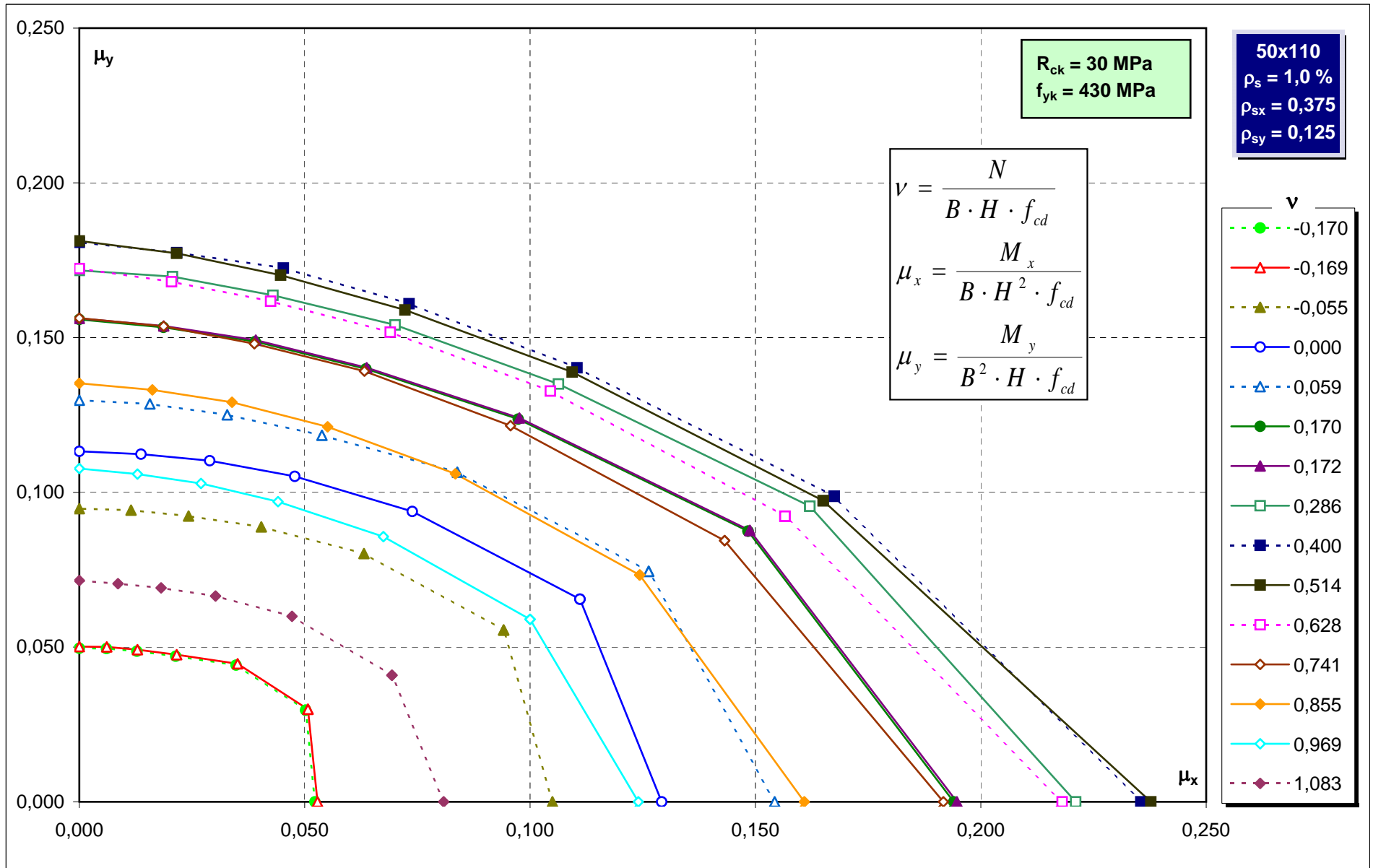


Abachi di verifica

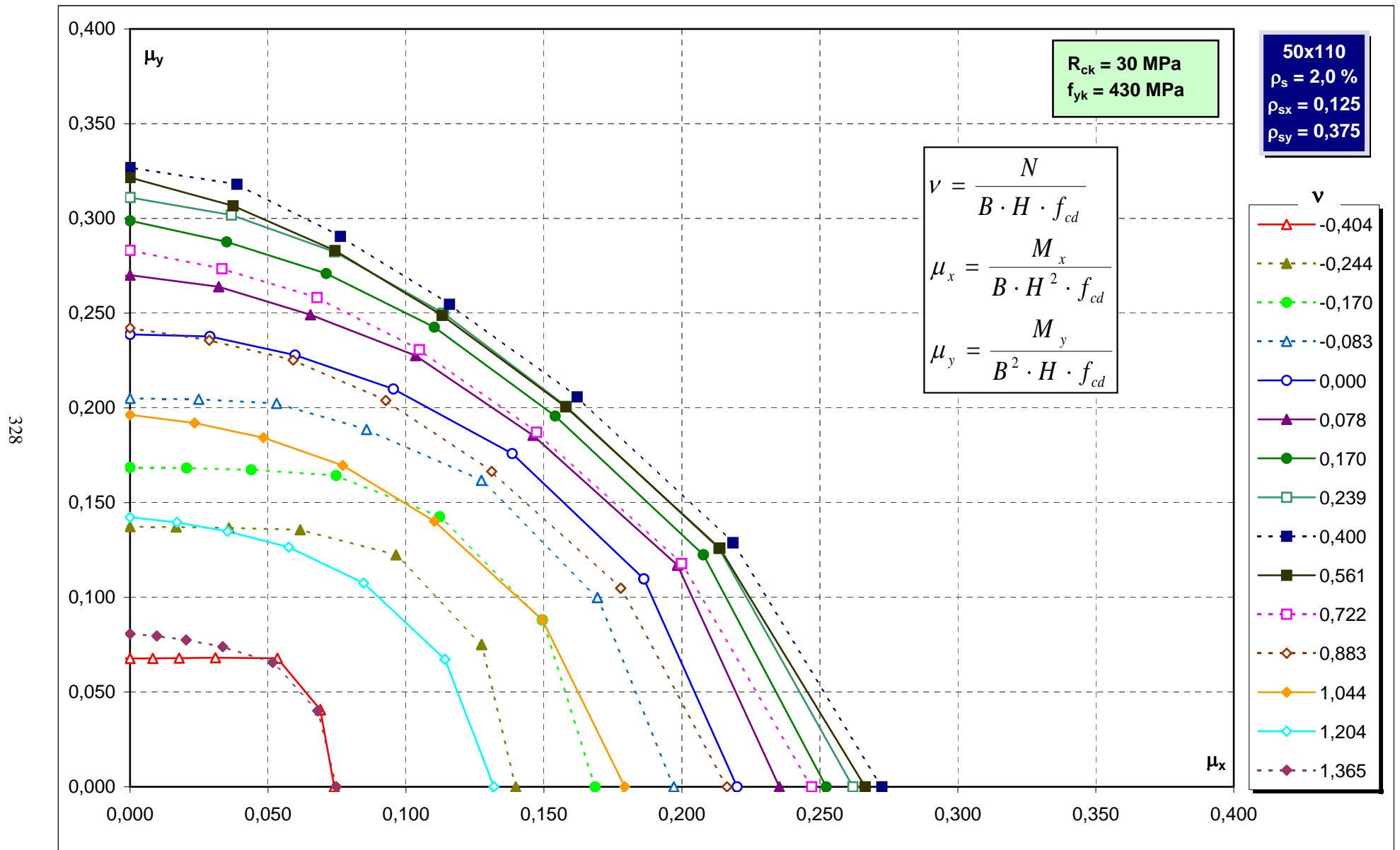


Abachi di verifica

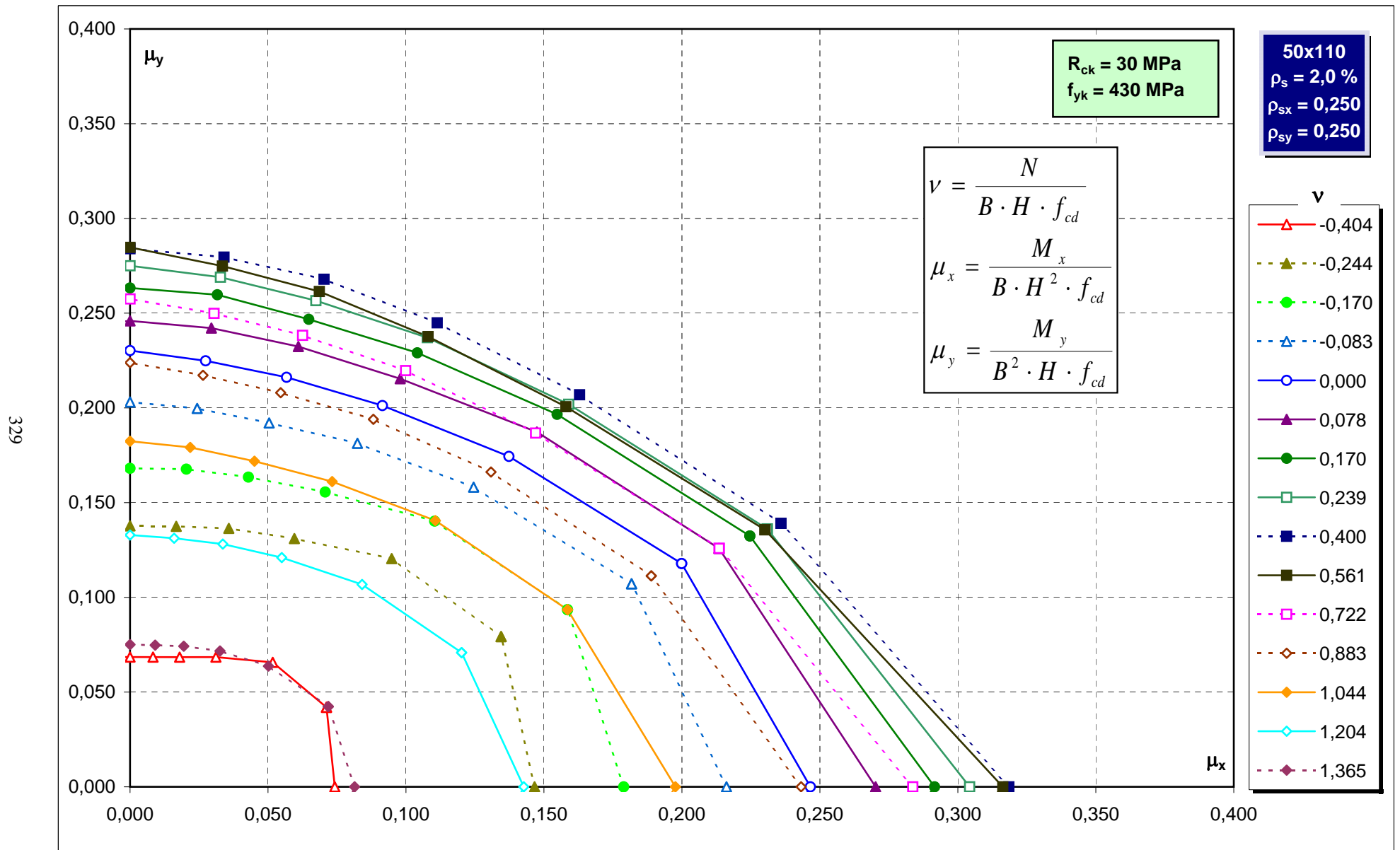
327



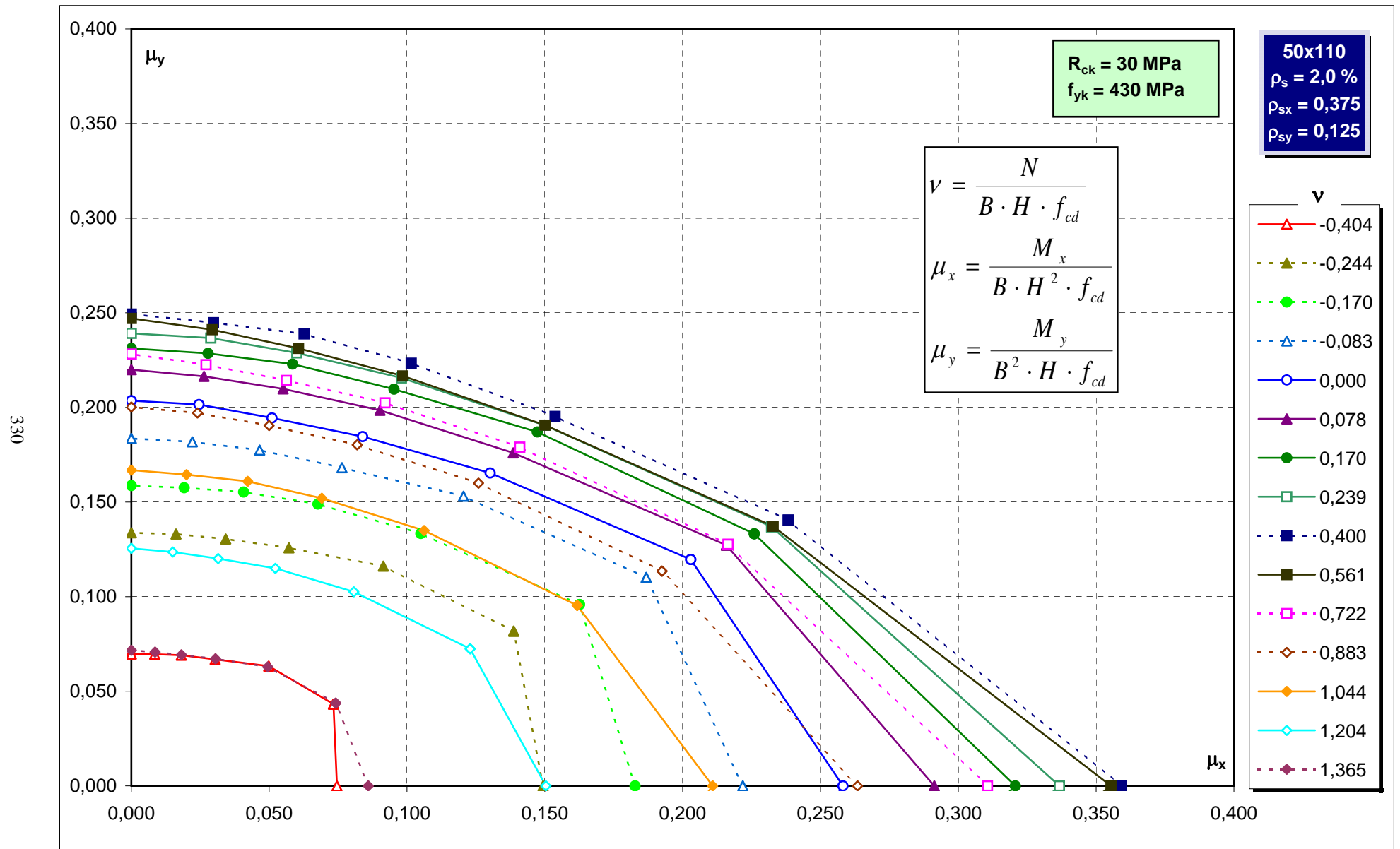
Abachi di verifica



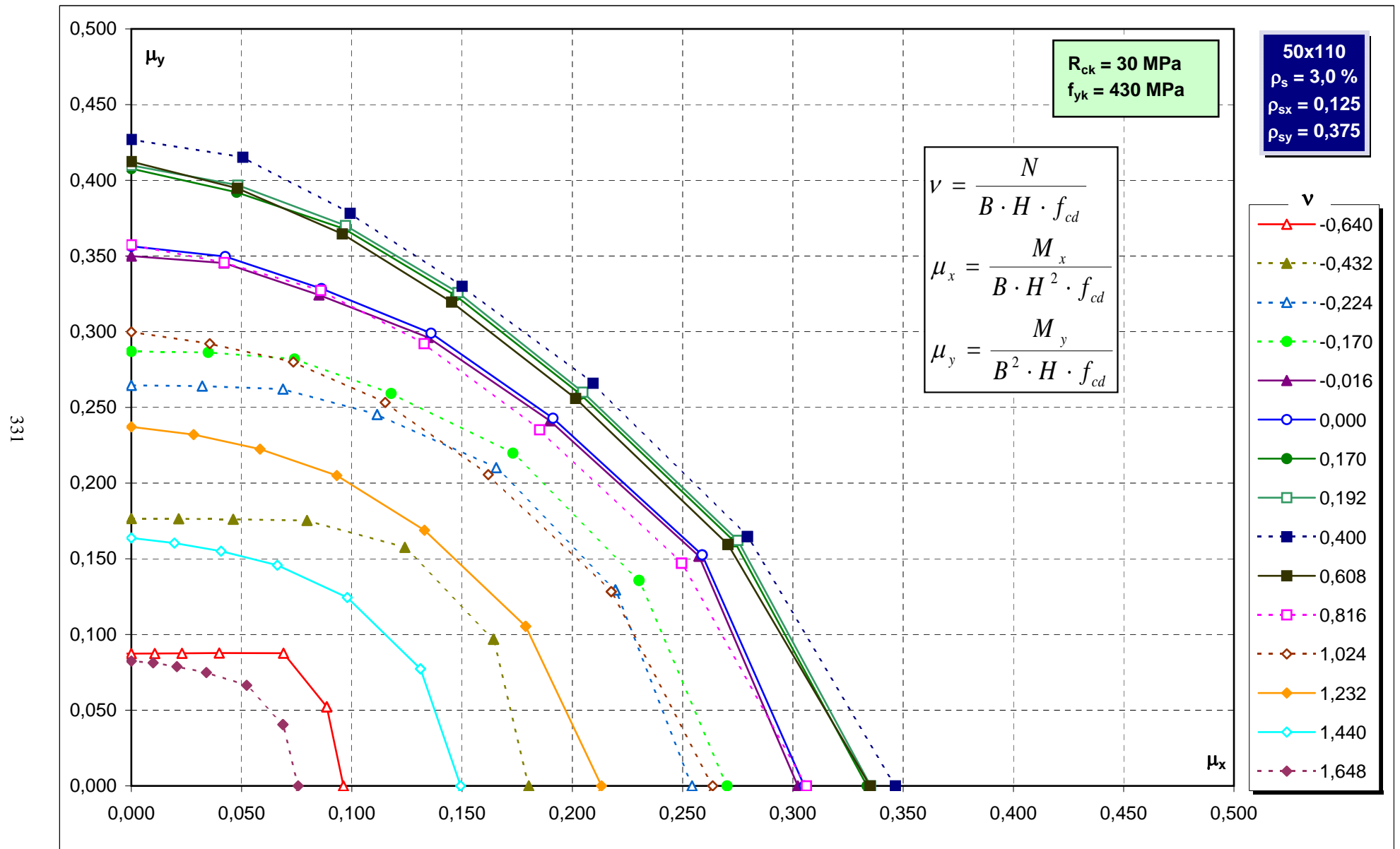
Abachi di verifica



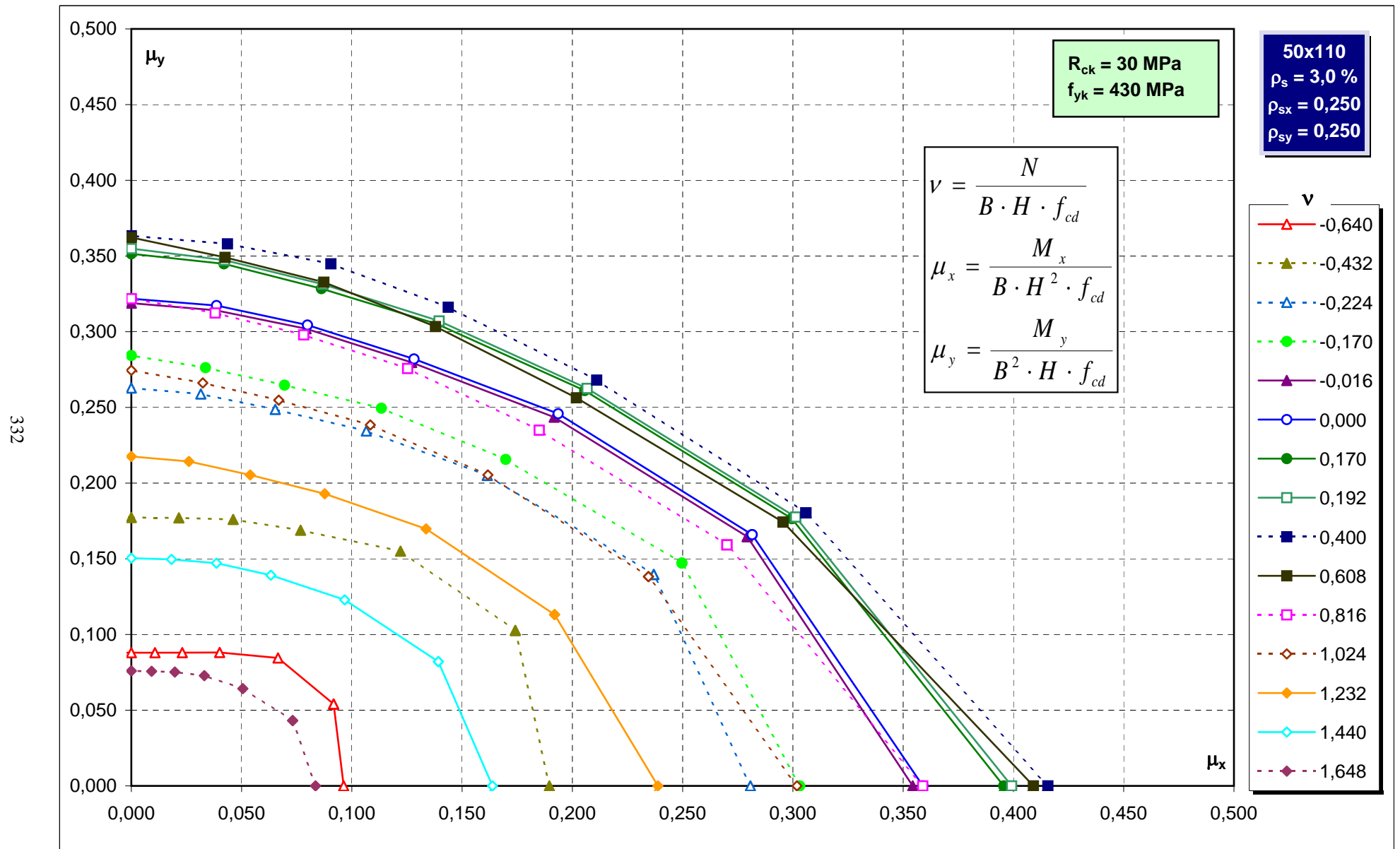
Abachi di verifica



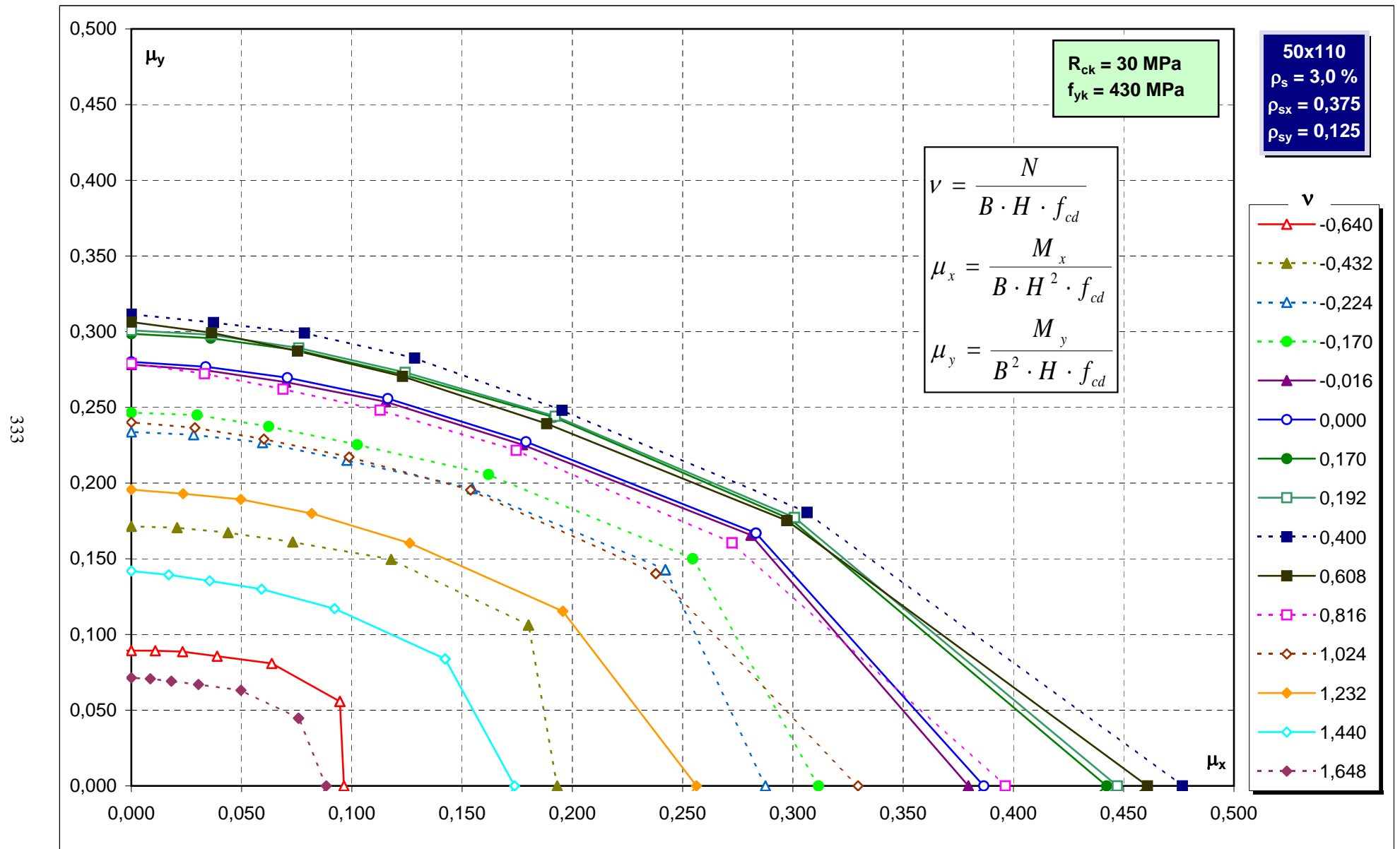
Abachi di verifica



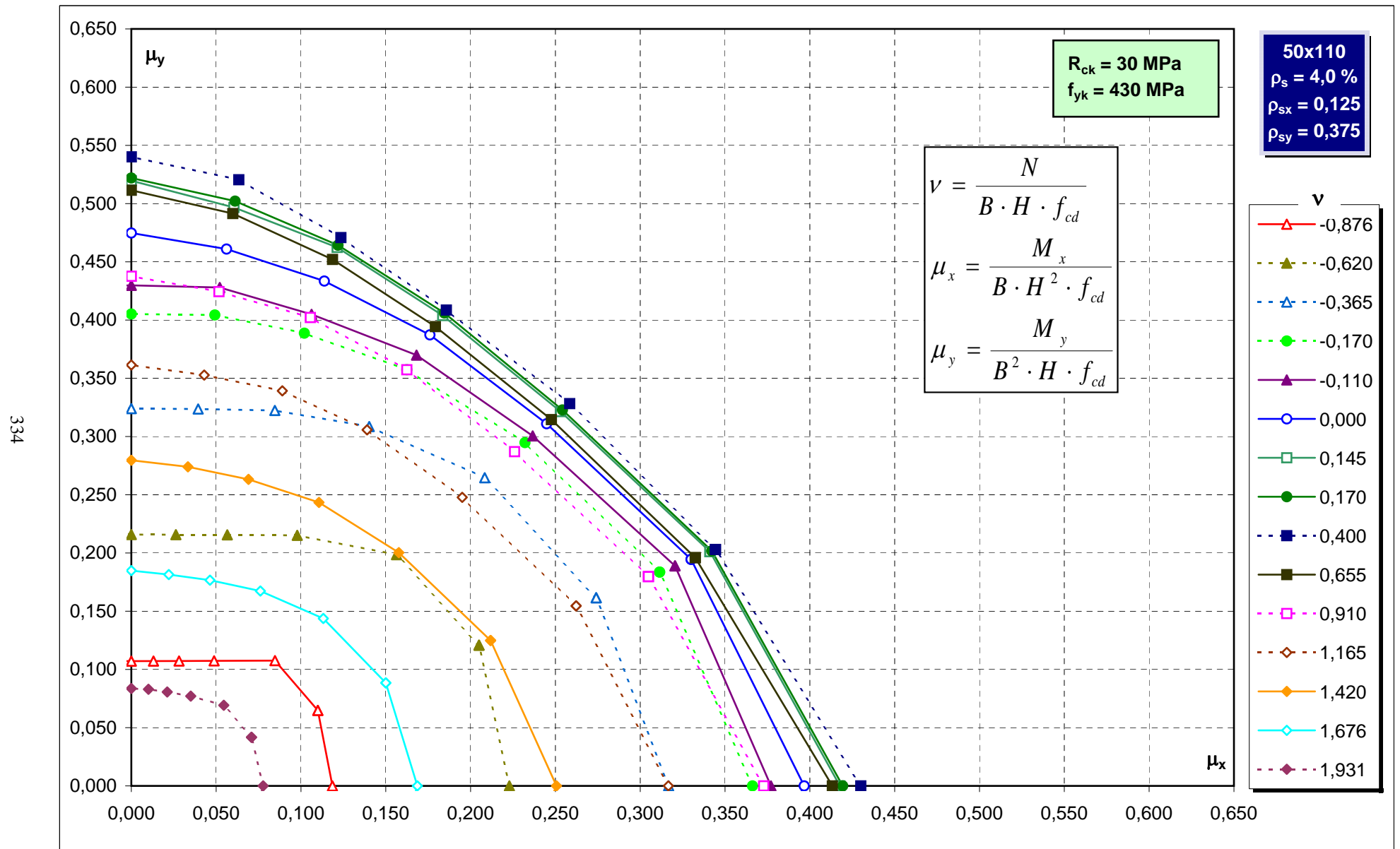
Abachi di verifica



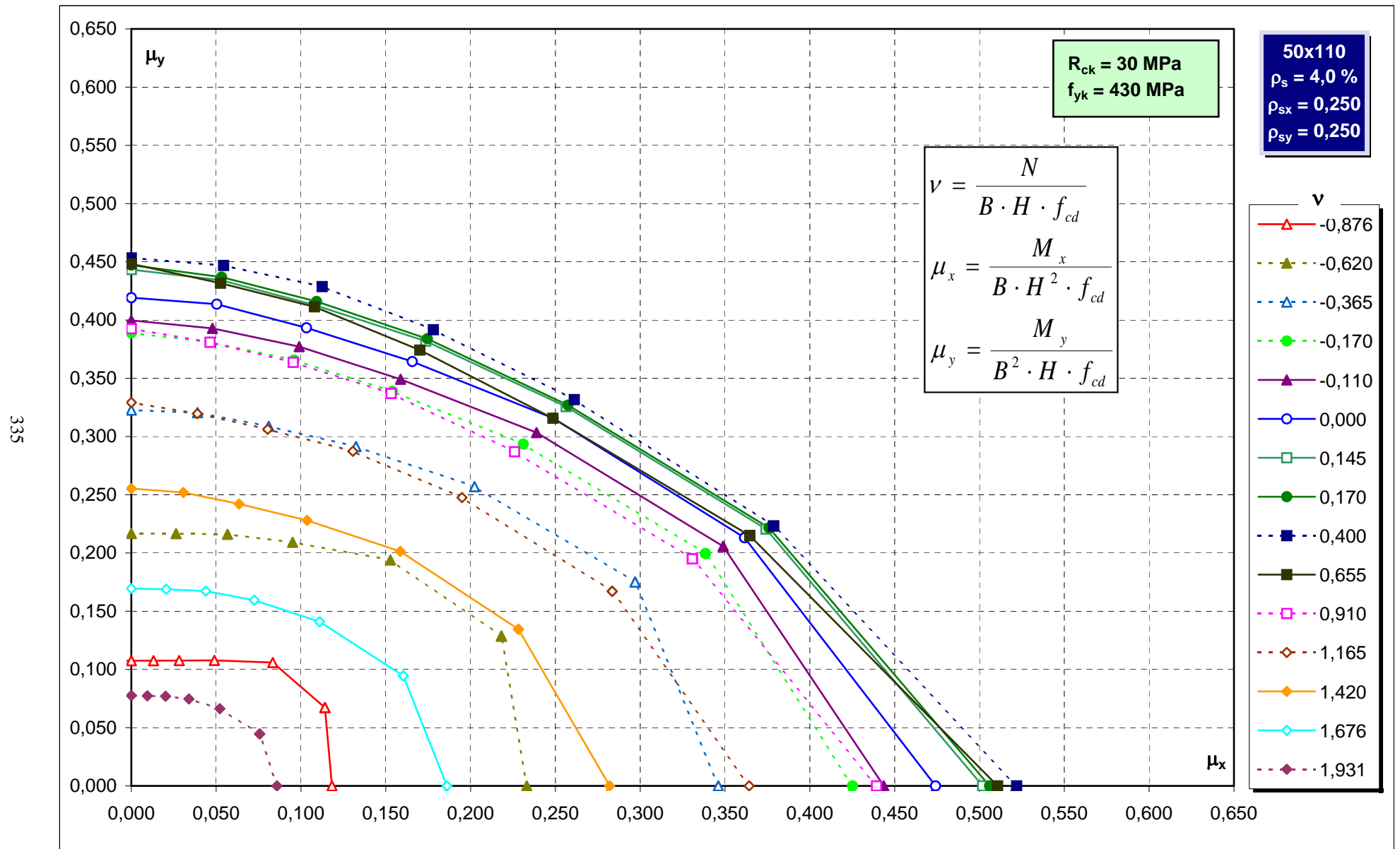
Abachi di verifica



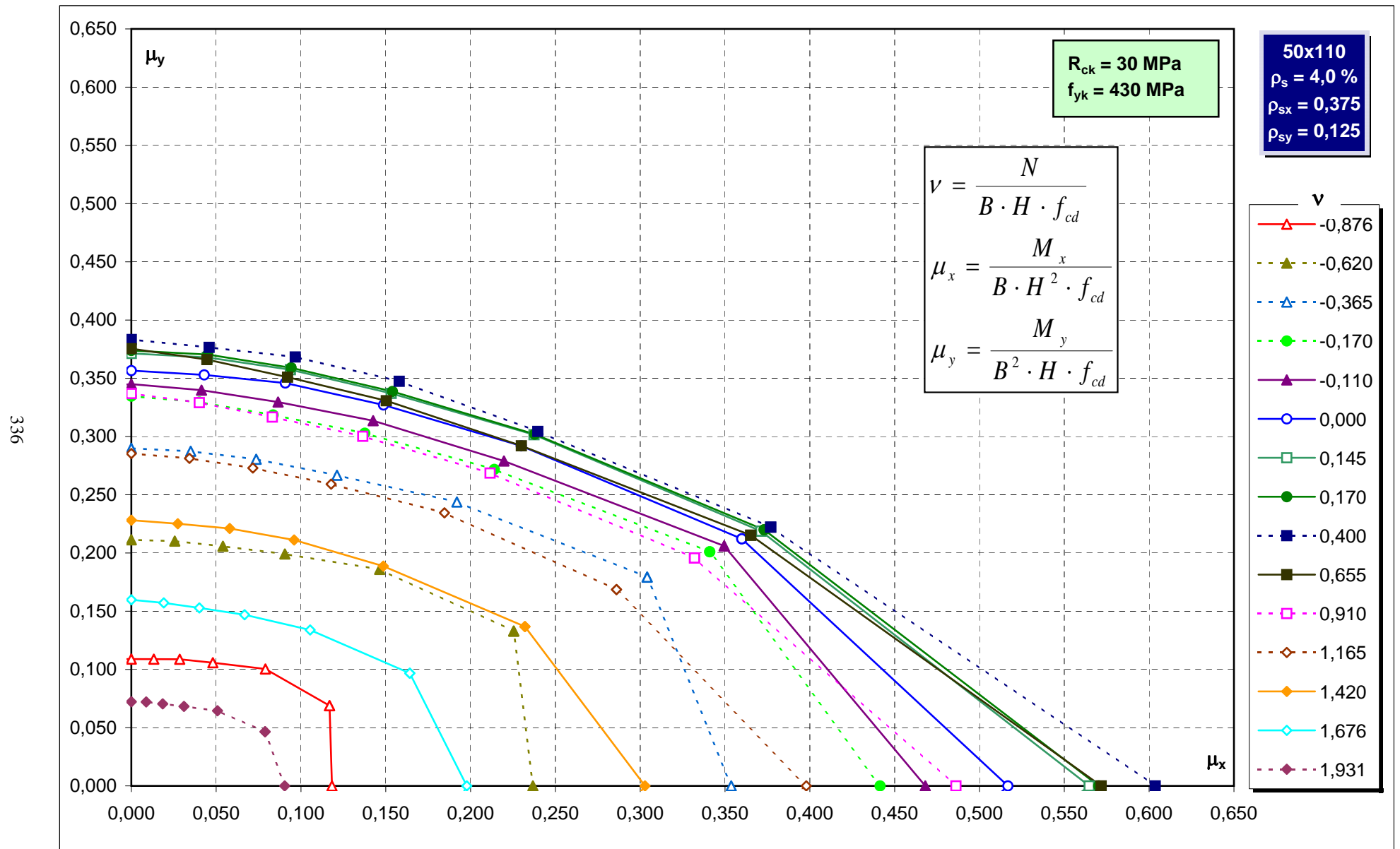
Abachi di verifica



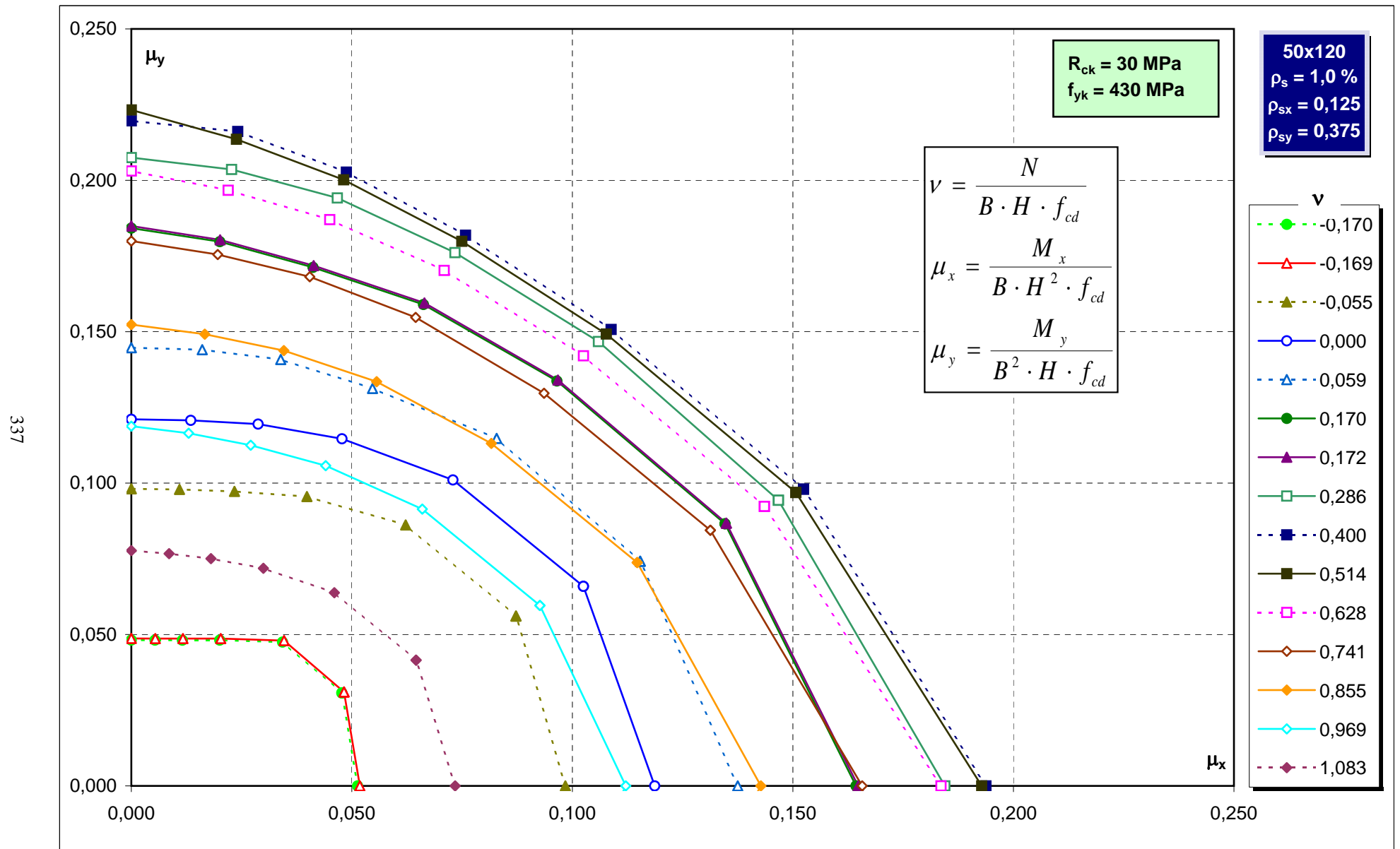
Abachi di verifica



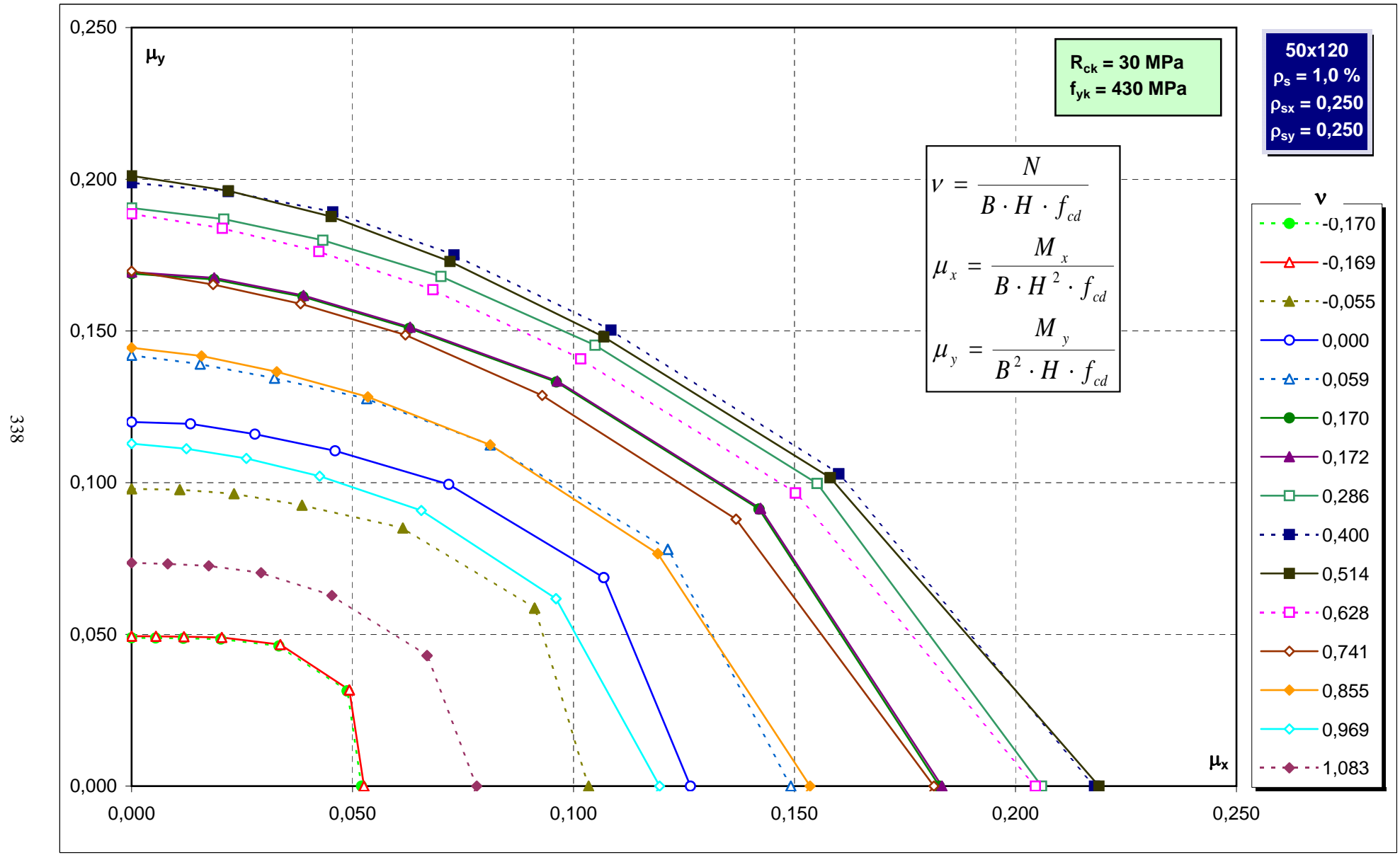
Abachi di verifica



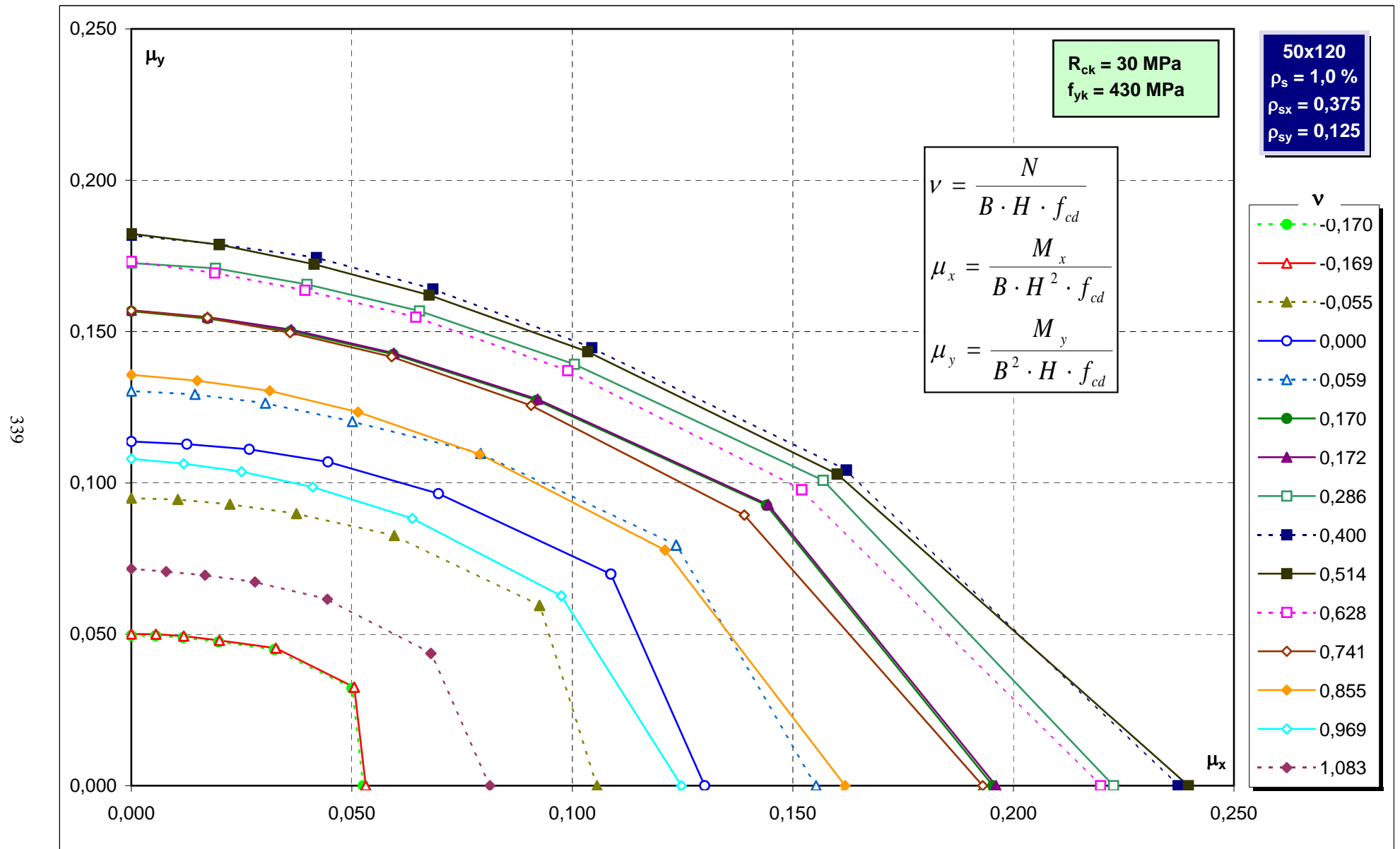
Abachi di verifica



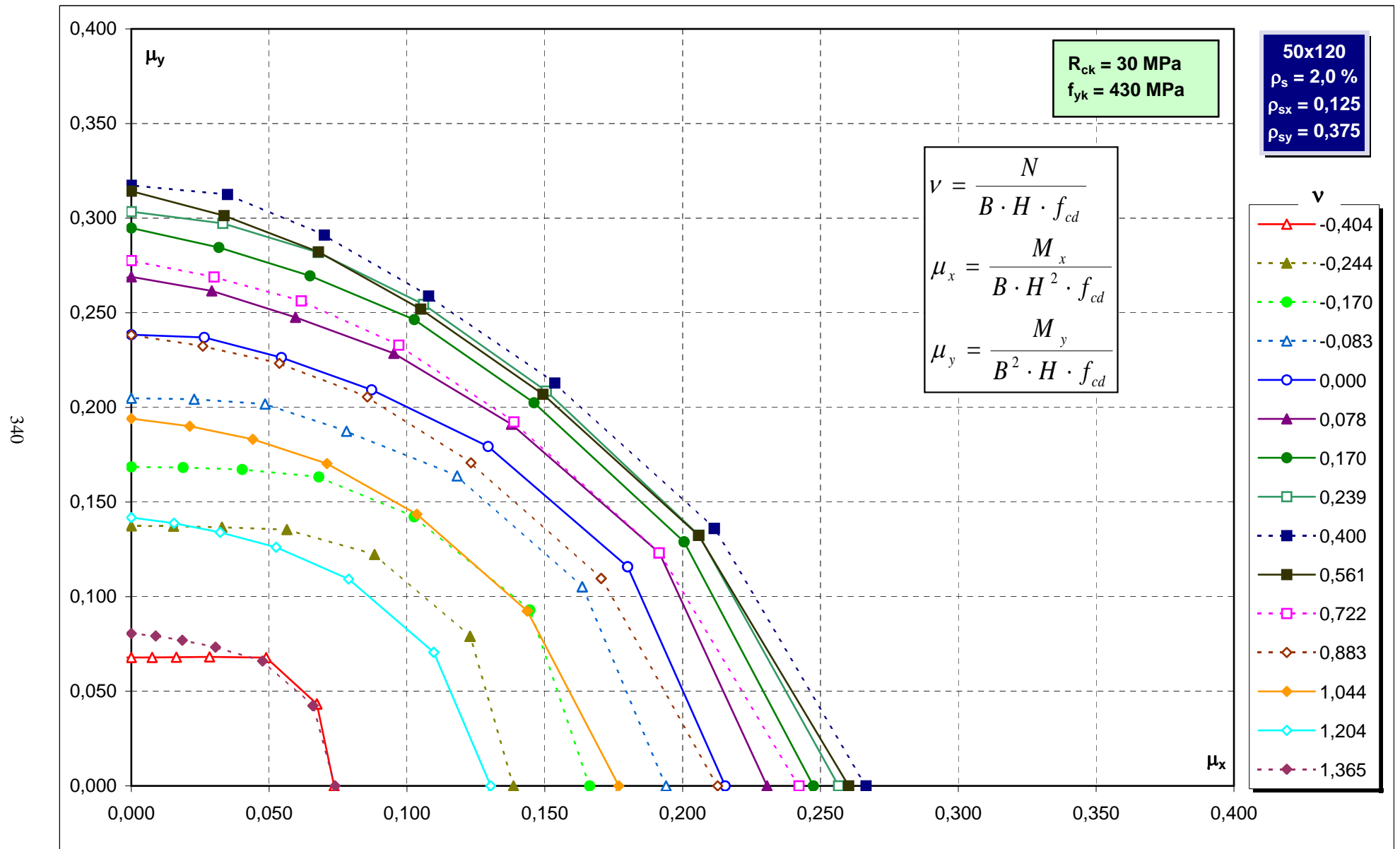
Abachi di verifica



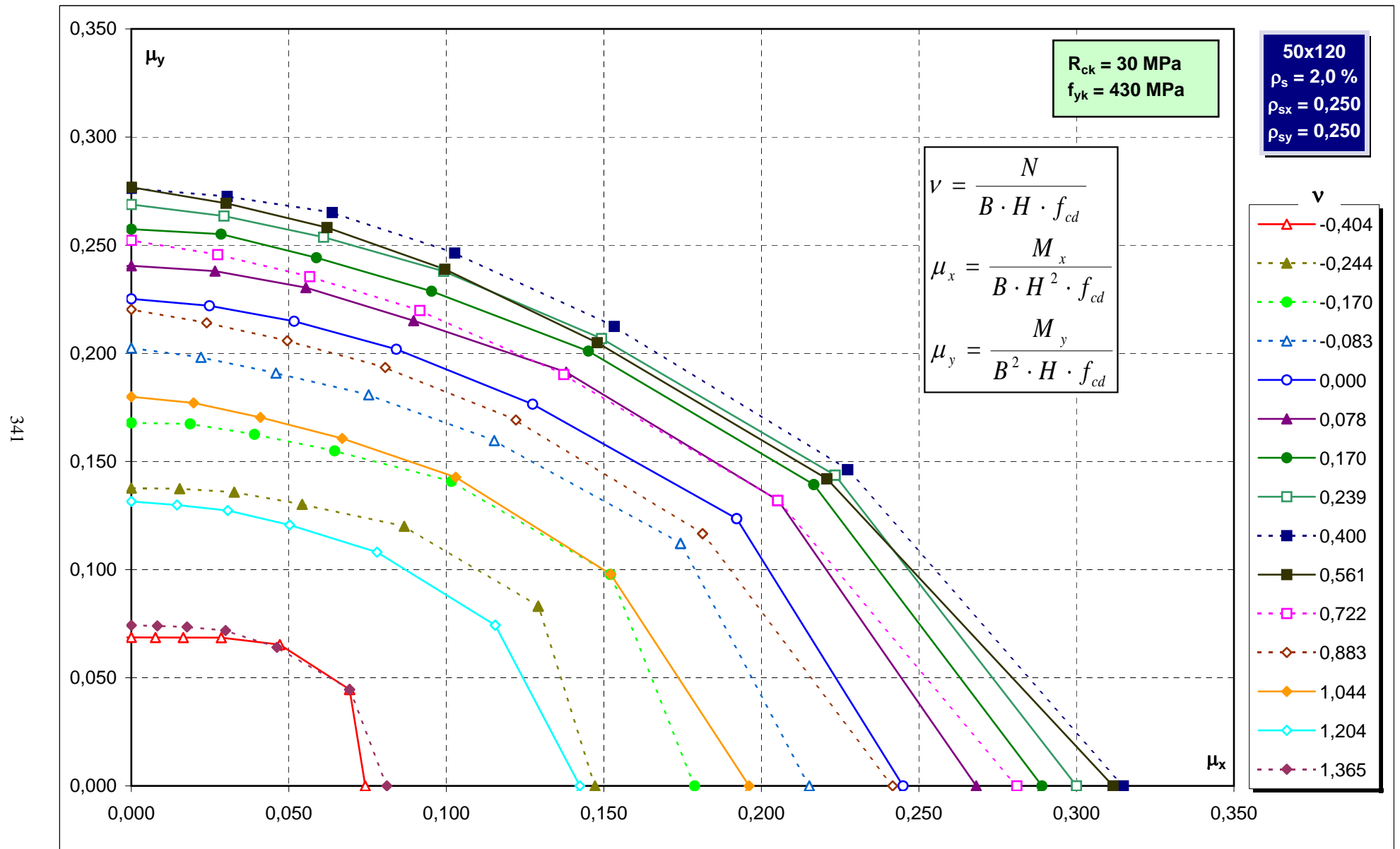
Abachi di verifica



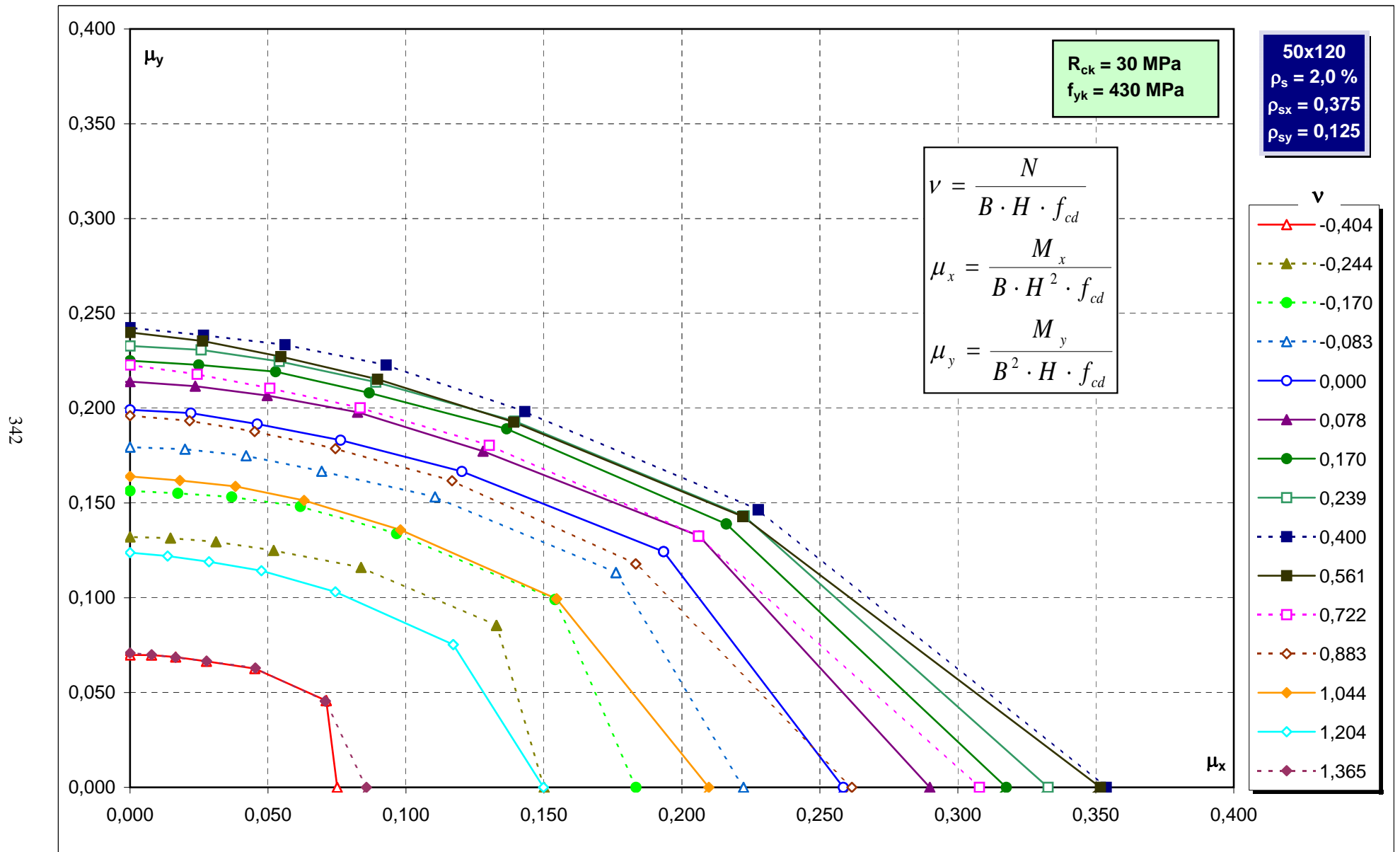
Abachi di verifica



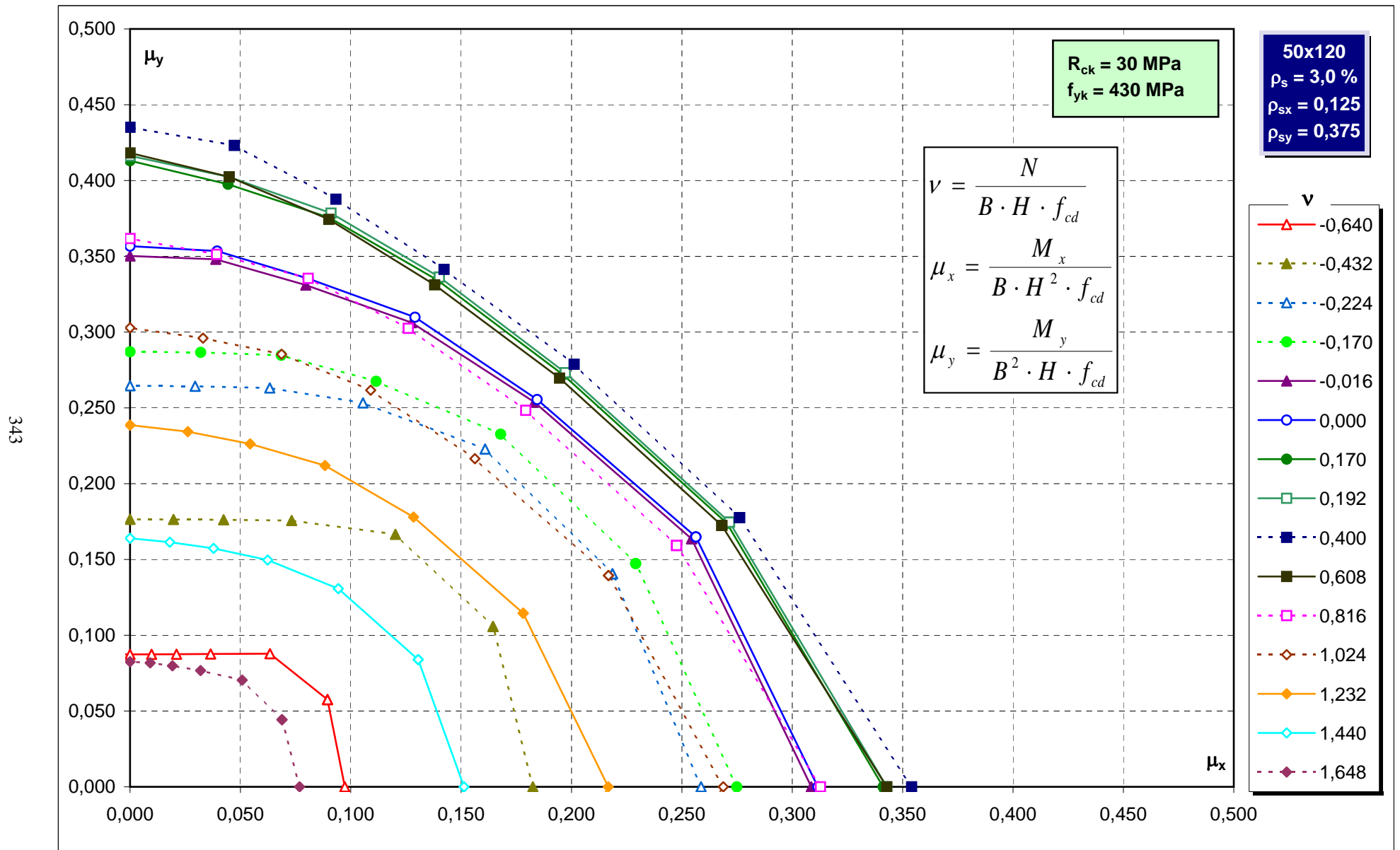
Abachi di verifica



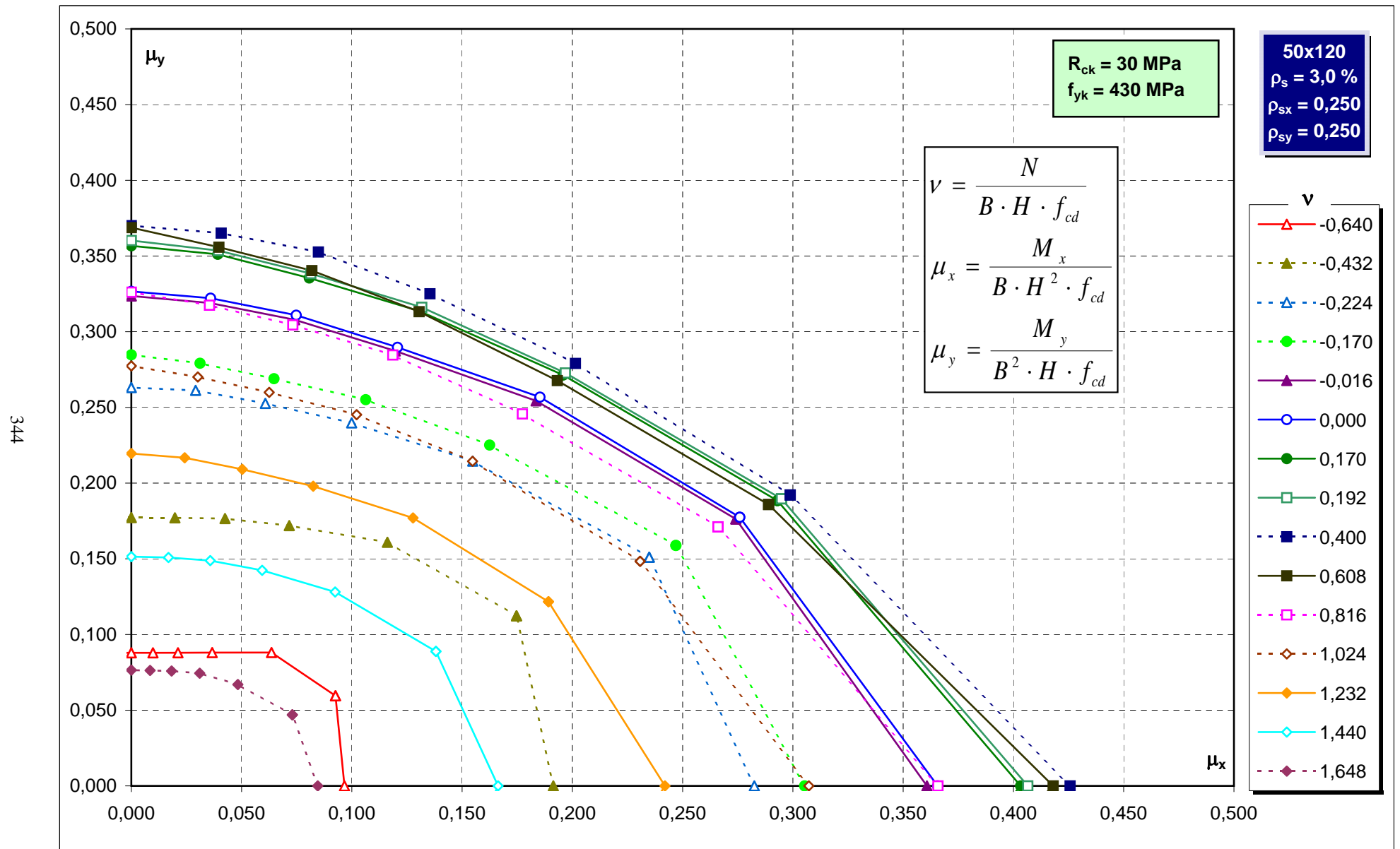
Abachi di verifica



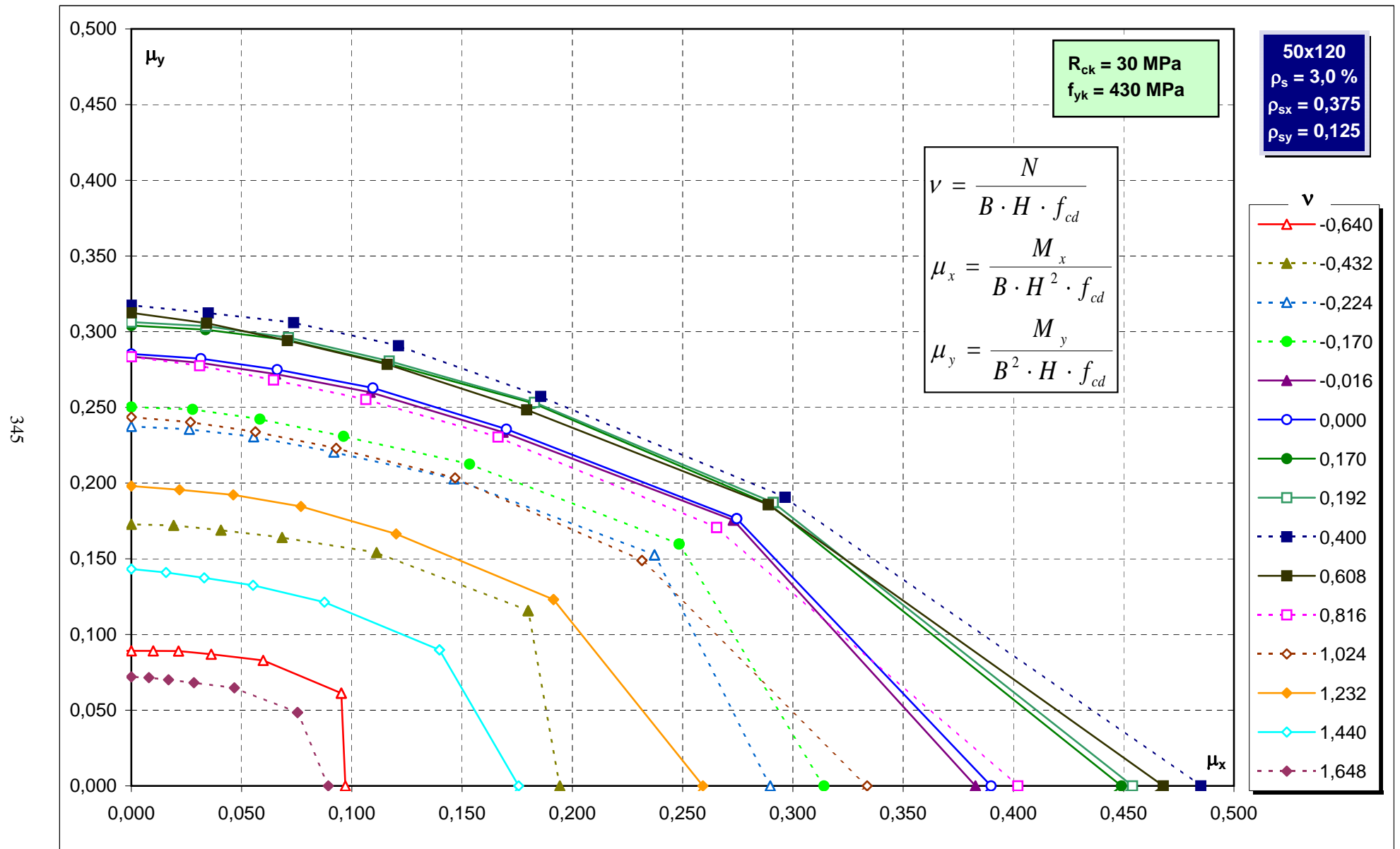
Abachi di verifica



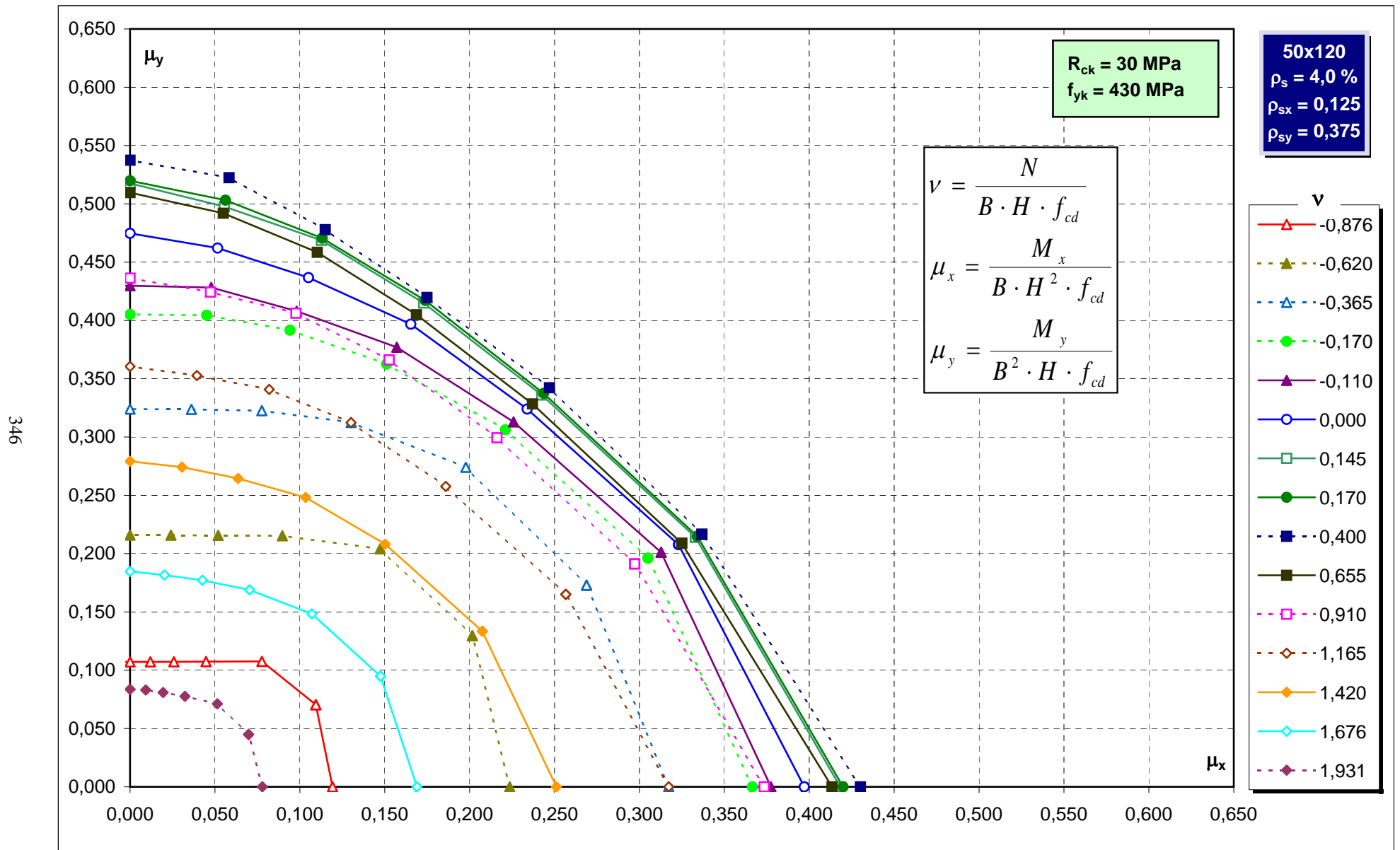
Abachi di verifica



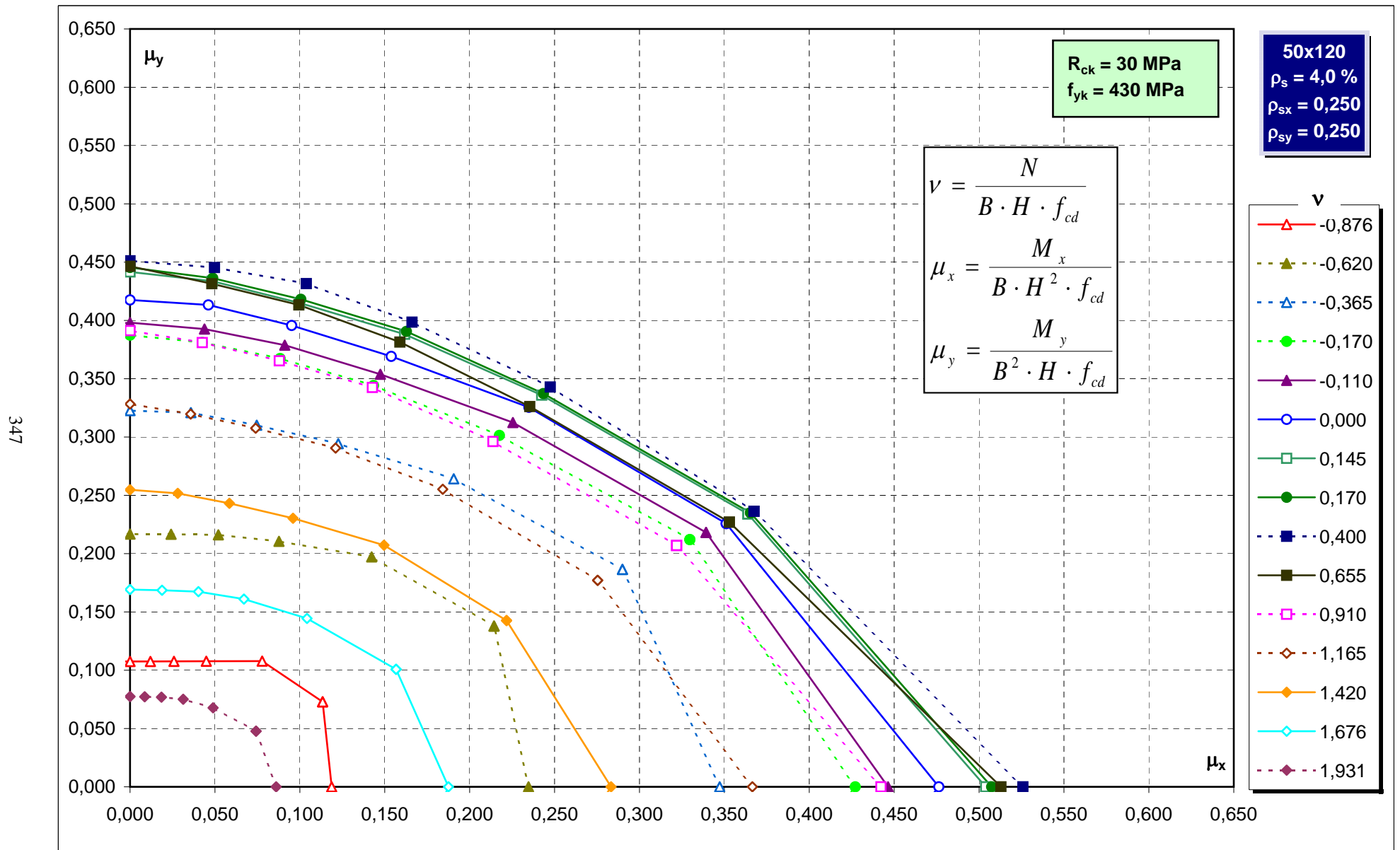
Abachi di verifica



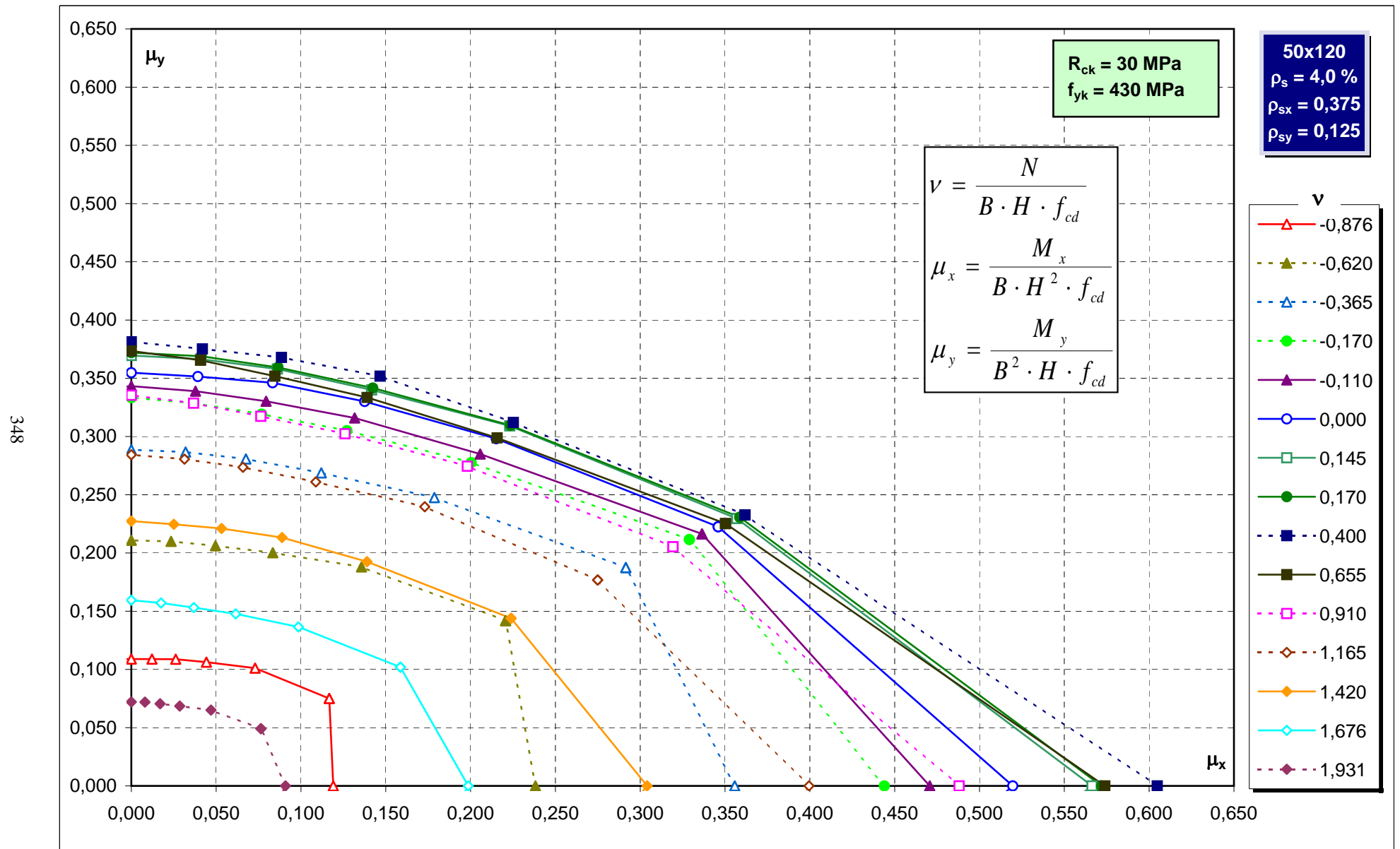
Abachi di verifica



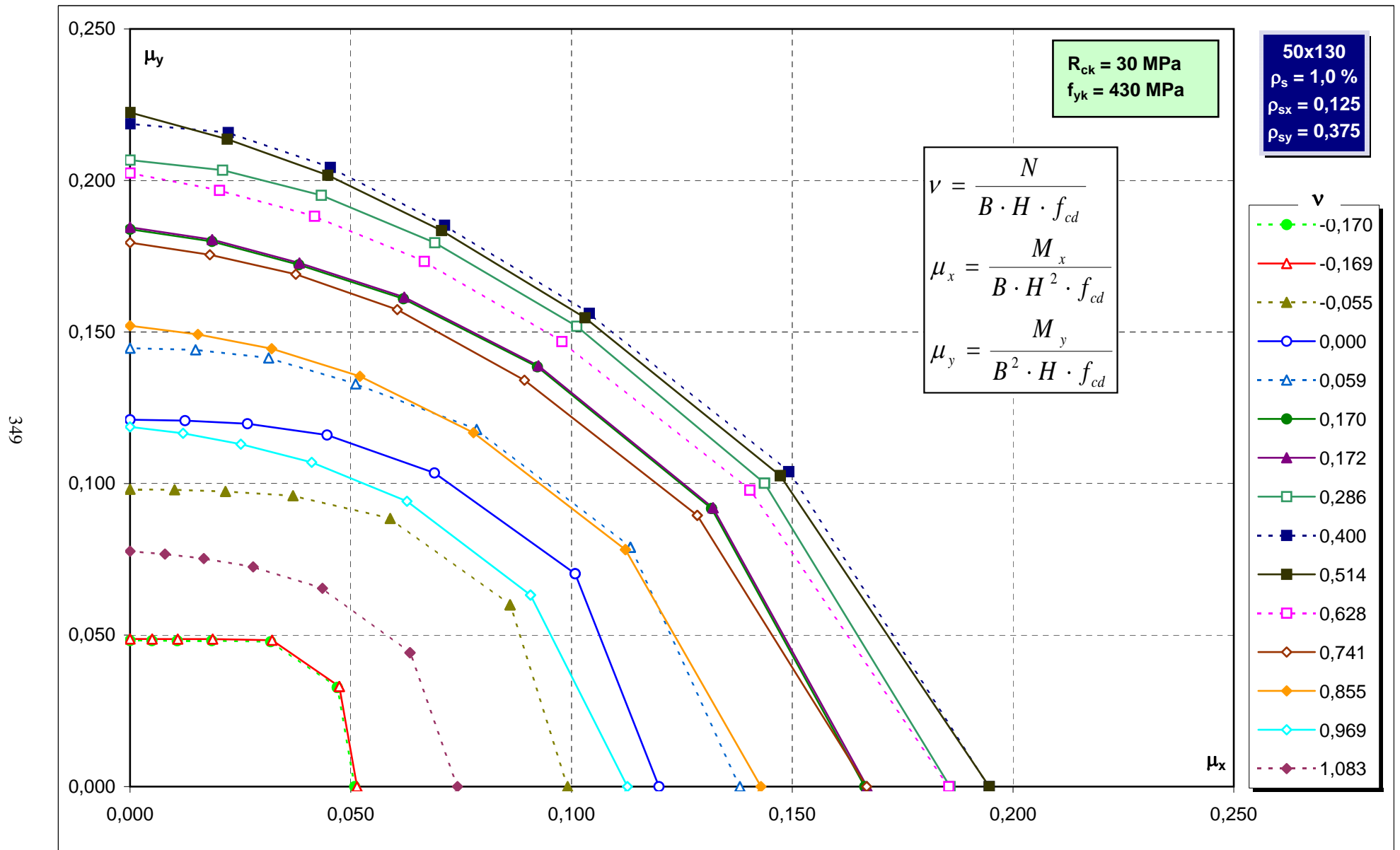
Abachi di verifica



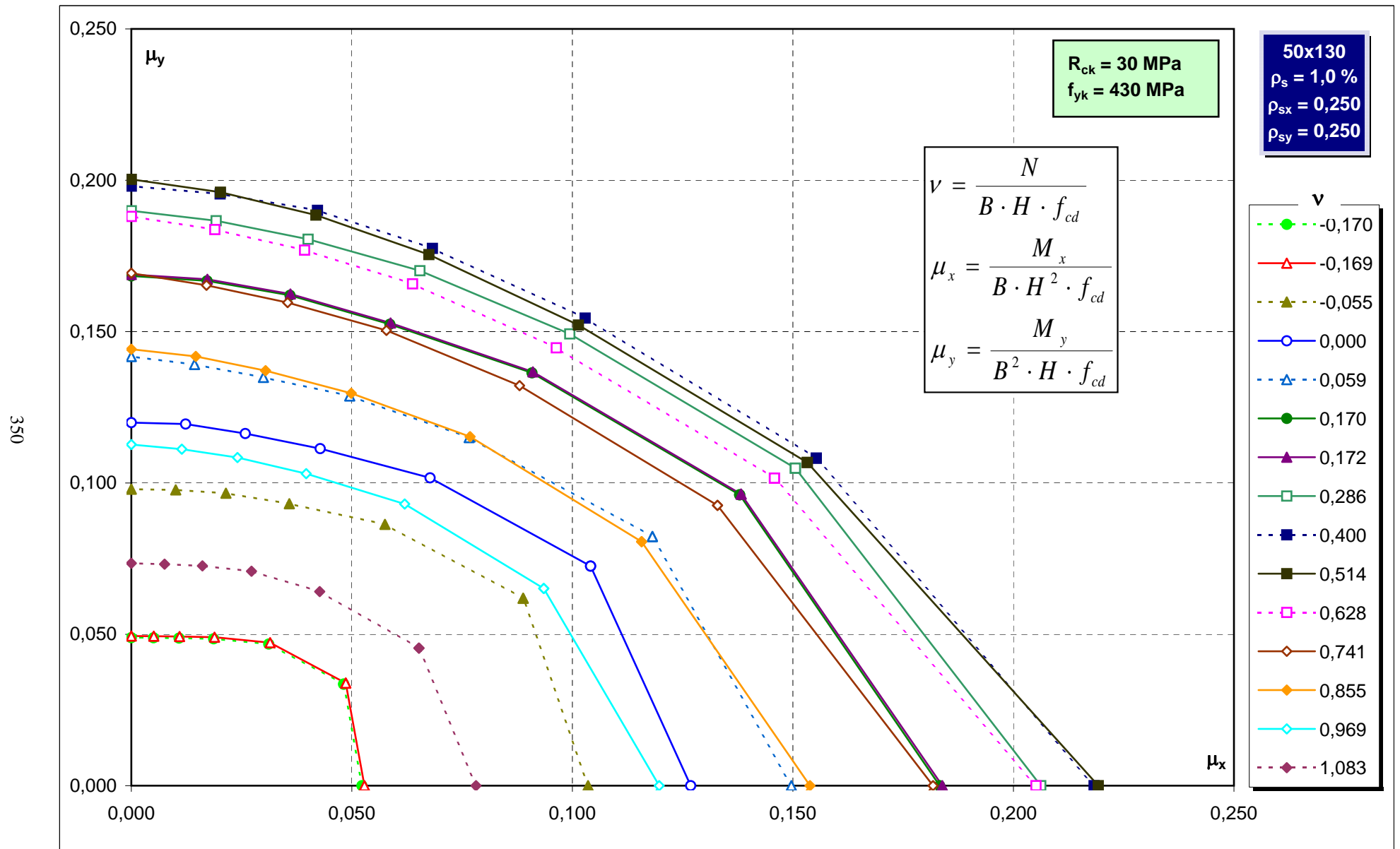
Abachi di verifica



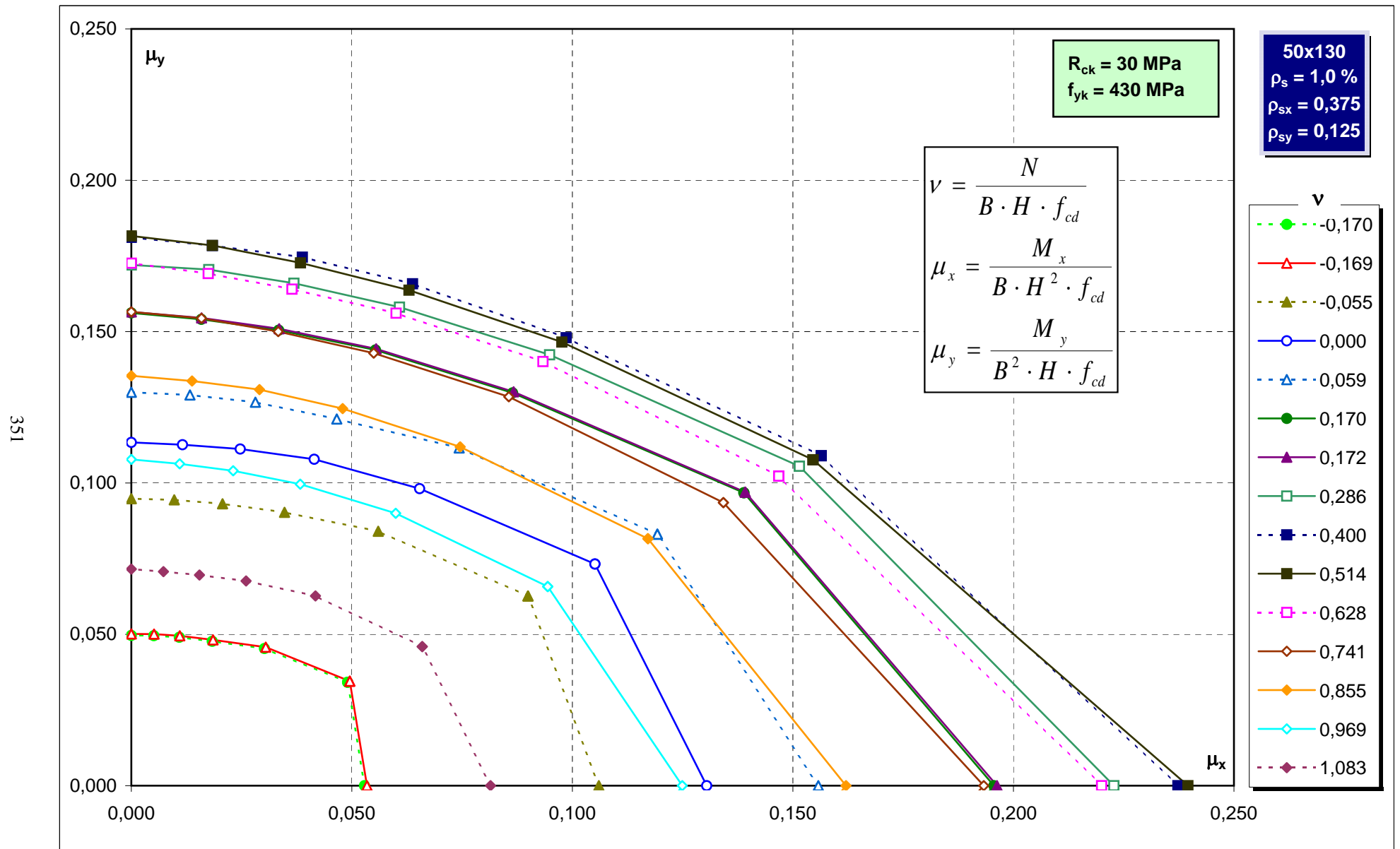
Abachi di verifica



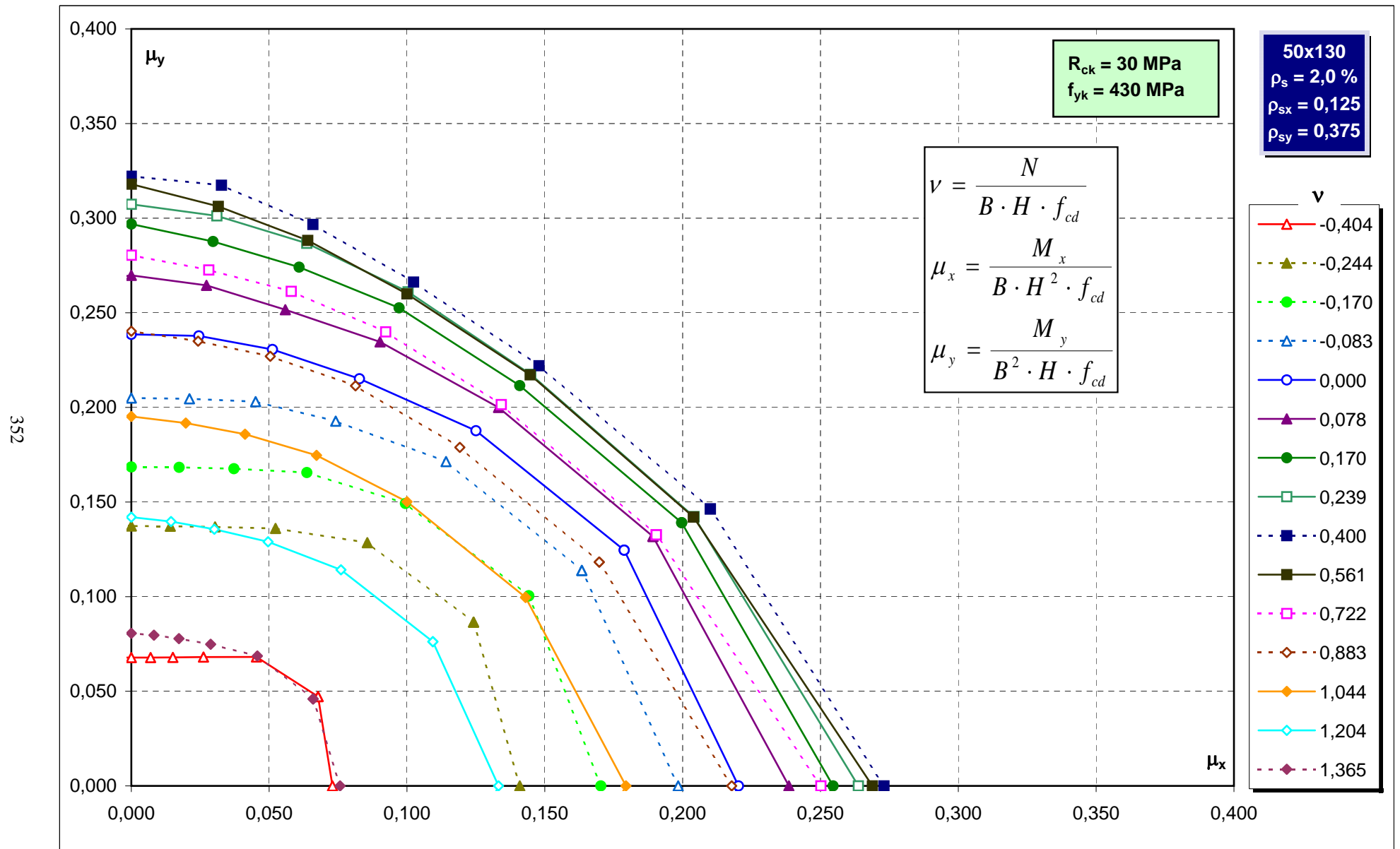
Abachi di verifica



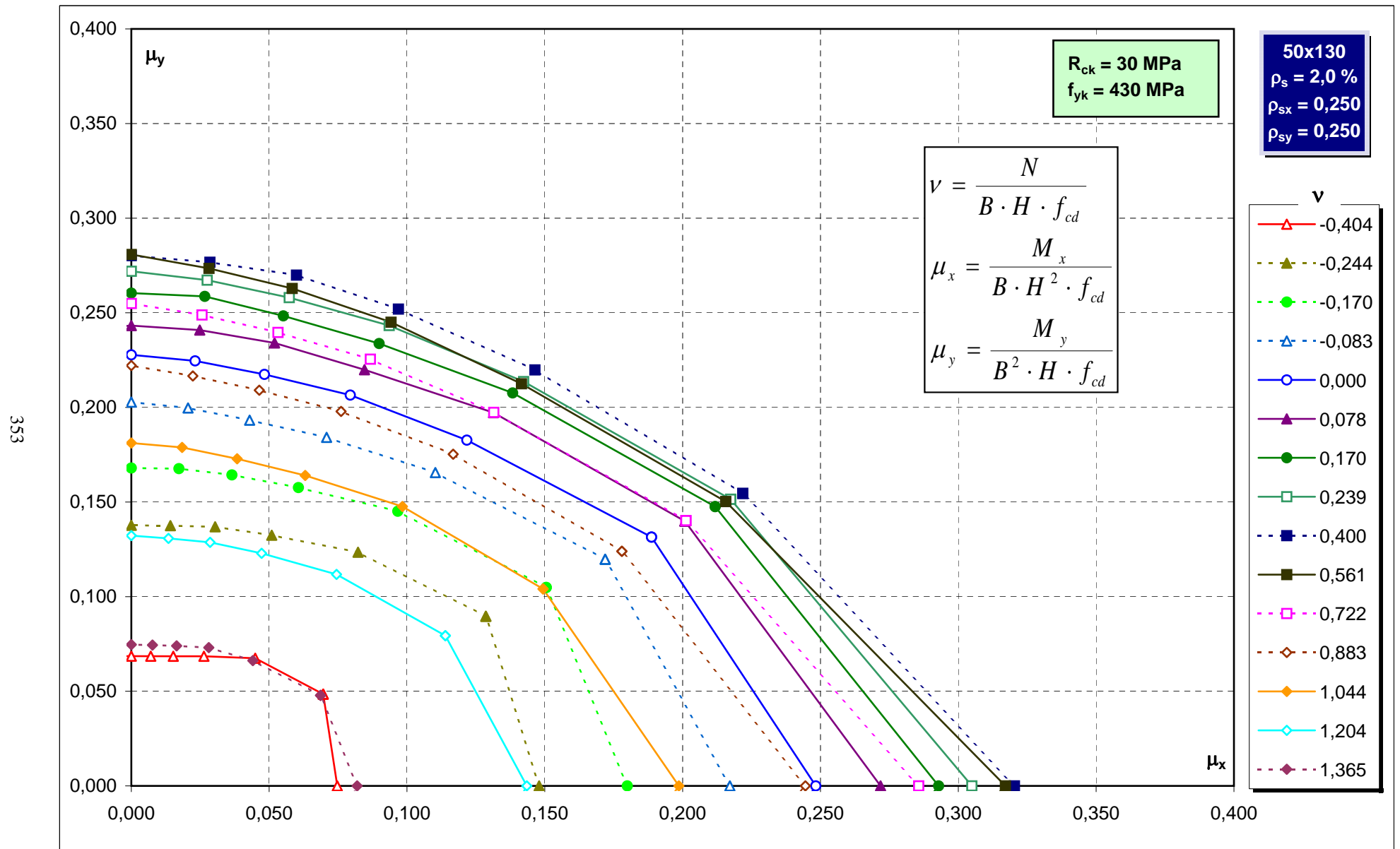
Abachi di verifica



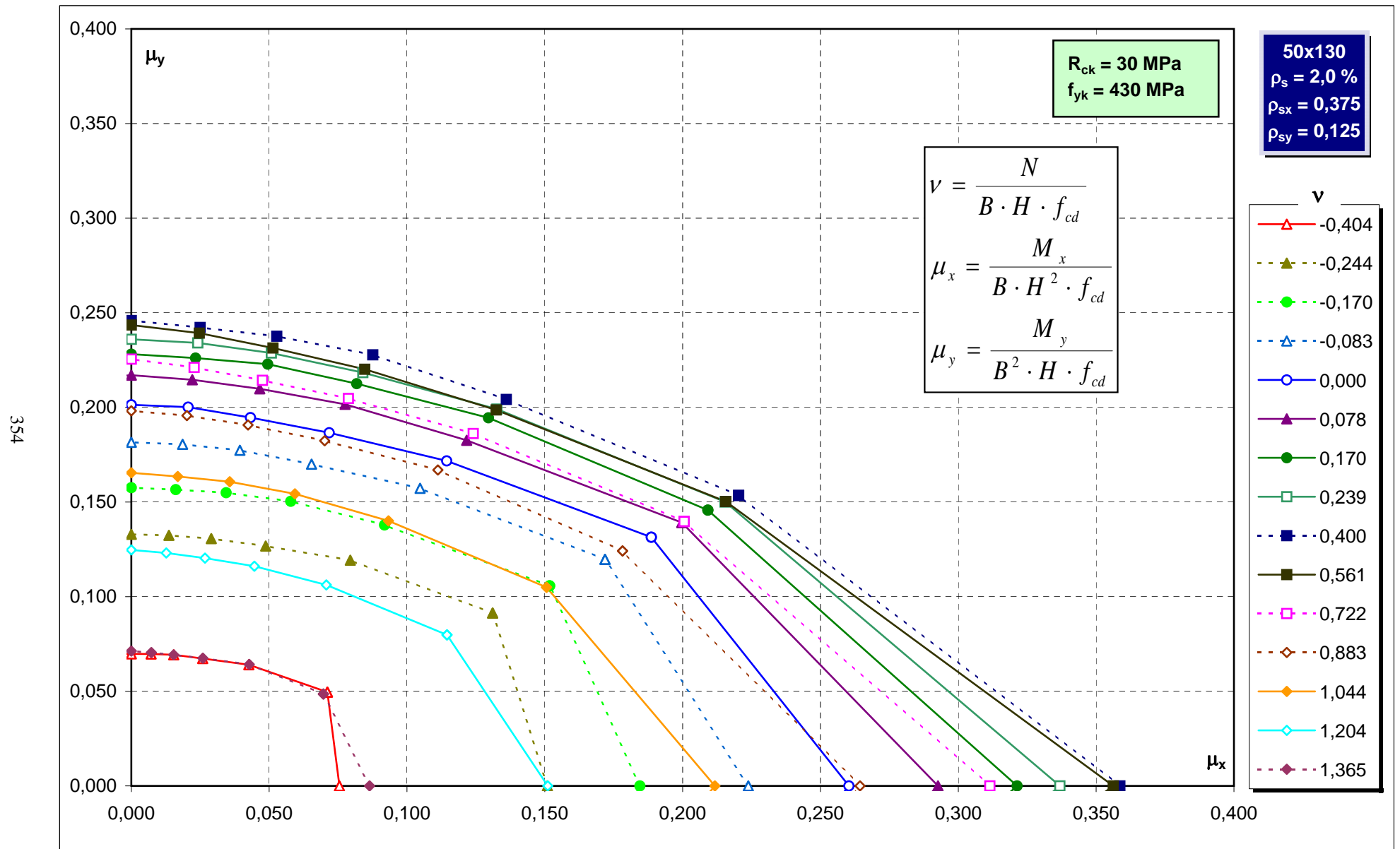
Abachi di verifica



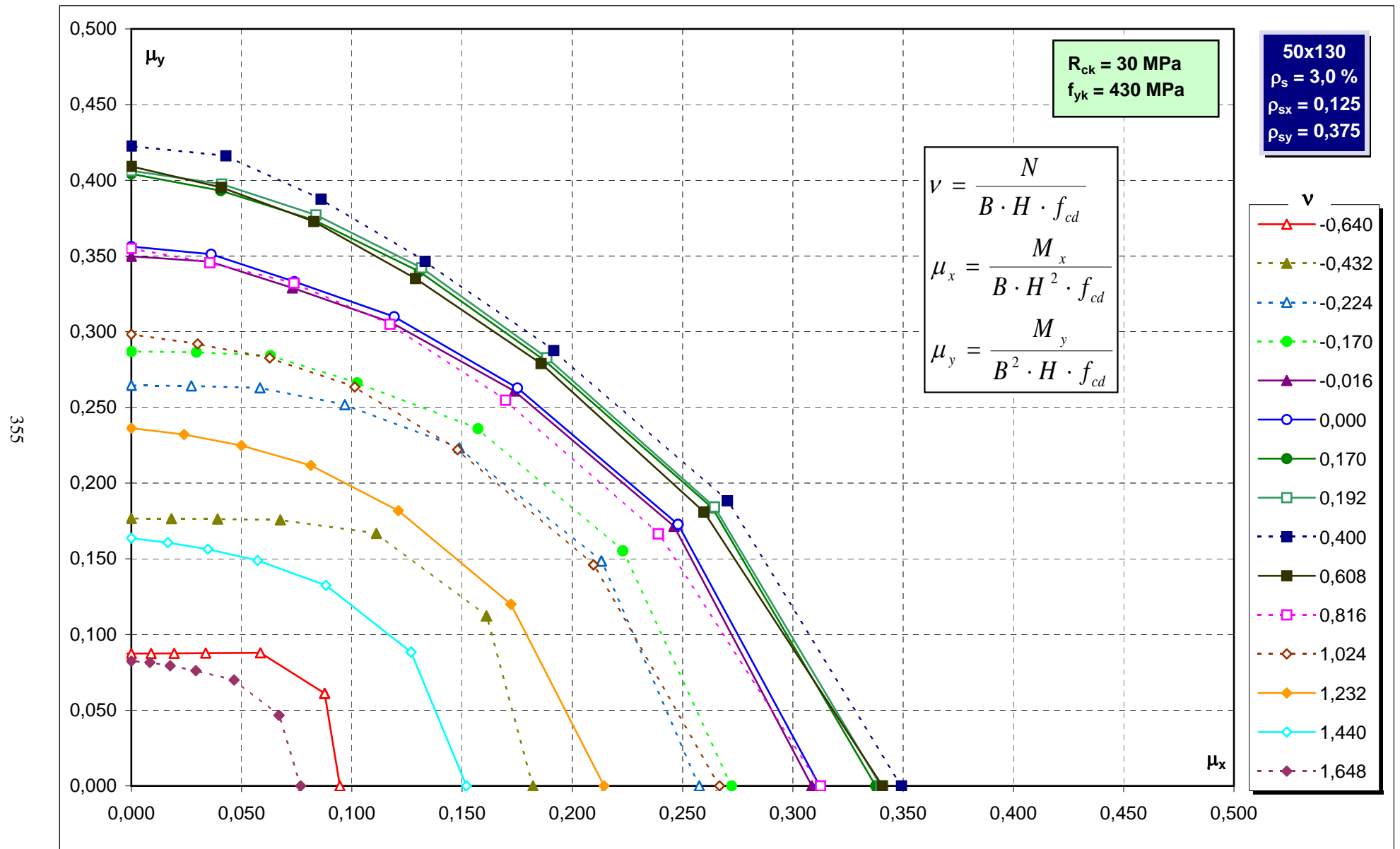
Abachi di verifica



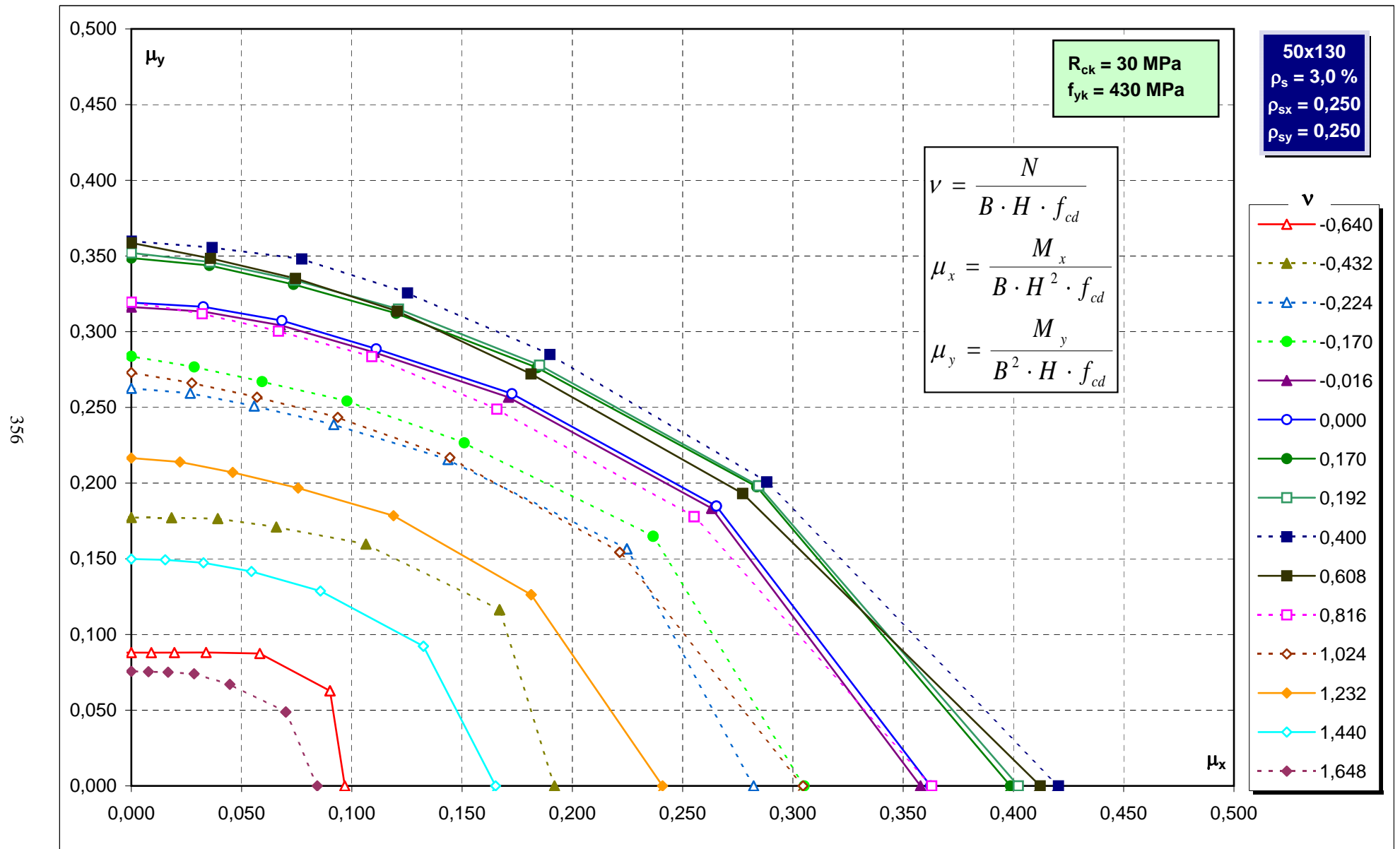
Abachi di verifica



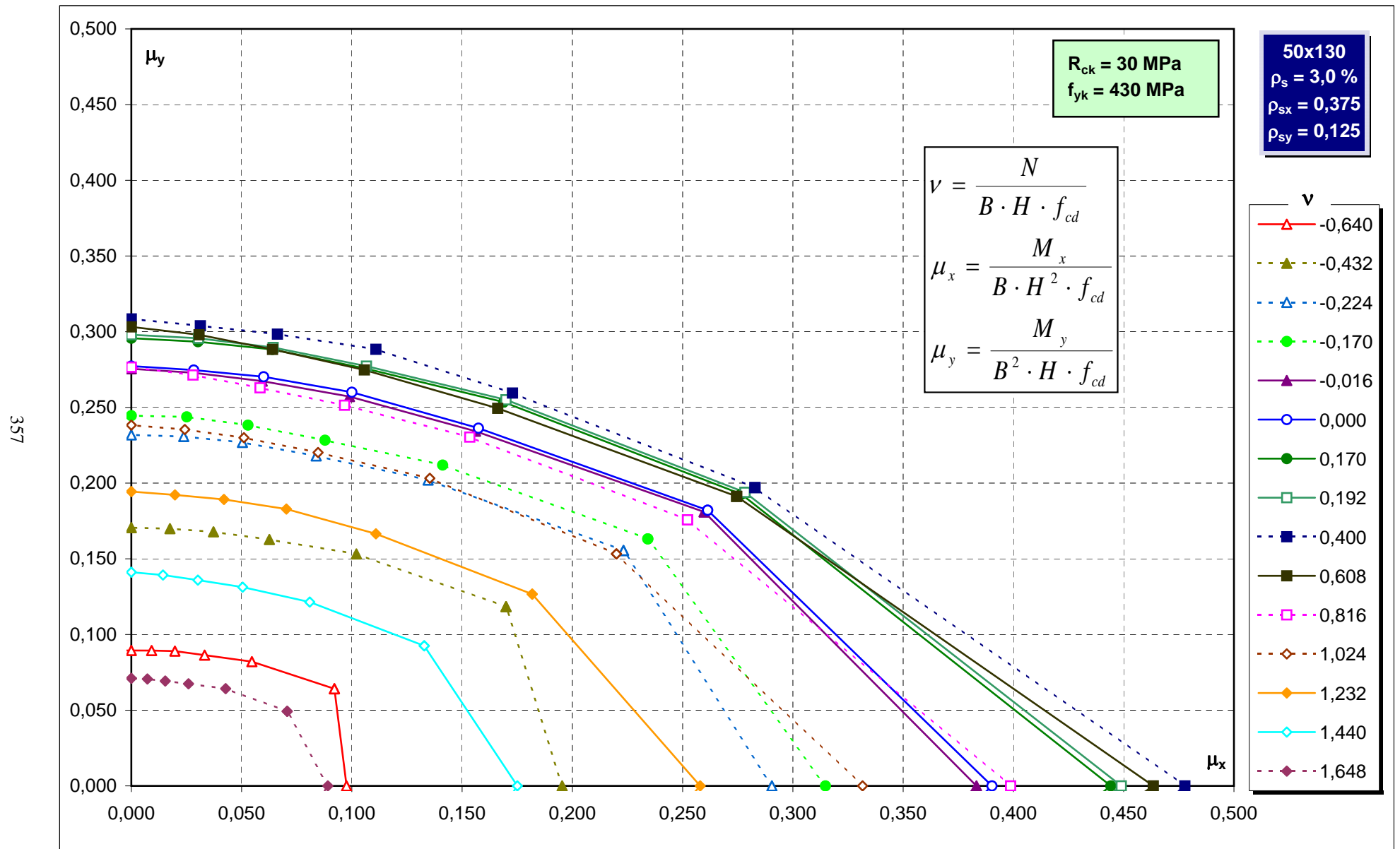
Abachi di verifica



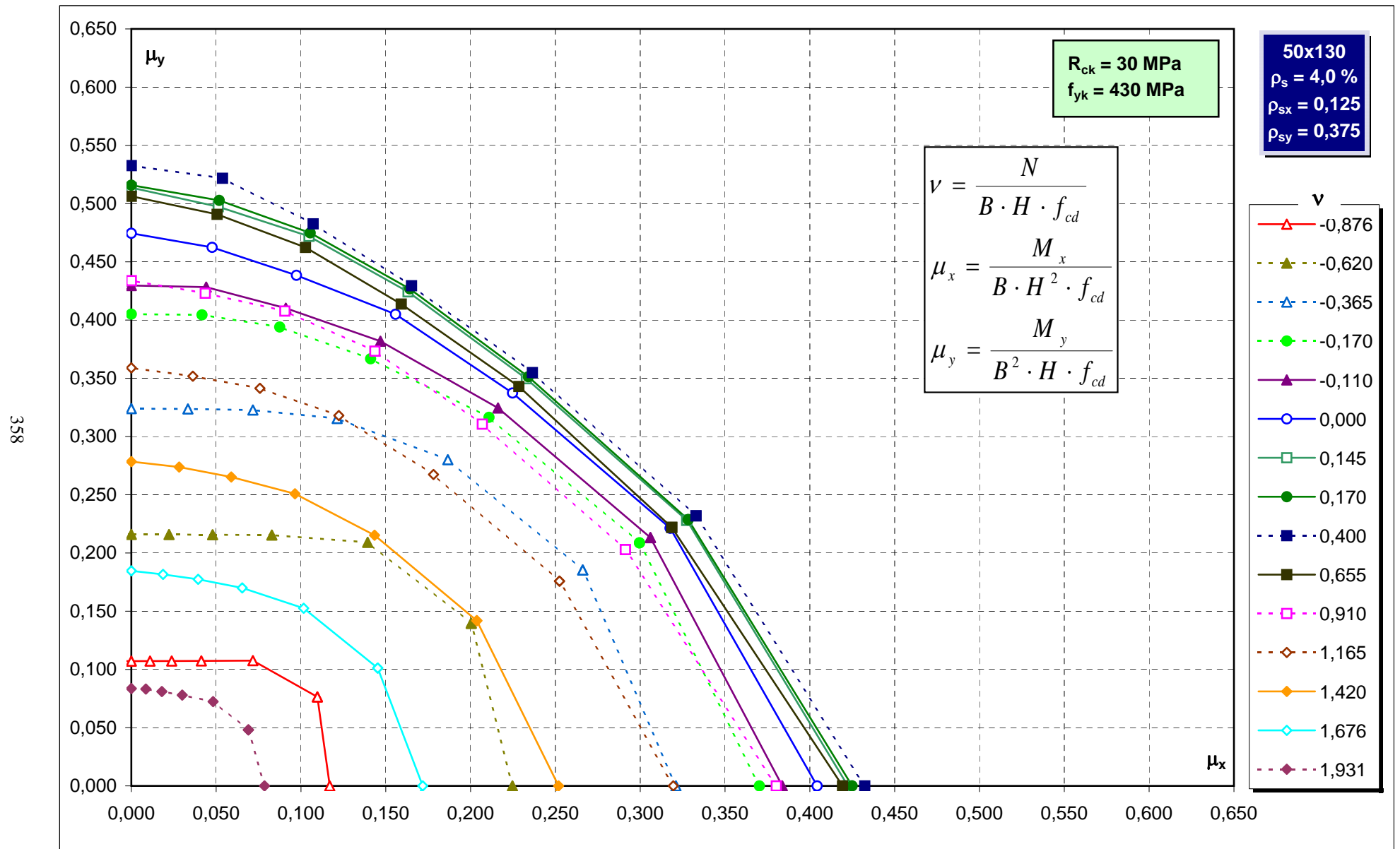
Abachi di verifica



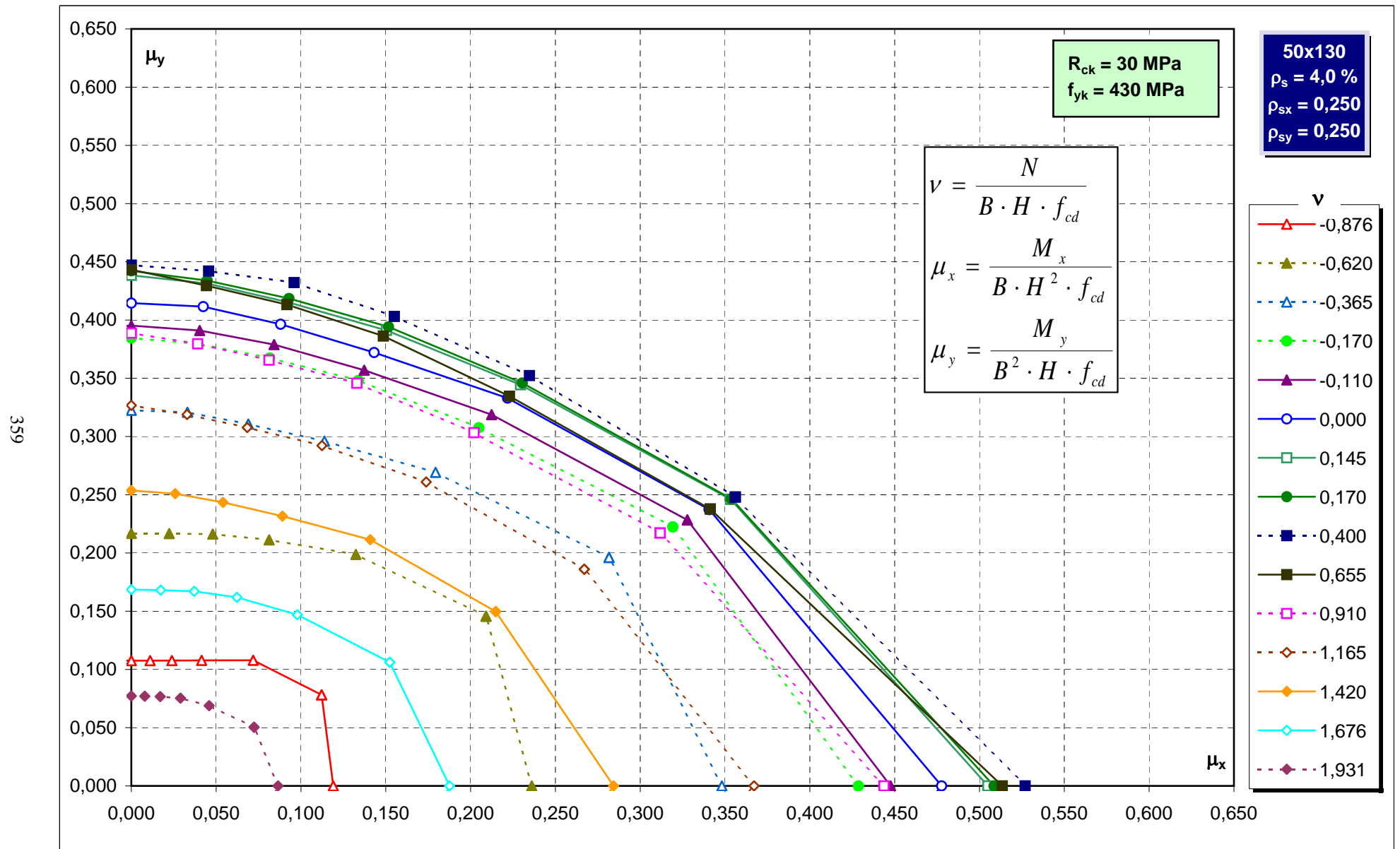
Abachi di verifica



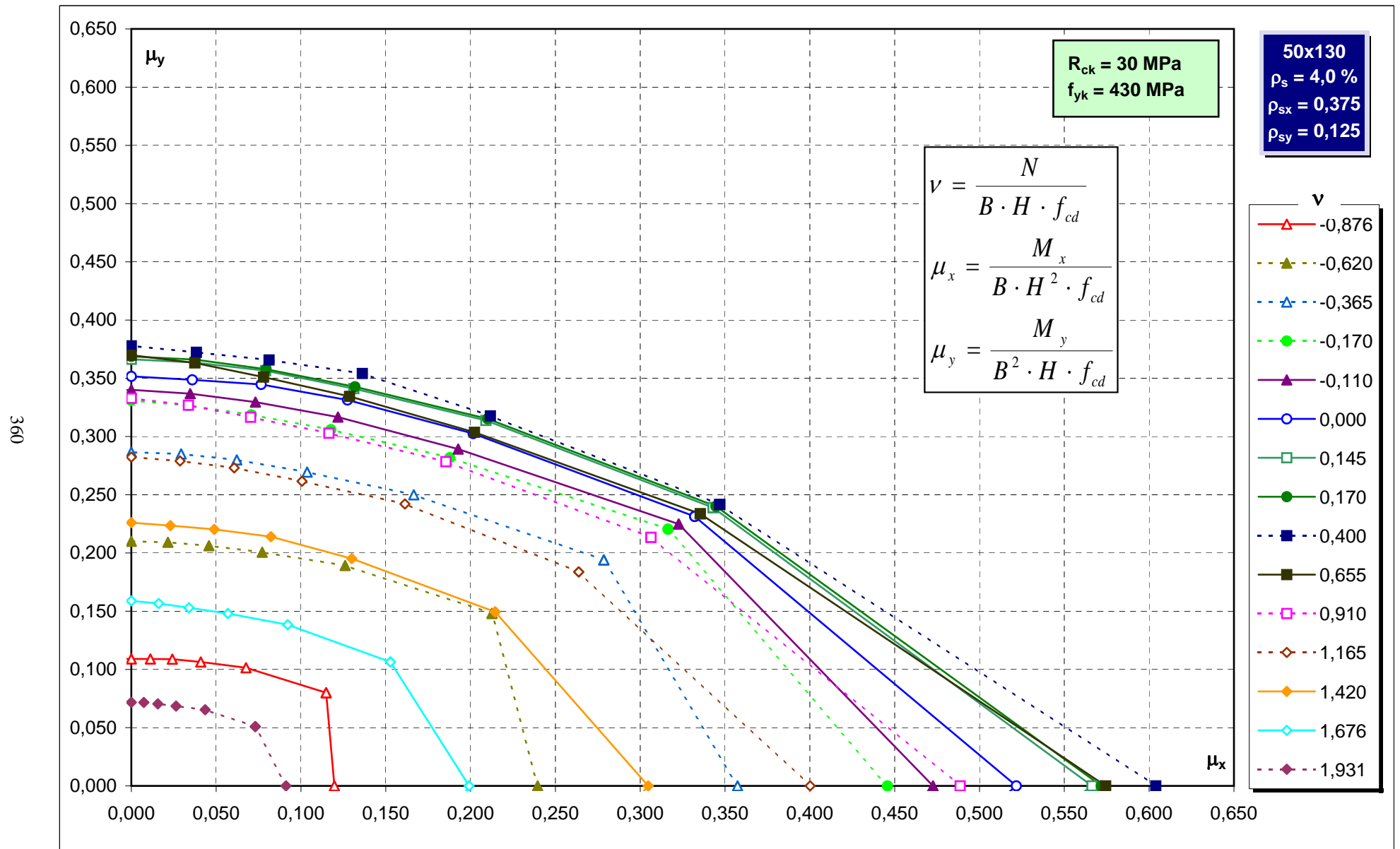
Abachi di verifica



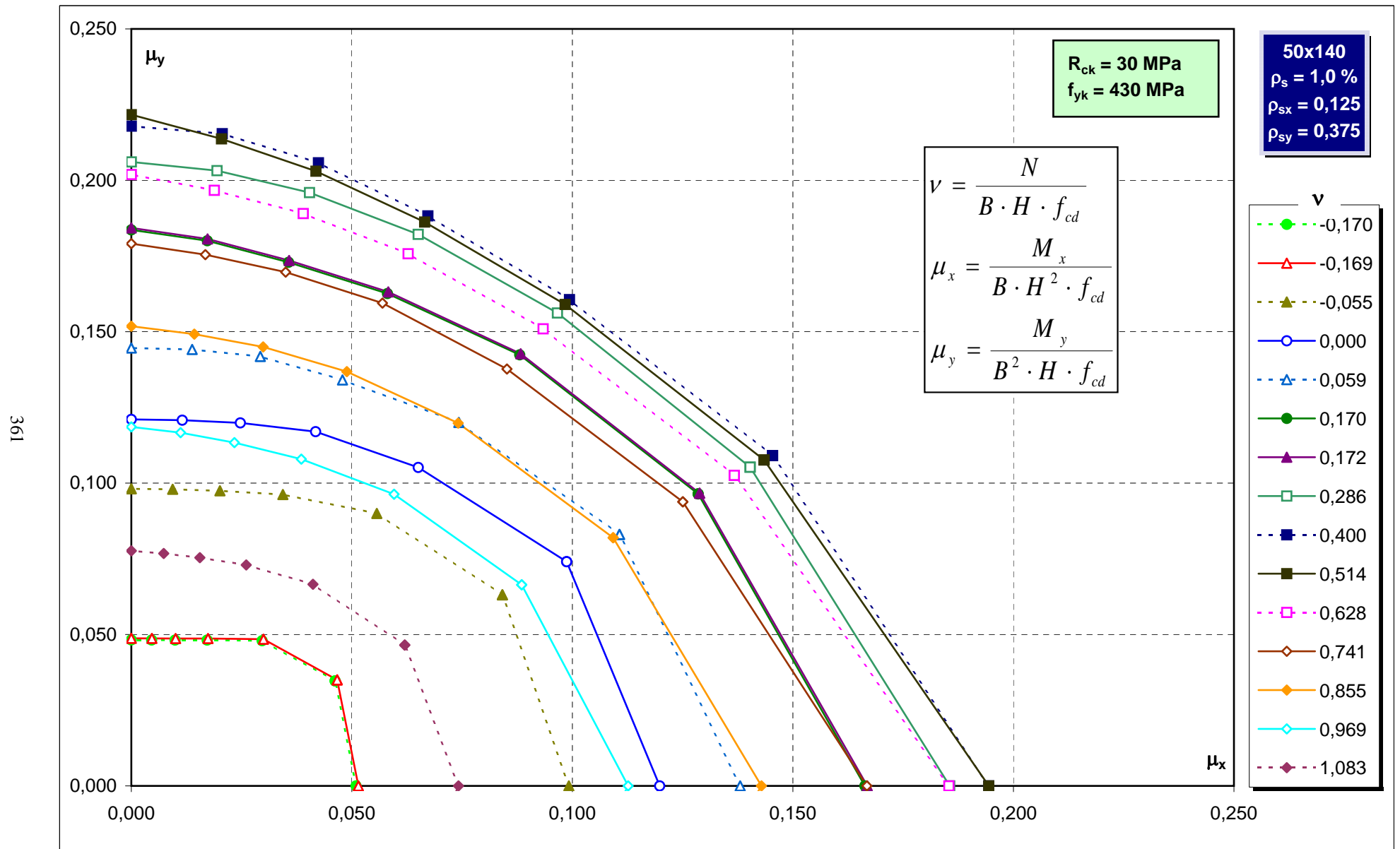
Abachi di verifica



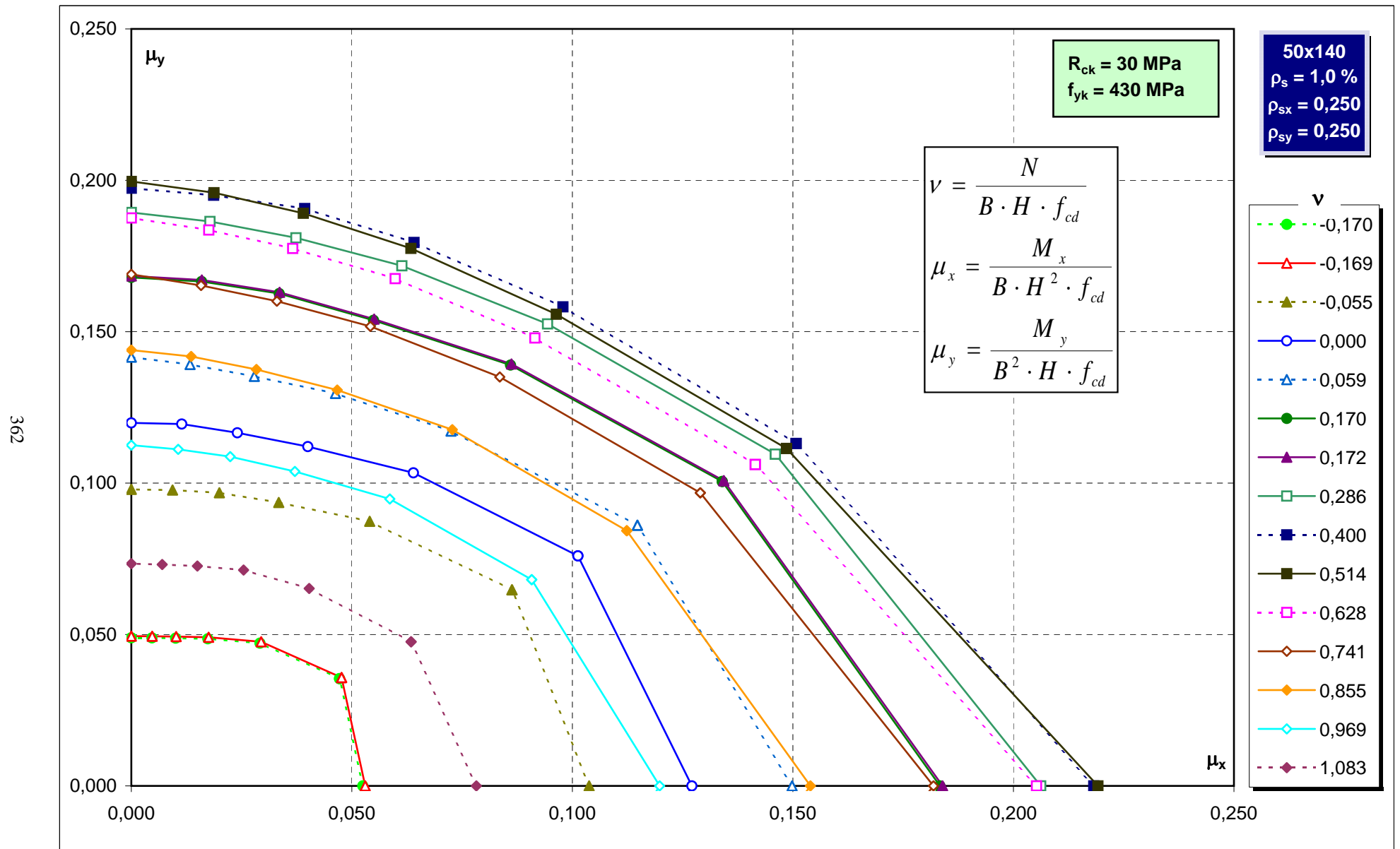
Abachi di verifica



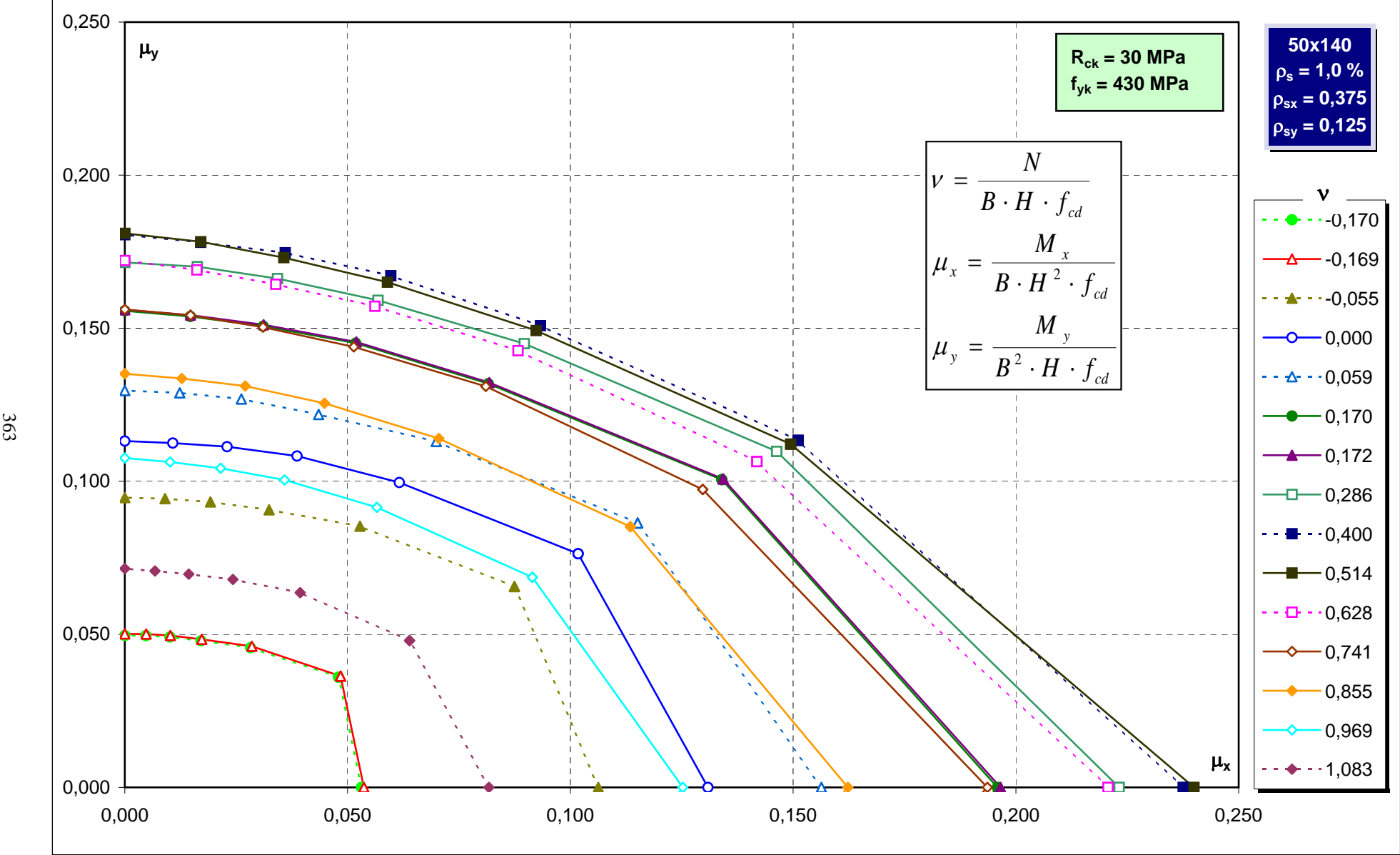
Abachi di verifica



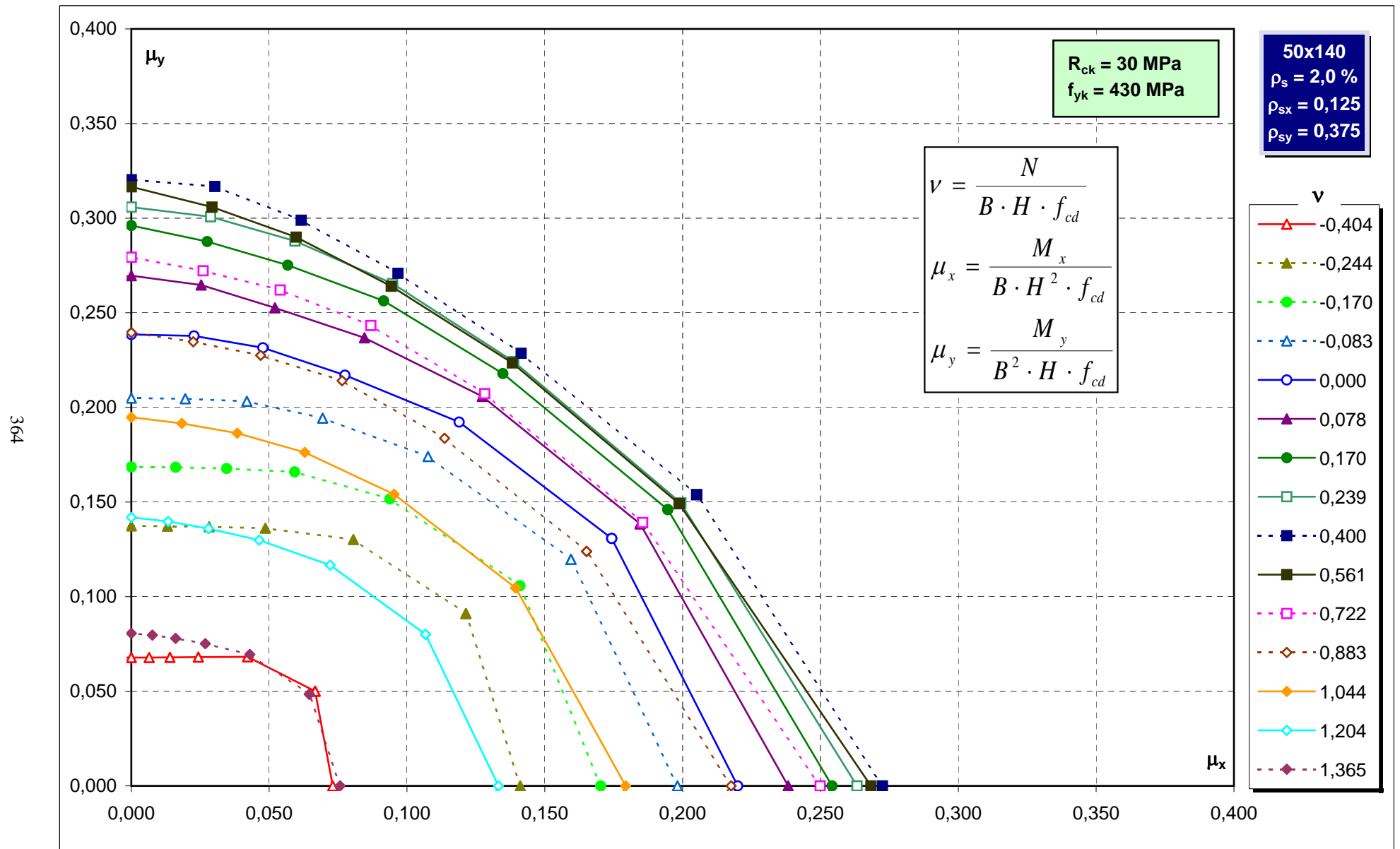
Abachi di verifica



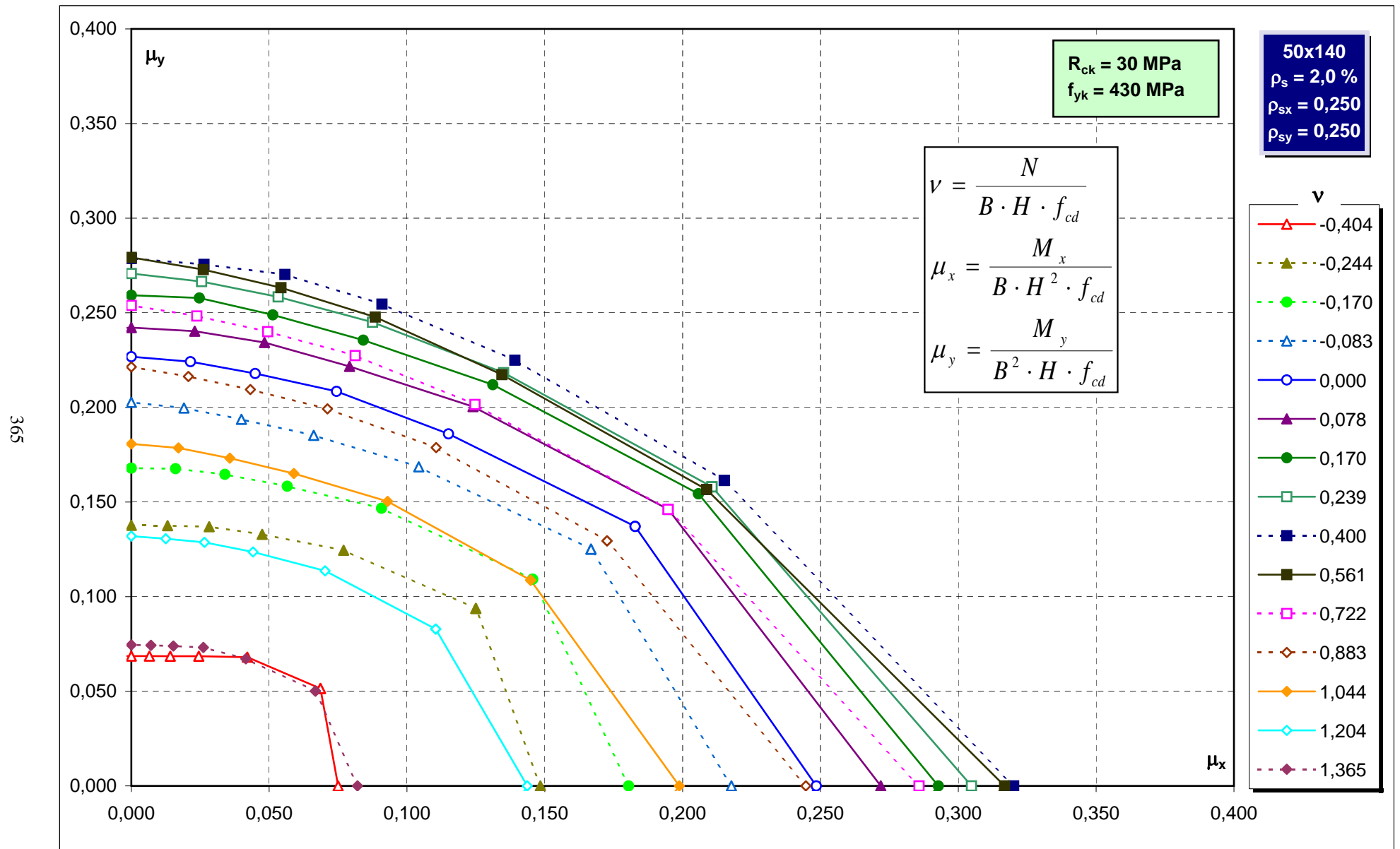
Abachi di verifica



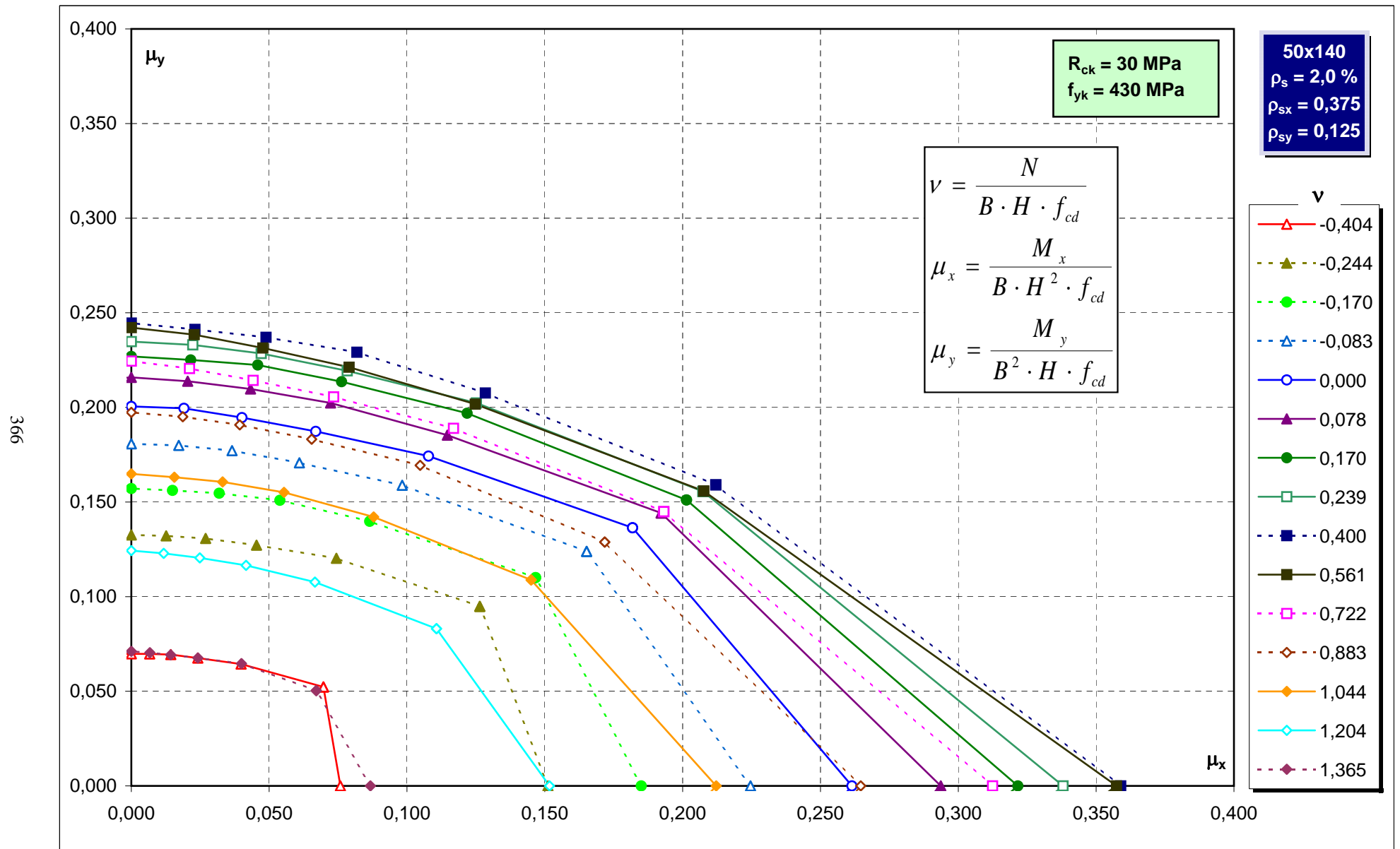
Abachi di verifica



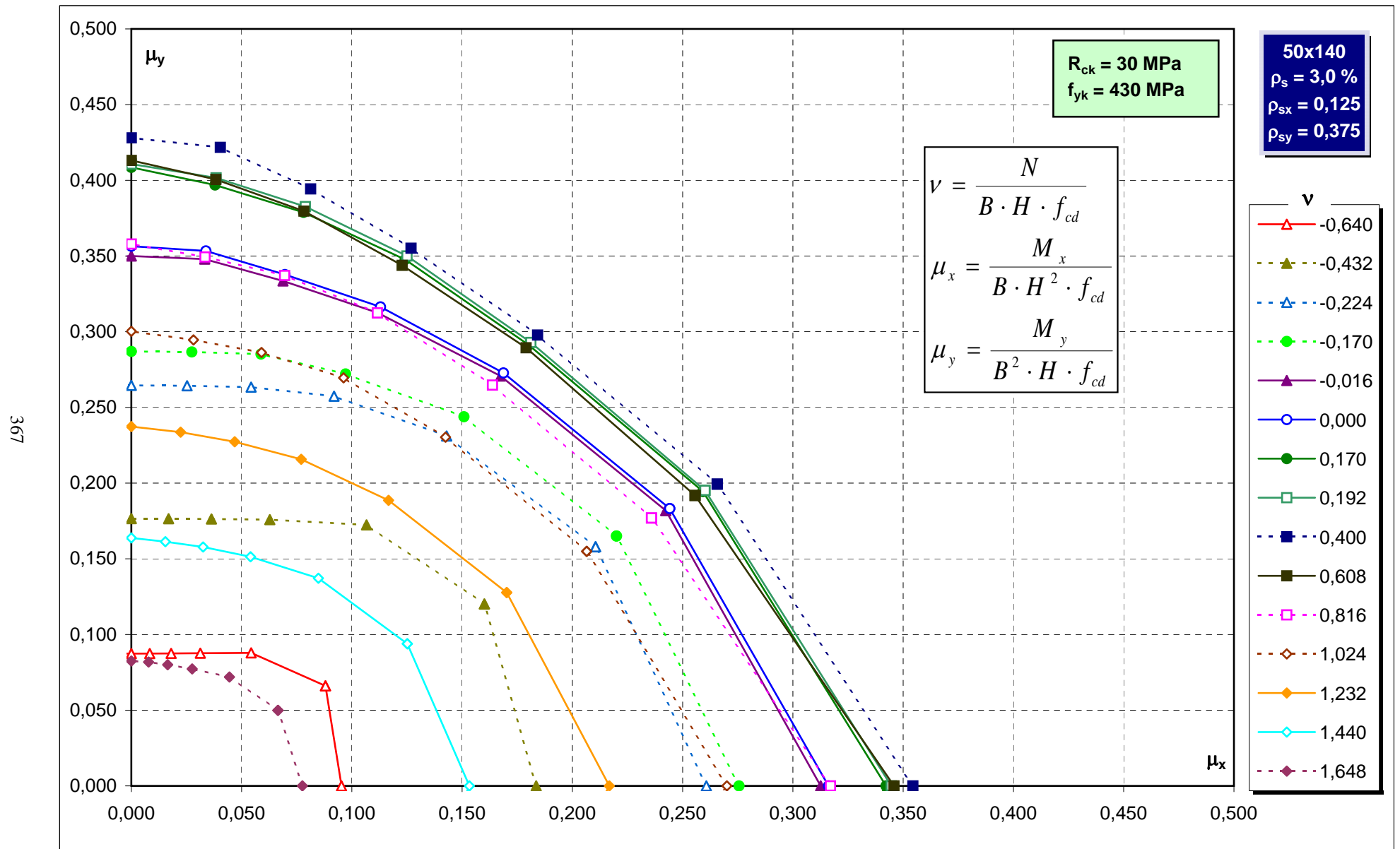
Abachi di verifica



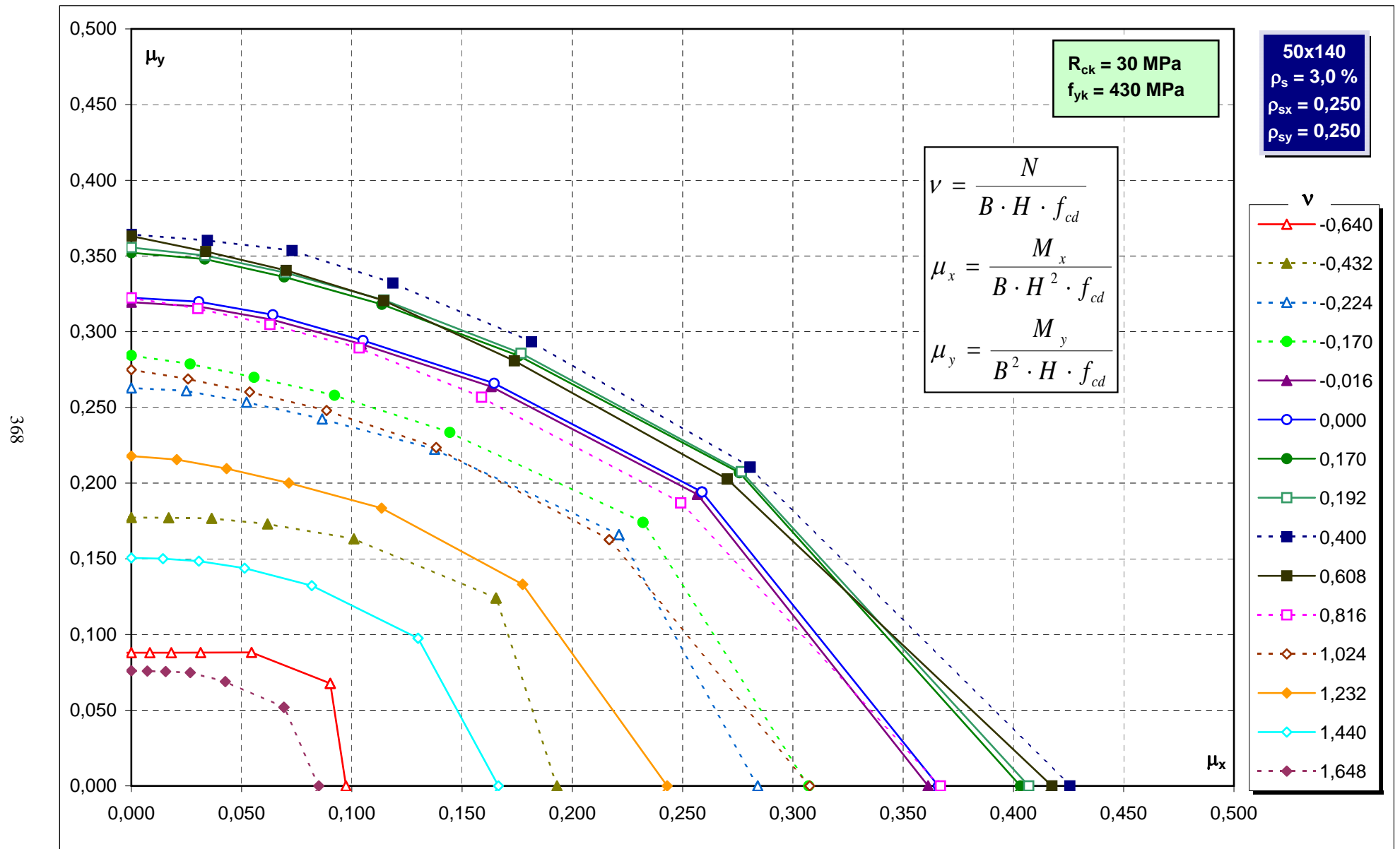
Abachi di verifica



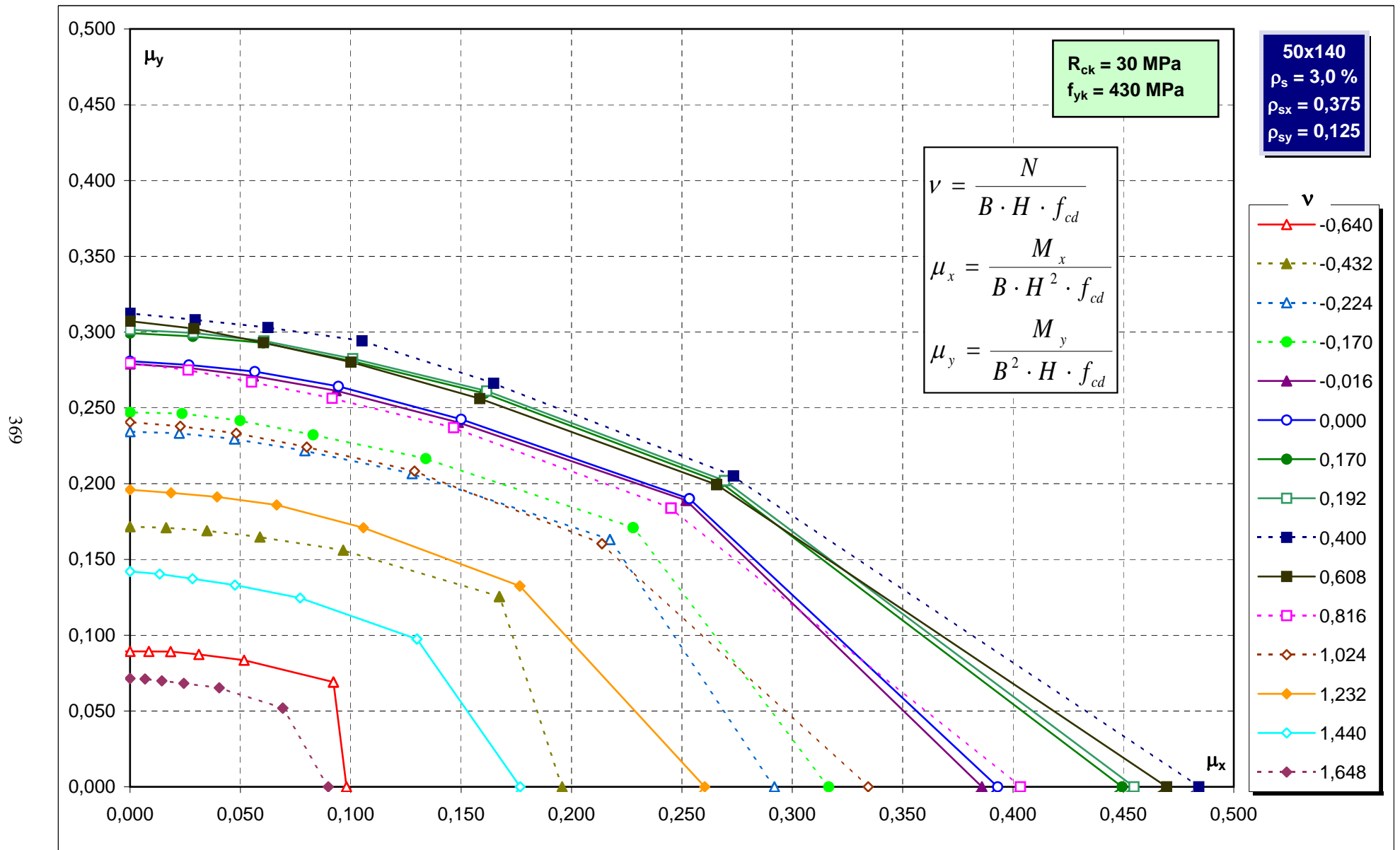
Abachi di verifica



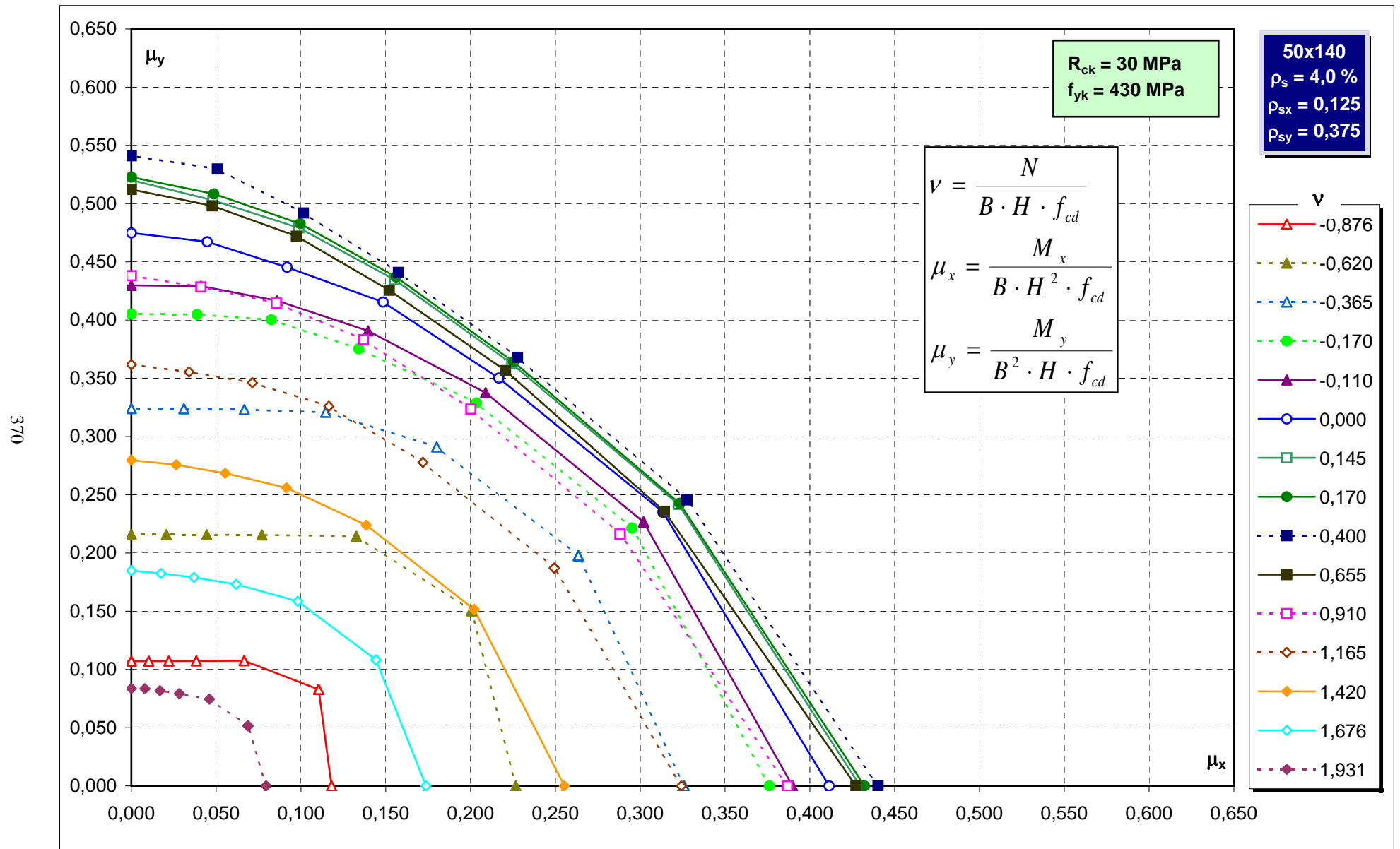
Abachi di verifica



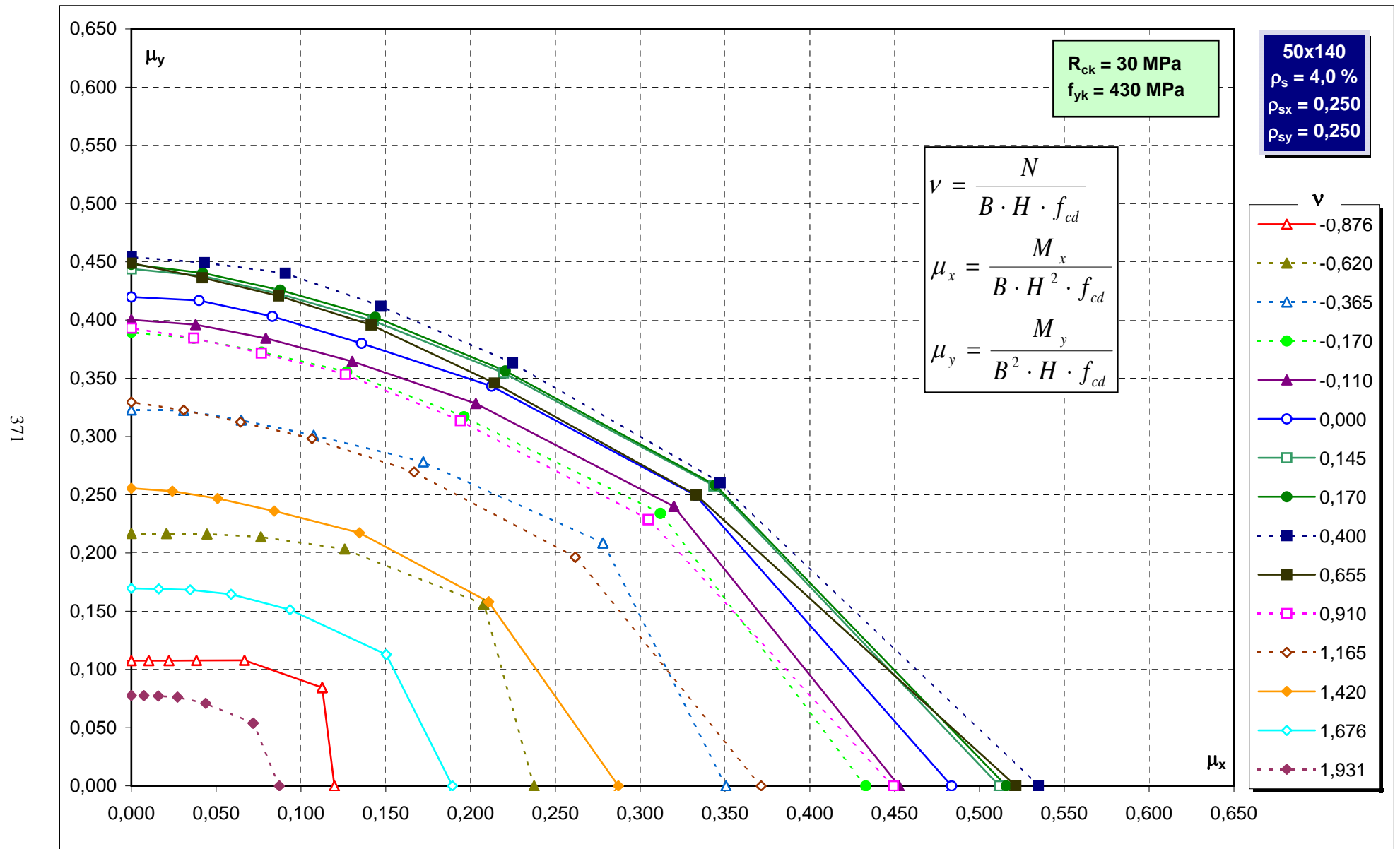
Abachi di verifica



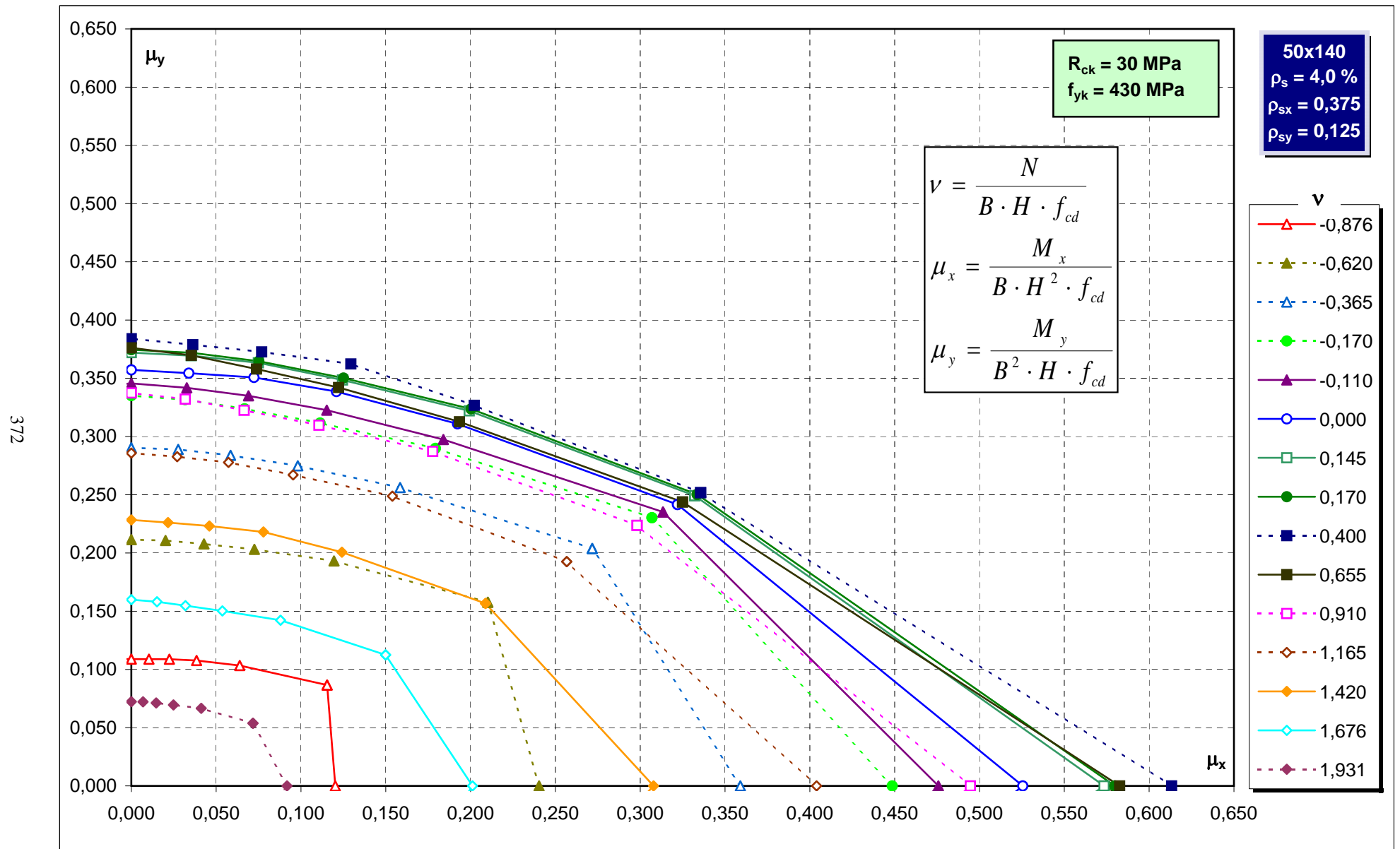
Abachi di verifica



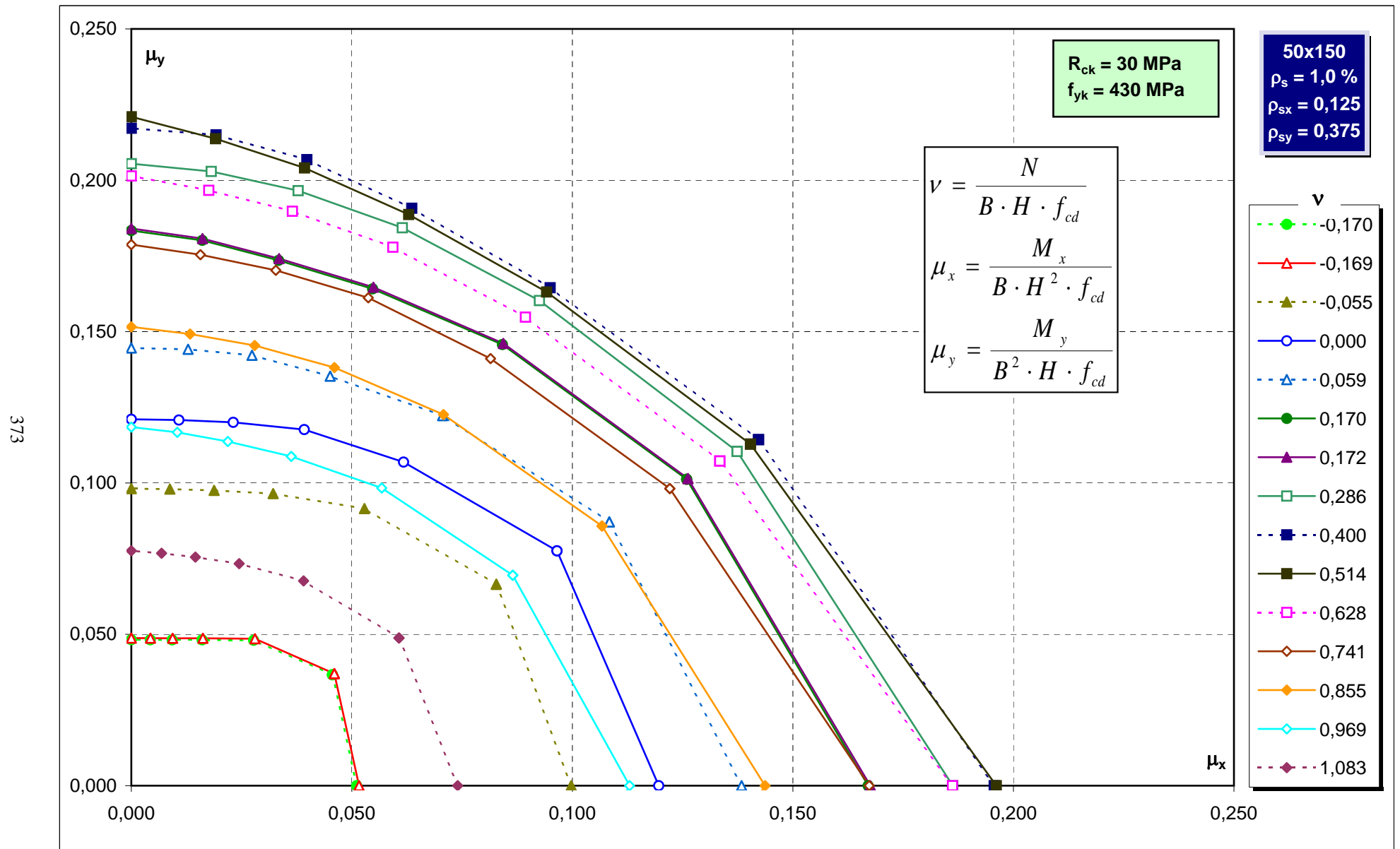
Abachi di verifica



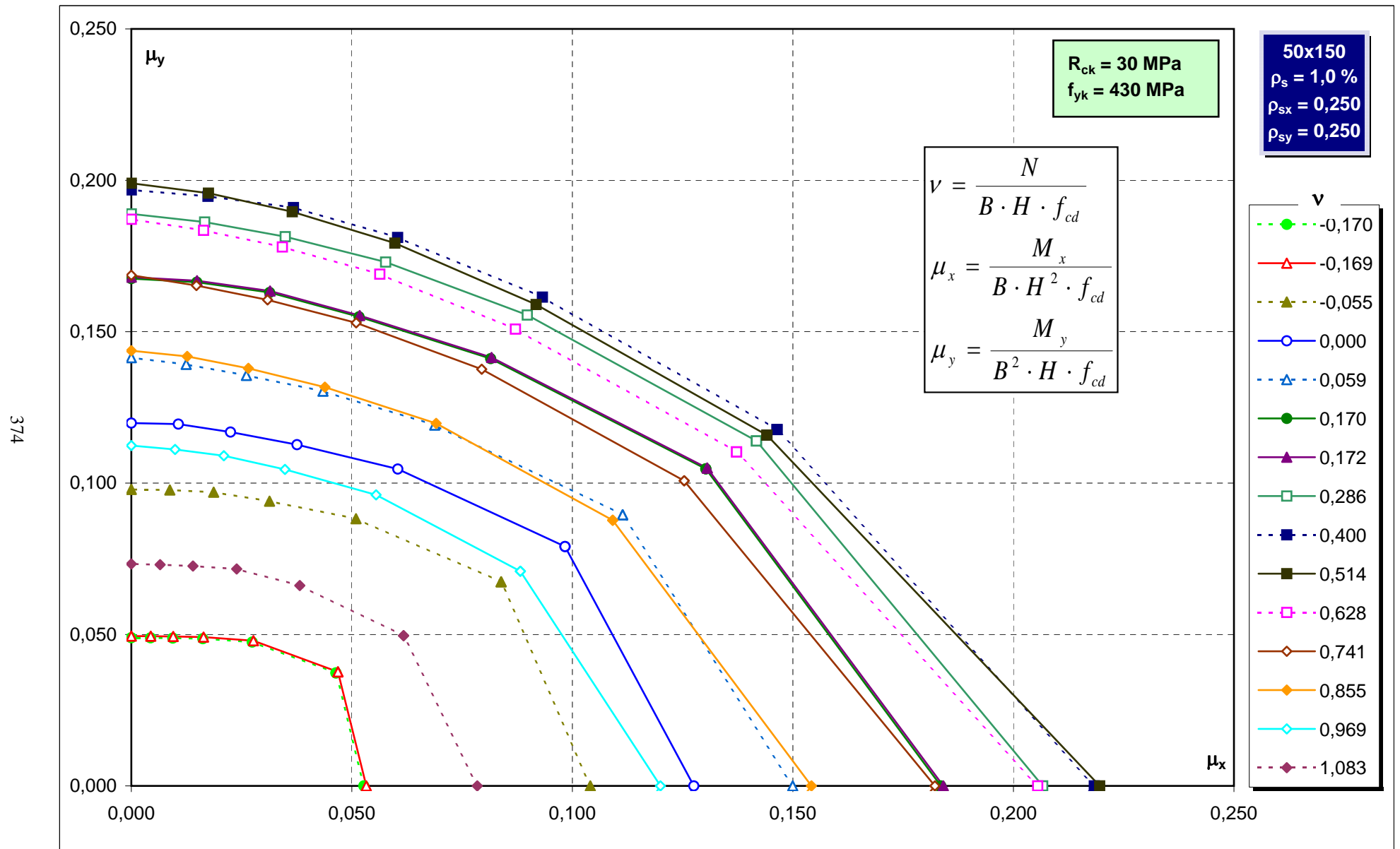
Abachi di verifica



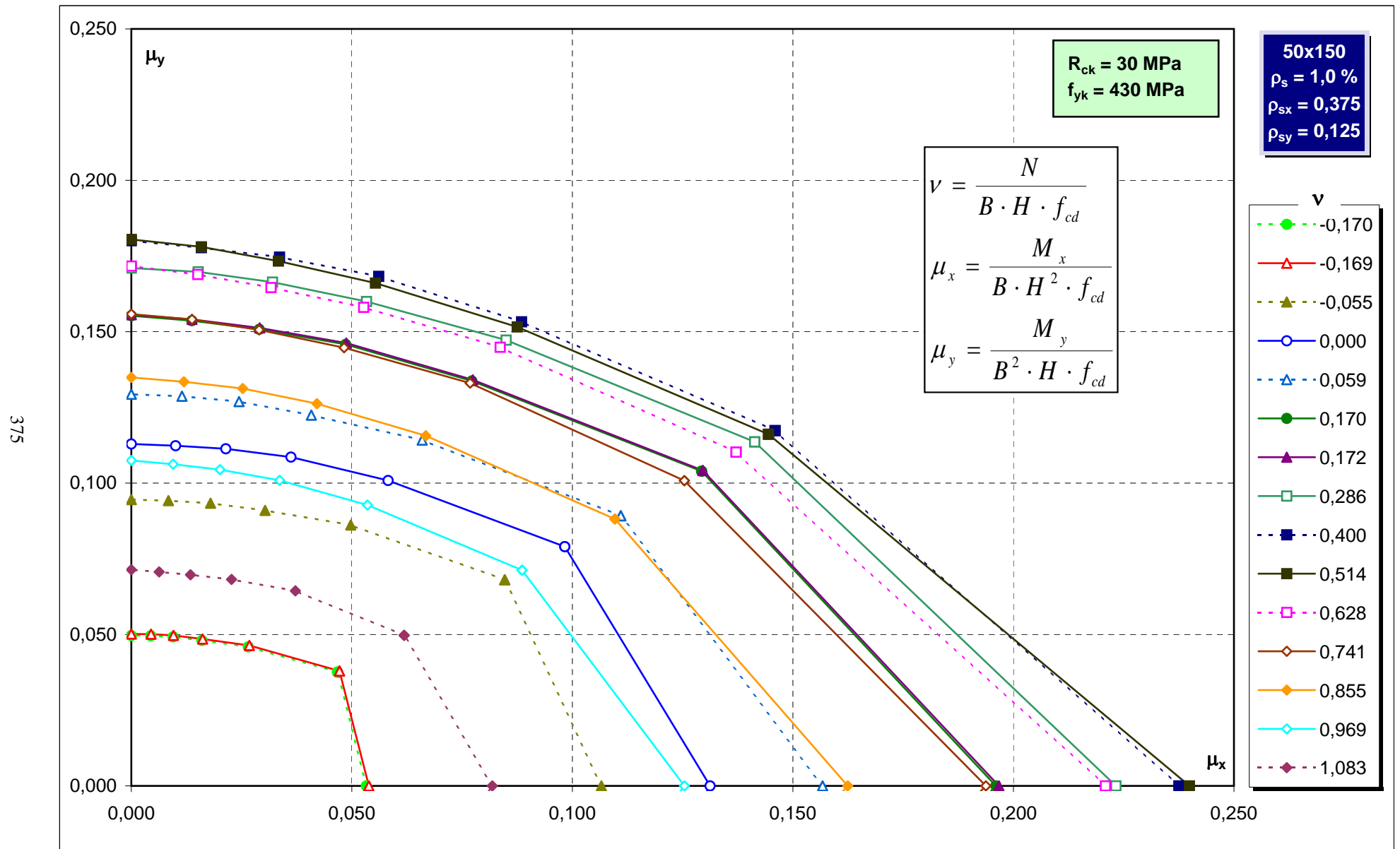
Abachi di verifica



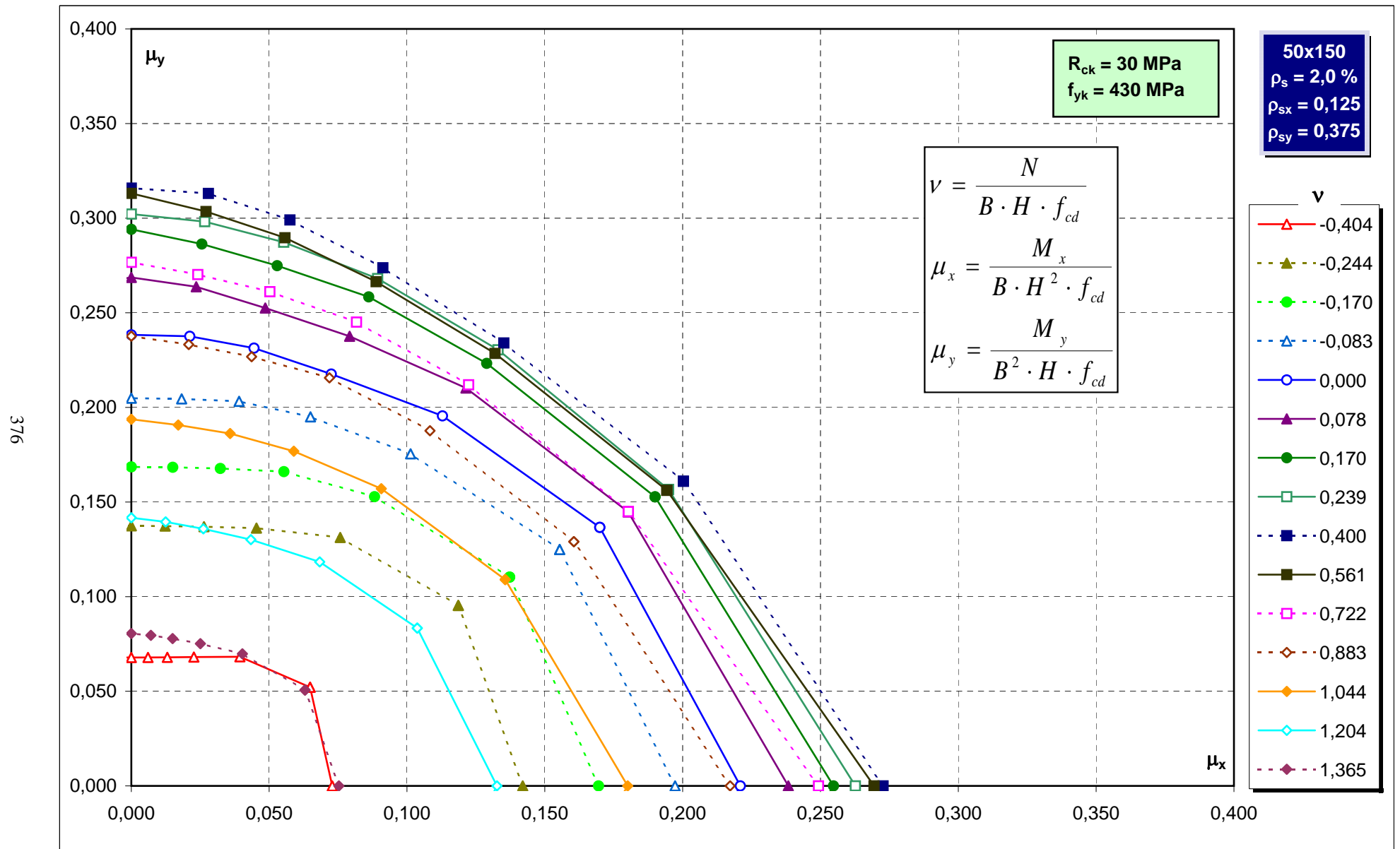
Abachi di verifica



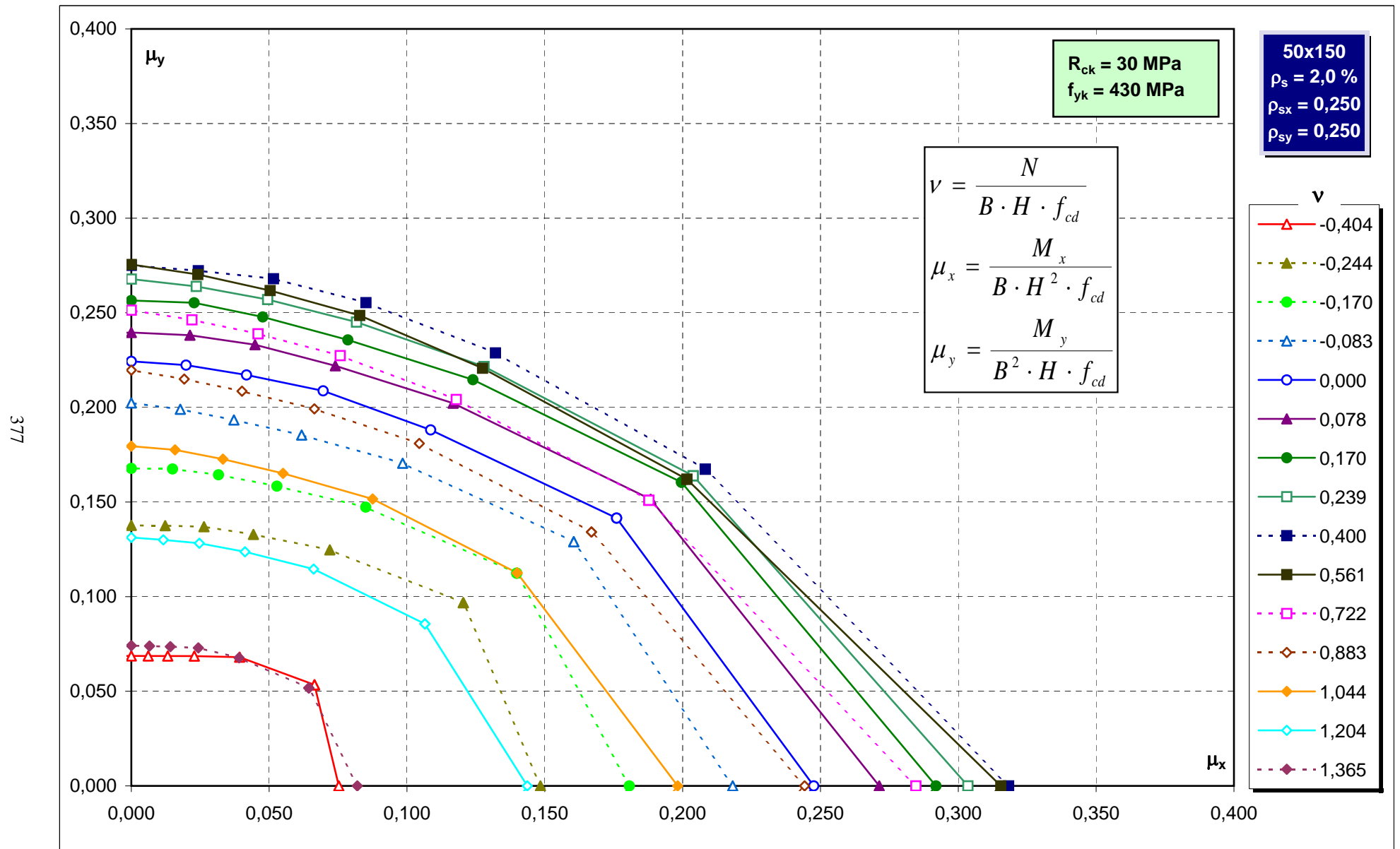
Abachi di verifica



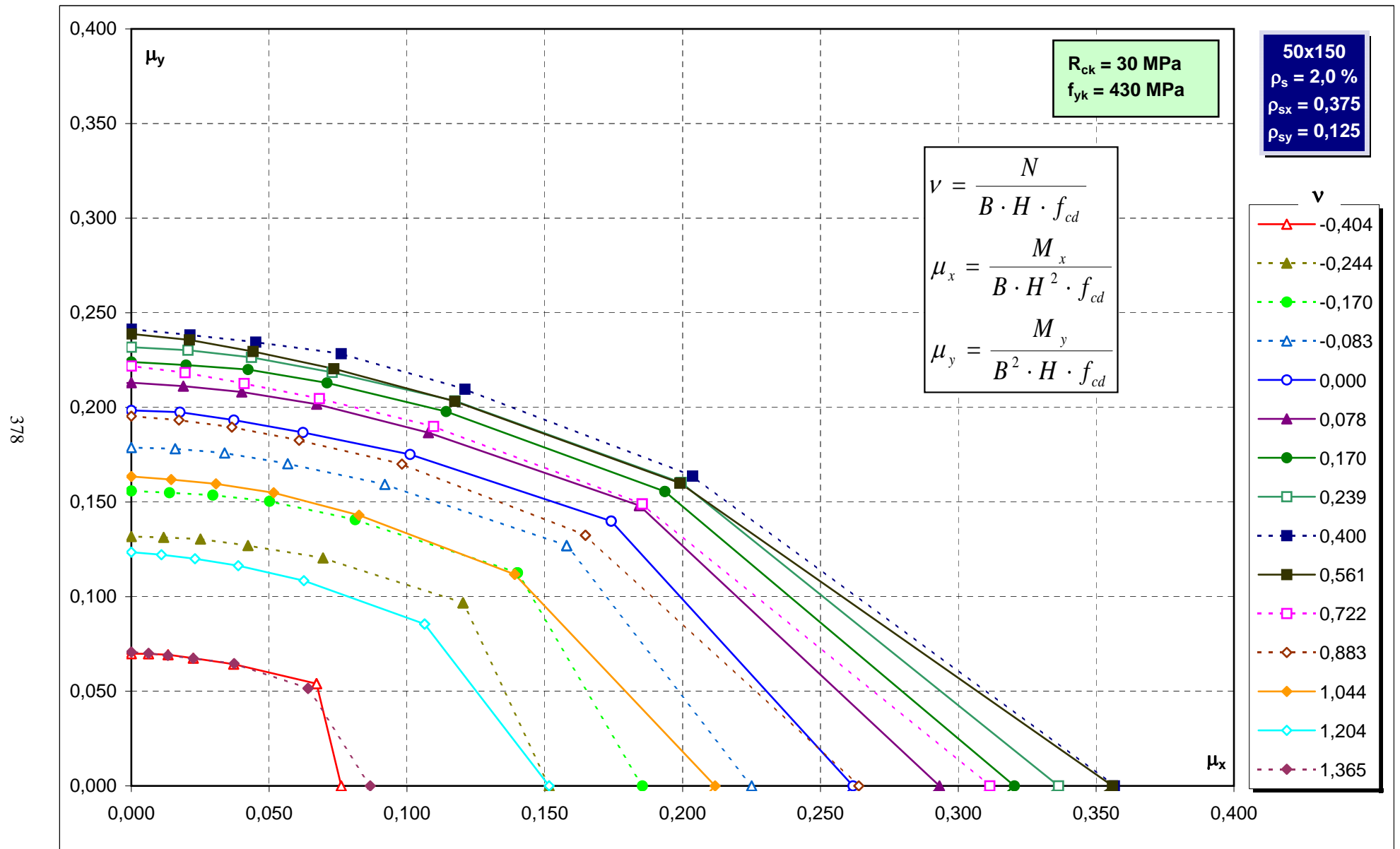
Abachi di verifica



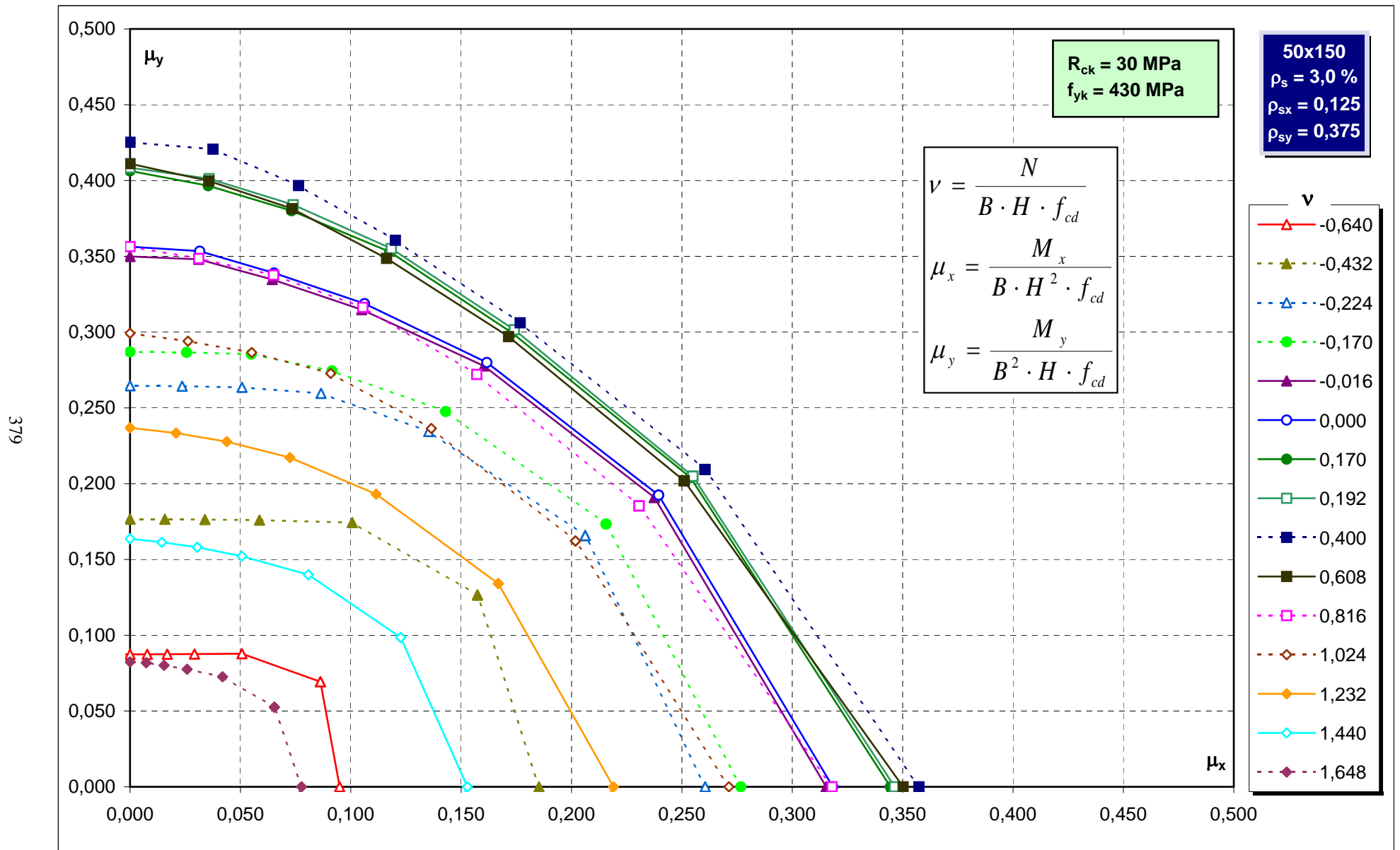
Abachi di verifica



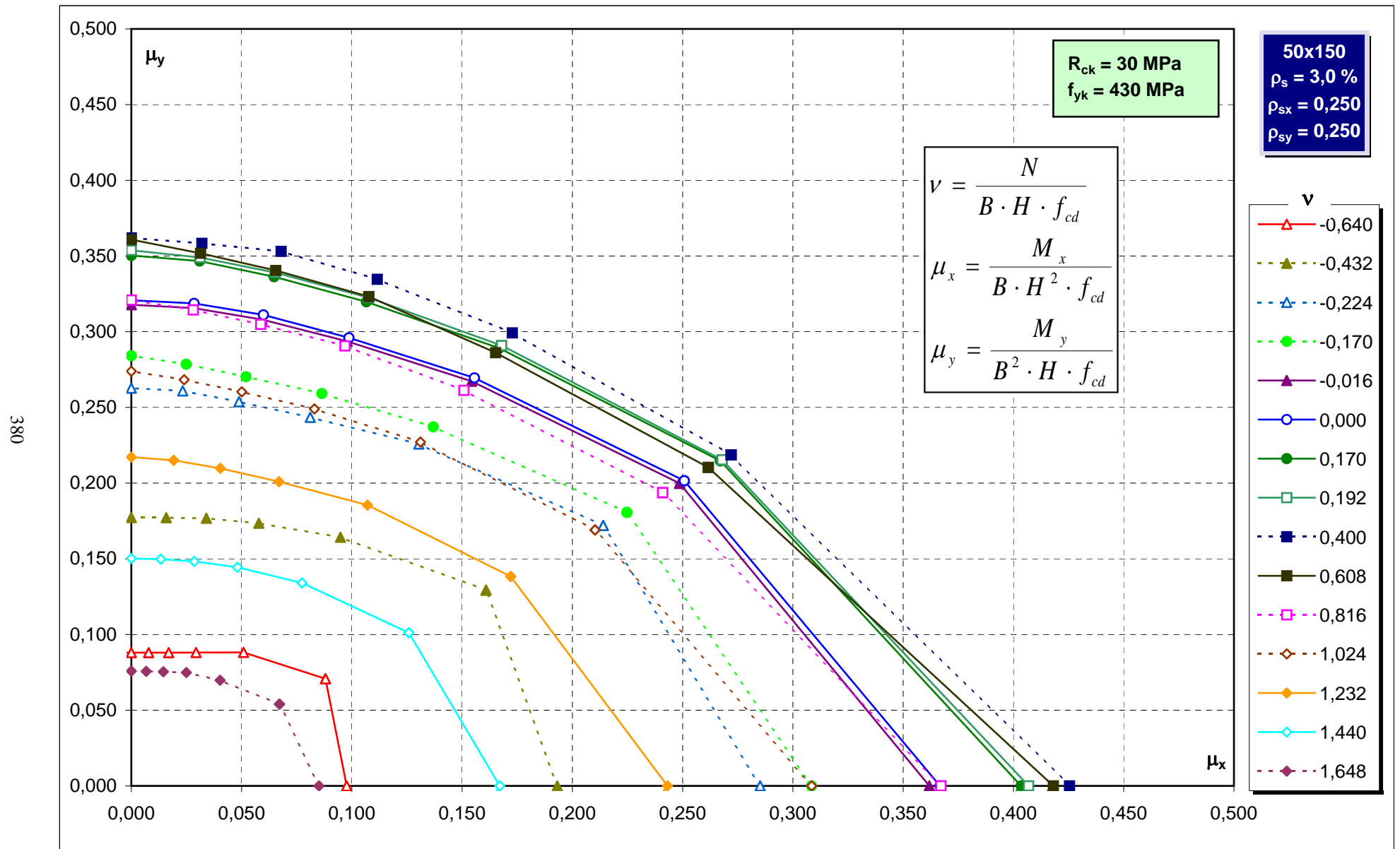
Abachi di verifica



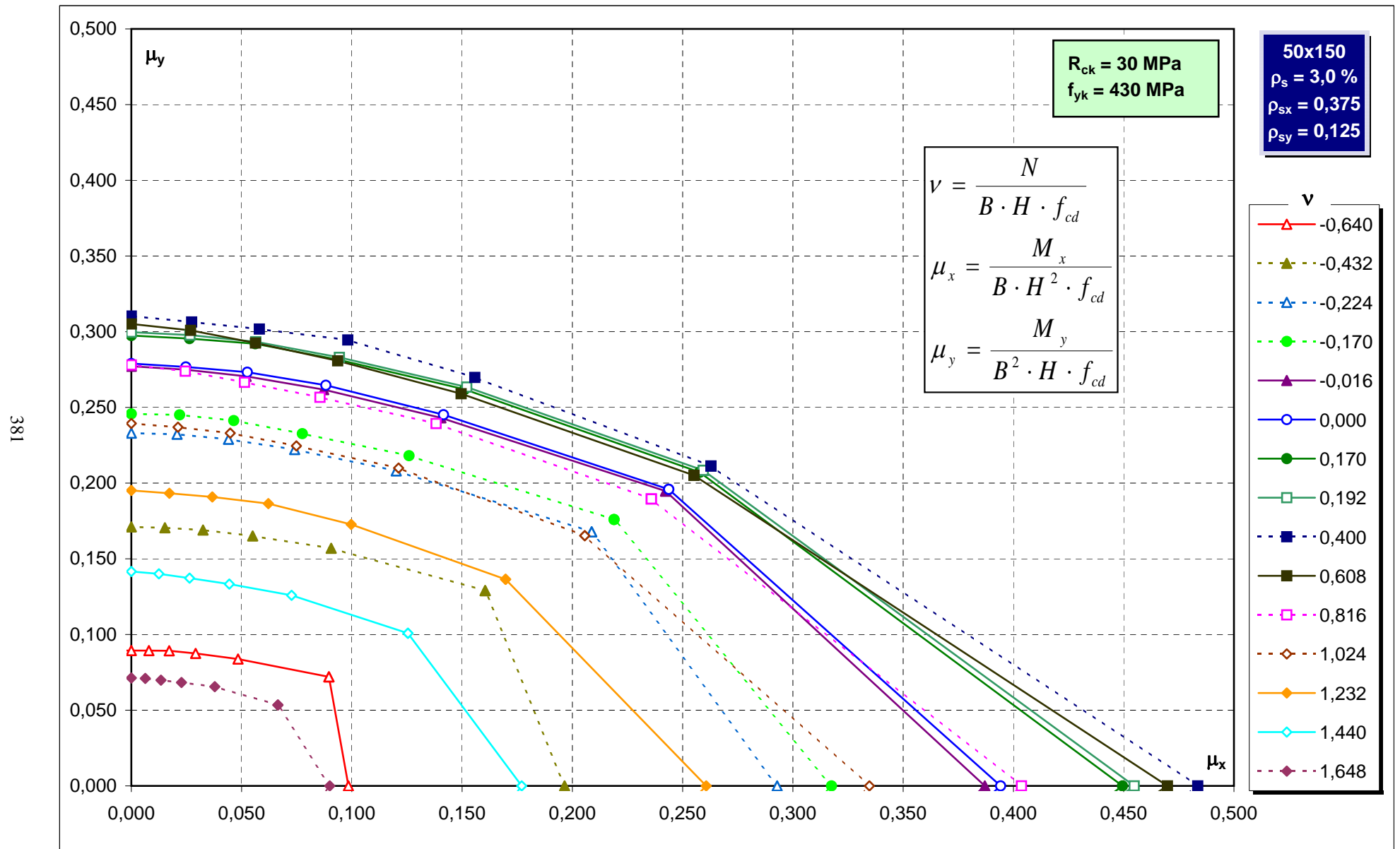
Abachi di verifica



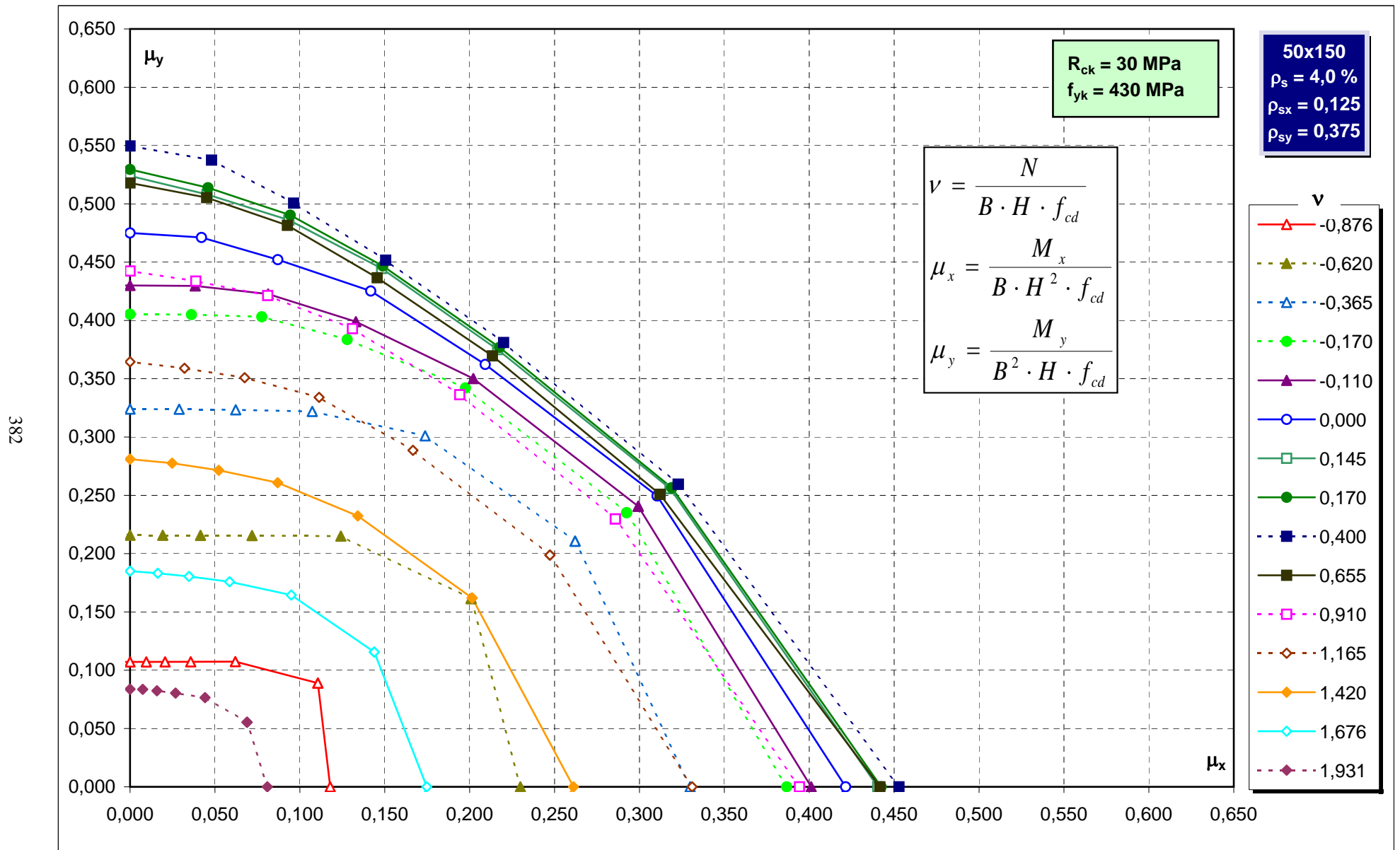
Abachi di verifica



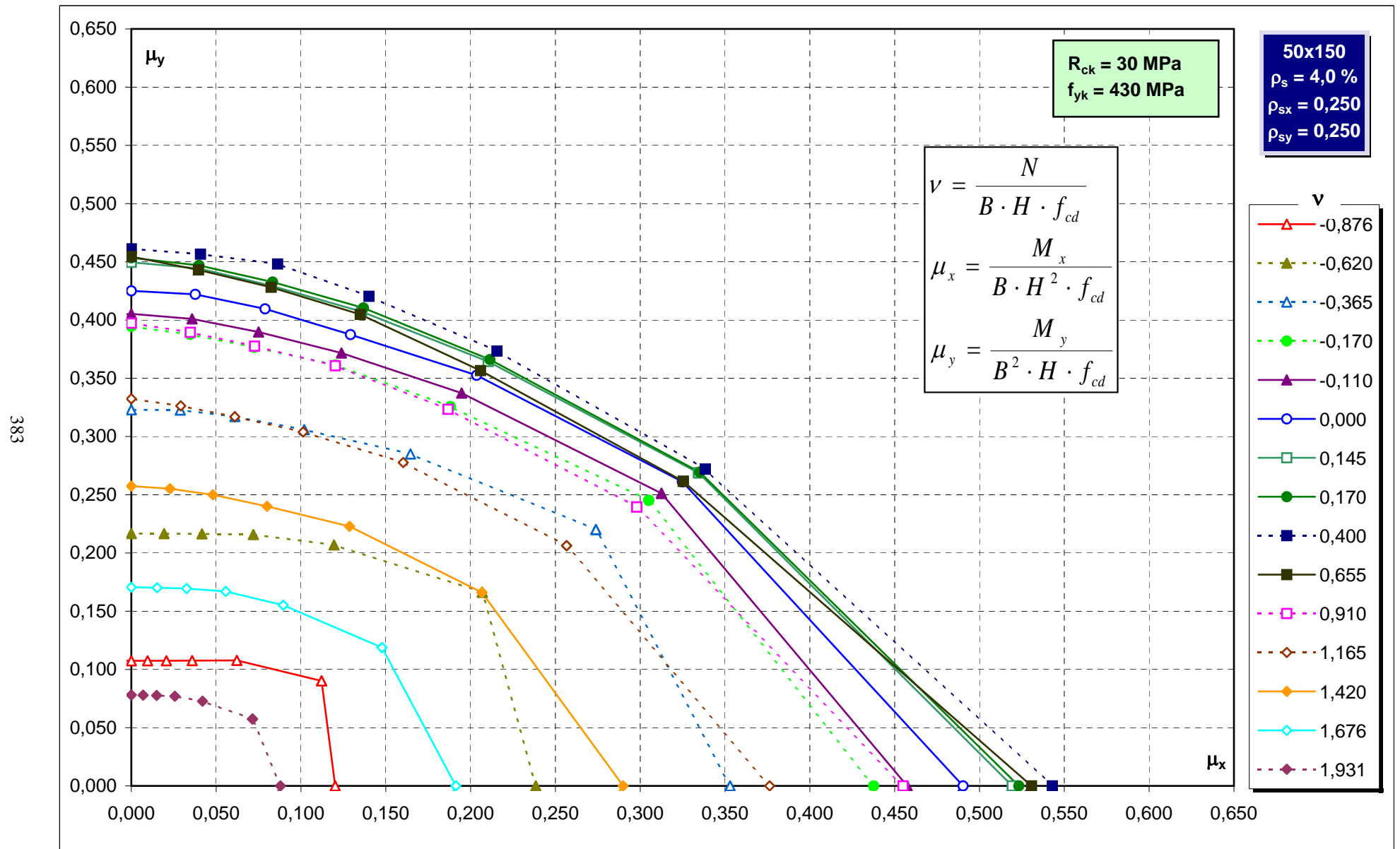
Abachi di verifica



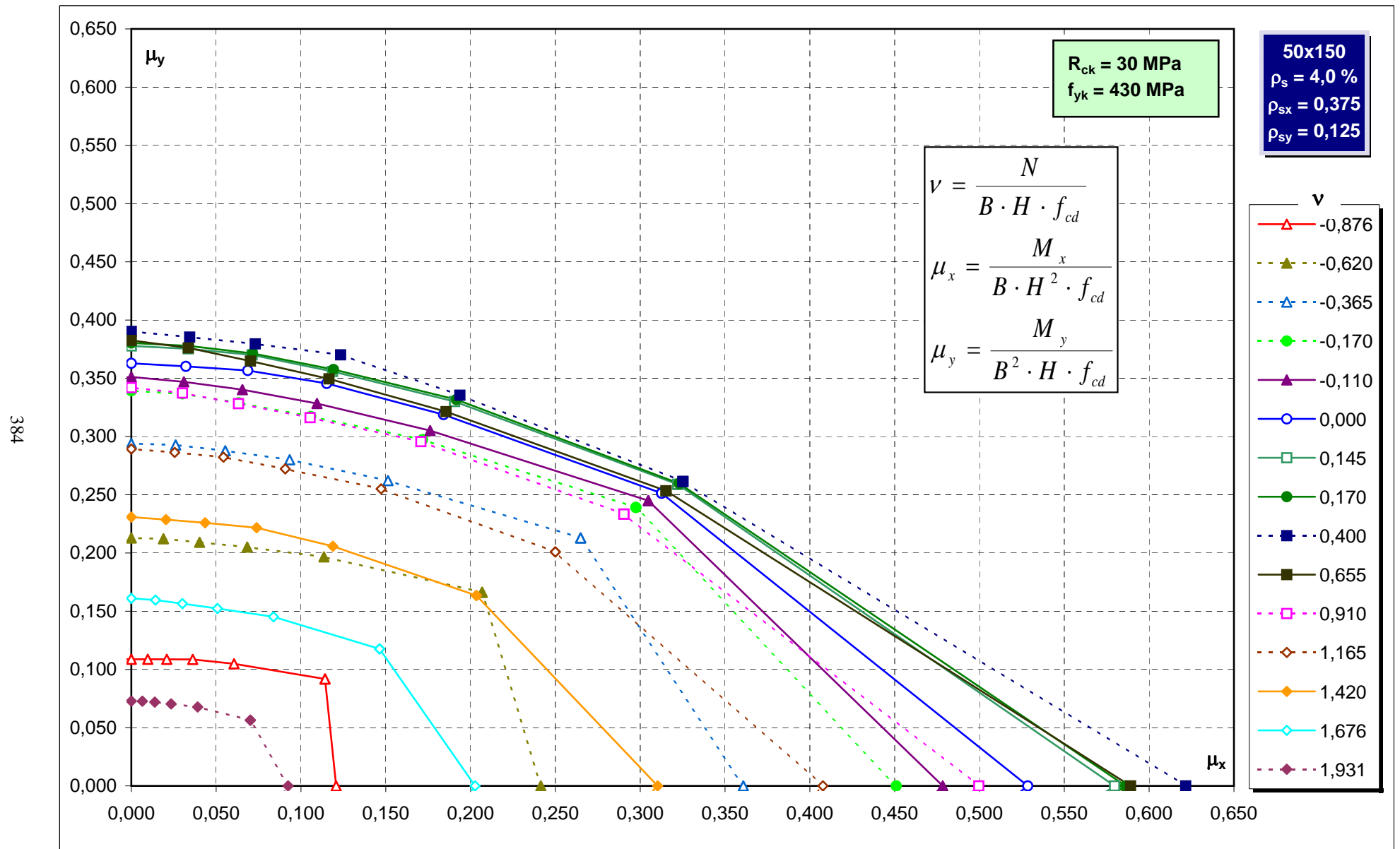
Abachi di verifica



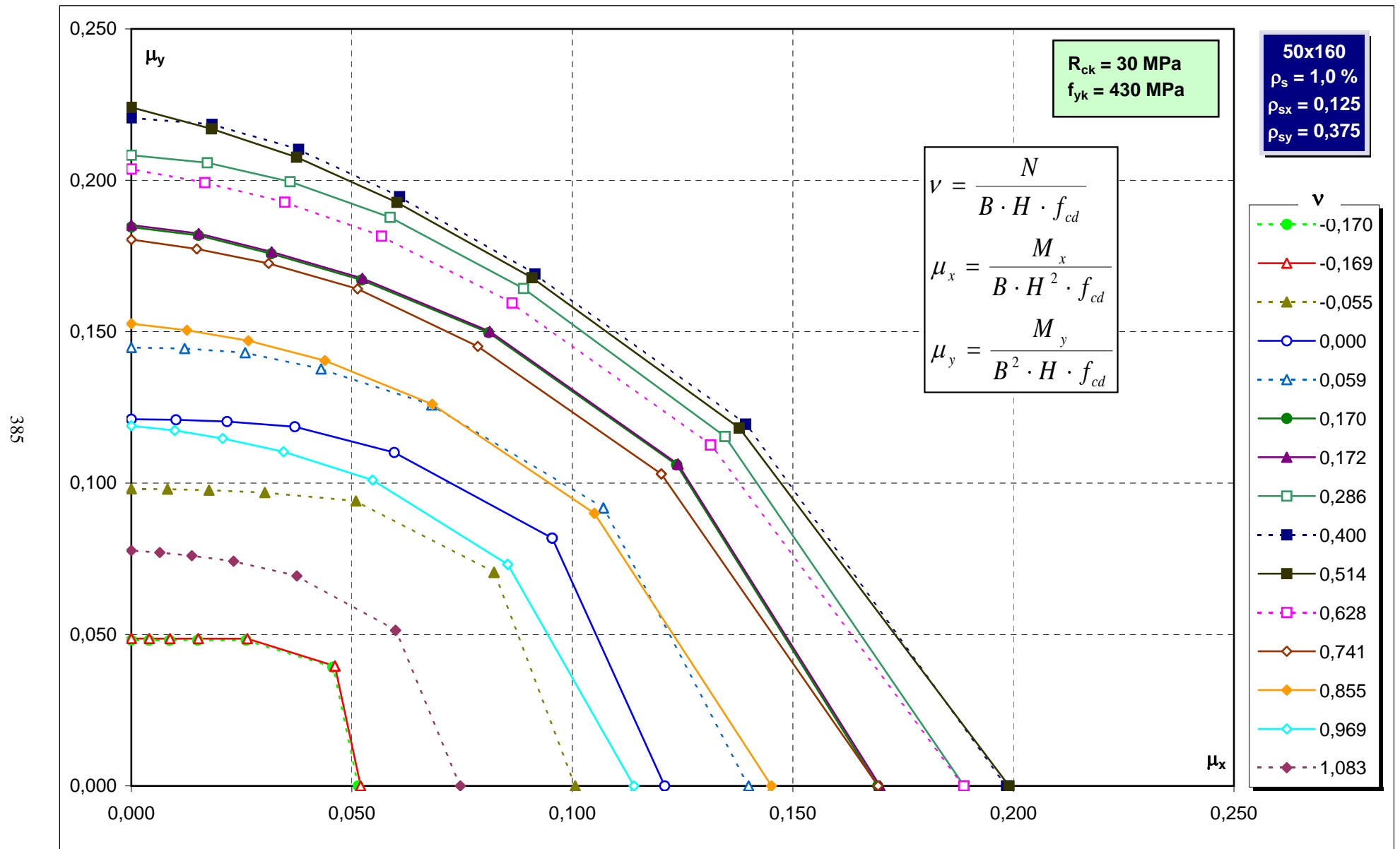
Abachi di verifica



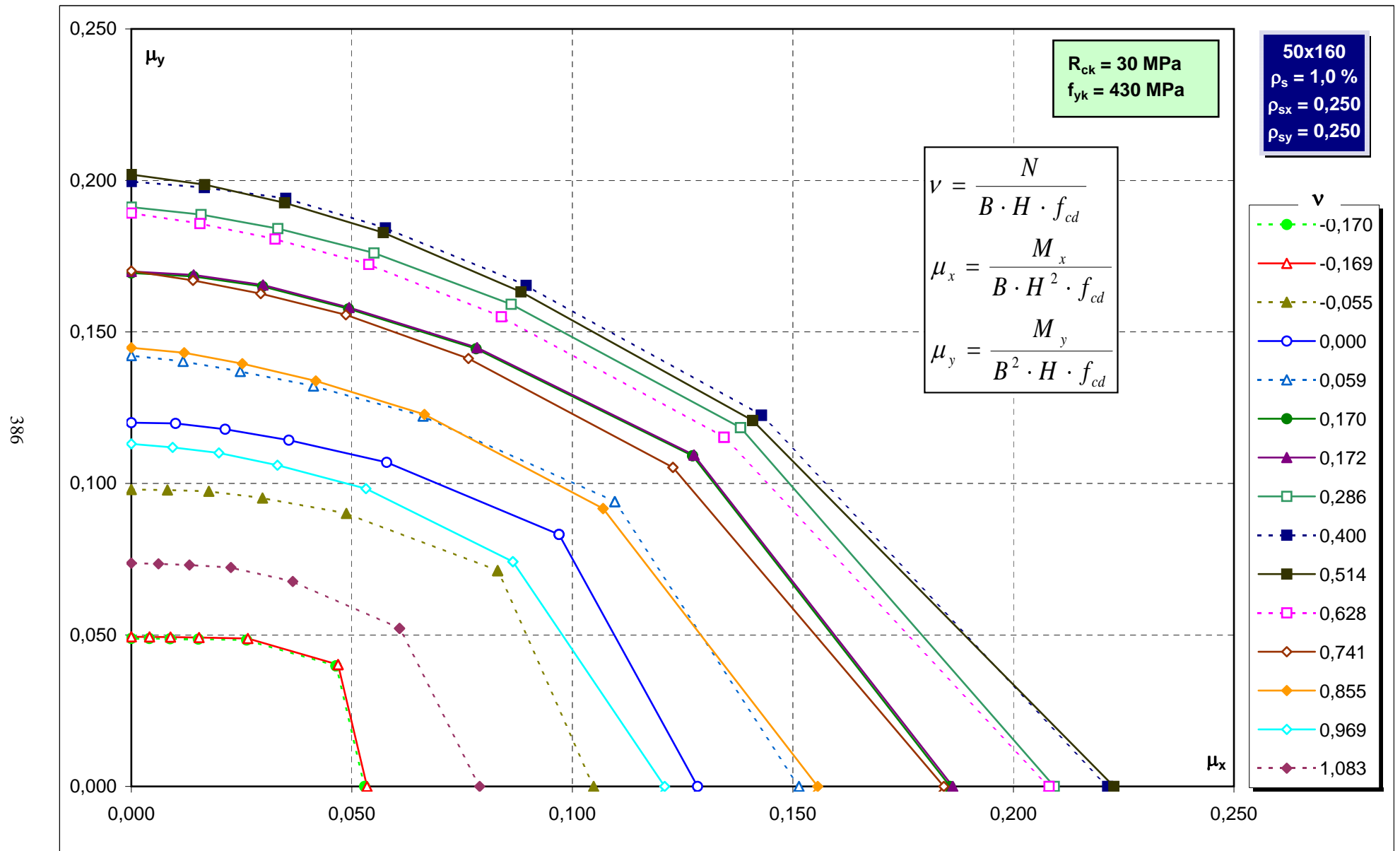
Abachi di verifica



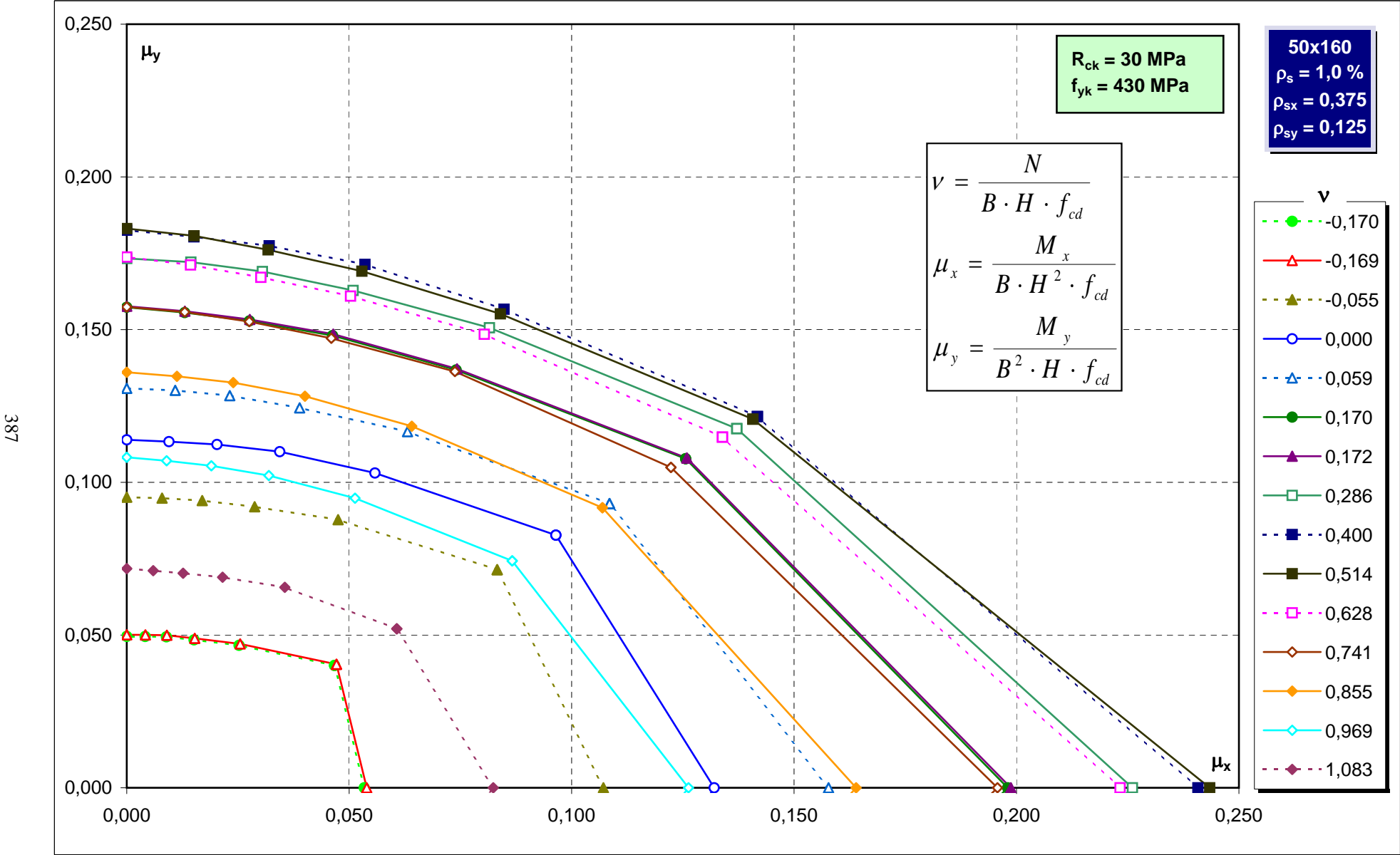
Abachi di verifica



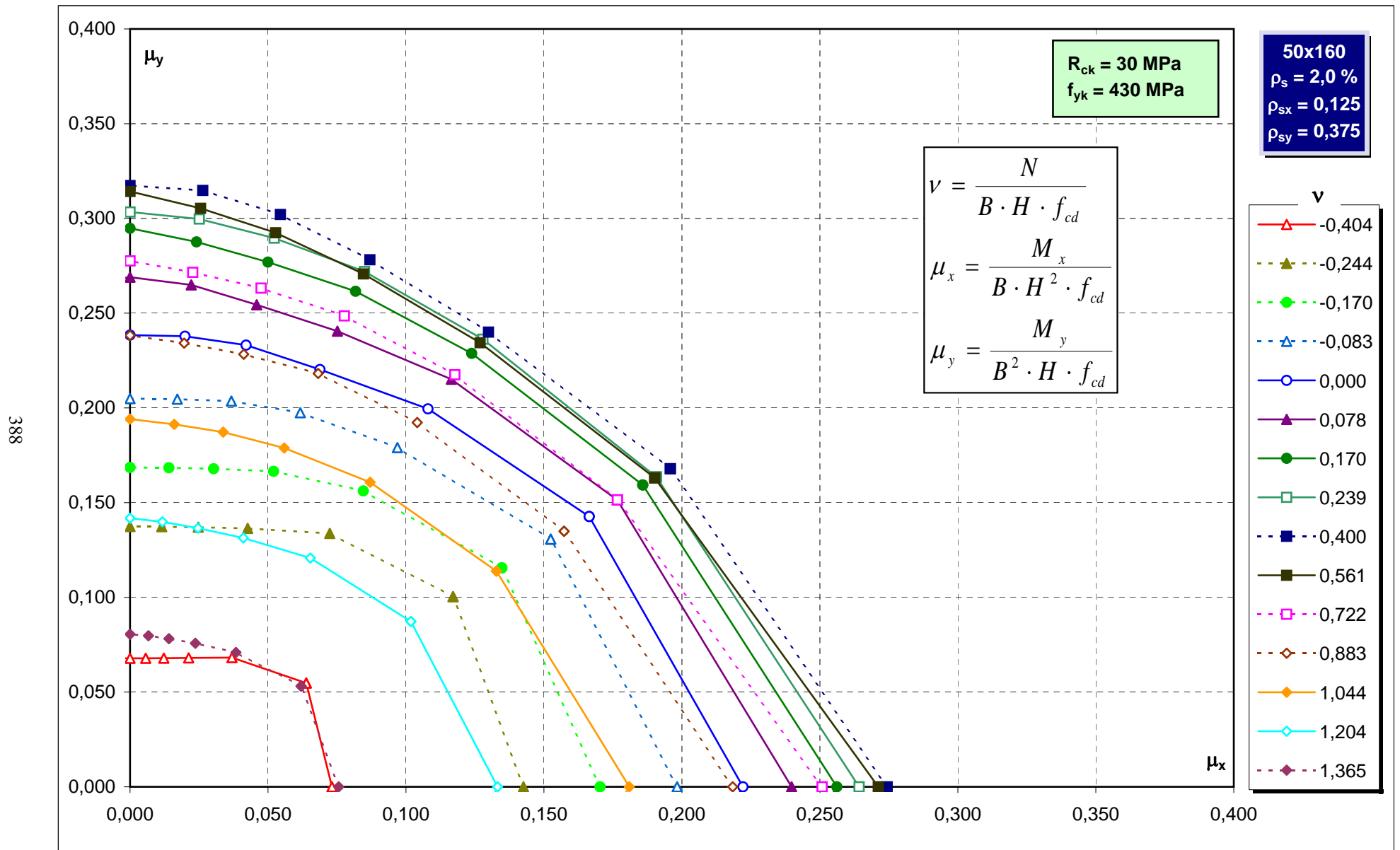
Abachi di verifica



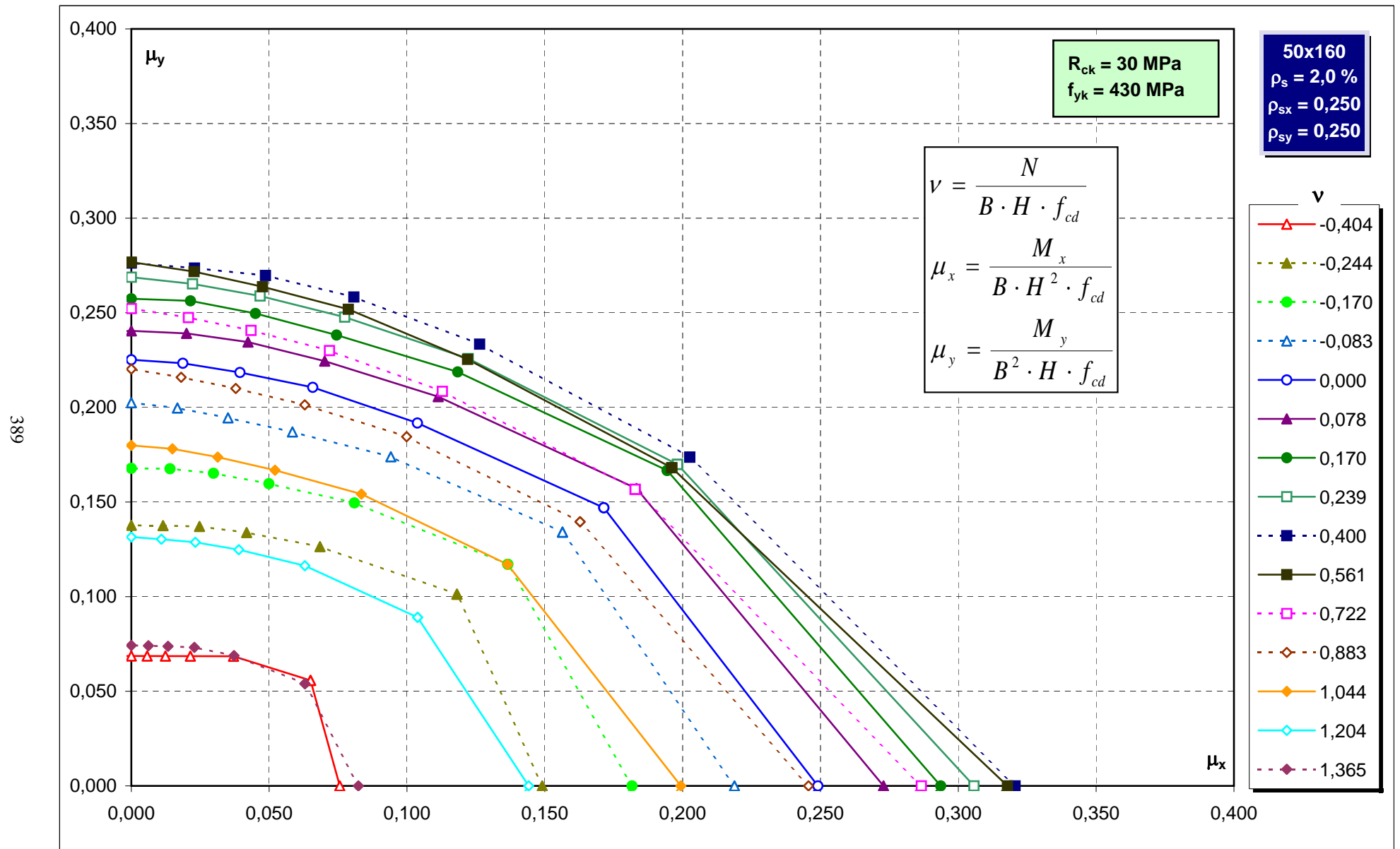
Abachi di verifica



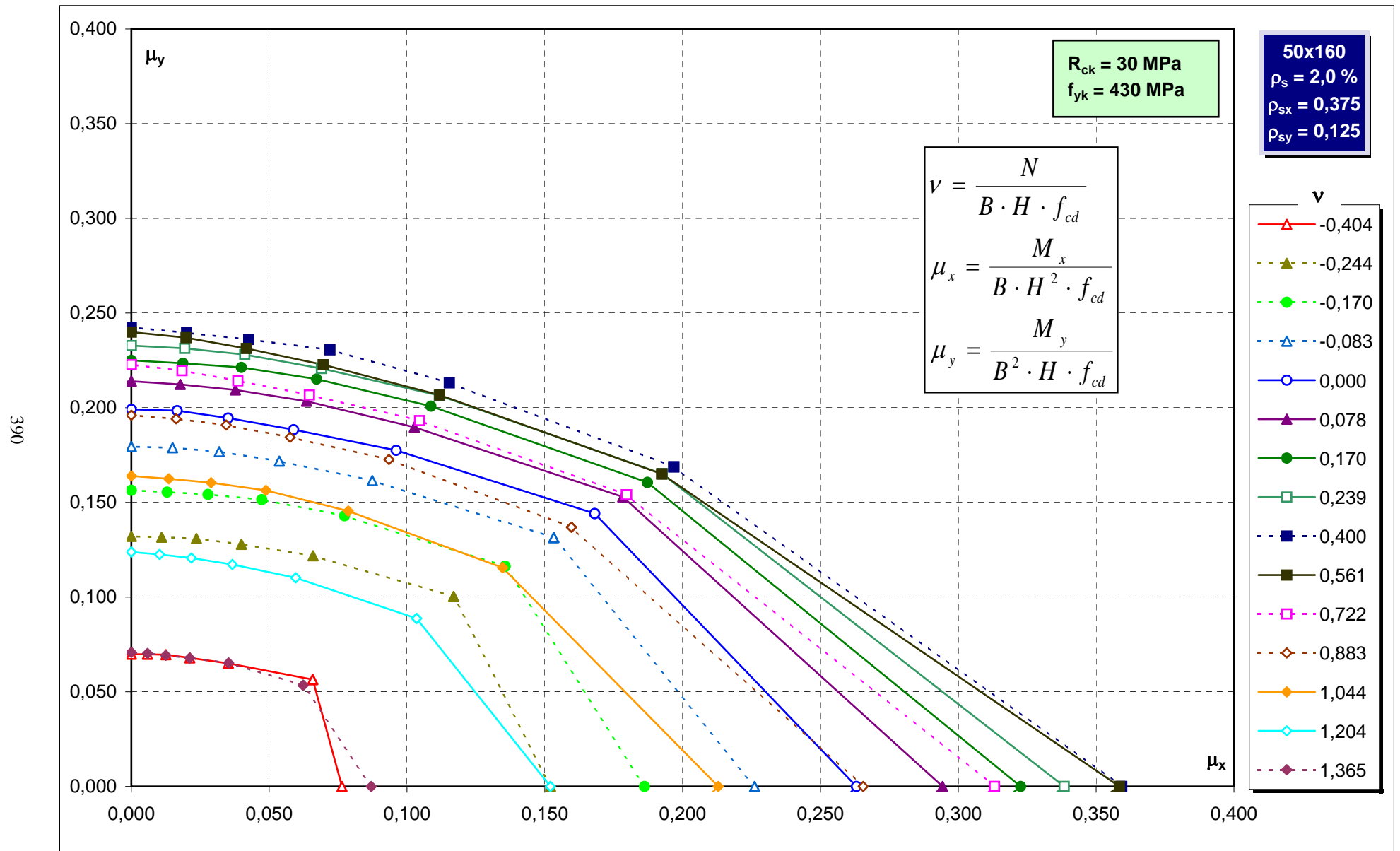
Abachi di verifica



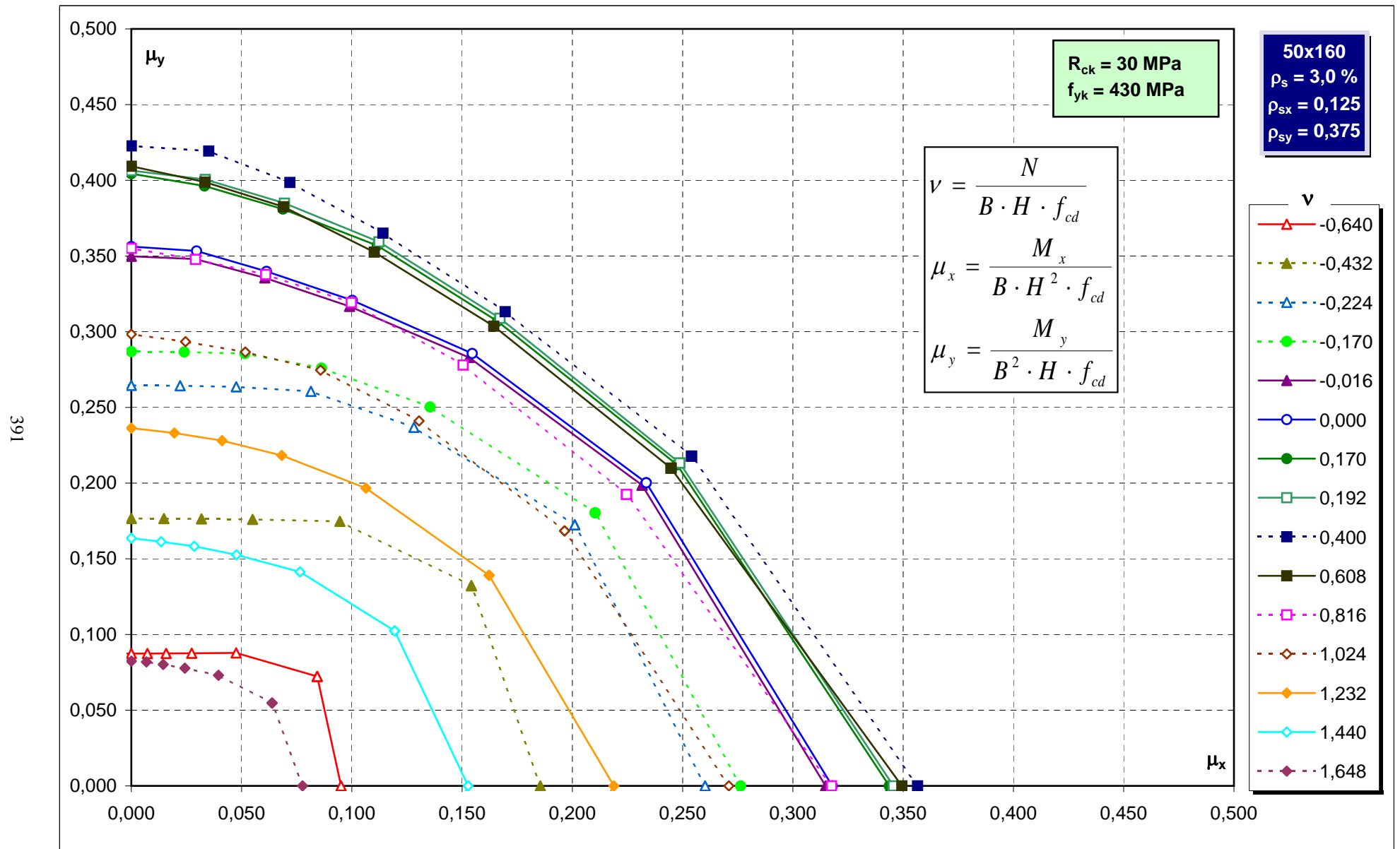
Abachi di verifica



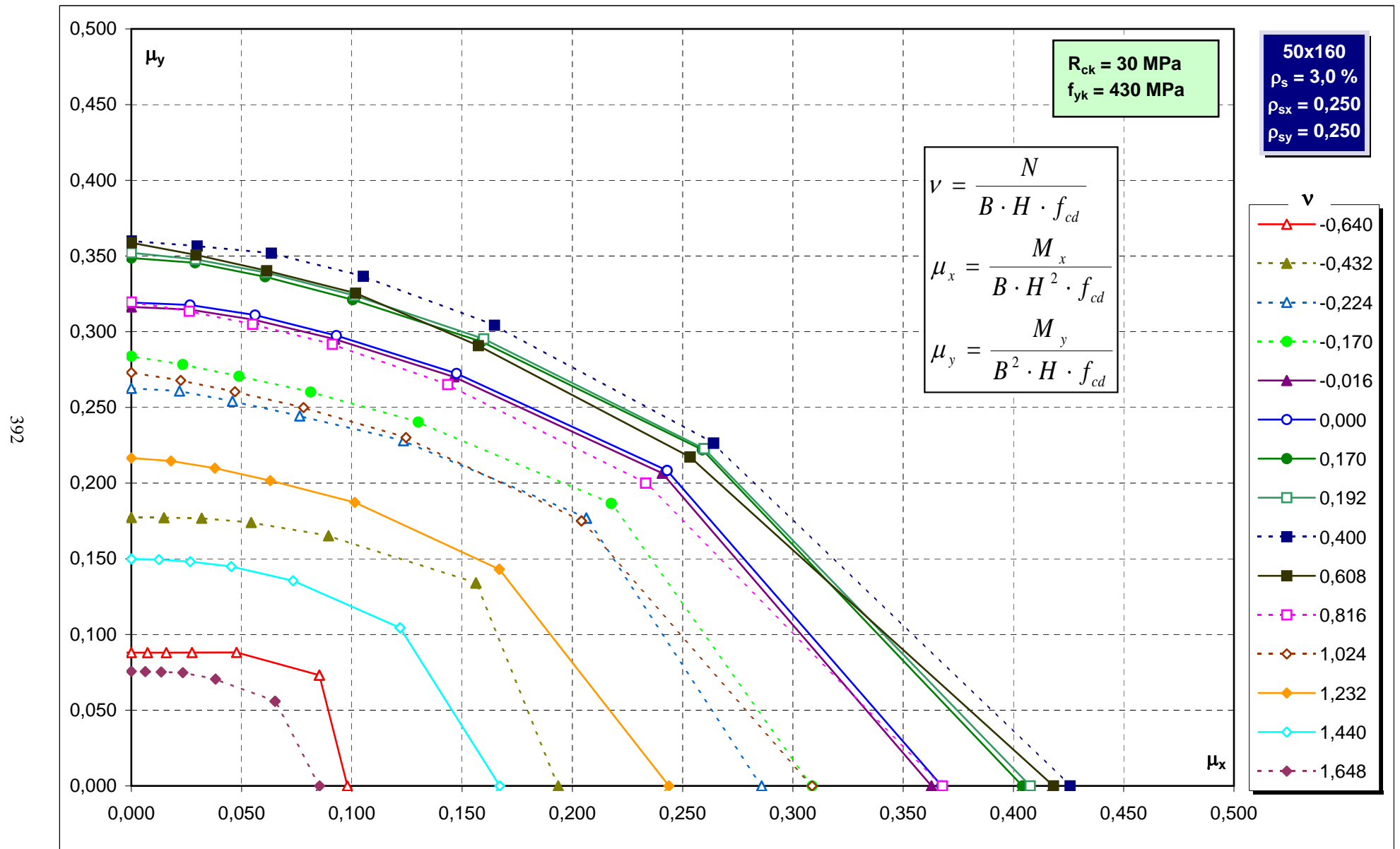
Abachi di verifica



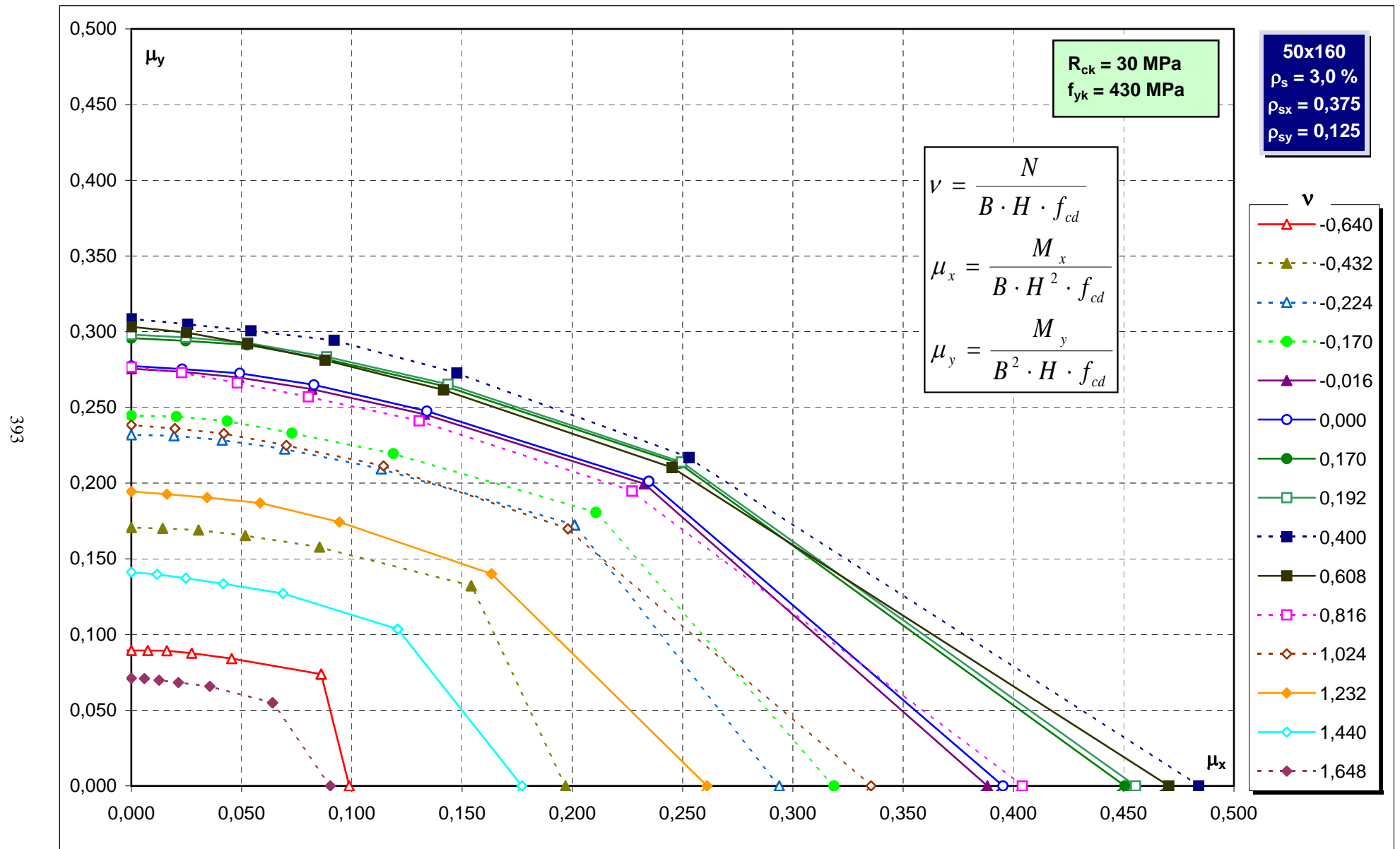
Abachi di verifica



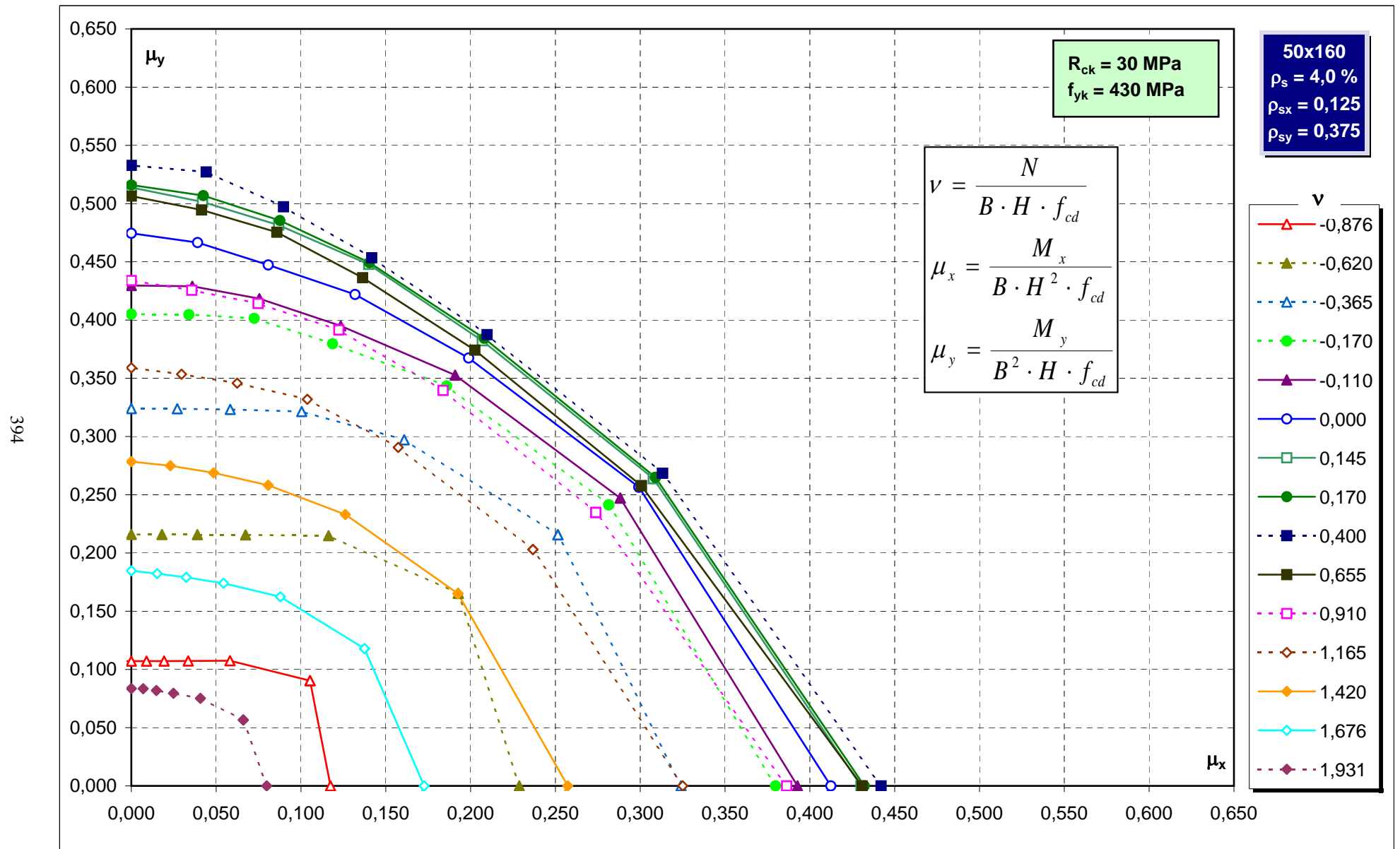
Abachi di verifica



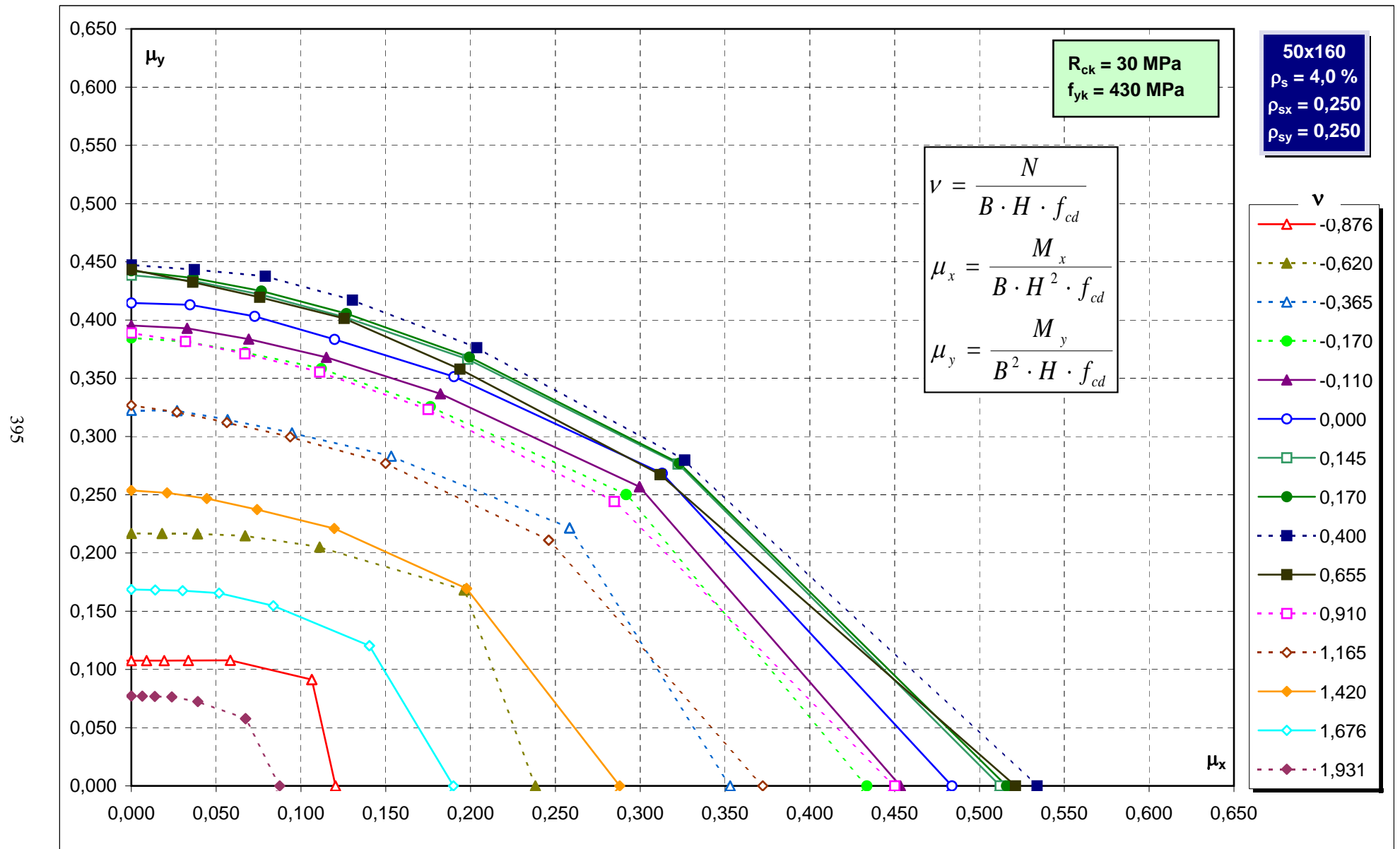
Abachi di verifica



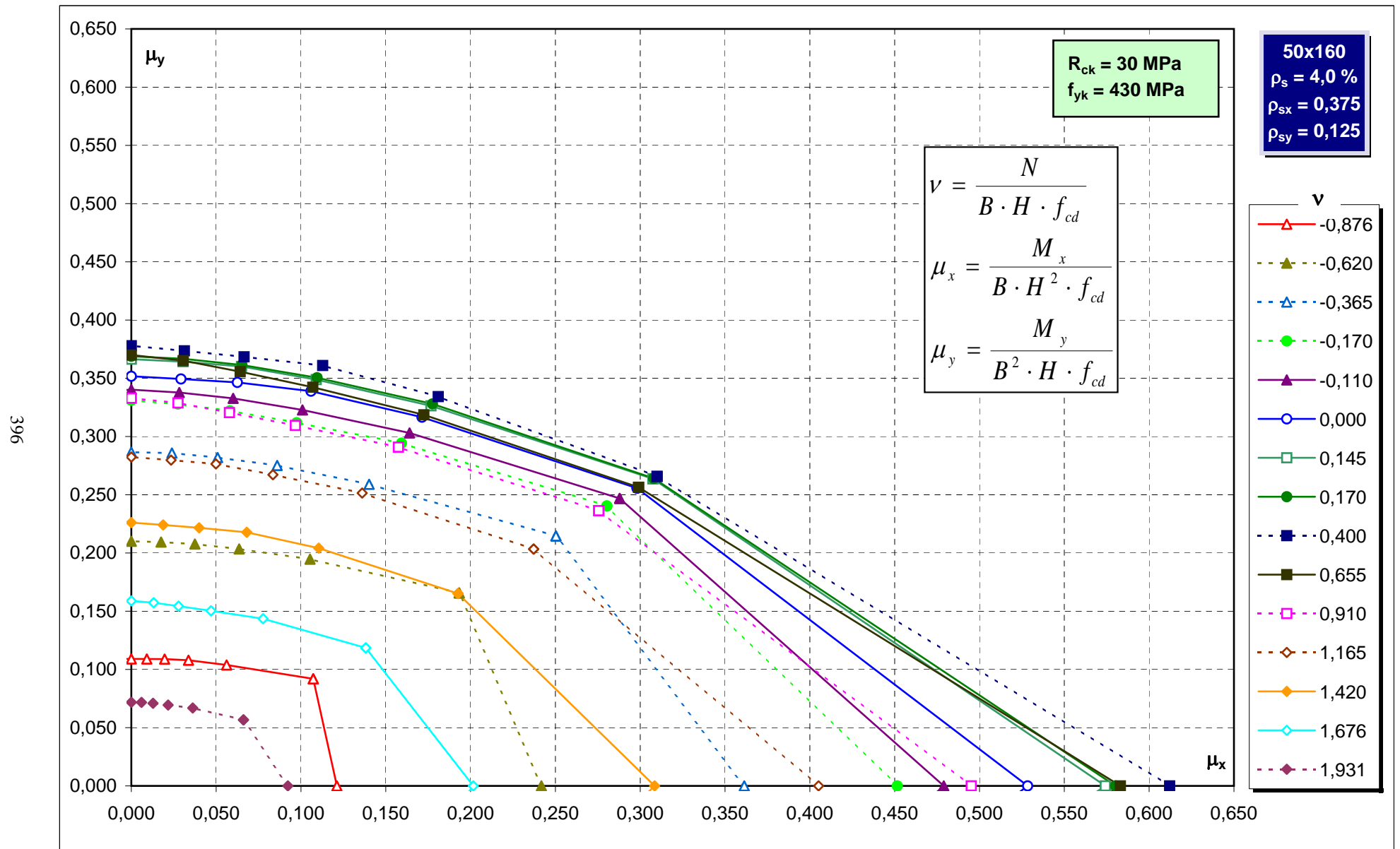
Abachi di verifica



Abachi di verifica



Abachi di verifica



• Sezione 30x30	1
- $v = -1,131$	1
- $v = -0,848$	2
- $v = -0,790$	3
- $v = -0,565$	4
- $v = -0,450$	5
- $v = -0,282$	6
- $v = -0,110$	7
- $v = 0,229$	8
- $v = 0,569$	9
- $v = 0,910$	10
- $v = 1,082$	11
- $v = 1,250$	12
- $v = 1,365$	13
- $v = 1,590$	14
- $v = 1,647$	15
- $v = 1,930$	16

• Sezione 30x40	17
- $v = -1,130$	17
- $v = -0,848$	18
- $v = -0,790$	19
- $v = -0,565$	20
- $v = -0,450$	21
- $v = -0,282$	22
- $v = -0,110$	23
- $v = 0,229$	24
- $v = 0,569$	25
- $v = 0,910$	26
- $v = 1,082$	27
- $v = 1,250$	28
- $v = 1,365$	29
- $v = 1,590$	30
- $v = 1,647$	31
- $v = 1,930$	32

• Sezione 30x50	33
- $v = -1,130$	33
- $v = -0,848$	34
- $v = -0,790$	35
- $v = -0,565$	36
- $v = -0,450$	37
- $v = -0,282$	38
- $v = -0,110$	39
- $v = 0,230$	40
- $v = 0,570$	41
- $v = 0,910$	42
- $v = 1,083$	43
- $v = 1,250$	44
- $v = 1,365$	45
- $v = 1,590$	46
- $v = 1,647$	47
- $v = 1,930$	48

• Sezione 30x60	49
- $v = -1,131$	49
- $v = -0,848$	50
- $v = -0,790$	51
- $v = -0,565$	52
- $v = -0,450$	53
- $v = -0,283$	54
- $v = -0,110$	55
- $v = 0,230$	56
- $v = 0,570$	57
- $v = 0,910$	58
- $v = 1,082$	59
- $v = 1,250$	60
- $v = 1,365$	61
- $v = 1,590$	62
- $v = 1,648$	63
- $v = 1,930$	64

• Sezione 30x70	65
- $v = -1,130$	65
- $v = -0,848$	66
- $v = -0,790$	67
- $v = -0,565$	68
- $v = -0,450$	69
- $v = -0,283$	70
- $v = -0,110$	71
- $v = 0,230$	72
- $v = 0,570$	73
- $v = 0,910$	74
- $v = 1,082$	75
- $v = 1,250$	76
- $v = 1,365$	77
- $v = 1,590$	78
- $v = 1,648$	79
- $v = 1,931$	80

• Sezione 30x80	81
- $v = -1,130$	81
- $v = -0,848$	82
- $v = -0,790$	83
- $v = -0,565$	84
- $v = -0,450$	85
- $v = -0,283$	86
- $v = -0,110$	87
- $v = 0,230$	88
- $v = 0,570$	89
- $v = 0,910$	90
- $v = 1,082$	91
- $v = 1,250$	92
- $v = 1,365$	93
- $v = 1,590$	94
- $v = 1,648$	95
- $v = 1,931$	96

• Sezione 30x90	97
- $v = -1,131$	97
- $v = -0,848$	98
- $v = -0,790$	99
- $v = -0,565$	100
- $v = -0,450$	101
- $v = -0,283$	102
- $v = -0,110$	103
- $v = 0,230$	104
- $v = 0,570$	105
- $v = 0,910$	106
- $v = 1,082$	107
- $v = 1,250$	108
- $v = 1,365$	109
- $v = 1,590$	110
- $v = 1,648$	111
- $v = 1,931$	112

• Sezione 30x100	113
- $v = -1,130$	113
- $v = -0,848$	114
- $v = -0,790$	115
- $v = -0,565$	116
- $v = -0,450$	117
- $v = -0,282$	118
- $v = -0,110$	119
- $v = 0,230$	120
- $v = 0,570$	121
- $v = 0,910$	122
- $v = 1,083$	123
- $v = 1,250$	124
- $v = 1,365$	125
- $v = 1,590$	126
- $v = 1,648$	127
- $v = 1,930$	128

• Sezione 40x40	129
- $v = -1,131$	129
- $v = -0,848$	130
- $v = -0,790$	131
- $v = -0,565$	132
- $v = -0,450$	133
- $v = -0,283$	134
- $v = -0,110$	135
- $v = 0,230$	136
- $v = 0,570$	137
- $v = 0,910$	138
- $v = 1,082$	139
- $v = 1,250$	140
- $v = 1,365$	141
- $v = 1,590$	142
- $v = 1,648$	143
- $v = 1,931$	144

• Sezione 40x50	145
- $v = -1,131$	145
- $v = -0,848$	146
- $v = -0,790$	147
- $v = -0,565$	148
- $v = -0,450$	149
- $v = -0,282$	150
- $v = -0,110$	151
- $v = 0,230$	152
- $v = 0,570$	153
- $v = 0,910$	154
- $v = 1,083$	155
- $v = 1,250$	156
- $v = 1,365$	157
- $v = 1,590$	158
- $v = 1,648$	159
- $v = 1,930$	160

• Sezione 40x60	161
- $v = -1,130$	161
- $v = -0,848$	162
- $v = -0,790$	163
- $v = -0,565$	164
- $v = -0,450$	165
- $v = -0,283$	166
- $v = -0,110$	167
- $v = 0,230$	168
- $v = 0,570$	169
- $v = 0,910$	170
- $v = 1,083$	171
- $v = 1,250$	172
- $v = 1,365$	173
- $v = 1,590$	174
- $v = 1,648$	175
- $v = 1,931$	176

• Sezione 40x70	177
- $v = -1,130$	177
- $v = -0,848$	178
- $v = -0,790$	179
- $v = -0,565$	180
- $v = -0,450$	181
- $v = -0,282$	182
- $v = -0,110$	183
- $v = 0,230$	184
- $v = 0,570$	185
- $v = 0,910$	186
- $v = 1,083$	187
- $v = 1,250$	188
- $v = 1,365$	189
- $v = 1,590$	190
- $v = 1,648$	191
- $v = 1,930$	192

• Sezione 40x80	193
- $v = -1,131$	193
- $v = -0,848$	194
- $v = -0,790$	195
- $v = -0,565$	196
- $v = -0,450$	197
- $v = -0,283$	198
- $v = -0,110$	199
- $v = 0,230$	200
- $v = 0,570$	201
- $v = 0,910$	202
- $v = 1,082$	203
- $v = 1,250$	204
- $v = 1,365$	205
- $v = 1,590$	206
- $v = 1,648$	207
- $v = 1,931$	208

• Sezione 40x90	209
- $v = -1,131$	209
- $v = -0,848$	210
- $v = -0,790$	211
- $v = -0,565$	212
- $v = -0,450$	213
- $v = -0,283$	214
- $v = -0,110$	215
- $v = 0,230$	216
- $v = 0,570$	217
- $v = 0,910$	218
- $v = 1,082$	219
- $v = 1,250$	220
- $v = 1,365$	221
- $v = 1,590$	222
- $v = 1,648$	223
- $v = 1,930$	224

• Sezione 40x100	225
- $v = -1,131$	225
- $v = -0,848$	226
- $v = -0,790$	227
- $v = -0,565$	228
- $v = -0,450$	229
- $v = -0,283$	230
- $v = -0,110$	231
- $v = 0,230$	232
- $v = 0,570$	233
- $v = 0,910$	234
- $v = 1,083$	235
- $v = 1,250$	236
- $v = 1,365$	237
- $v = 1,590$	238
- $v = 1,648$	239
- $v = 1,931$	240

• Sezione 40x110	241
- $v = -1,131$	241
- $v = -0,848$	242
- $v = -0,790$	243
- $v = -0,565$	244
- $v = -0,450$	245
- $v = -0,283$	246
- $v = -0,110$	247
- $v = 0,230$	248
- $v = 0,570$	249
- $v = 0,910$	250
- $v = 1,083$	251
- $v = 1,250$	252
- $v = 1,365$	253
- $v = 1,590$	254
- $v = 1,648$	255
- $v = 1,931$	256

• Sezione 40x120	257
- $v = -1,131$	257
- $v = -0,848$	258
- $v = -0,790$	259
- $v = -0,565$	260
- $v = -0,450$	261
- $v = -0,283$	262
- $v = -0,110$	263
- $v = 0,230$	264
- $v = 0,570$	265
- $v = 0,910$	266
- $v = 1,083$	267
- $v = 1,250$	268
- $v = 1,365$	269
- $v = 1,590$	270
- $v = 1,648$	271
- $v = 1,931$	272

• Sezione 40x130	273
- $v = -1,131$	273
- $v = -0,848$	274
- $v = -0,790$	275
- $v = -0,565$	276
- $v = -0,450$	277
- $v = -0,283$	278
- $v = -0,110$	279
- $v = 0,230$	280
- $v = 0,570$	281
- $v = 0,910$	282
- $v = 1,083$	283
- $v = 1,250$	284
- $v = 1,365$	285
- $v = 1,590$	286
- $v = 1,648$	287
- $v = 1,931$	288

• Sezione 50x50	289
- $v = -1,131$	289
- $v = -0,848$	290
- $v = -0,790$	291
- $v = -0,565$	292
- $v = -0,450$	293
- $v = -0,282$	294
- $v = -0,110$	295
- $v = 0,230$	296
- $v = 0,570$	297
- $v = 0,910$	298
- $v = 1,083$	299
- $v = 1,250$	300
- $v = 1,365$	301
- $v = 1,590$	302
- $v = 1,648$	303
- $v = 1,930$	304

• Sezione 50x60	305
- $v = -1,130$	305
- $v = -0,848$	306
- $v = -0,790$	307
- $v = -0,565$	308
- $v = -0,450$	309
- $v = -0,282$	310
- $v = -0,110$	311
- $v = 0,230$	312
- $v = 0,570$	313
- $v = 0,910$	314
- $v = 1,083$	315
- $v = 1,250$	316
- $v = 1,365$	317
- $v = 1,590$	318
- $v = 1,648$	319
- $v = 1,931$	320

• Sezione 50x70	321
- $v = -1,130$	321
- $v = -0,848$	322
- $v = -0,790$	323
- $v = -0,565$	324
- $v = -0,450$	325
- $v = -0,283$	326
- $v = -0,110$	327
- $v = 0,230$	328
- $v = 0,570$	329
- $v = 0,910$	330
- $v = 1,083$	331
- $v = 1,250$	332
- $v = 1,365$	333
- $v = 1,590$	334
- $v = 1,648$	335
- $v = 1,931$	336

• Sezione 50x80	337
- $v = -1,131$	337
- $v = -0,848$	338
- $v = -0,790$	339
- $v = -0,565$	340
- $v = -0,450$	341
- $v = -0,283$	342
- $v = -0,110$	343
- $v = 0,230$	344
- $v = 0,570$	345
- $v = 0,910$	346
- $v = 1,083$	347
- $v = 1,250$	348
- $v = 1,365$	349
- $v = 1,590$	350
- $v = 1,648$	351
- $v = 1,931$	352

• Sezione 50x90	353
- $v = -1,131$	353
- $v = -0,848$	354
- $v = -0,790$	355
- $v = -0,565$	356
- $v = -0,450$	357
- $v = -0,283$	358
- $v = -0,110$	359
- $v = 0,230$	360
- $v = 0,570$	361
- $v = 0,910$	362
- $v = 1,083$	363
- $v = 1,250$	364
- $v = 1,365$	365
- $v = 1,590$	366
- $v = 1,648$	367
- $v = 1,931$	368

• Sezione 50x100	369
- $v = -1,131$	369
- $v = -0,848$	370
- $v = -0,790$	371
- $v = -0,565$	372
- $v = -0,450$	373
- $v = -0,283$	374
- $v = -0,110$	375
- $v = 0,230$	376
- $v = 0,570$	377
- $v = 0,910$	378
- $v = 1,083$	379
- $v = 1,250$	380
- $v = 1,365$	381
- $v = 1,590$	382
- $v = 1,648$	383
- $v = 1,931$	384

• Sezione 50x110	385
- $v = -1,131$	385
- $v = -0,848$	386
- $v = -0,790$	387
- $v = -0,565$	388
- $v = -0,450$	389
- $v = -0,283$	390
- $v = -0,110$	391
- $v = 0,230$	392
- $v = 0,570$	393
- $v = 0,910$	394
- $v = 1,083$	395
- $v = 1,250$	396
- $v = 1,365$	397
- $v = 1,590$	398
- $v = 1,648$	399
- $v = 1,931$	400

• Sezione 50x120	401
- $v = -1,131$	401
- $v = -0,848$	402
- $v = -0,790$	403
- $v = -0,565$	404
- $v = -0,450$	405
- $v = -0,283$	406
- $v = -0,110$	407
- $v = 0,230$	408
- $v = 0,570$	409
- $v = 0,910$	410
- $v = 1,083$	411
- $v = 1,250$	412
- $v = 1,365$	413
- $v = 1,590$	414
- $v = 1,648$	415
- $v = 1,931$	416

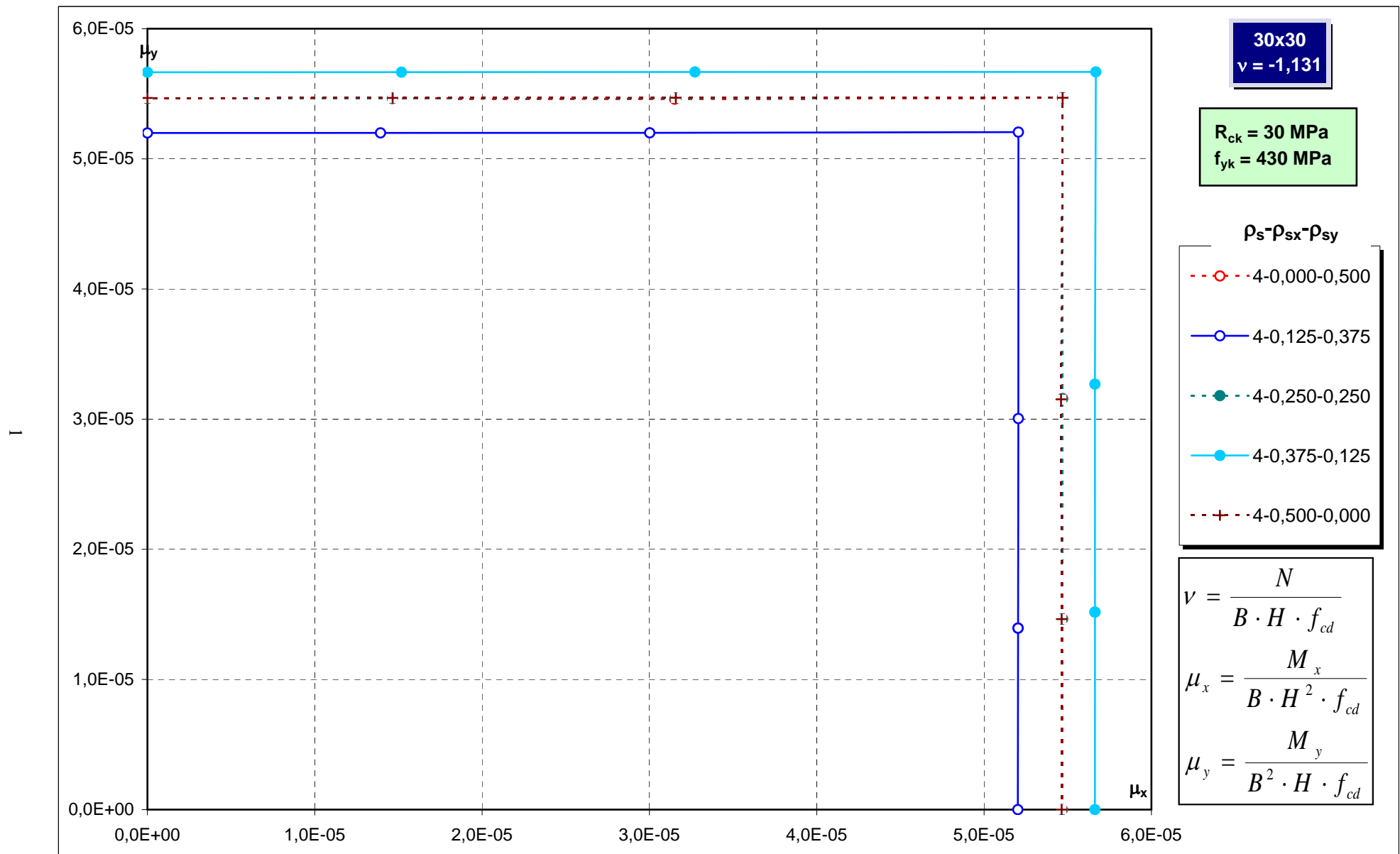
• Sezione 50x130	417
- $v = -1,131$	417
- $v = -0,848$	418
- $v = -0,790$	419
- $v = -0,565$	420
- $v = -0,450$	421
- $v = -0,283$	422
- $v = -0,110$	423
- $v = 0,230$	424
- $v = 0,570$	425
- $v = 0,910$	426
- $v = 1,083$	427
- $v = 1,250$	428
- $v = 1,365$	429
- $v = 1,590$	430
- $v = 1,648$	431
- $v = 1,931$	432

• Sezione 50x140	433
- $v = -1,131$	433
- $v = -0,848$	434
- $v = -0,790$	435
- $v = -0,565$	436
- $v = -0,450$	437
- $v = -0,283$	438
- $v = -0,110$	439
- $v = 0,230$	440
- $v = 0,570$	441
- $v = 0,910$	442
- $v = 1,083$	443
- $v = 1,250$	444
- $v = 1,365$	445
- $v = 1,590$	446
- $v = 1,648$	447
- $v = 1,931$	448

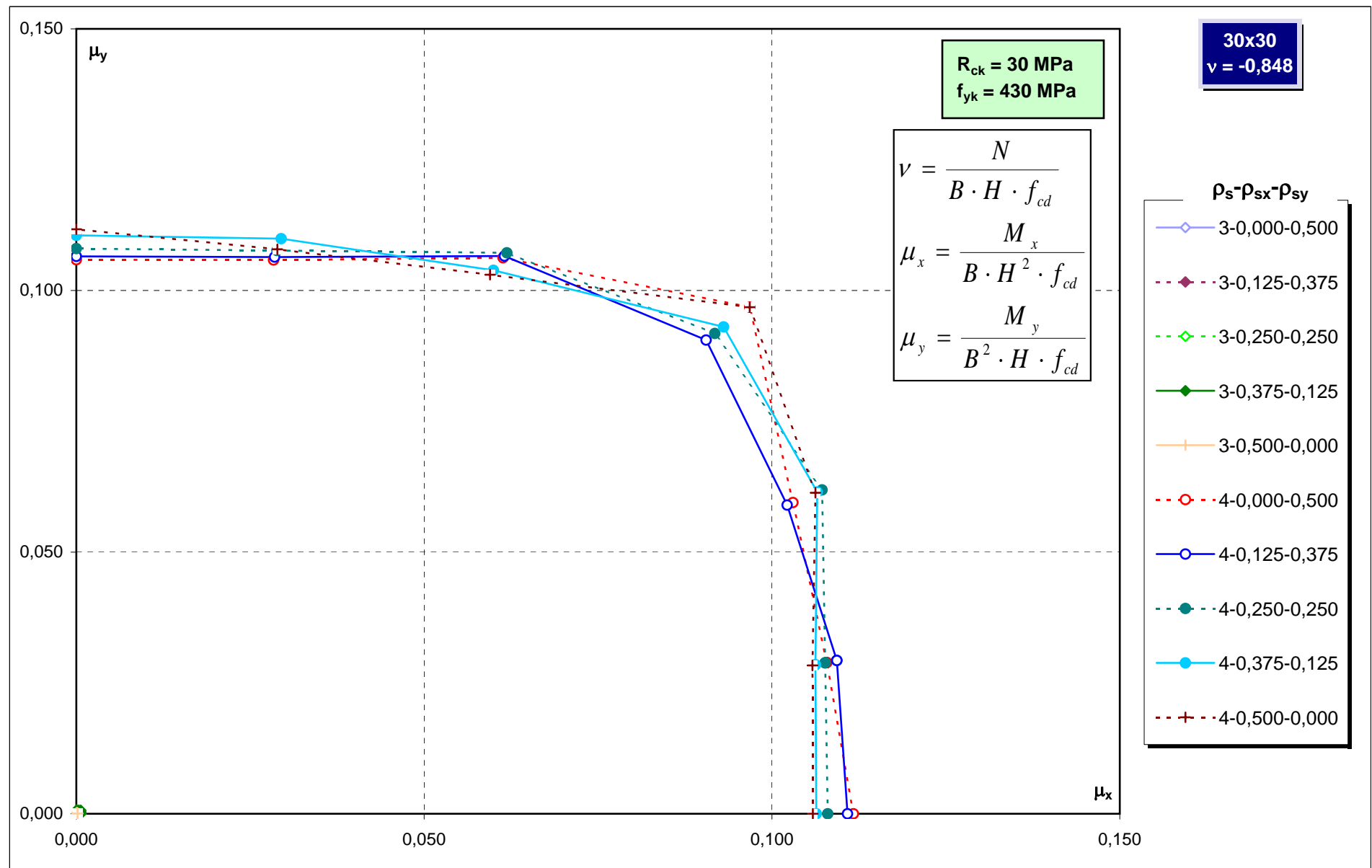
• Sezione 50x150	449
- $v = -1,131$	449
- $v = -0,848$	450
- $v = -0,790$	451
- $v = -0,565$	452
- $v = -0,450$	453
- $v = -0,283$	454
- $v = -0,110$	455
- $v = 0,230$	456
- $v = 0,570$	457
- $v = 0,910$	458
- $v = 1,083$	459
- $v = 1,250$	460
- $v = 1,365$	461
- $v = 1,590$	462
- $v = 1,648$	463
- $v = 1,931$	464

• Sezione 50x160	465
- $v = -1,131$	465
- $v = -0,848$	466
- $v = -0,790$	467
- $v = -0,565$	468
- $v = -0,450$	469
- $v = -0,283$	470
- $v = -0,110$	471
- $v = 0,230$	472
- $v = 0,570$	473
- $v = 0,910$	474
- $v = 1,083$	475
- $v = 1,250$	476
- $v = 1,365$	477
- $v = 1,590$	478
- $v = 1,648$	479
- $v = 1,931$	480

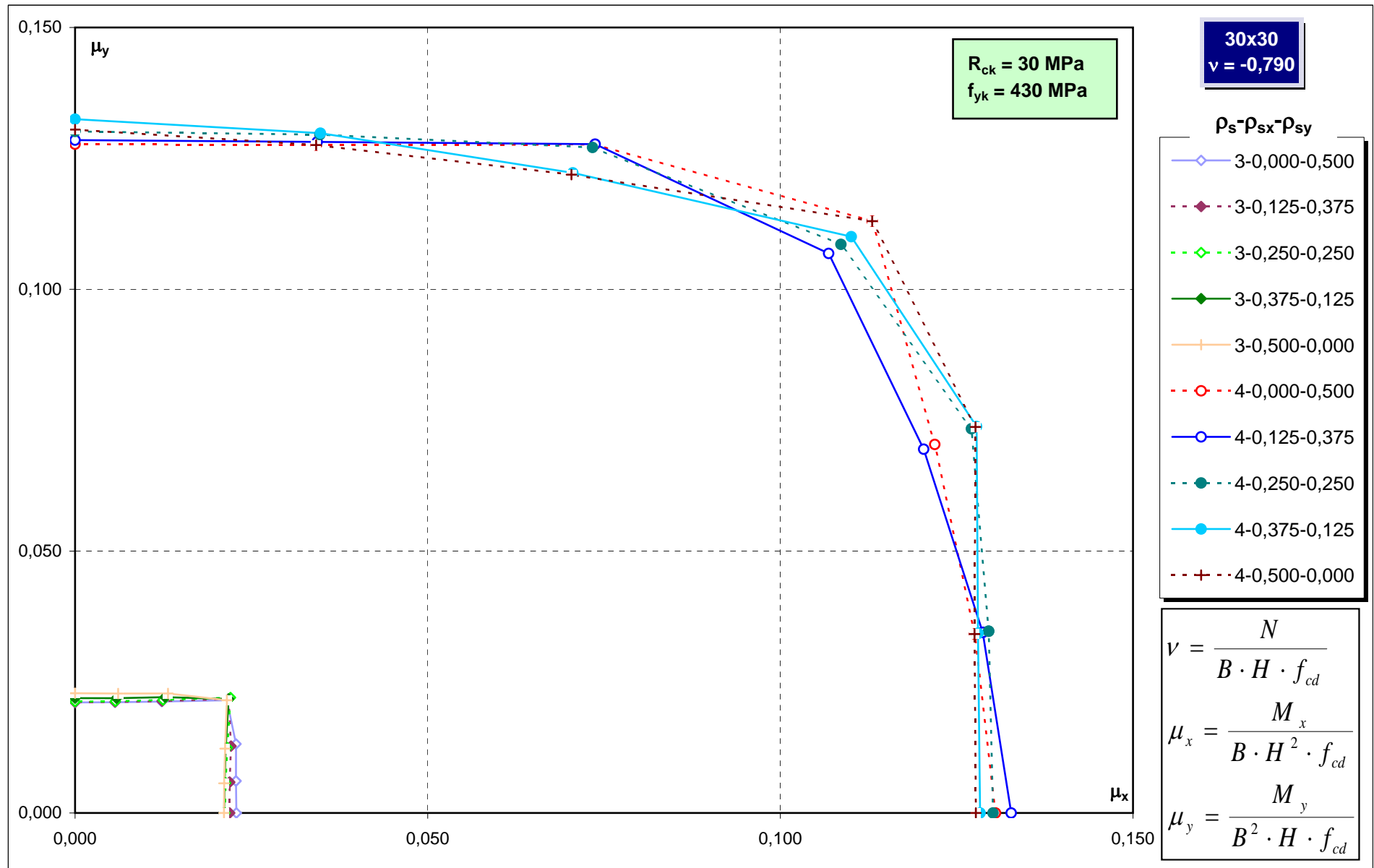
Abachi di progetto



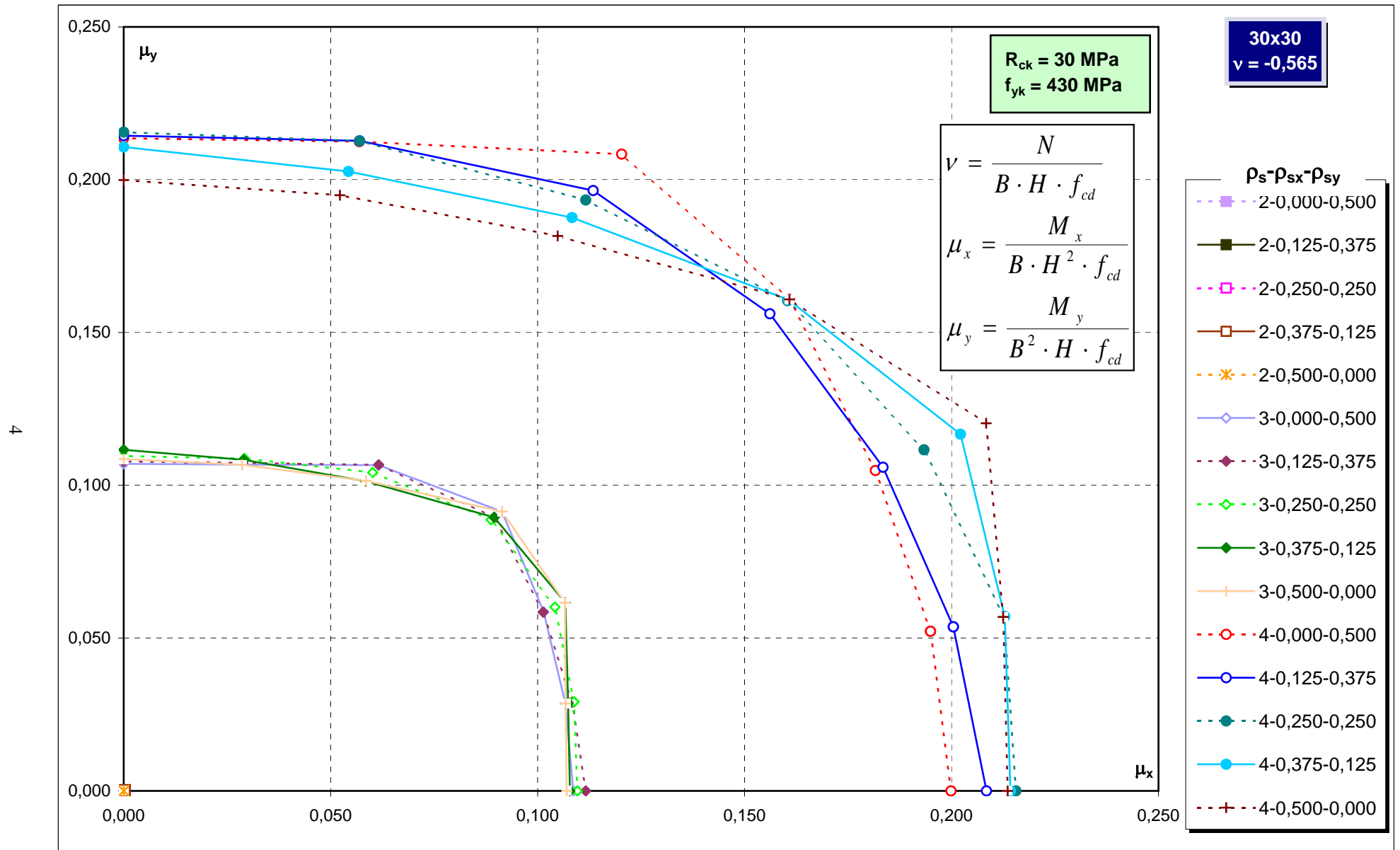
Abachi di progetto



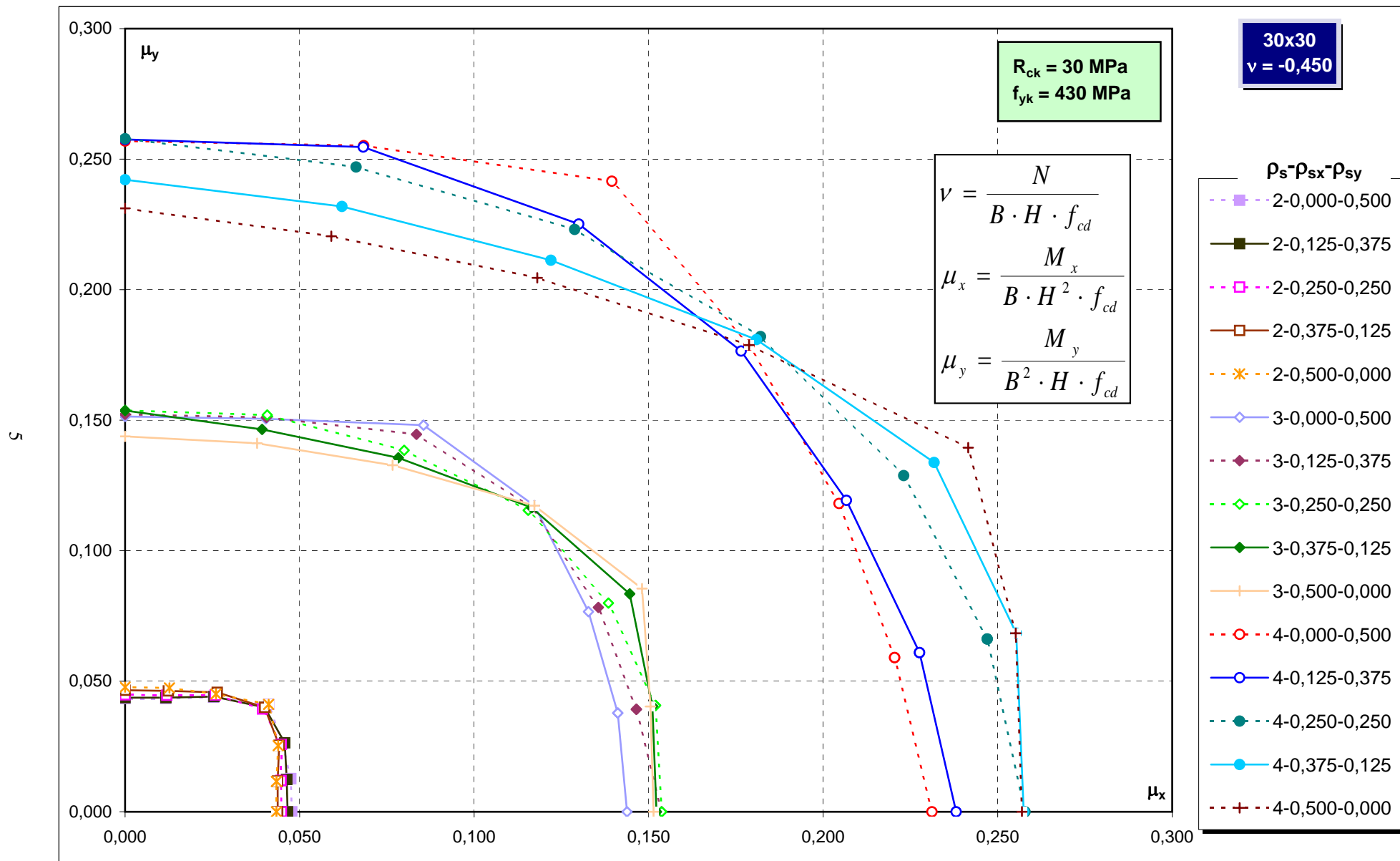
Abachi di progetto



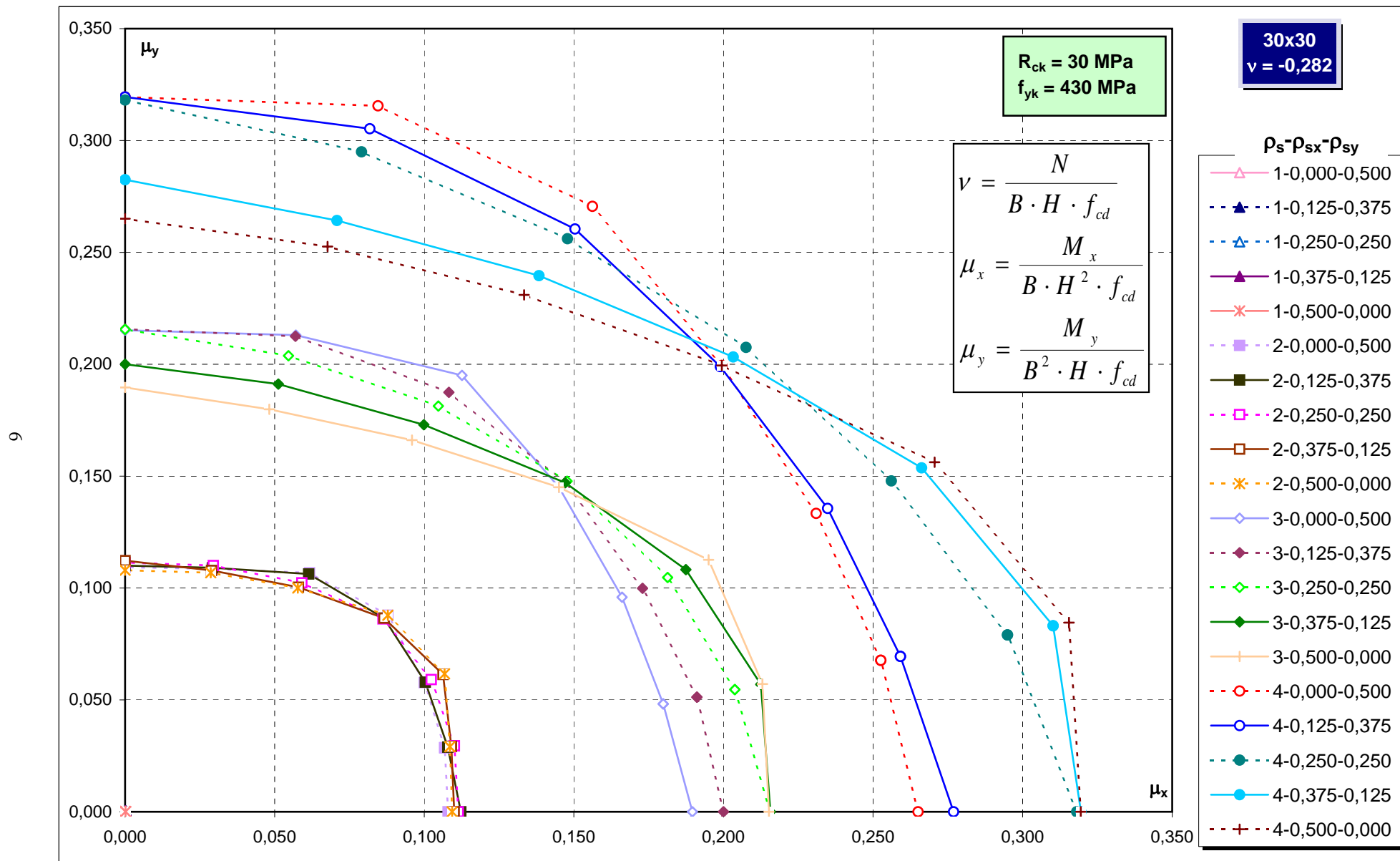
Abachi di progetto



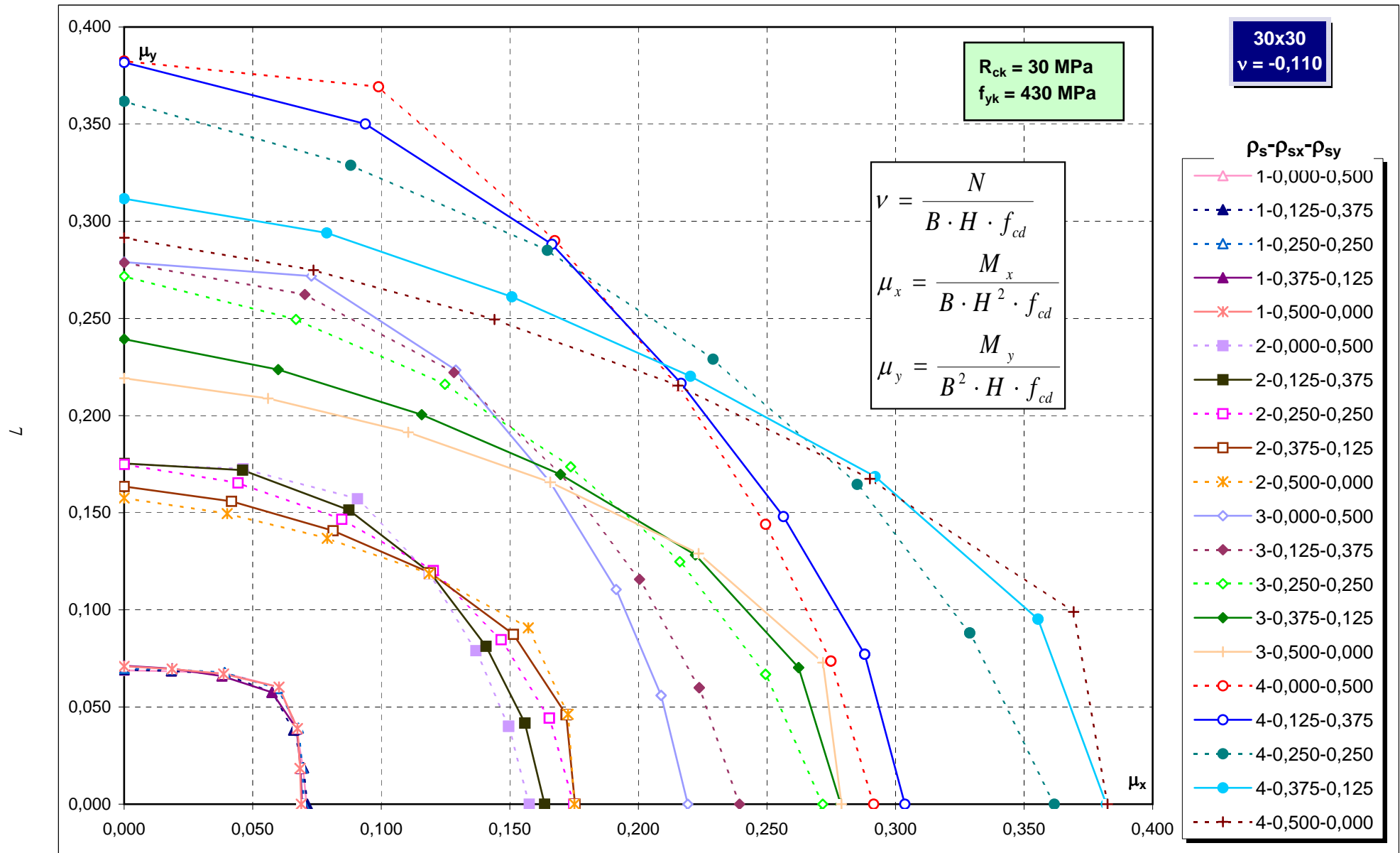
Abachi di progetto



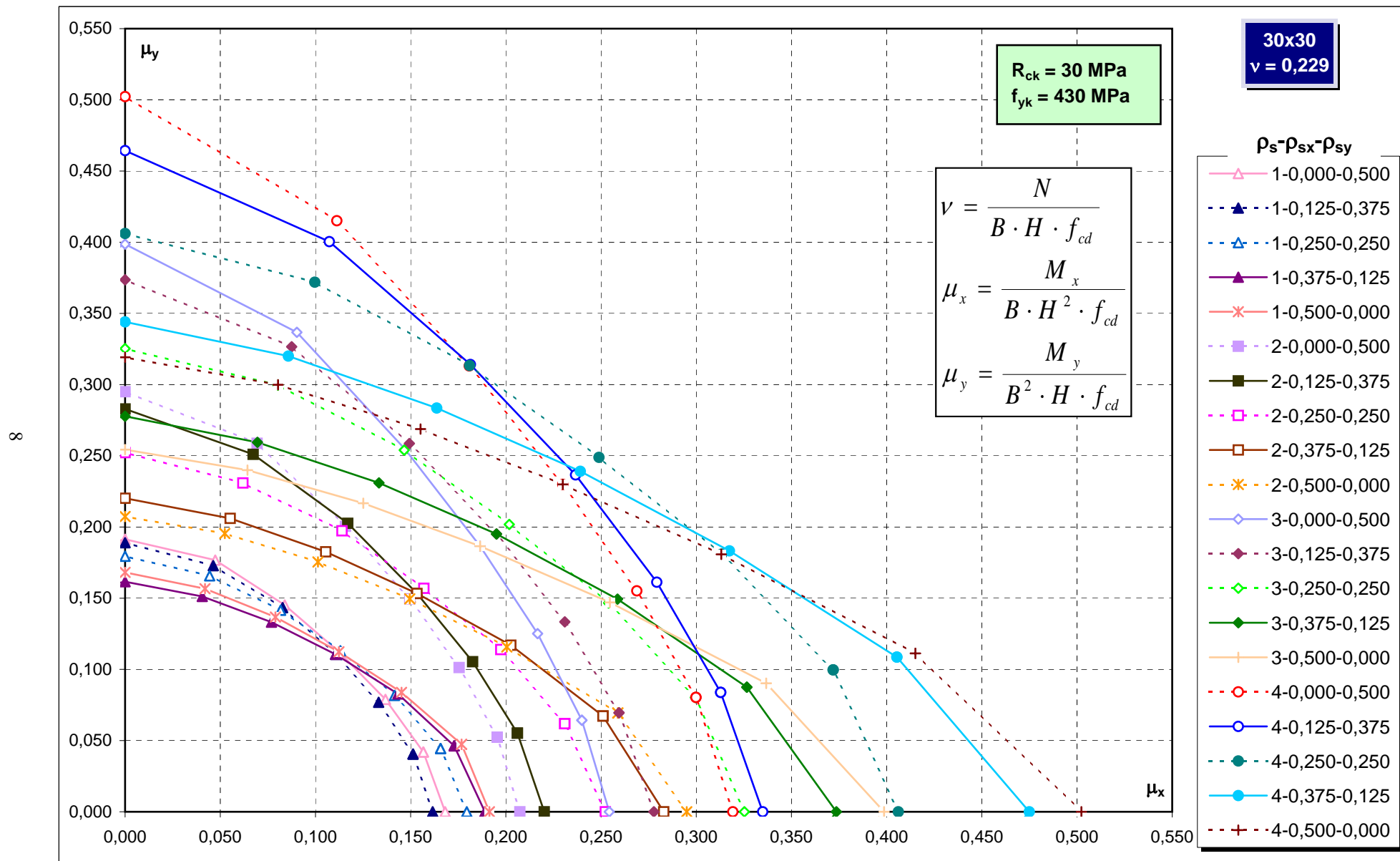
Abachi di progetto



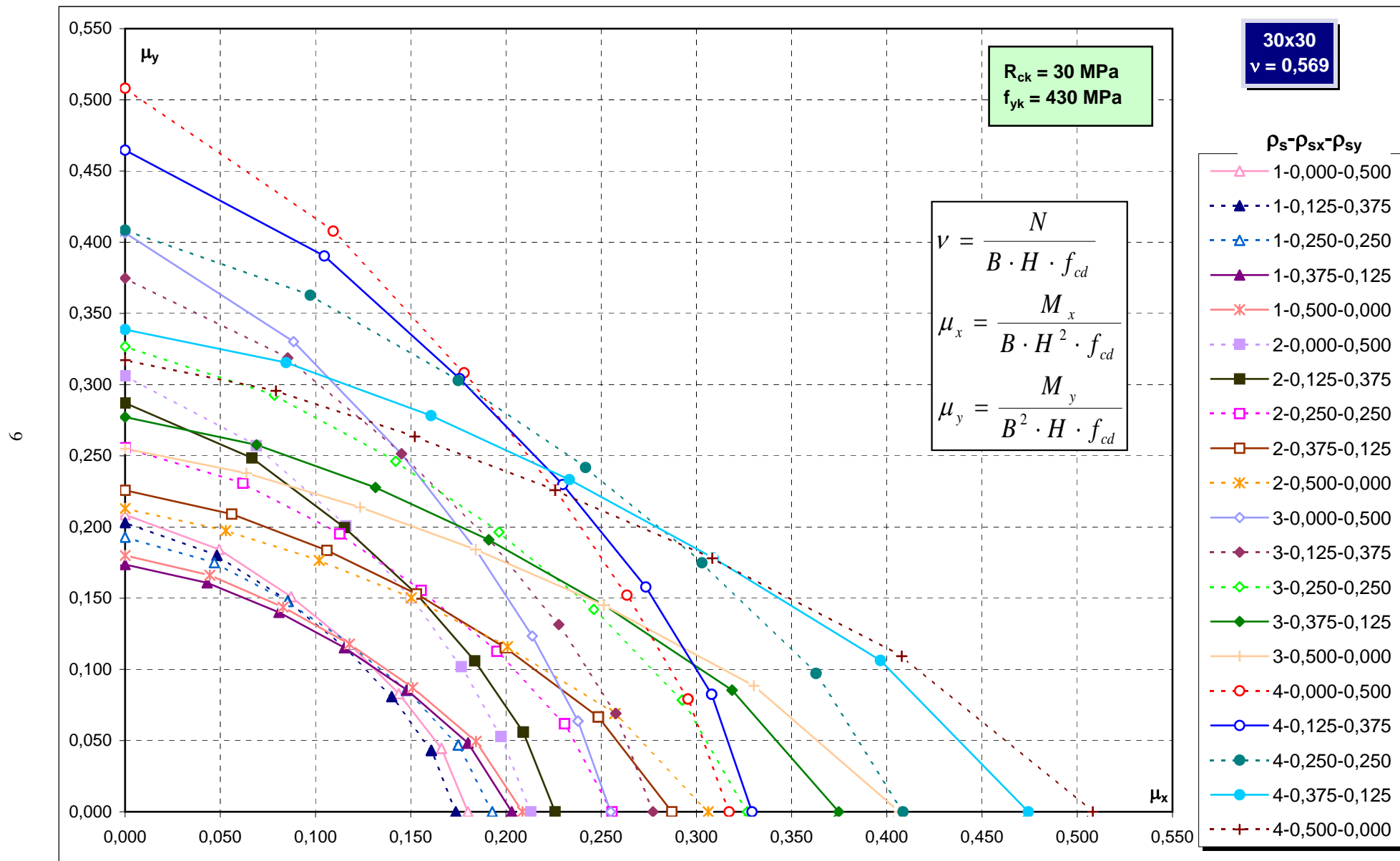
Abachi di progetto



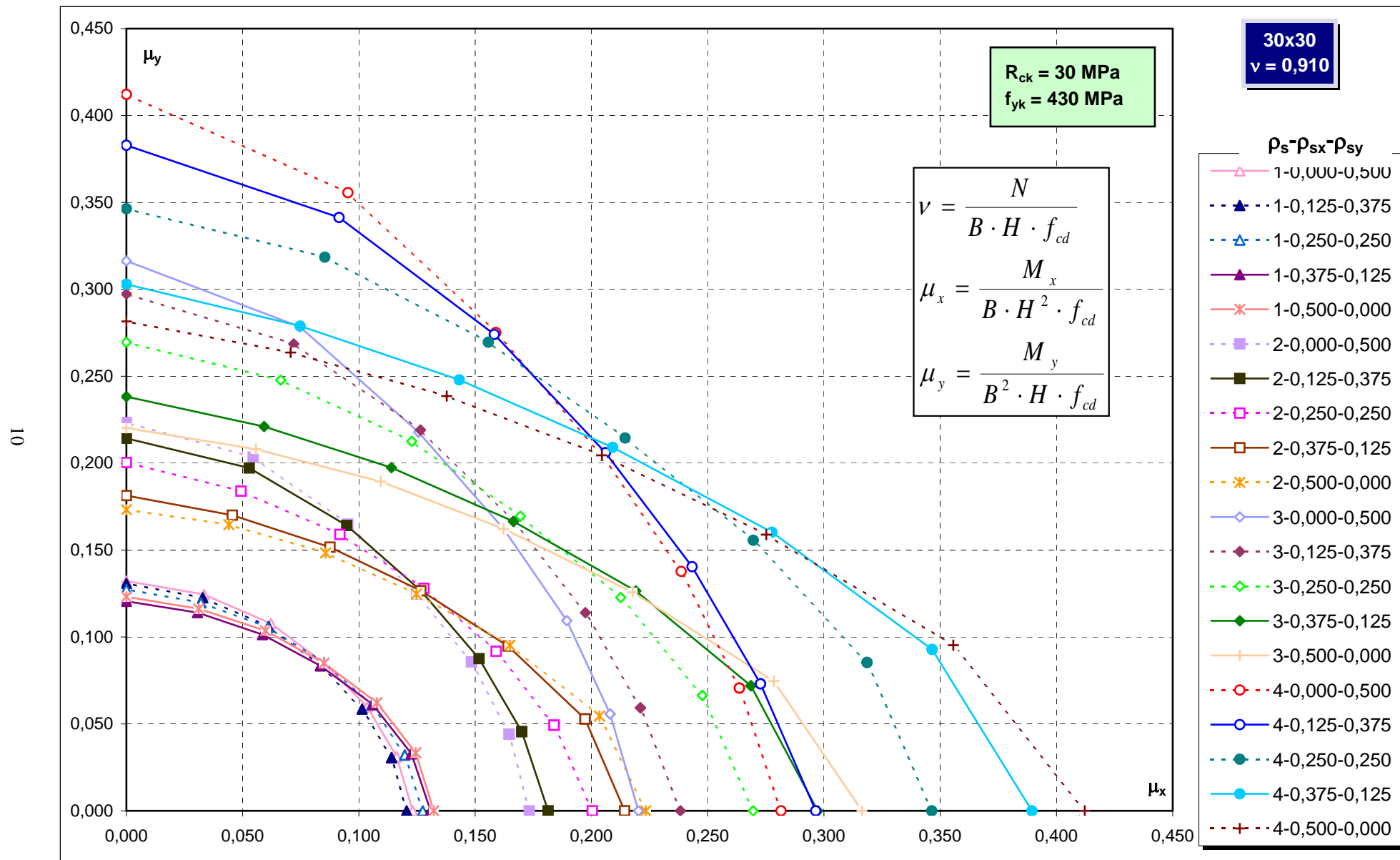
Abachi di progetto



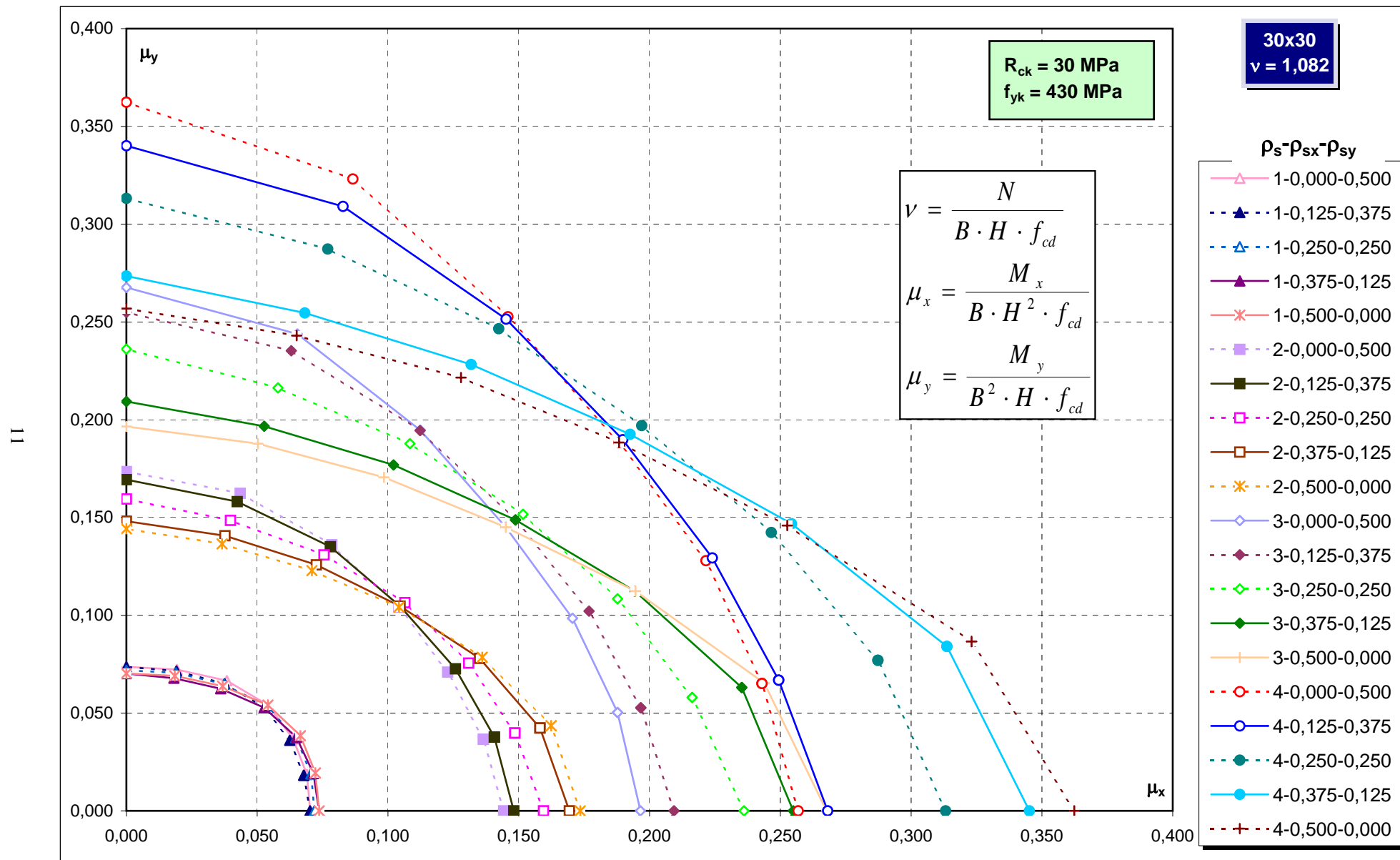
Abachi di progetto



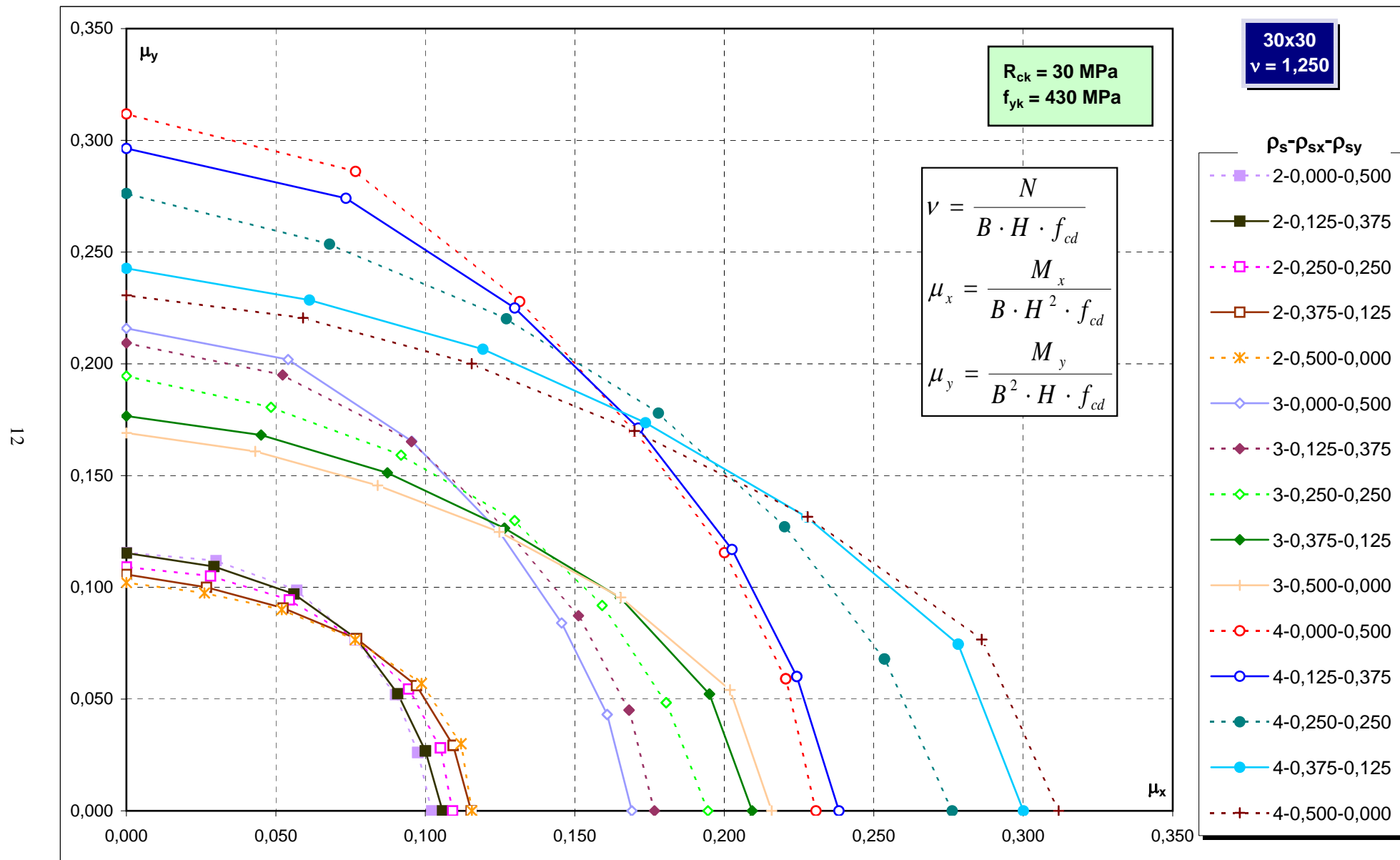
Abachi di progetto



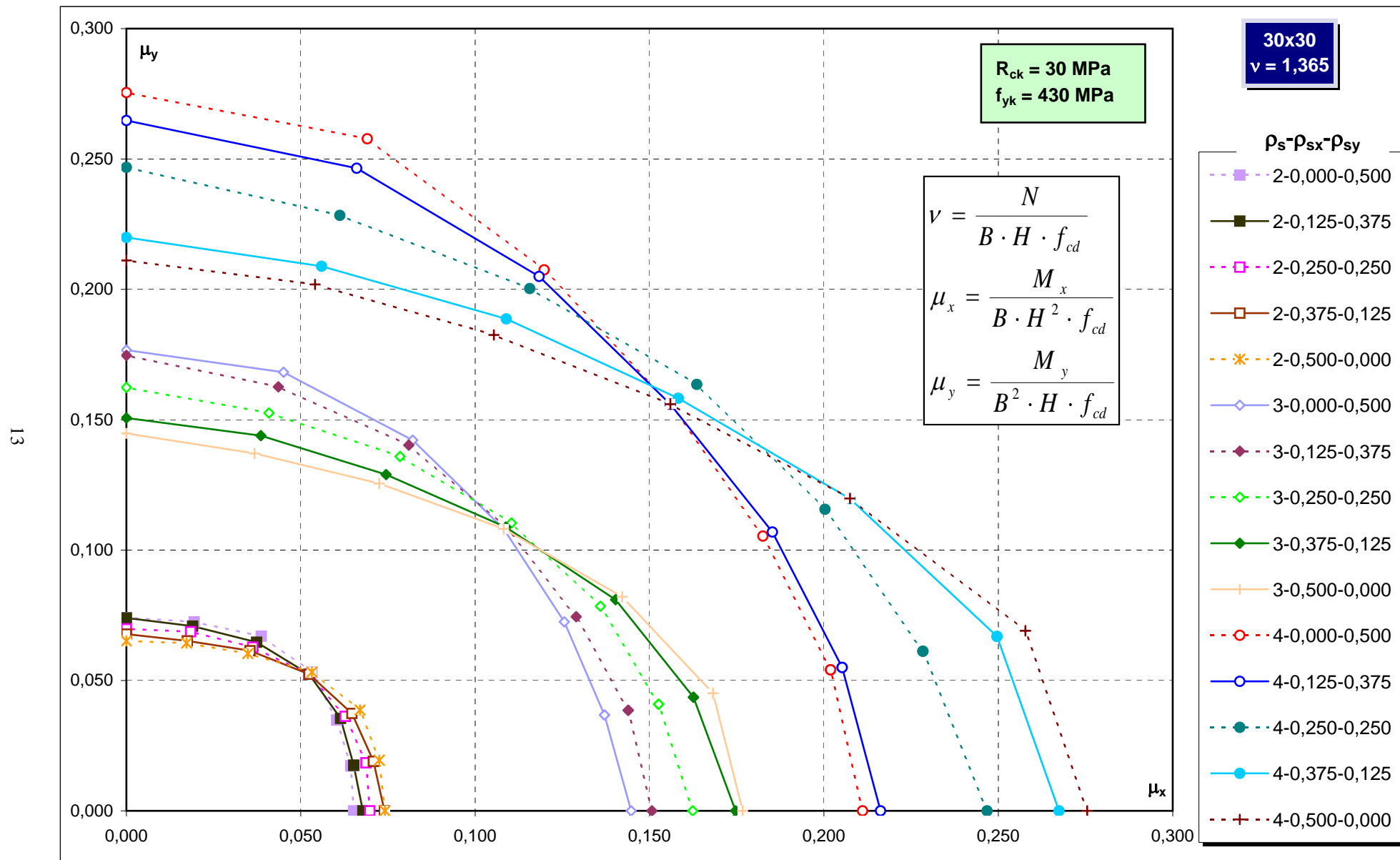
Abachi di progetto



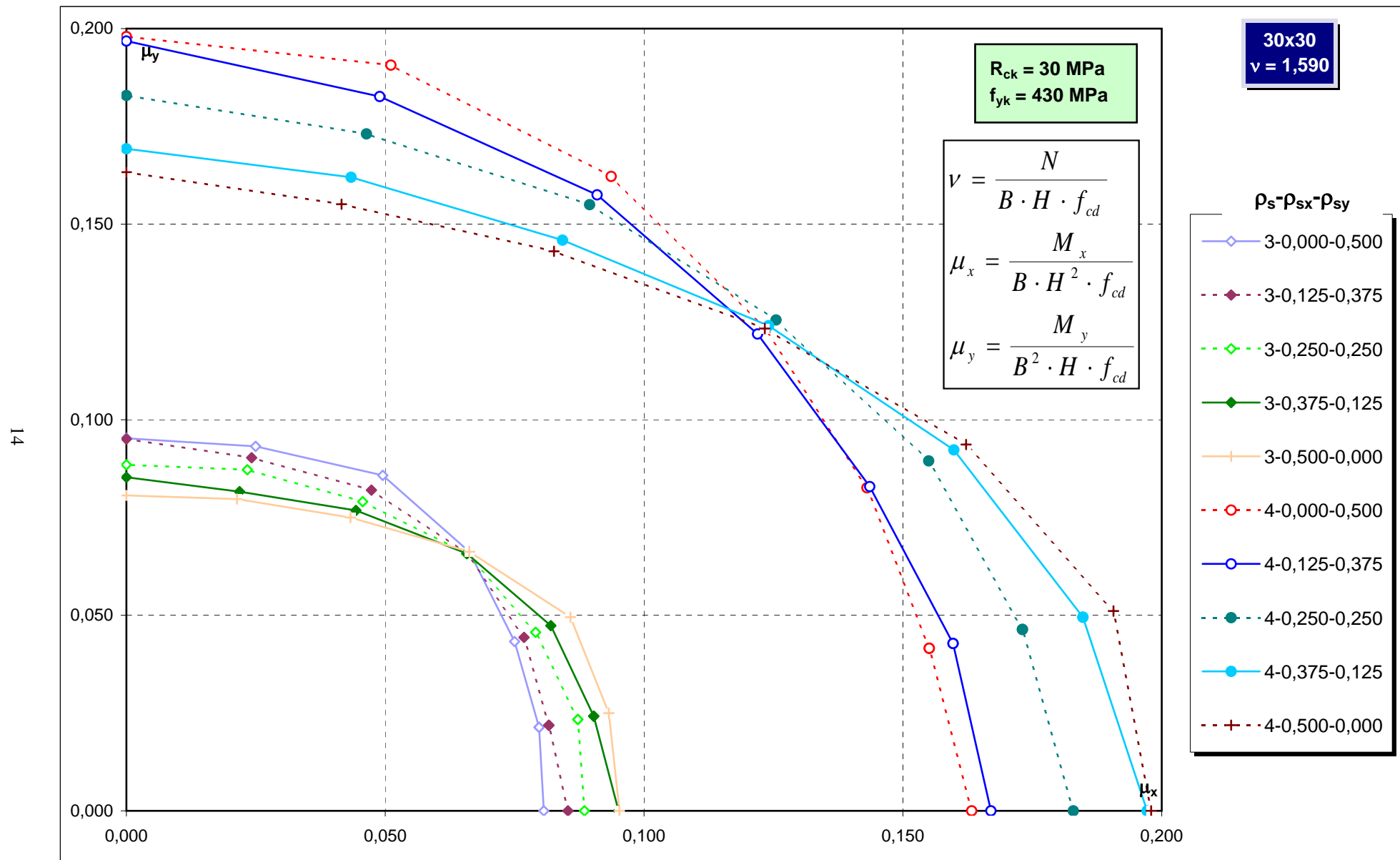
Abachi di progetto



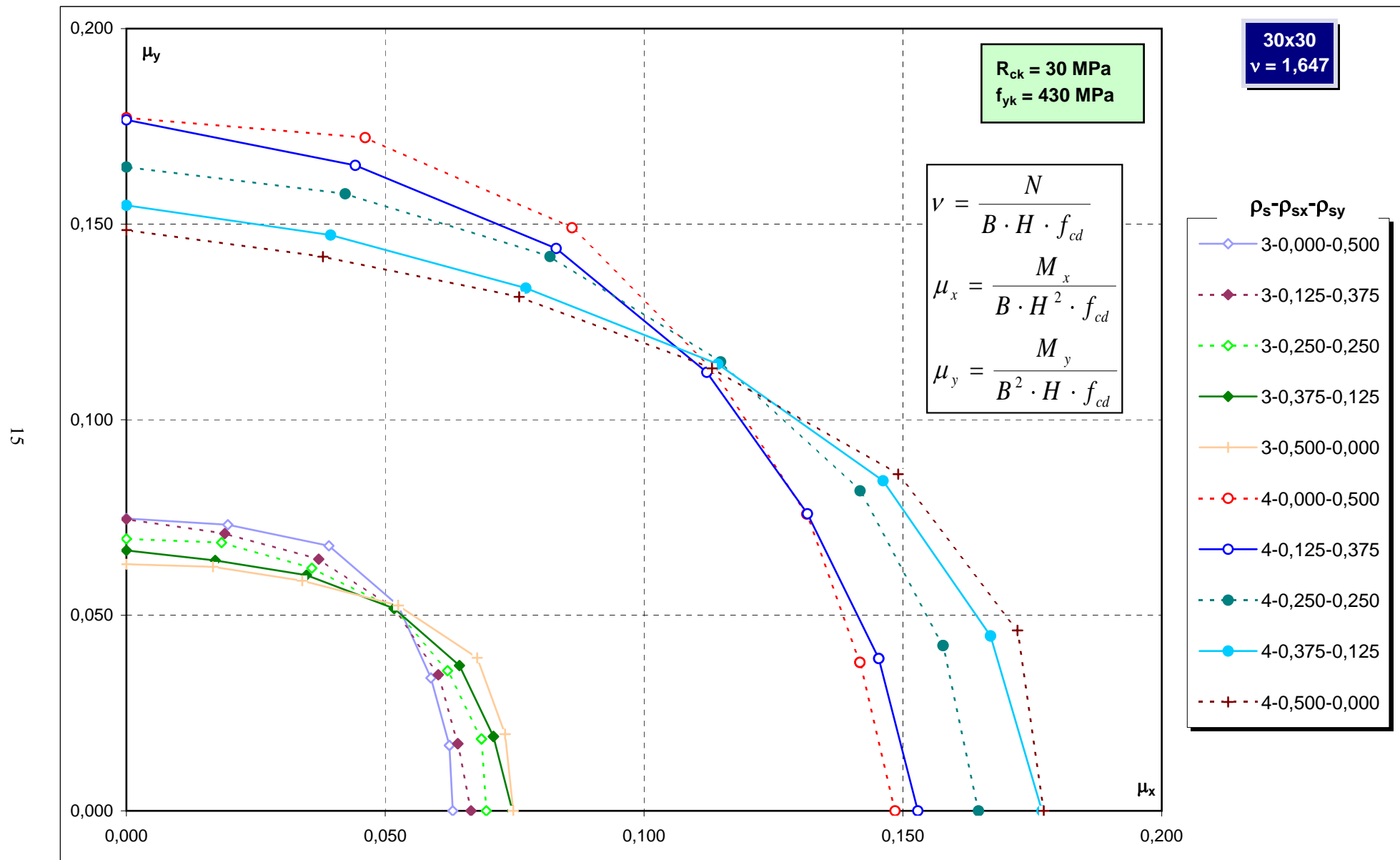
Abachi di progetto



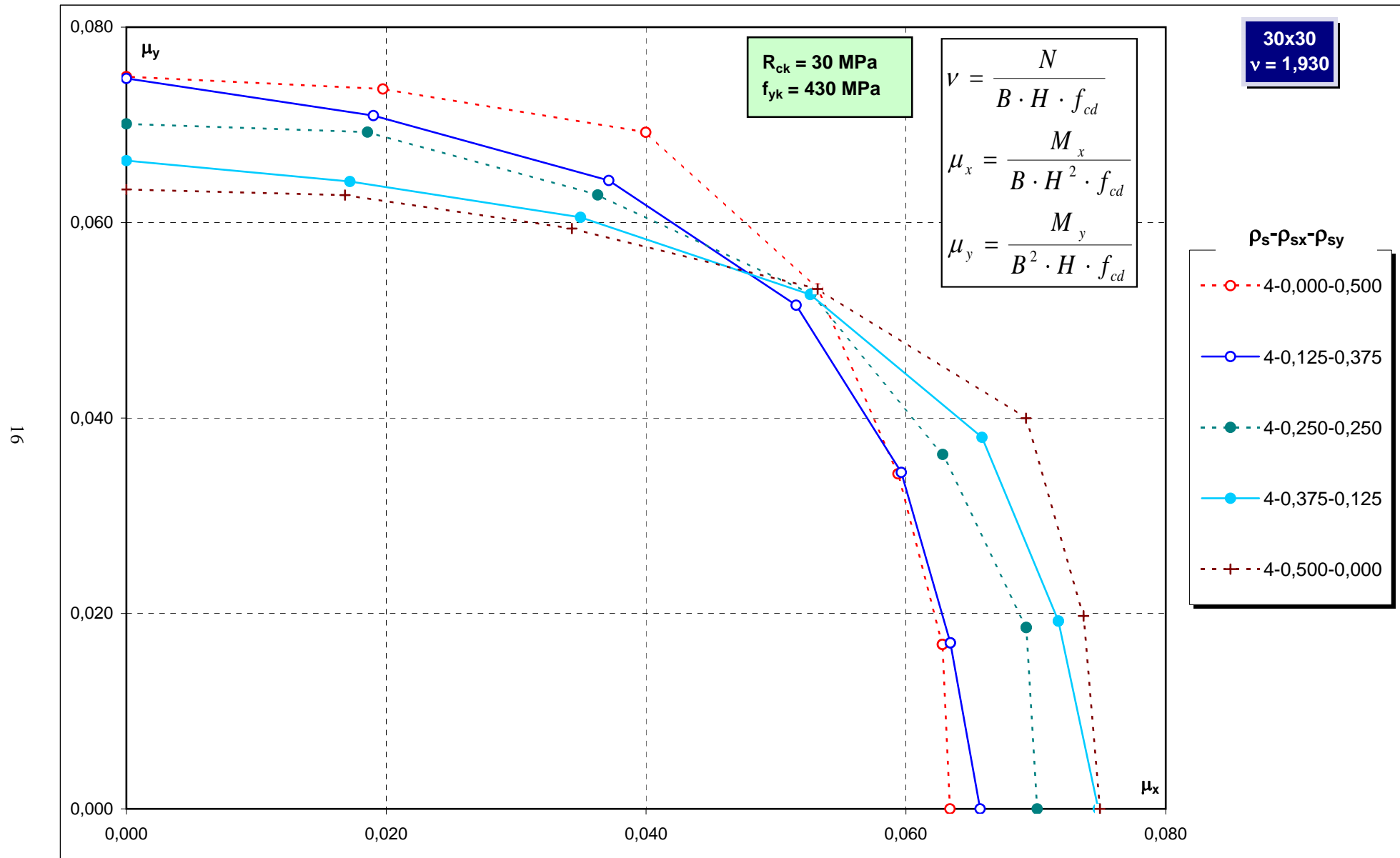
Abachi di progetto



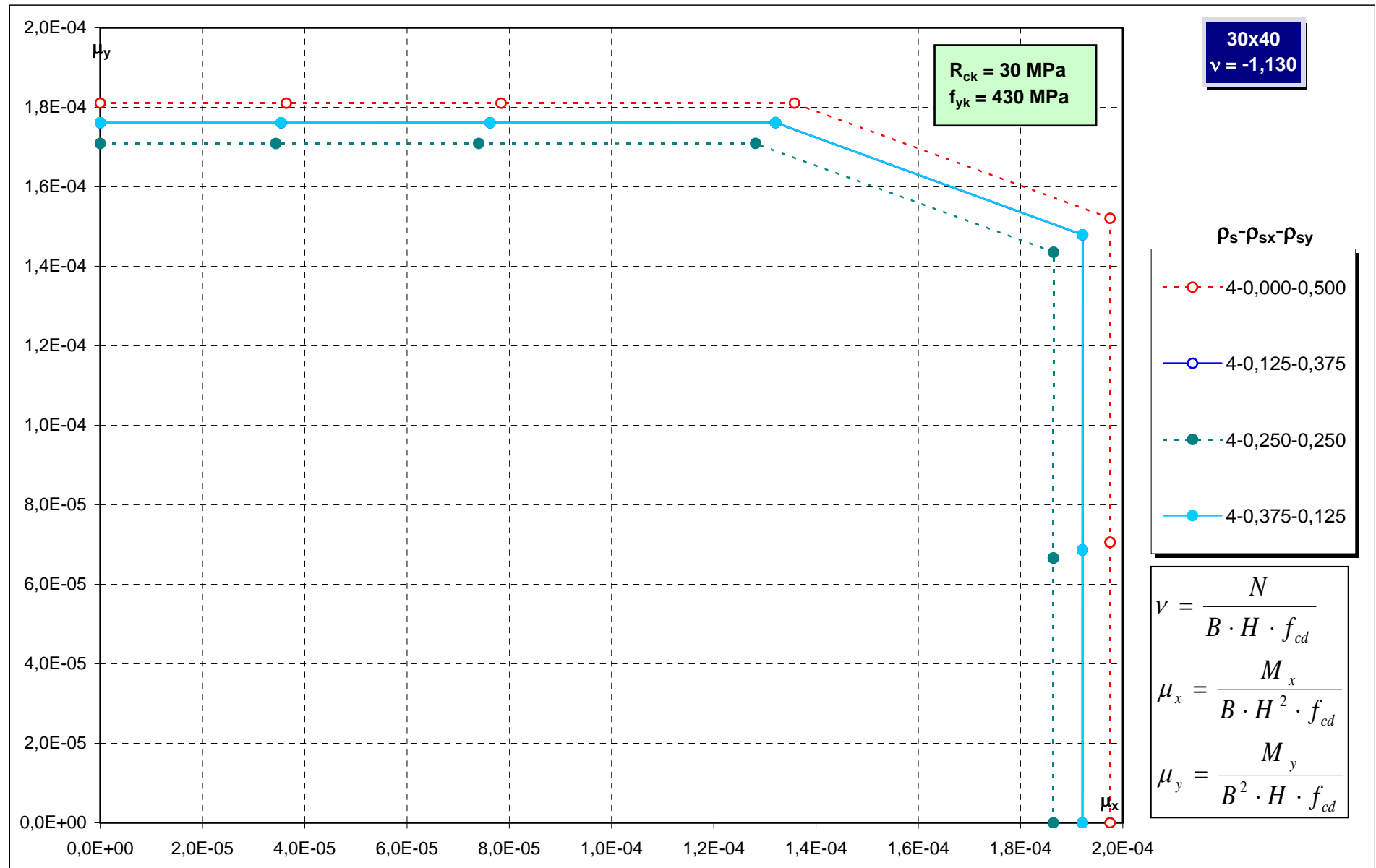
Abachi di progetto



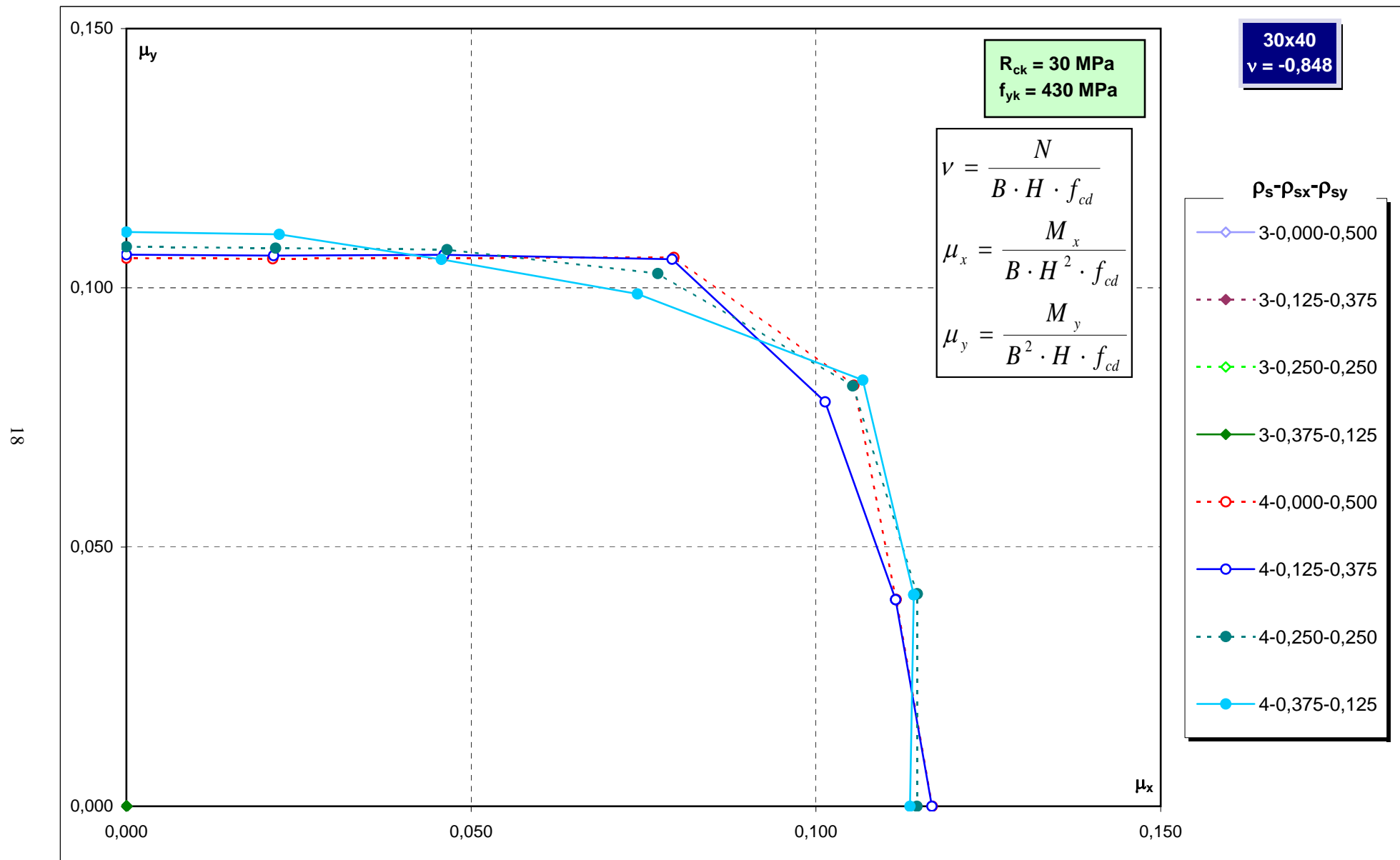
Abachi di progetto



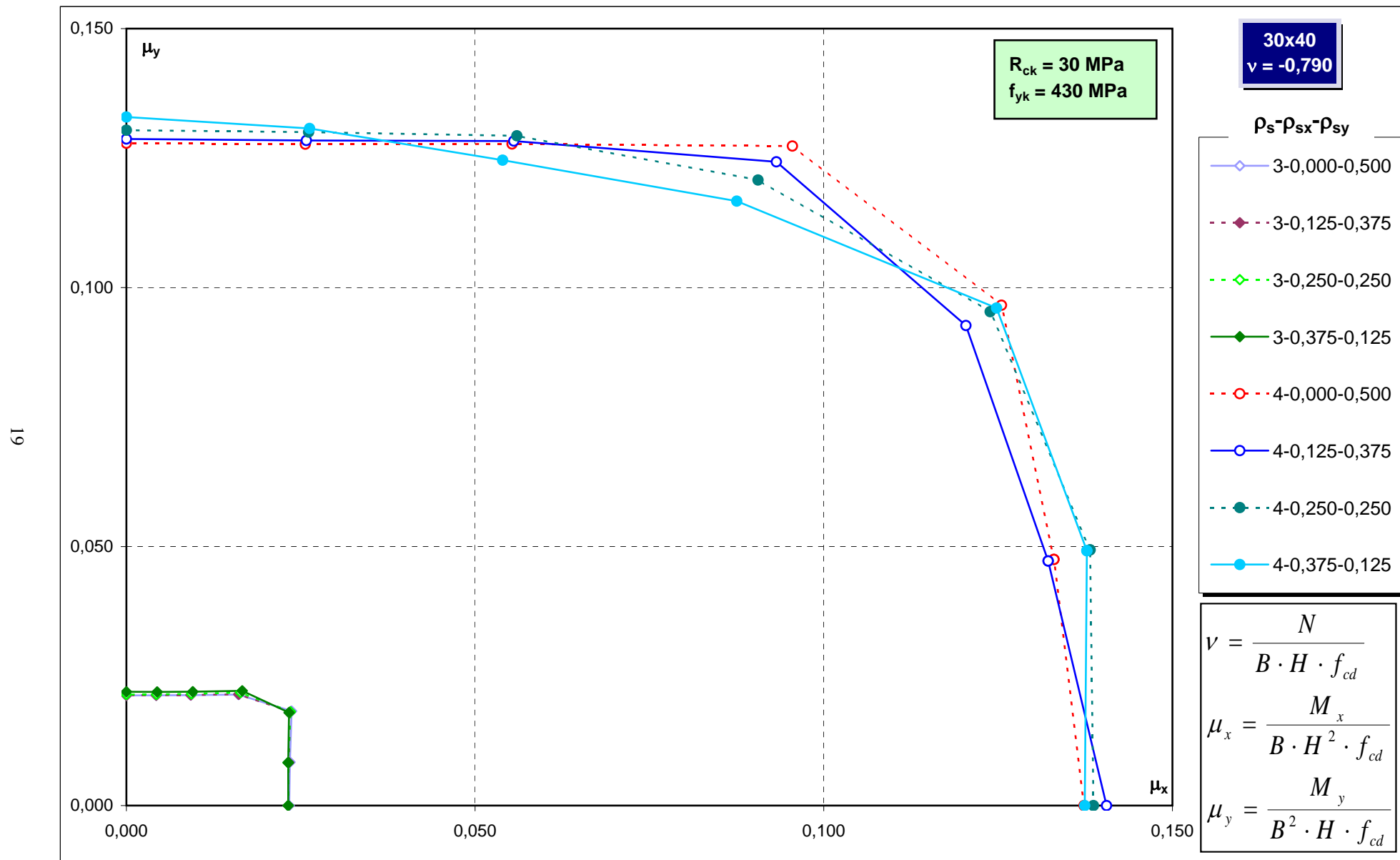
Abachi di progetto



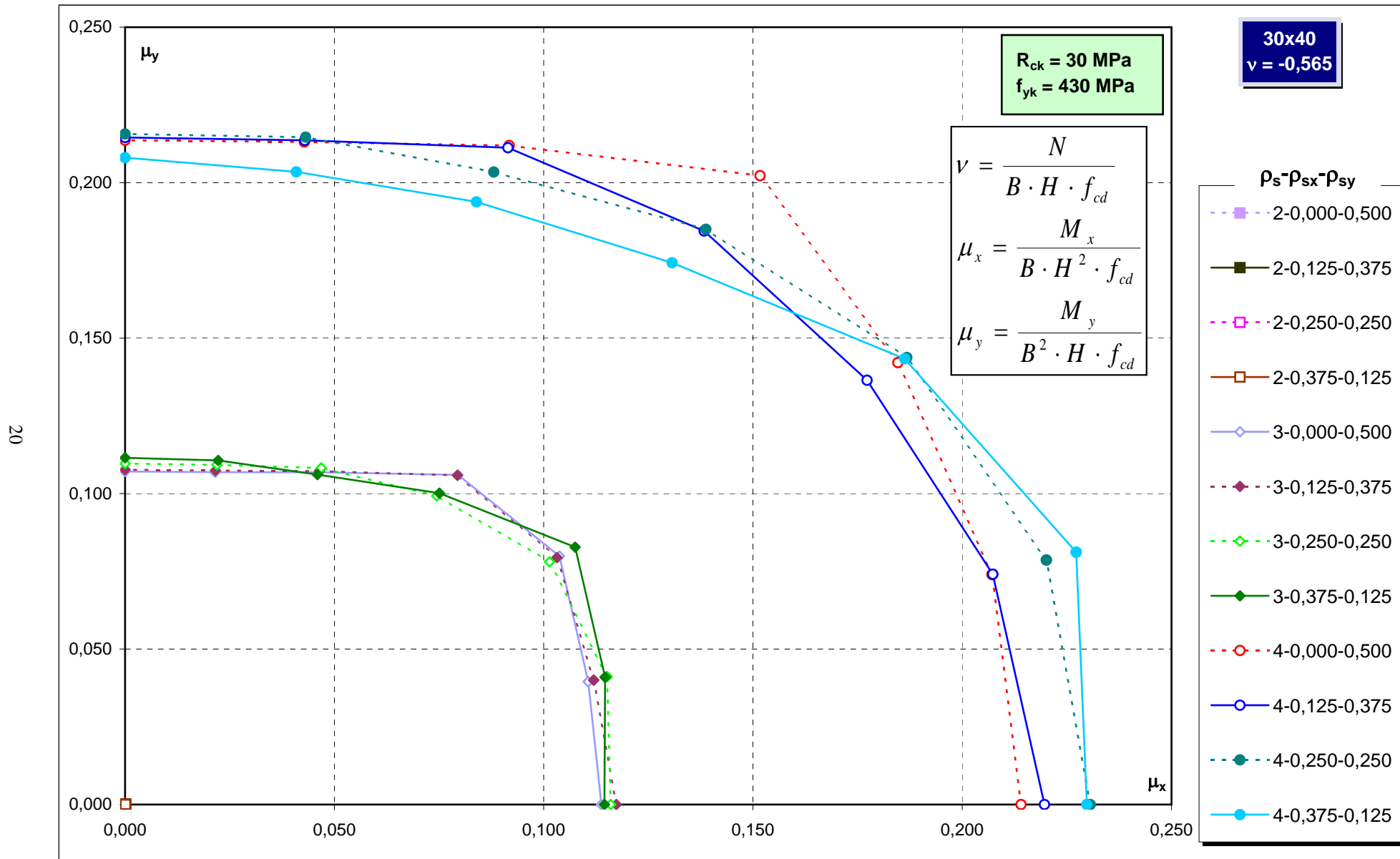
Abachi di progetto



Abachi di progetto

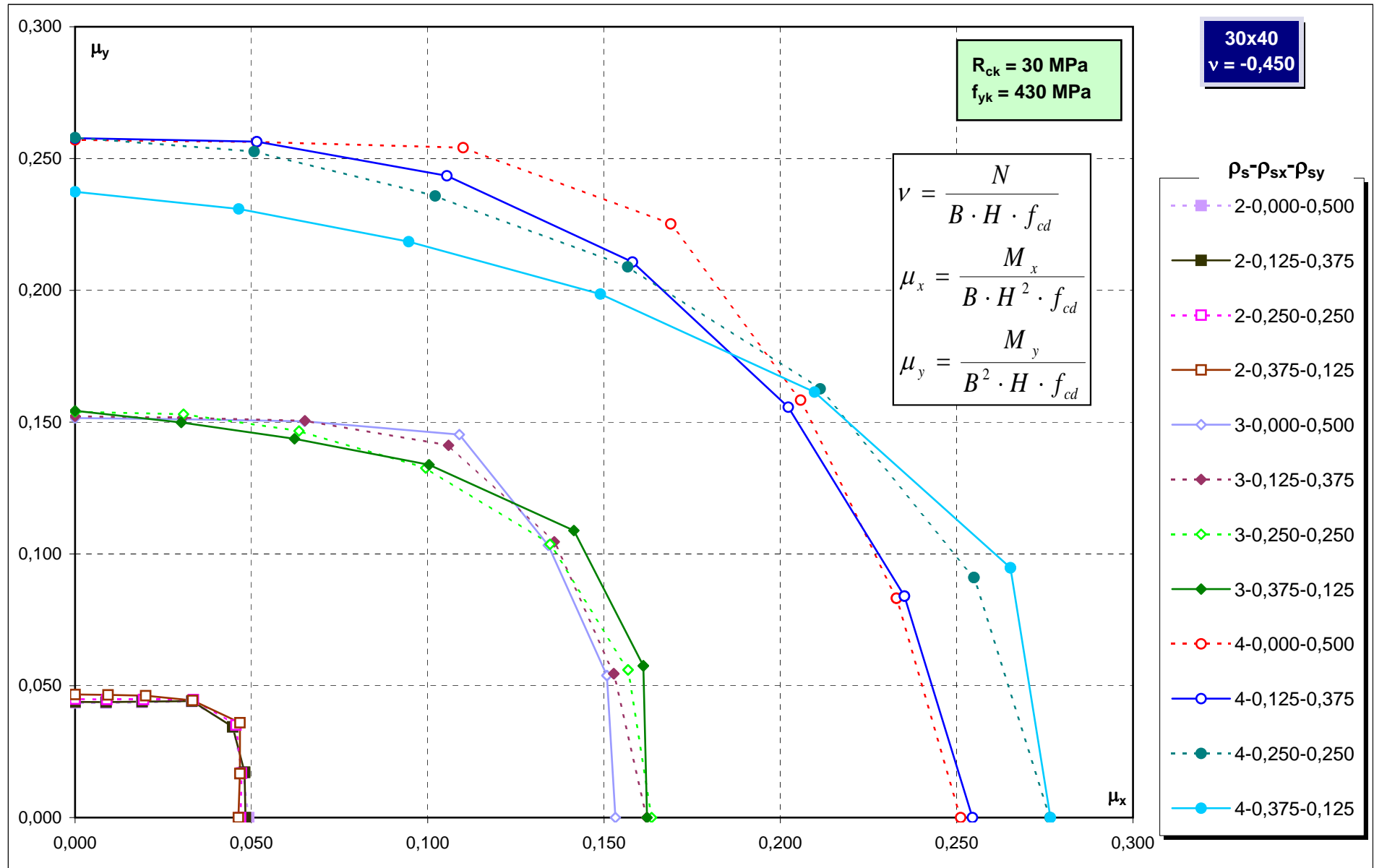


Abachi di progetto

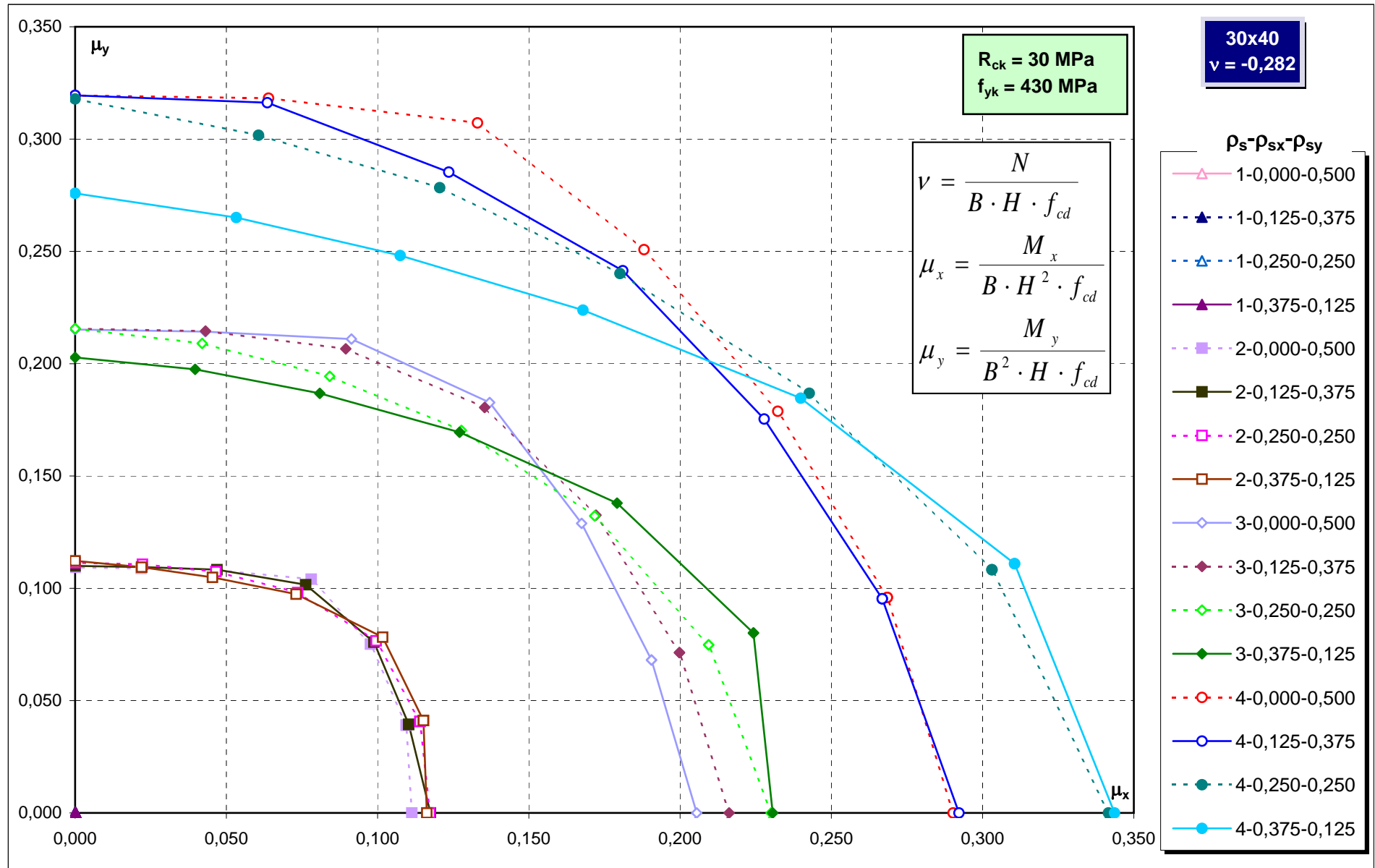


Abachi di progetto

21

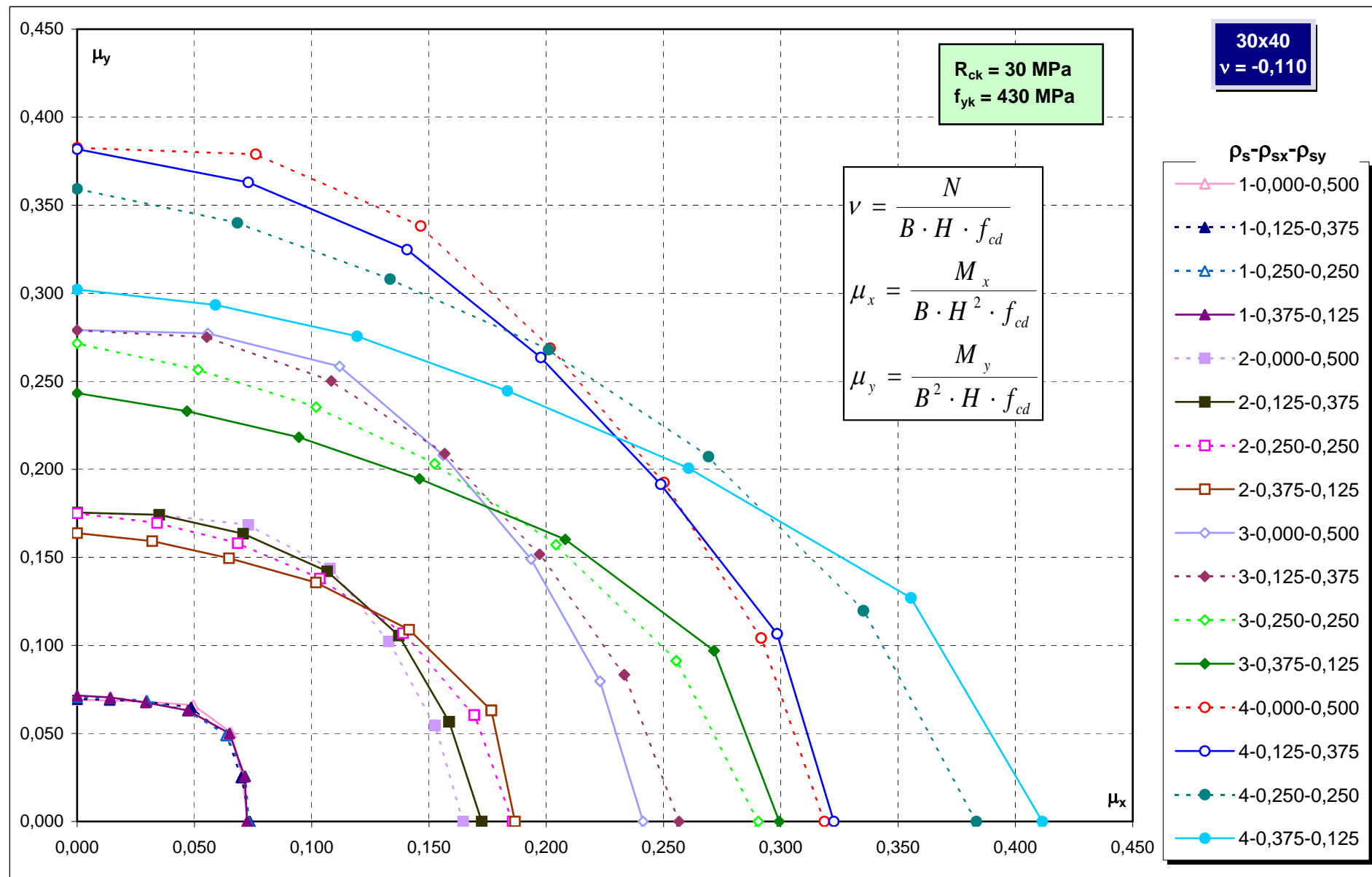


Abachi di progetto



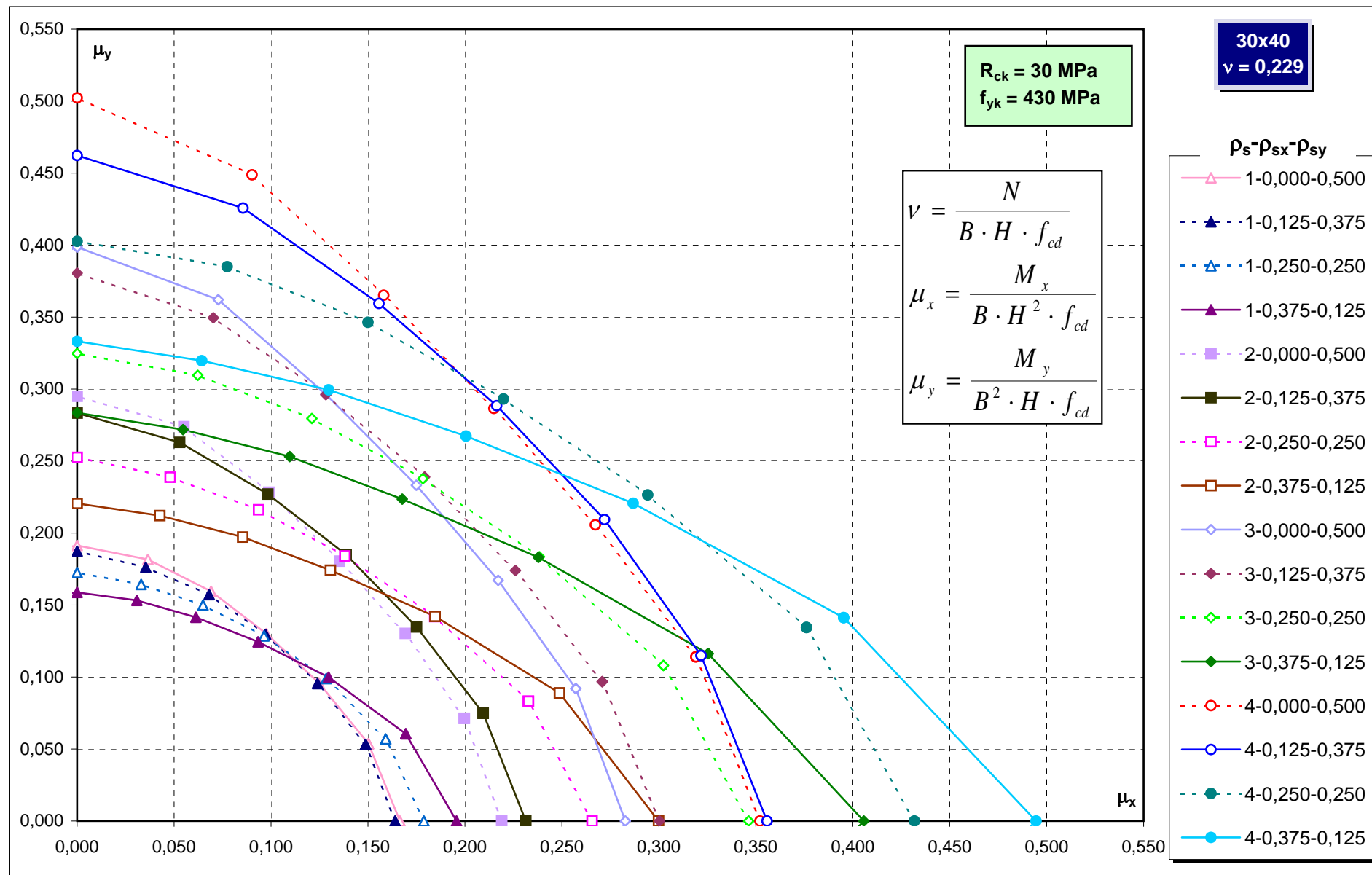
Abachi di progetto

23

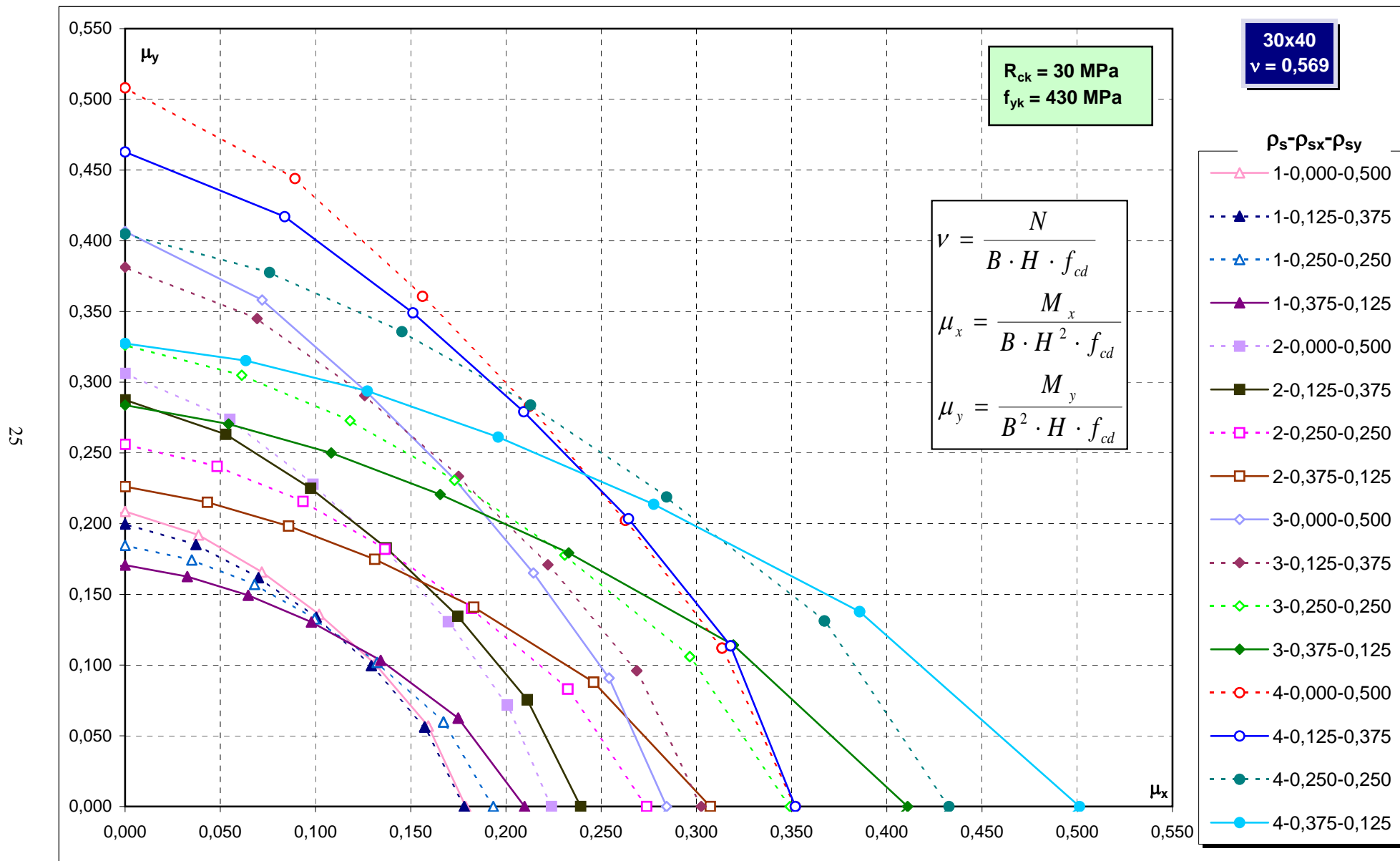


Abachi di progetto

24

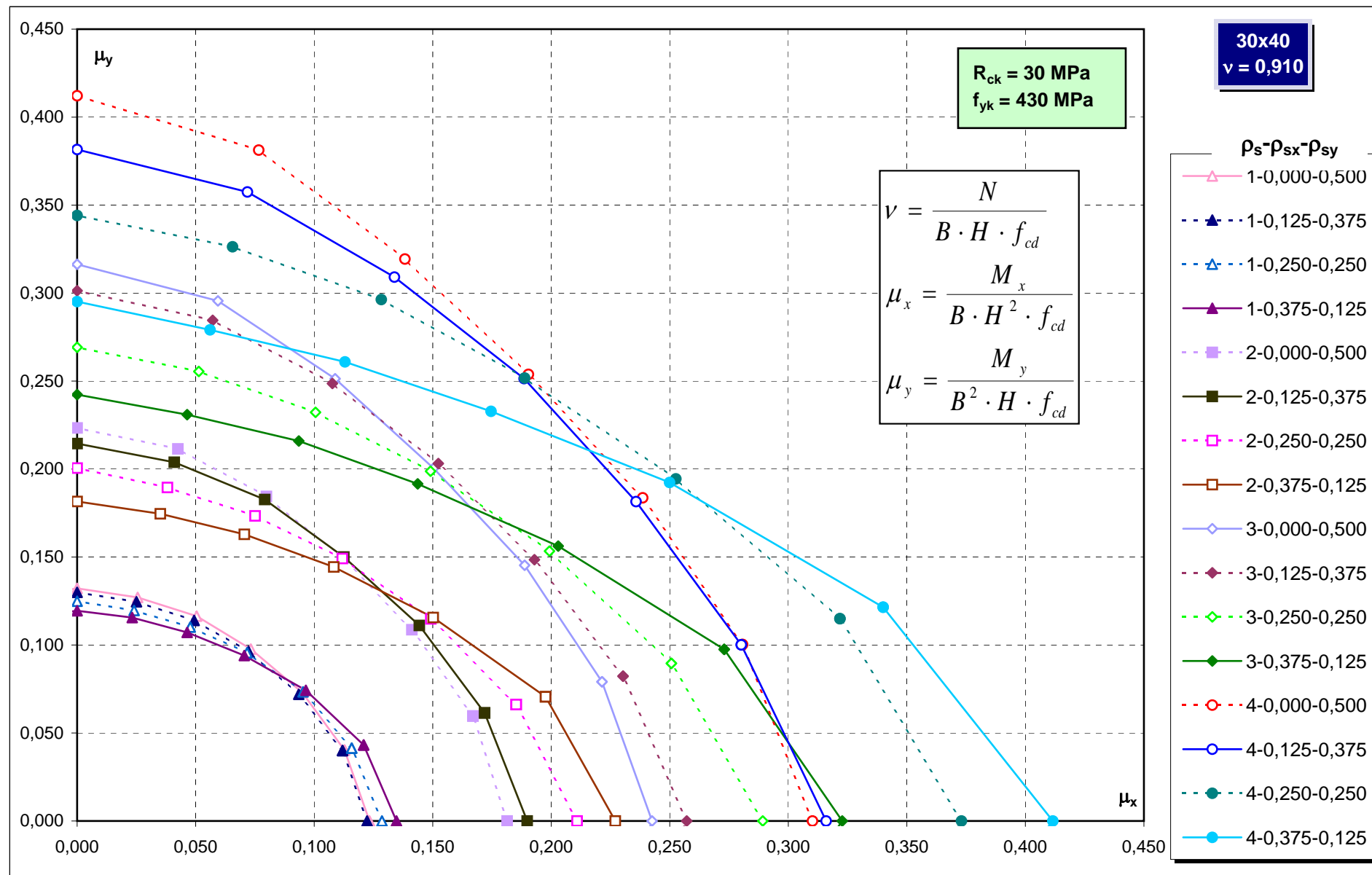


Abachi di progetto

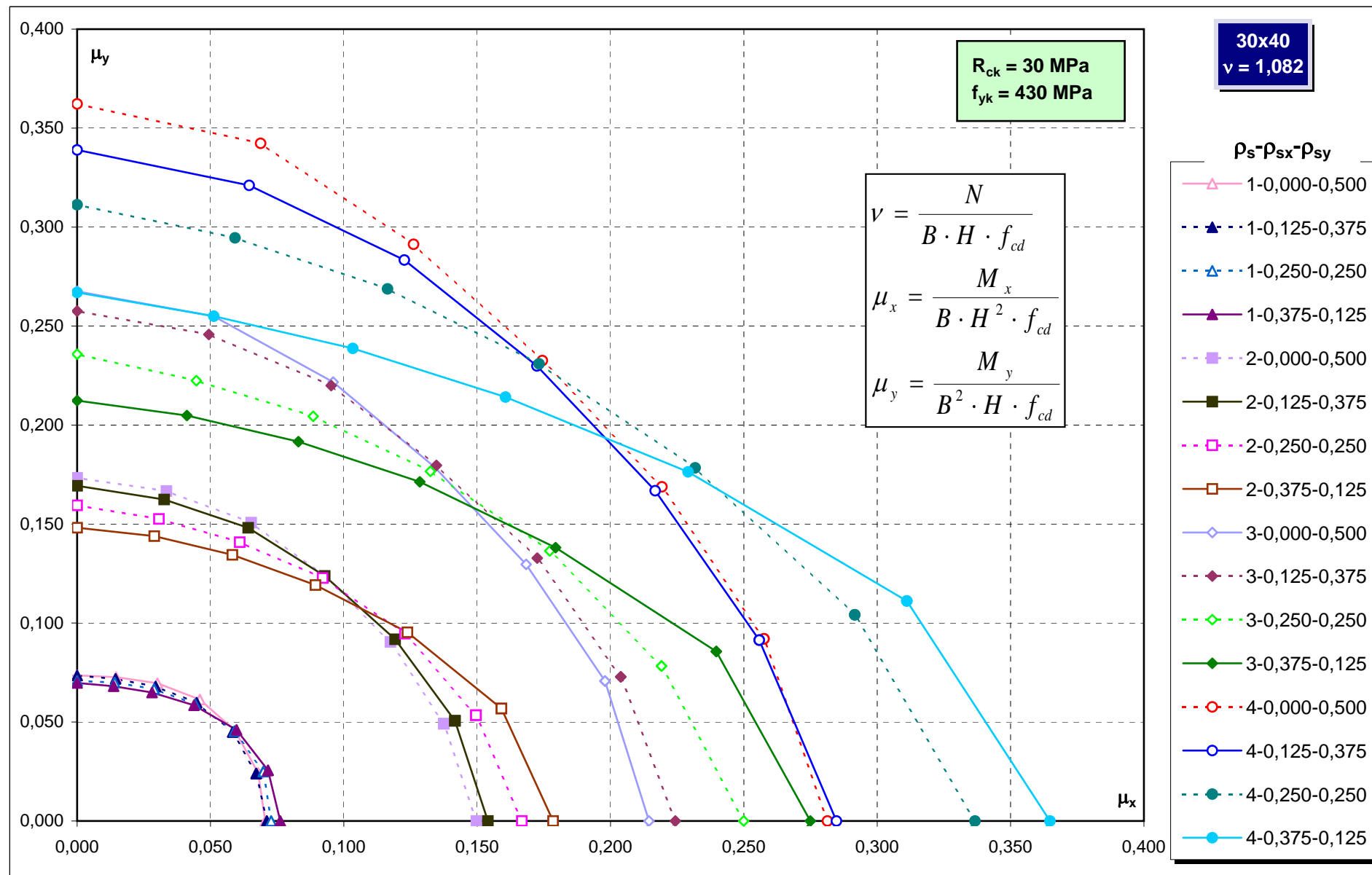


Abachi di progetto

26

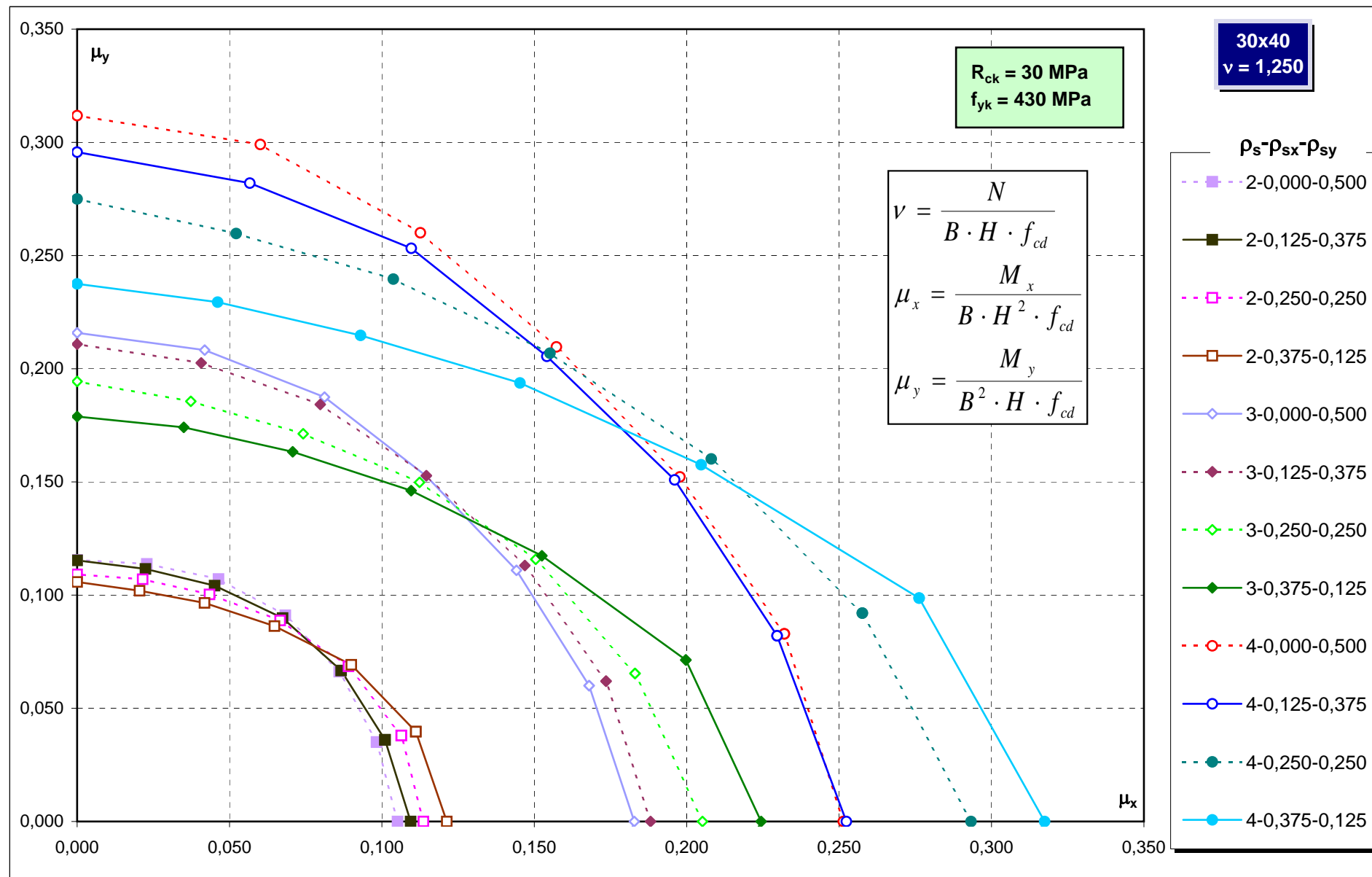


Abachi di progetto

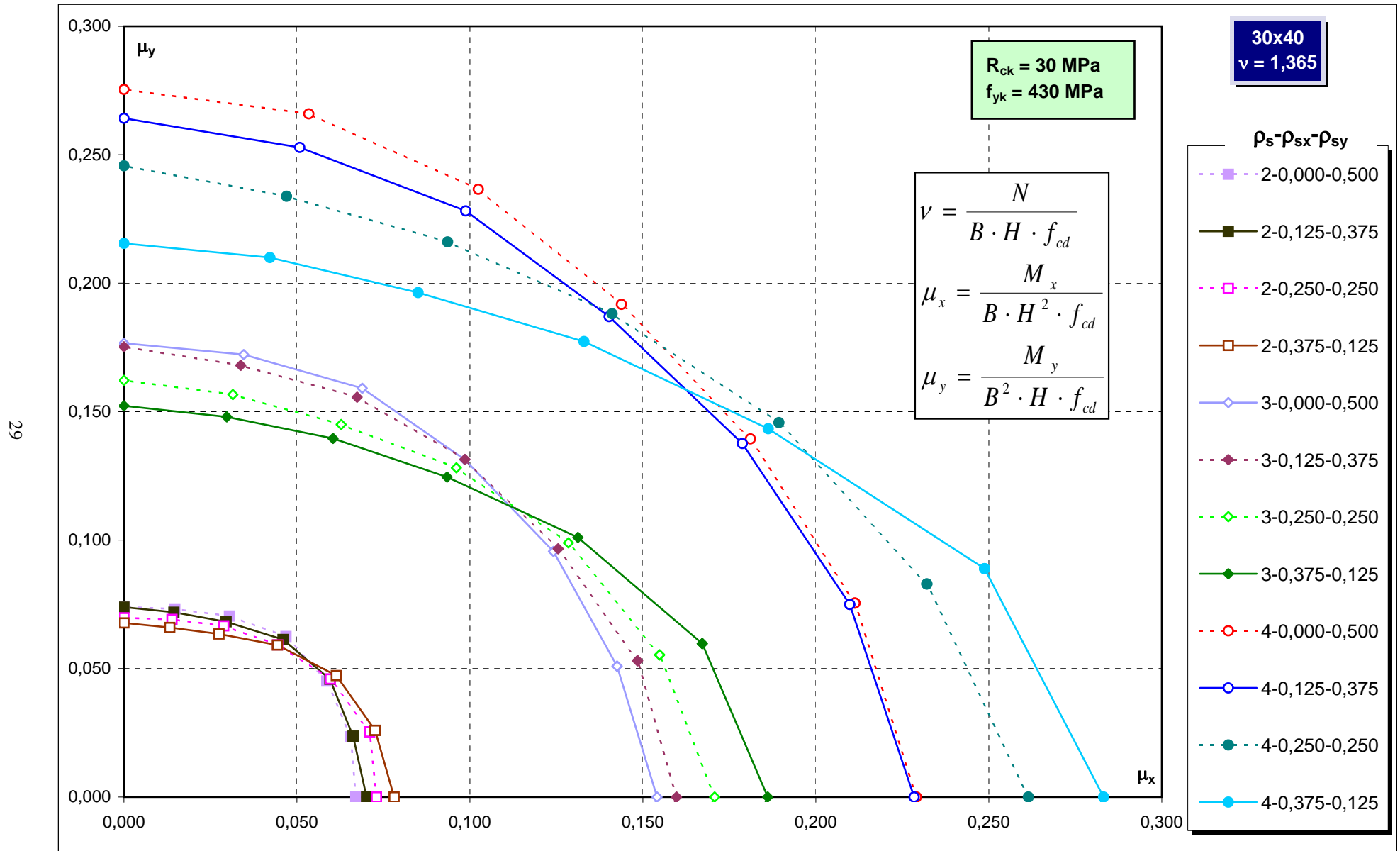


Abachi di progetto

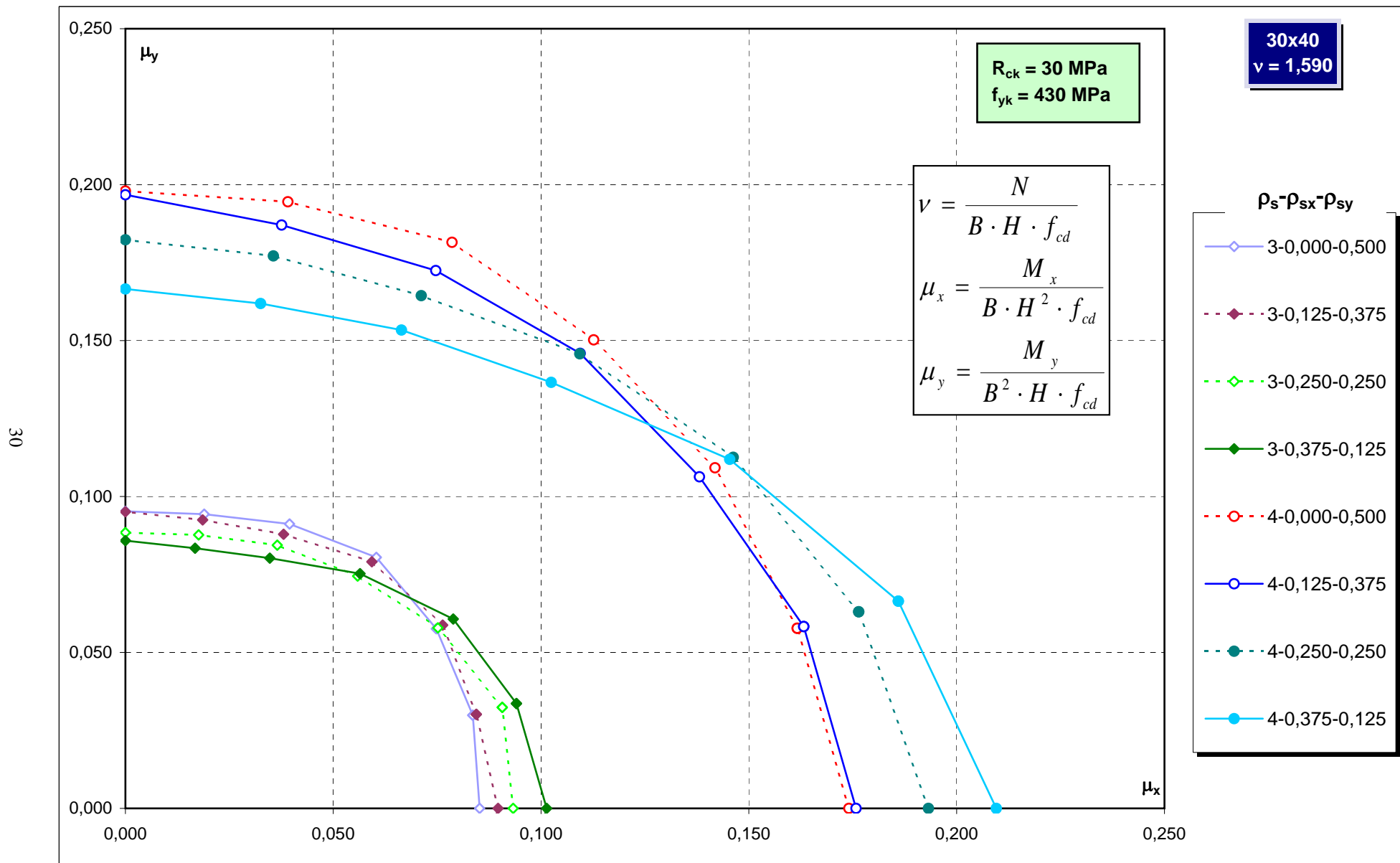
28



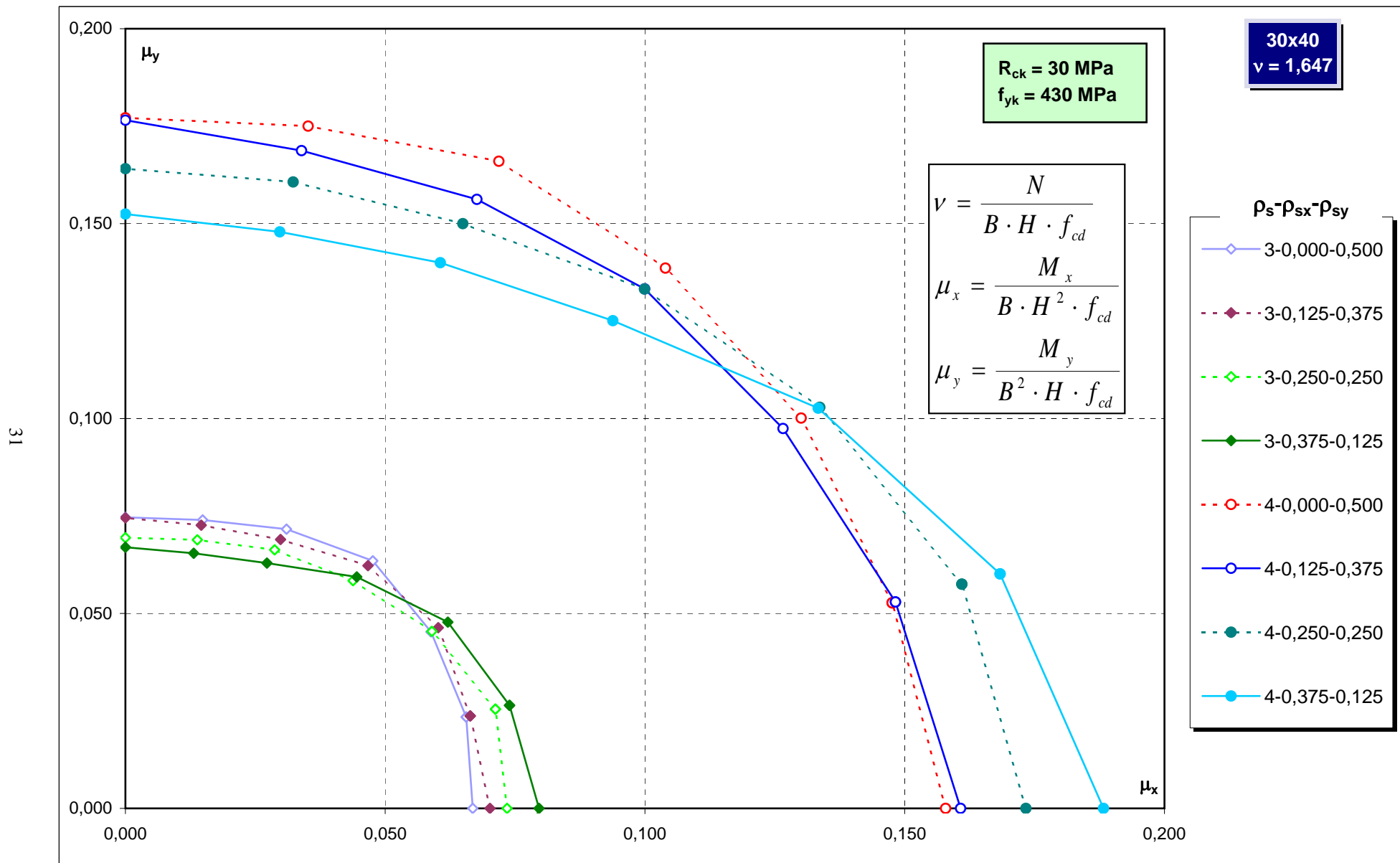
Abachi di progetto



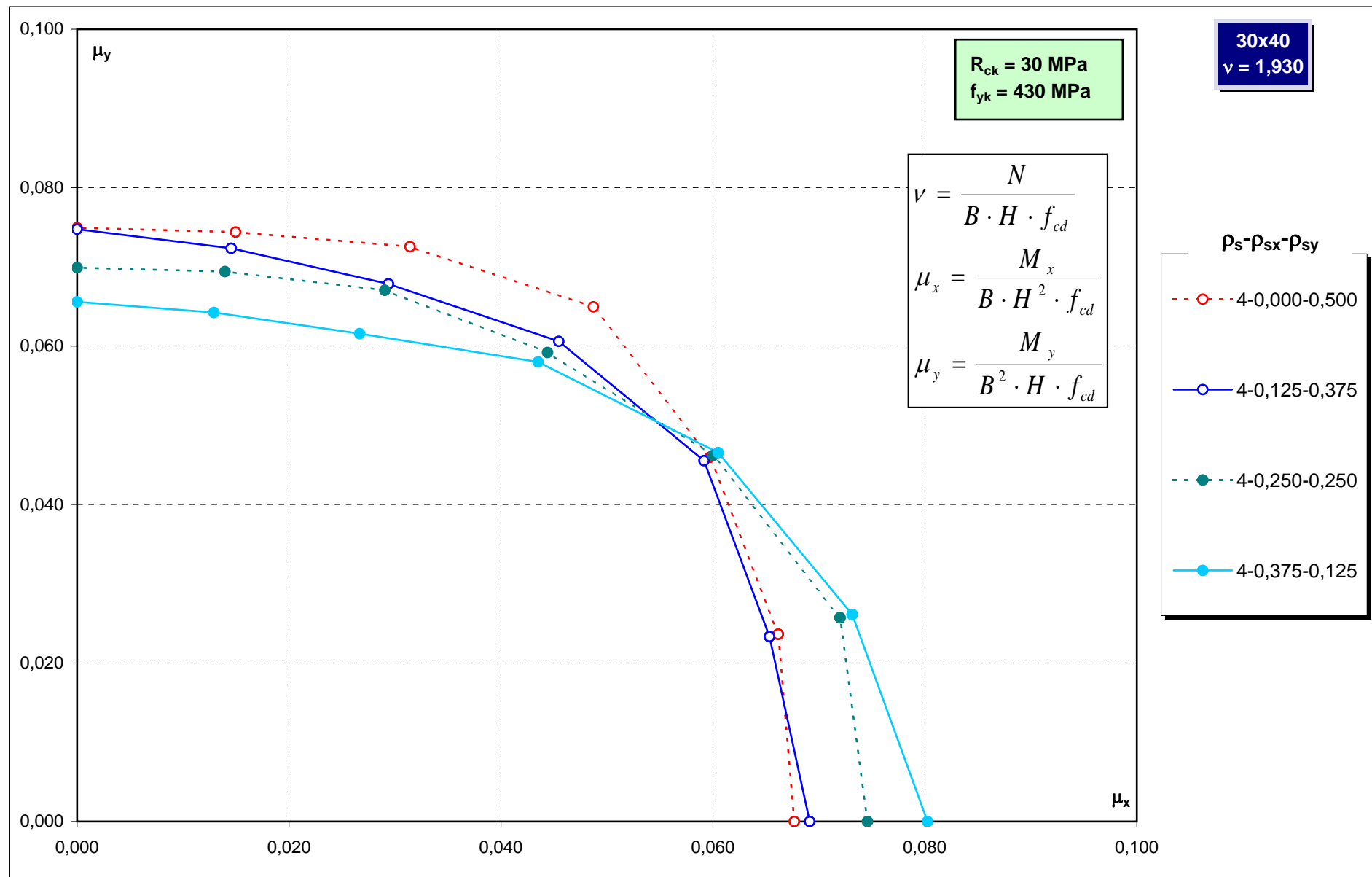
Abachi di progetto



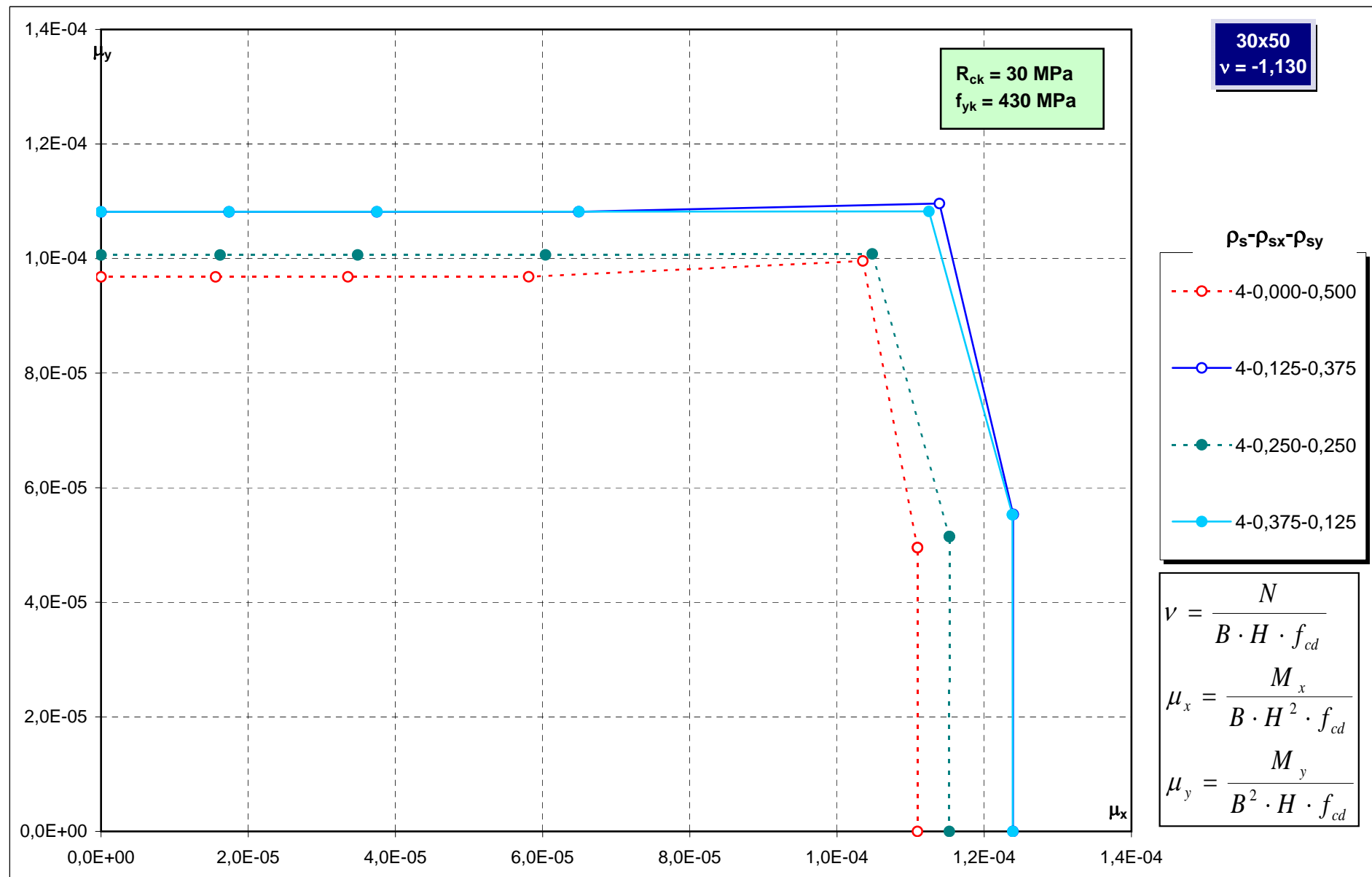
Abachi di progetto



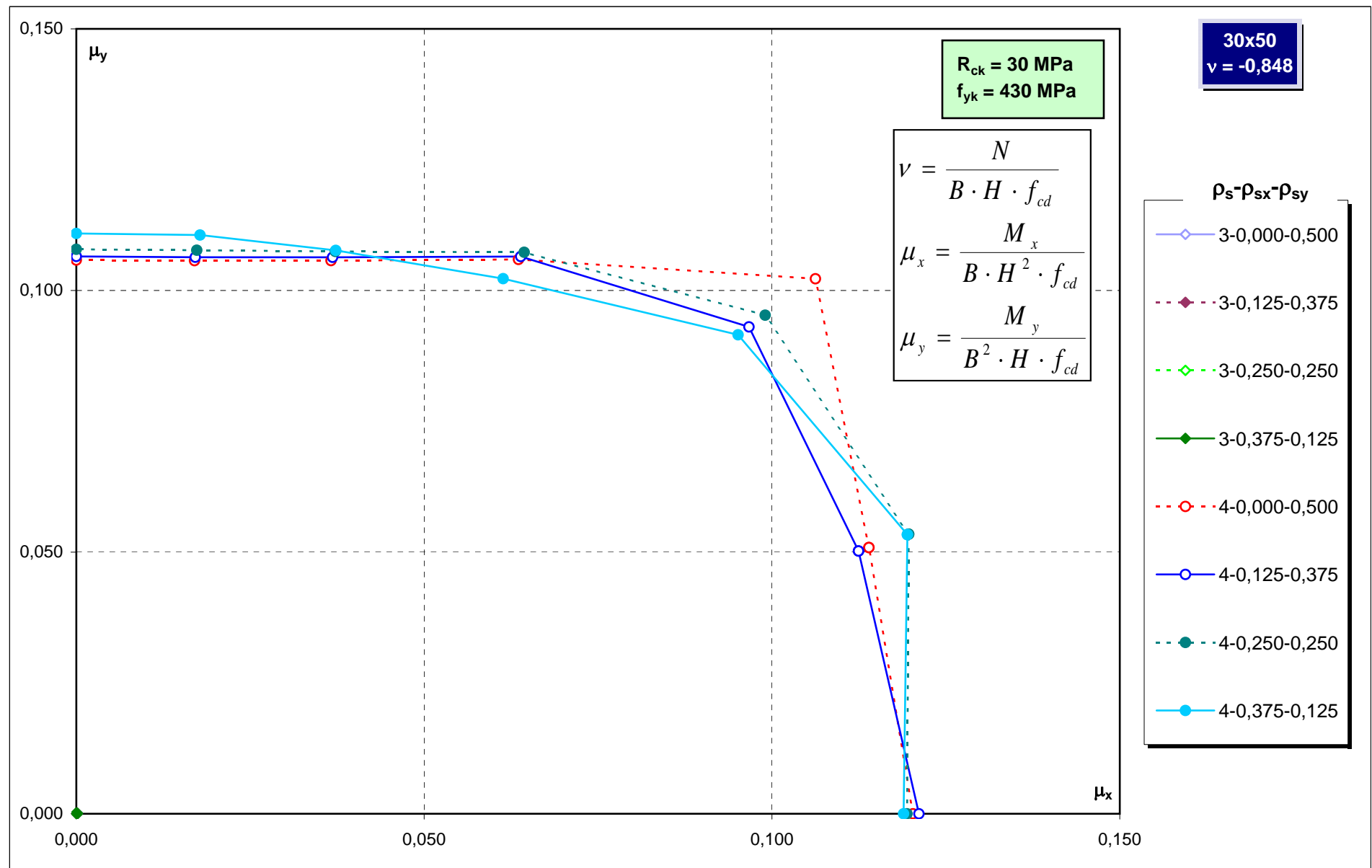
Abachi di progetto



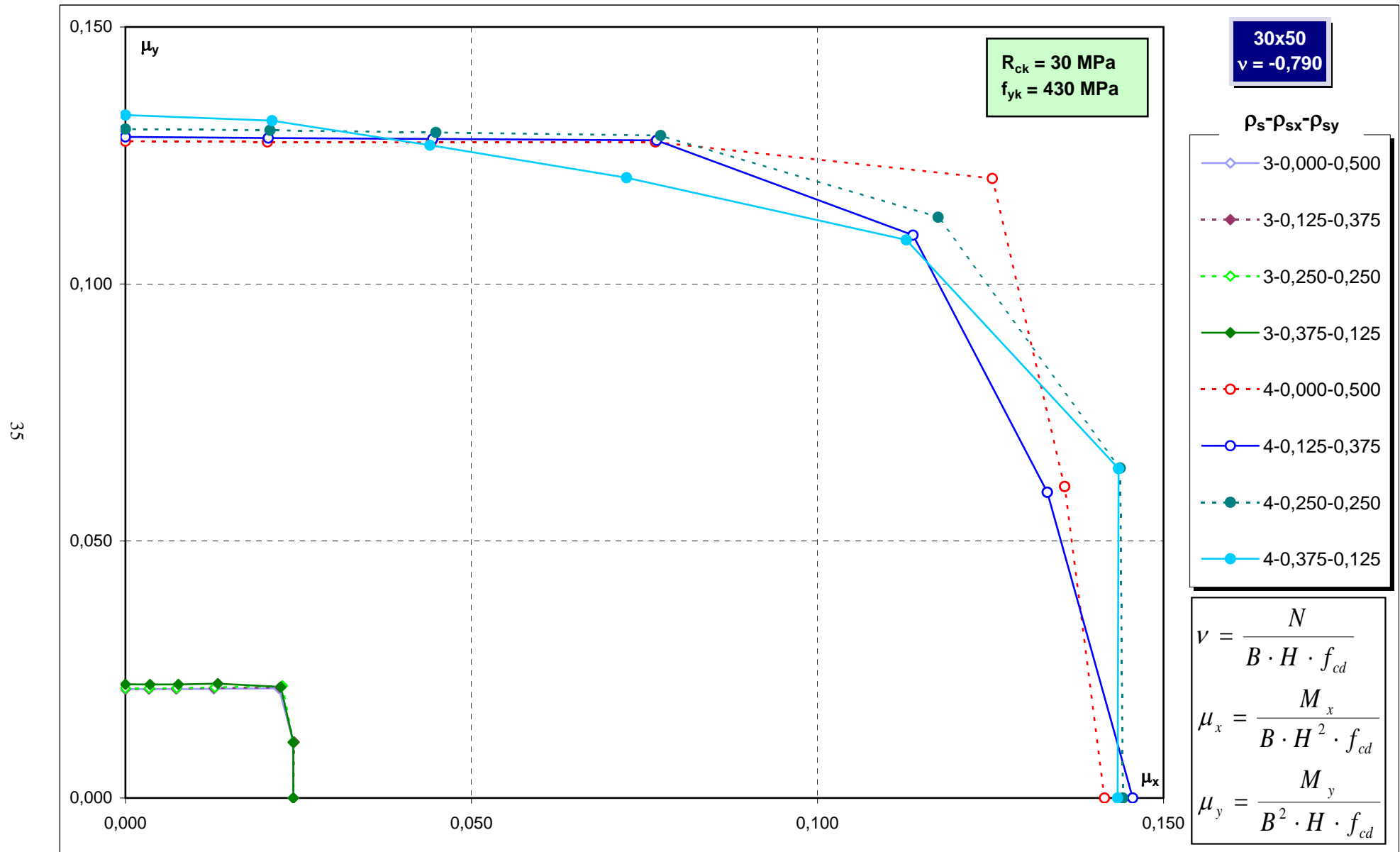
Abachi di progetto



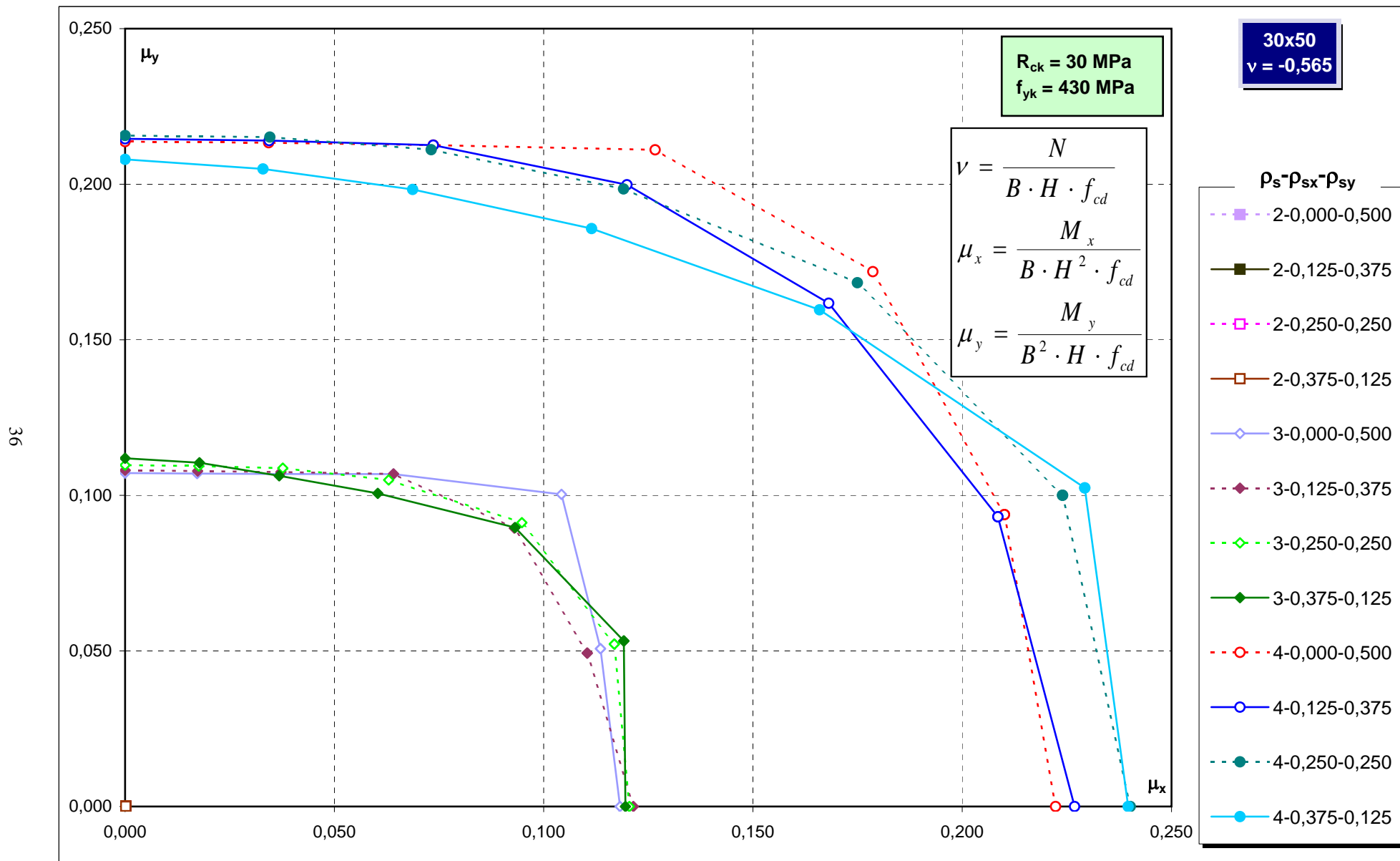
Abachi di progetto



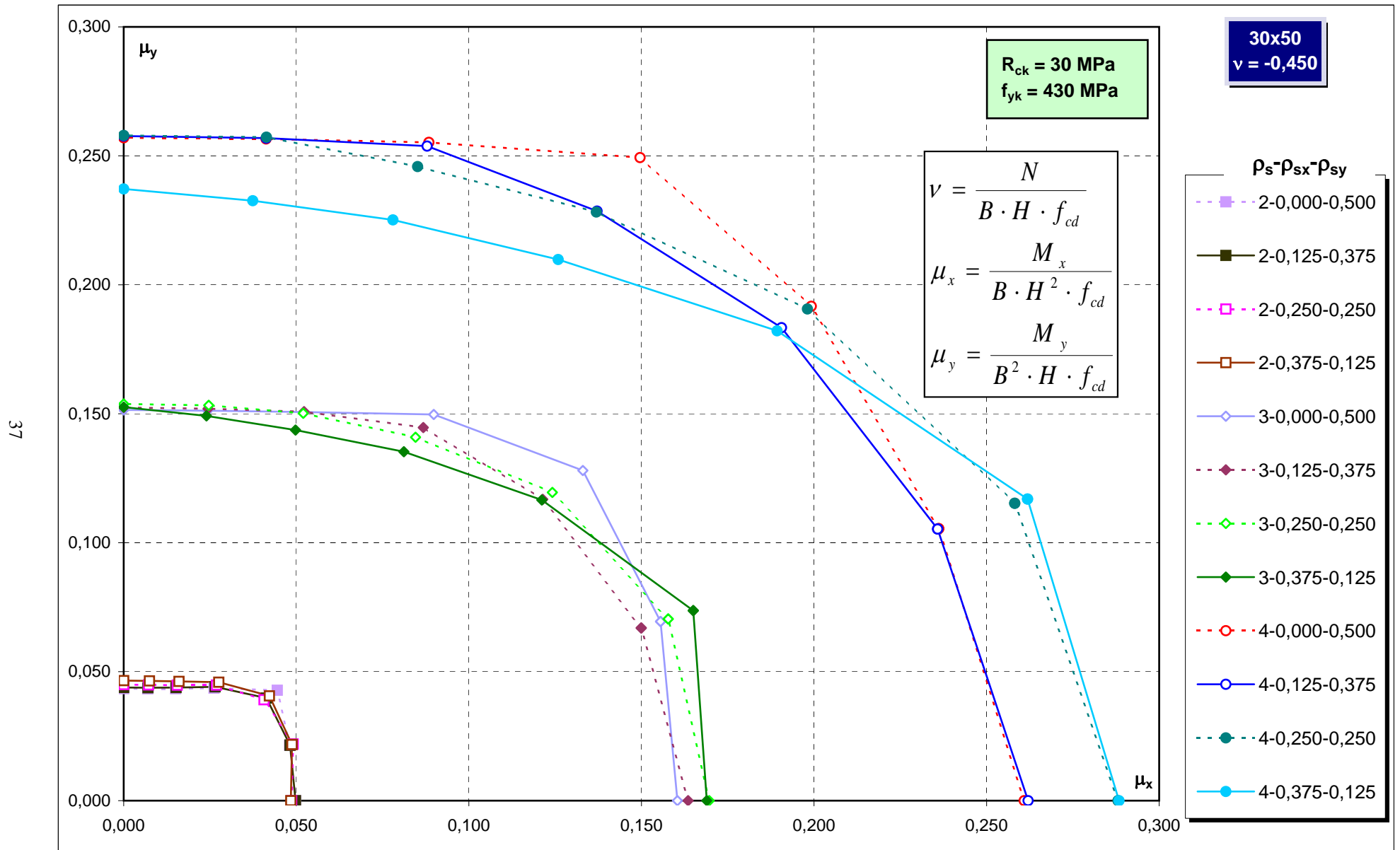
Abachi di progetto



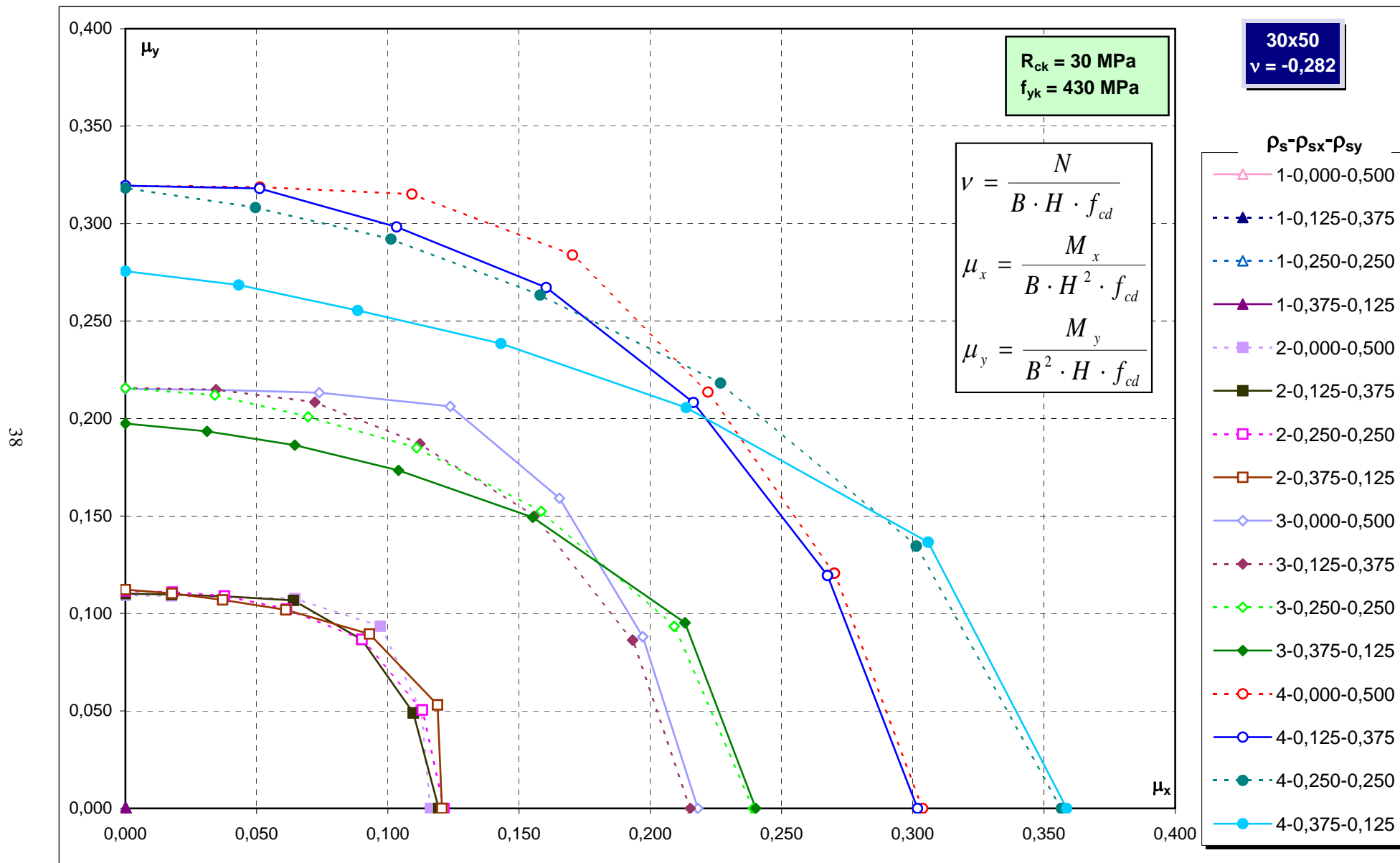
Abachi di progetto



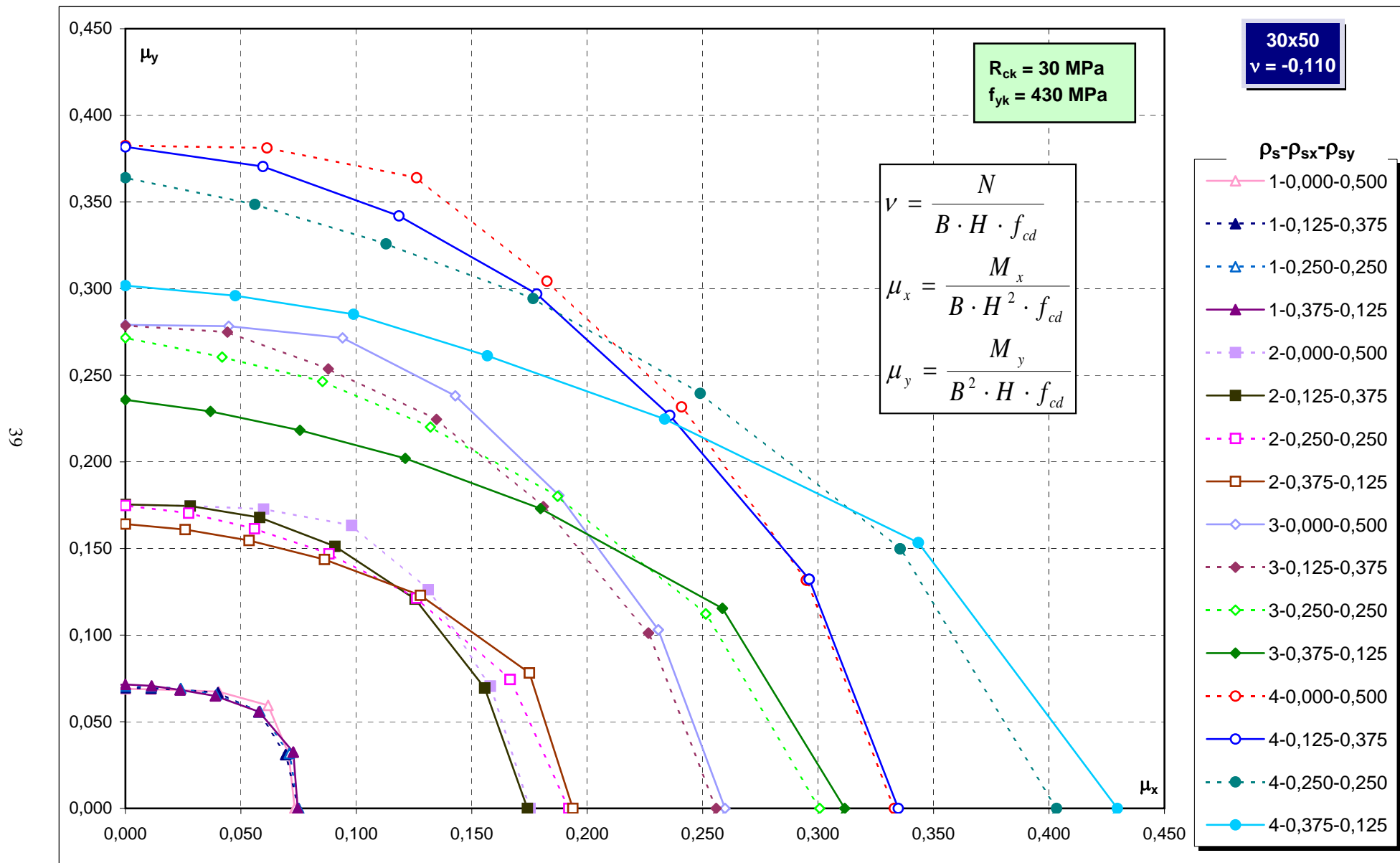
Abachi di progetto



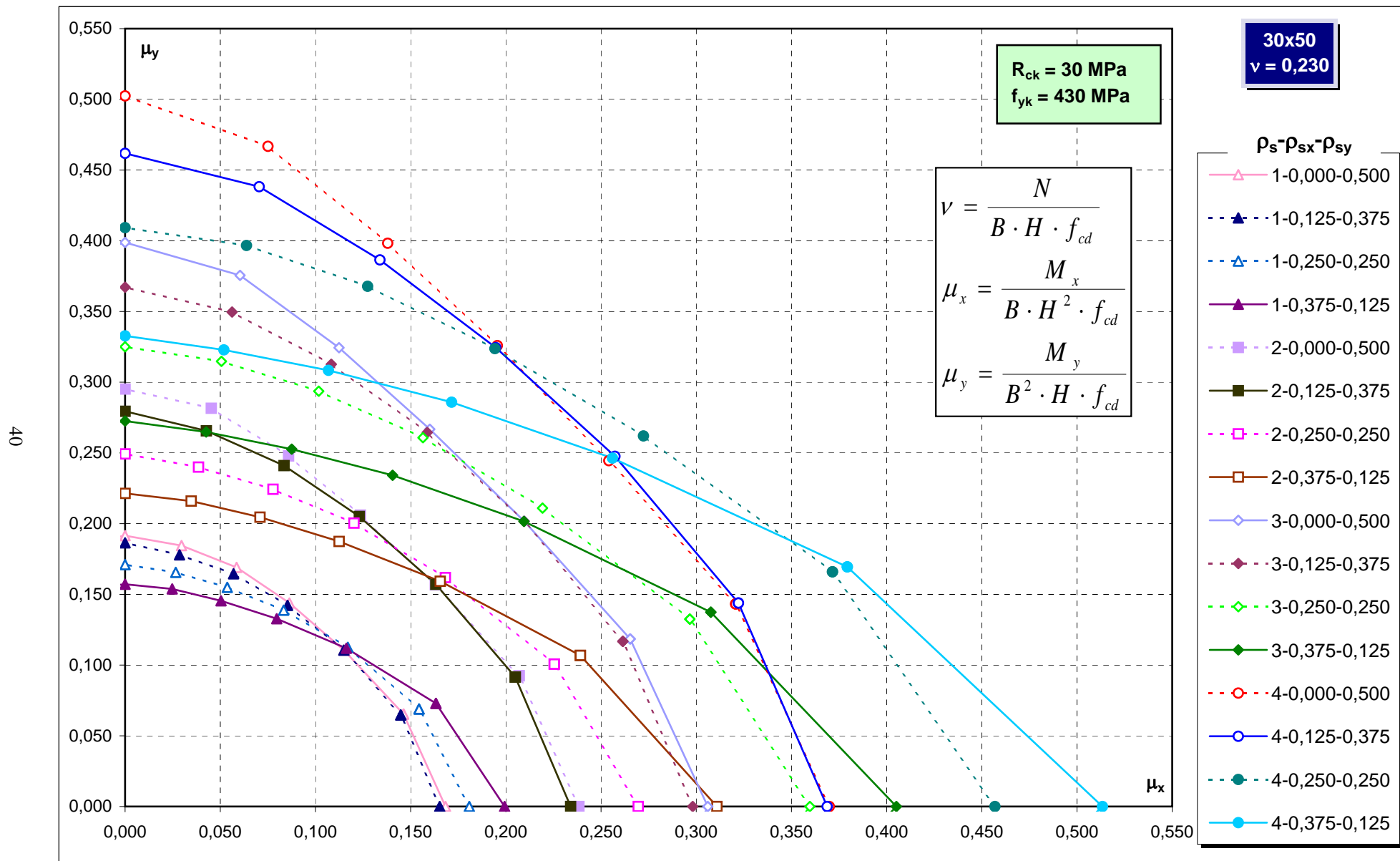
Abachi di progetto



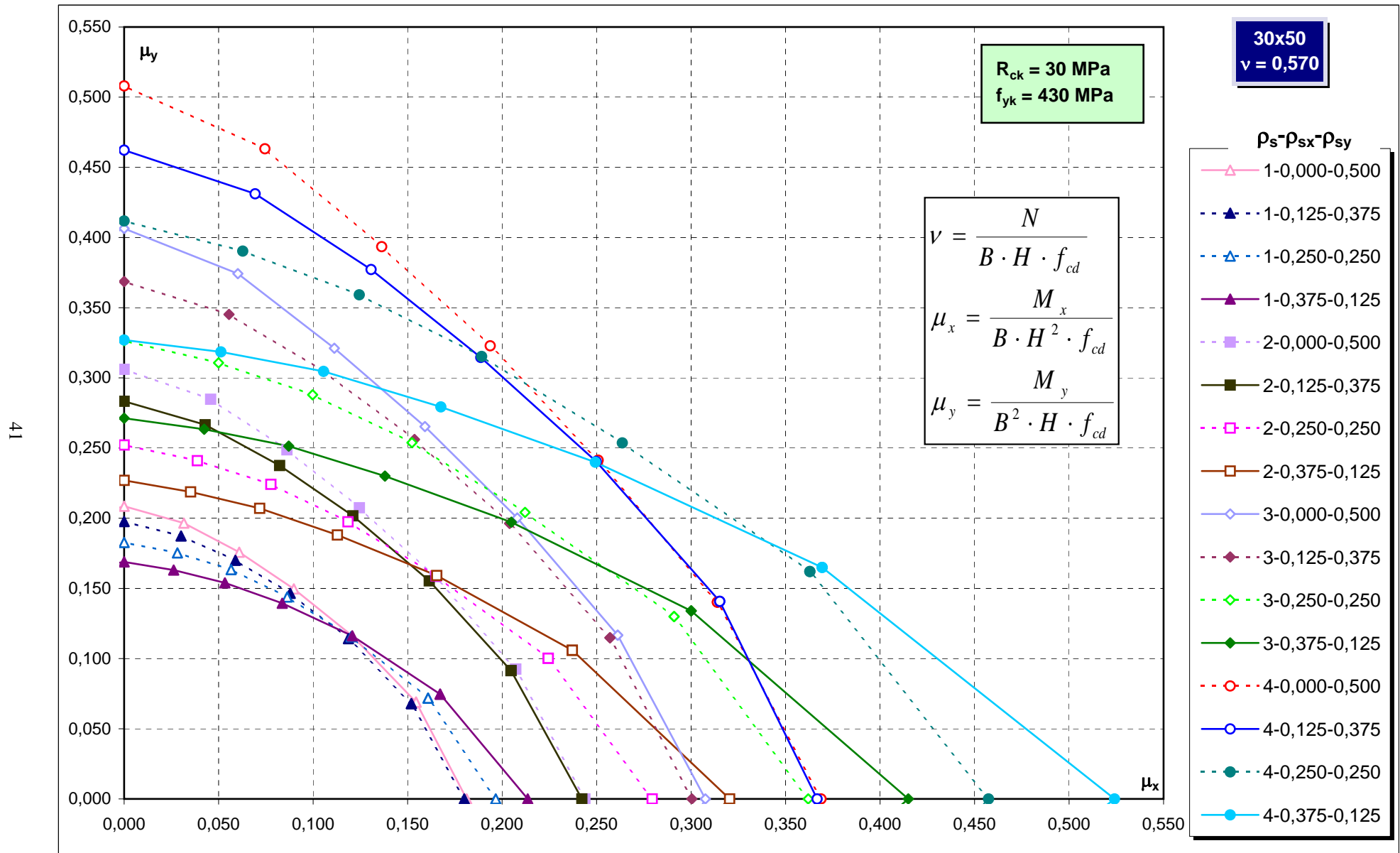
Abachi di progetto



Abachi di progetto

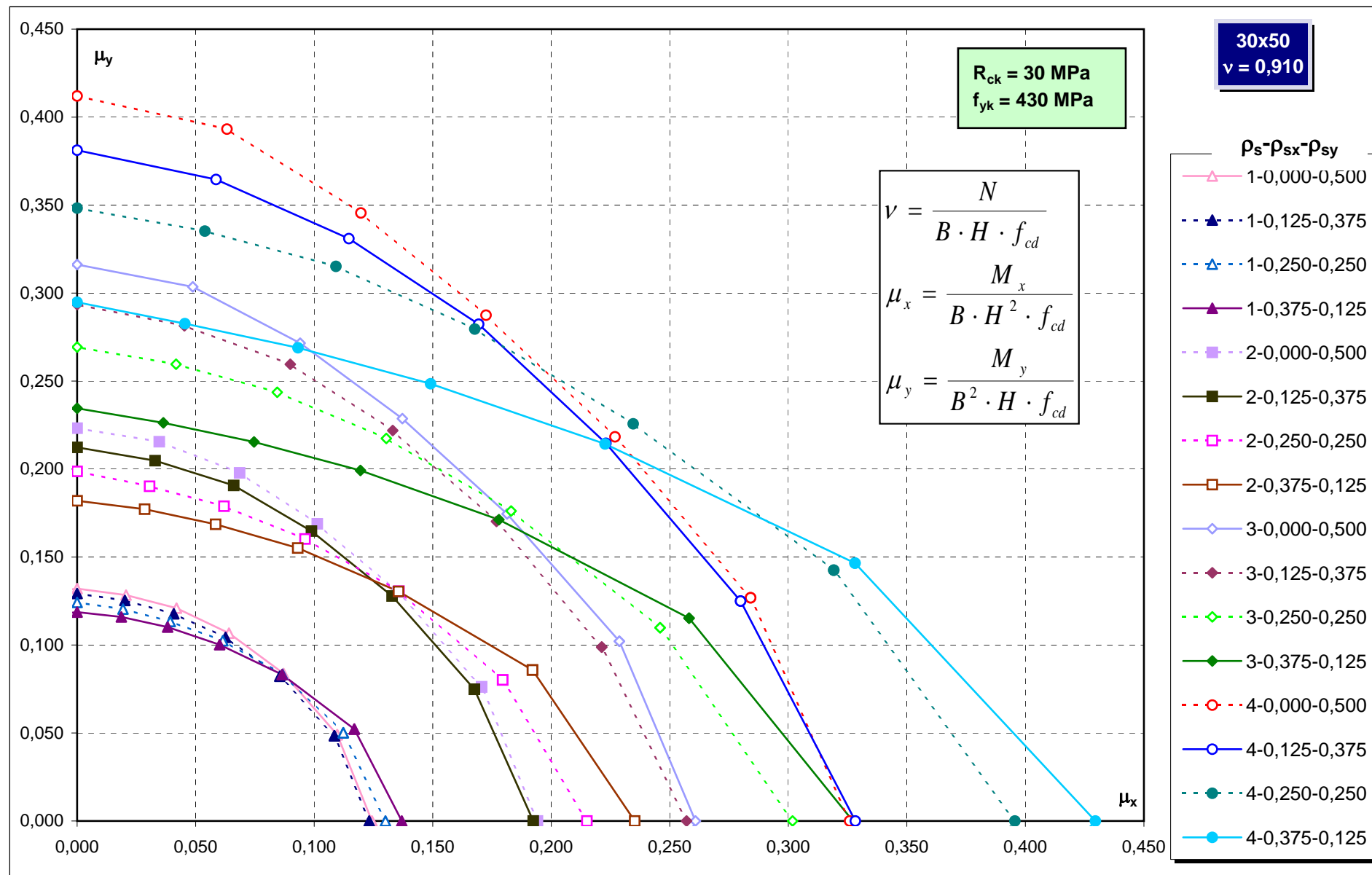


Abachi di progetto



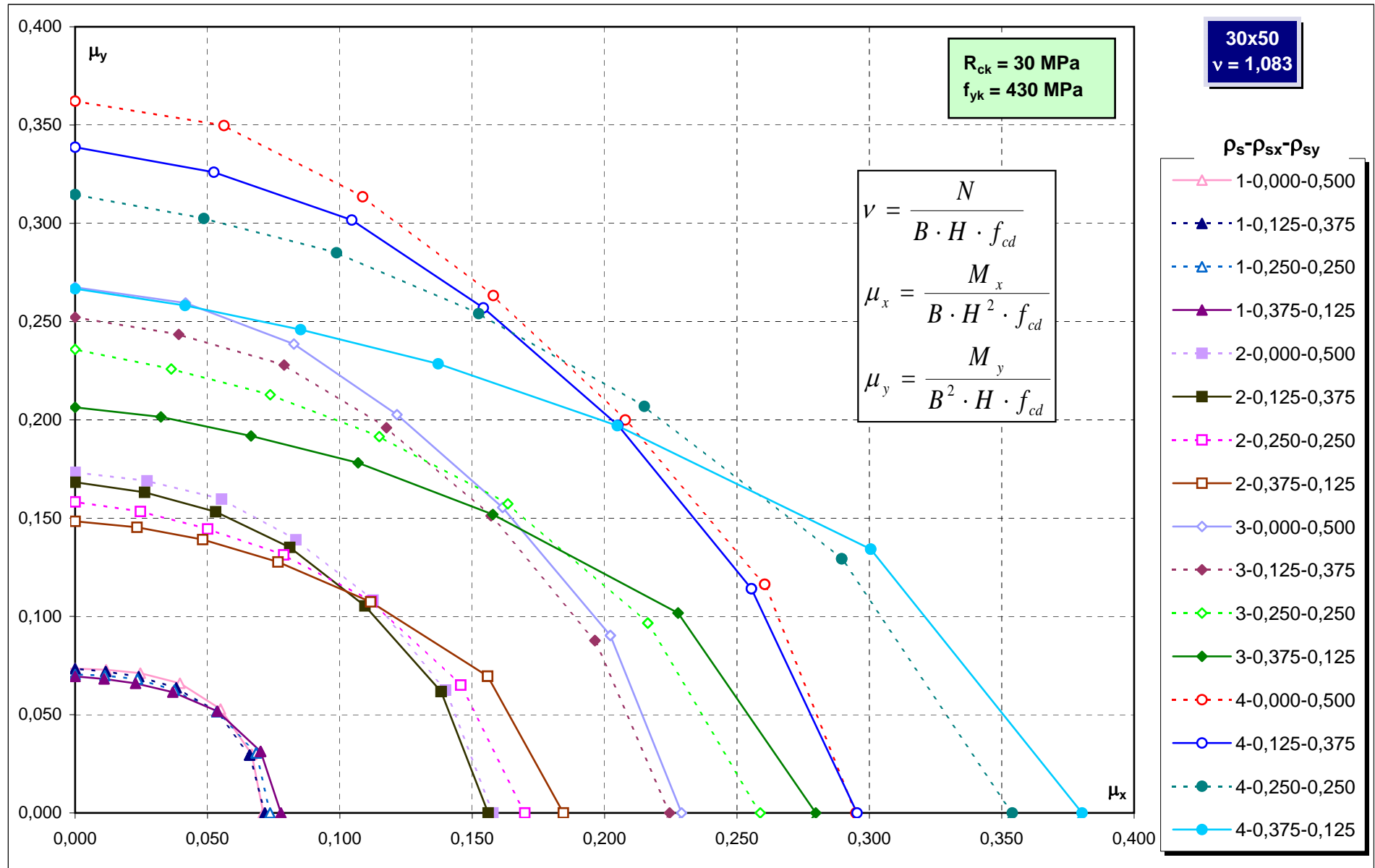
Abachi di progetto

42



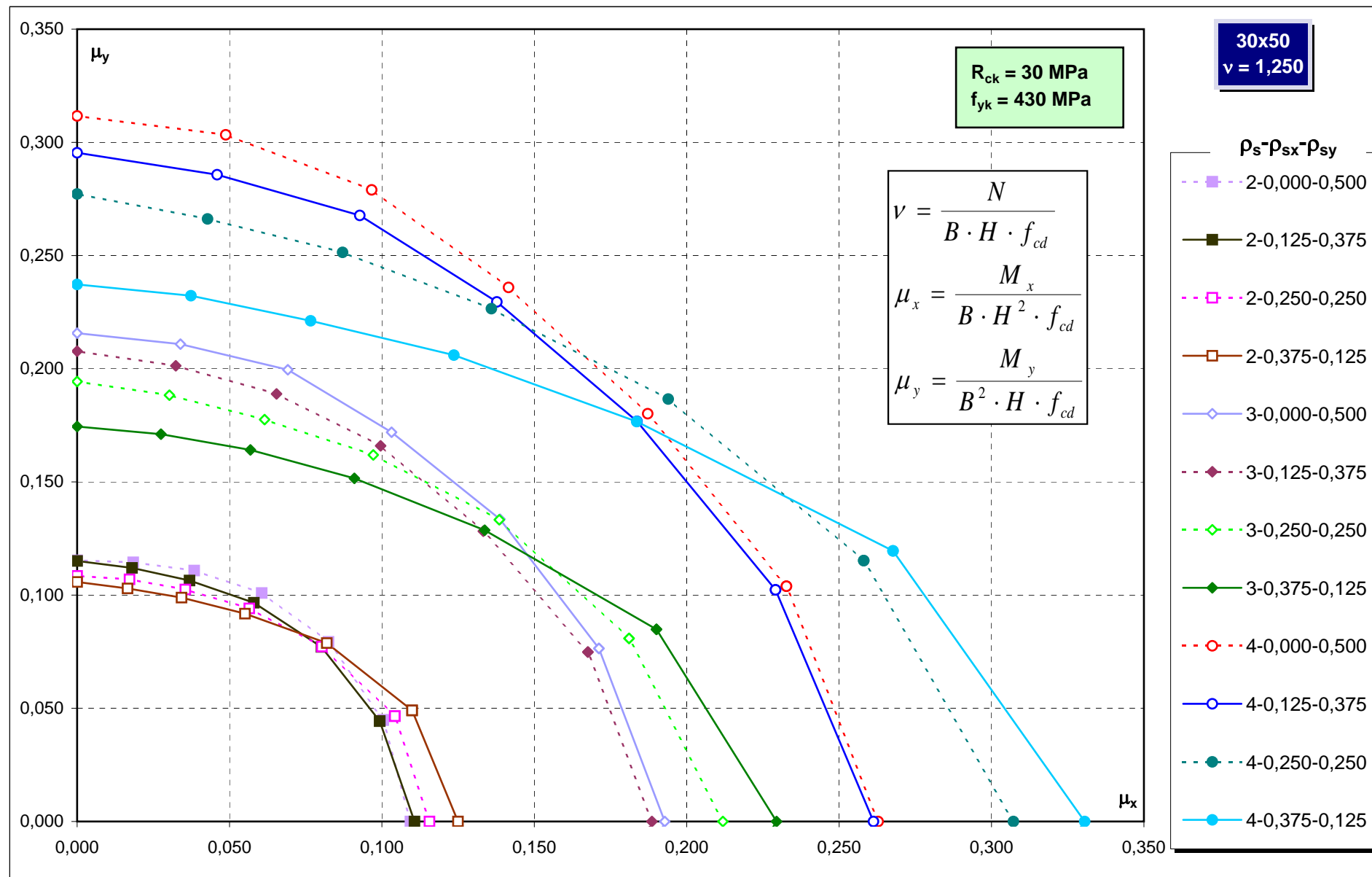
Abachi di progetto

43

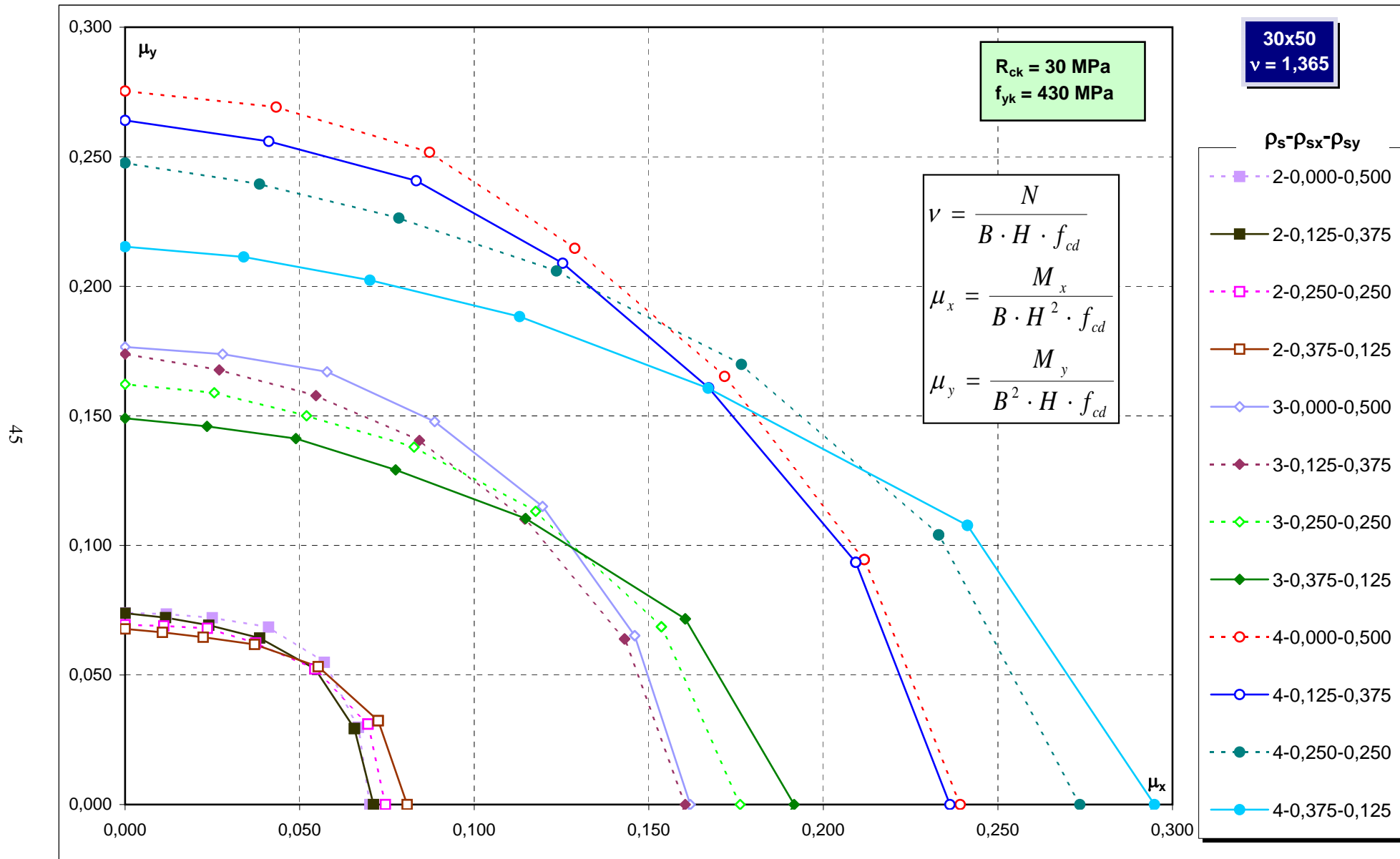


Abachi di progetto

44

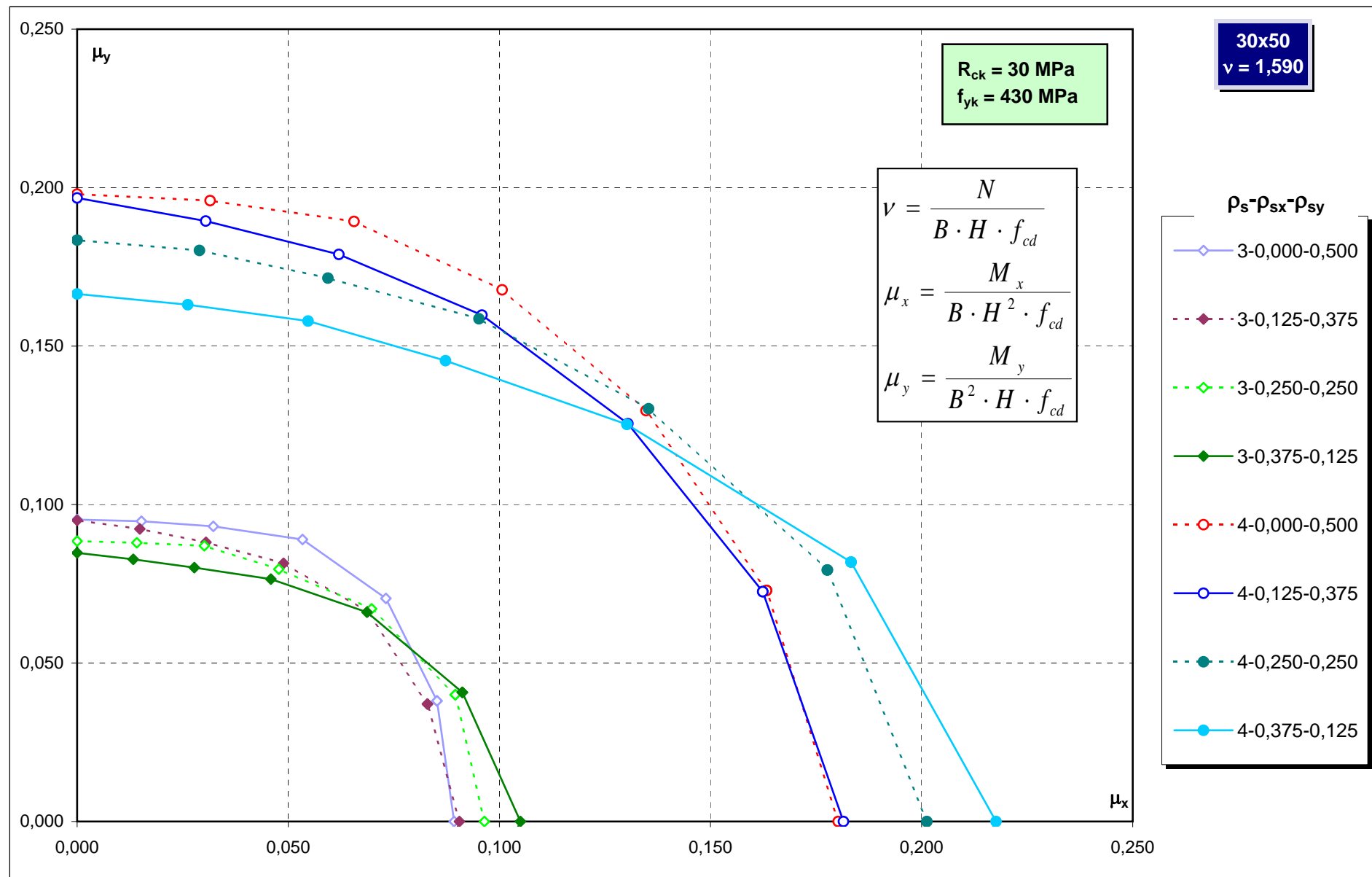


Abachi di progetto

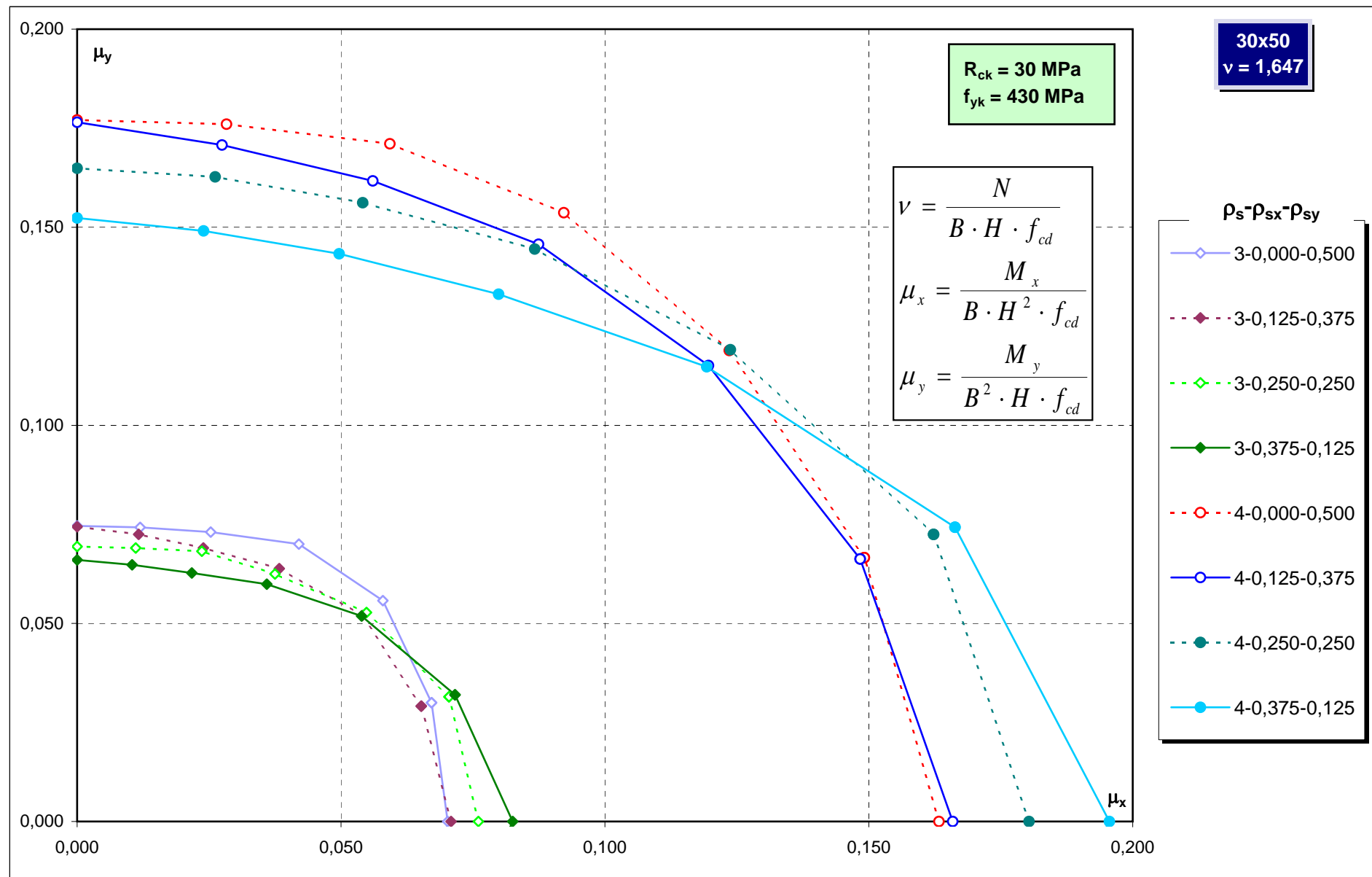


Abachi di progetto

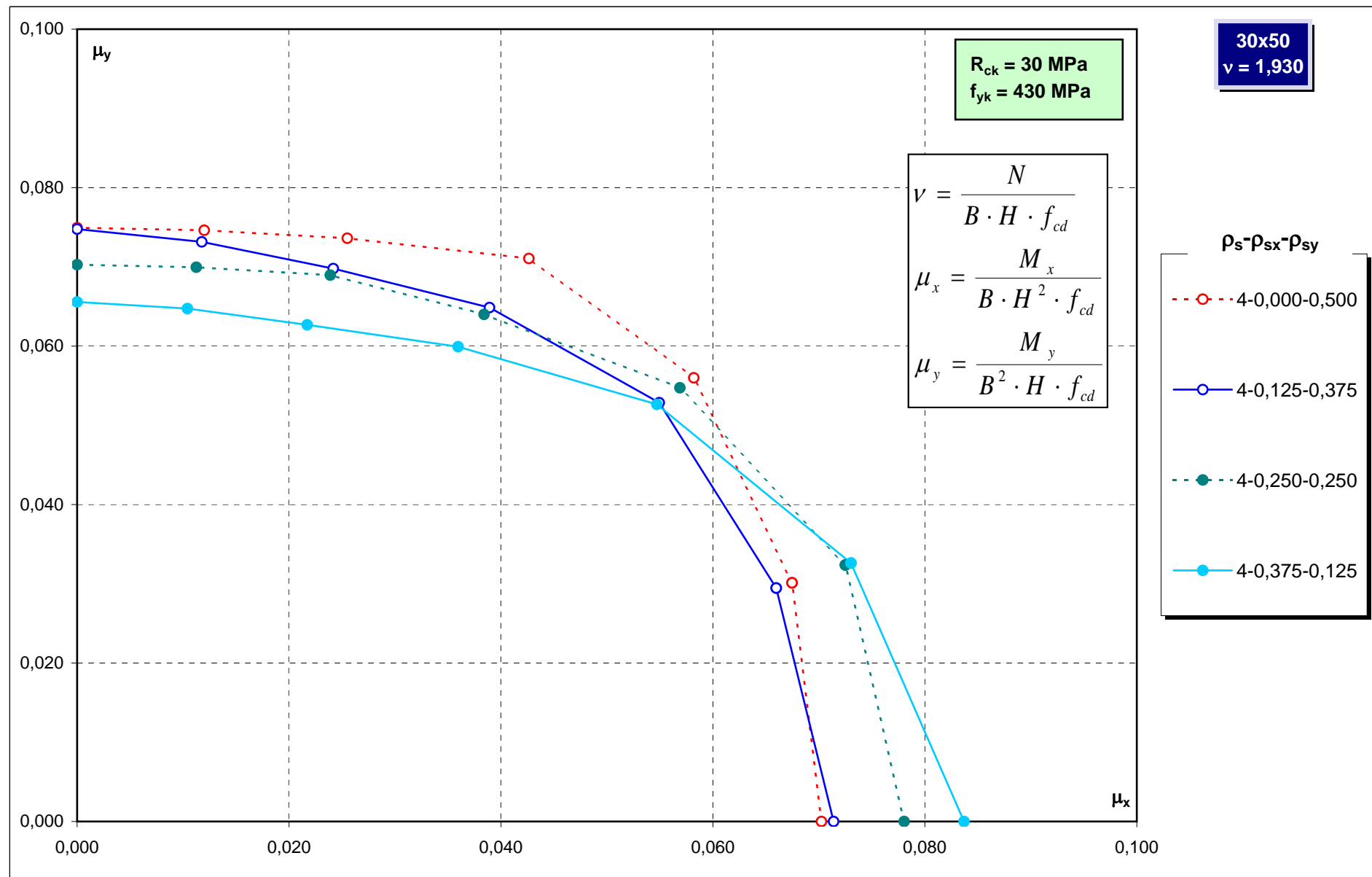
46



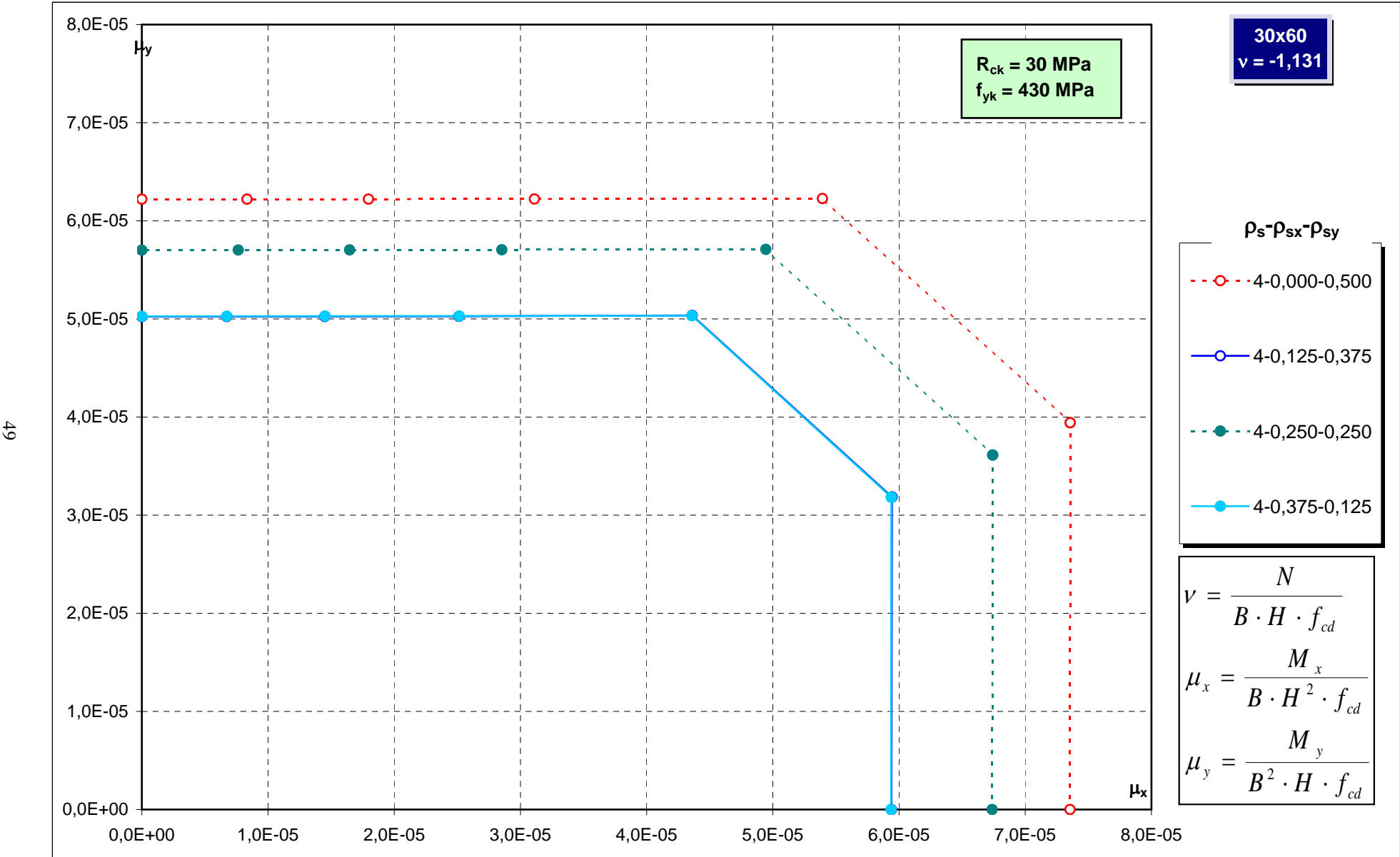
Abachi di progetto



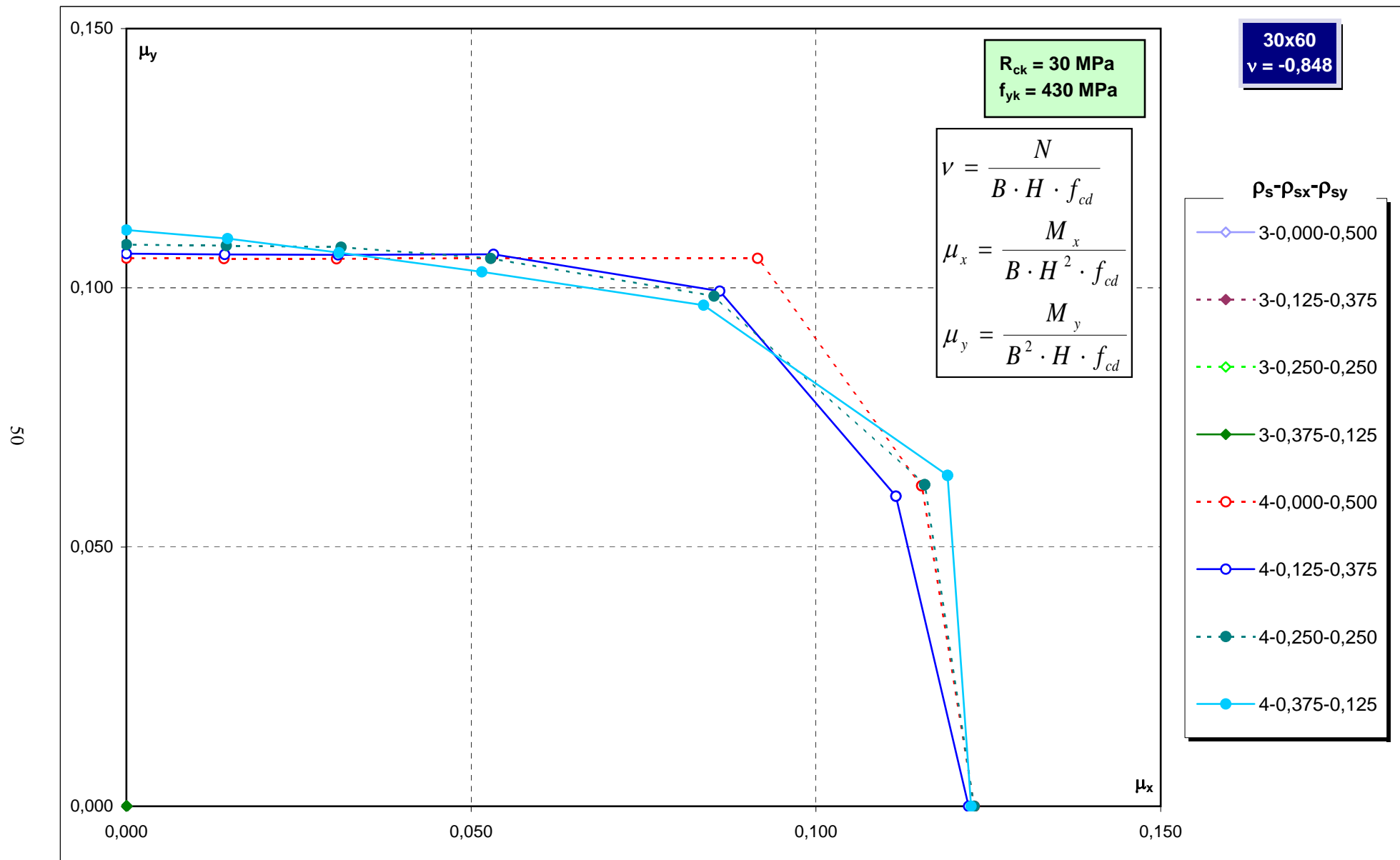
Abachi di progetto



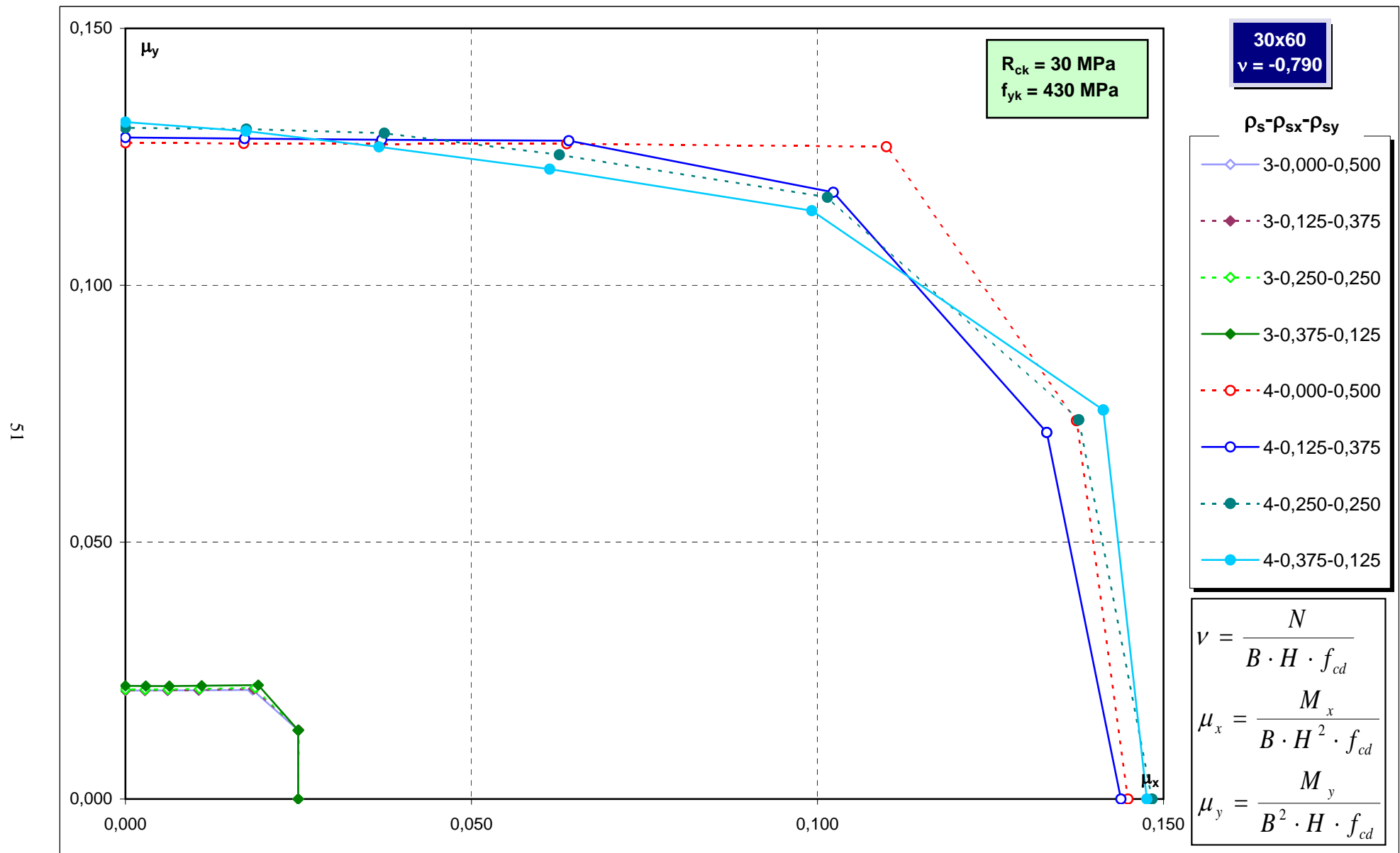
Abachi di progetto



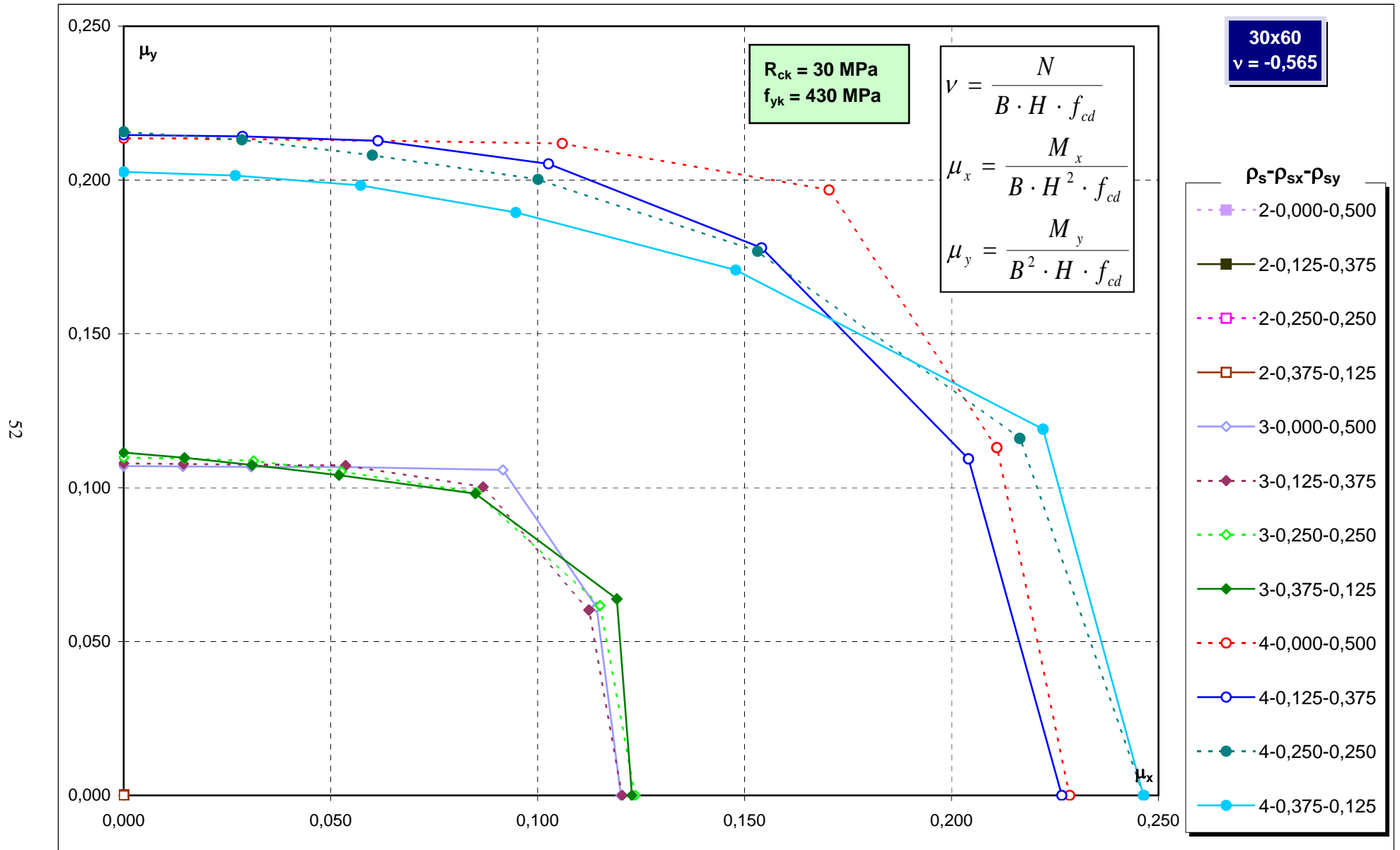
Abachi di progetto



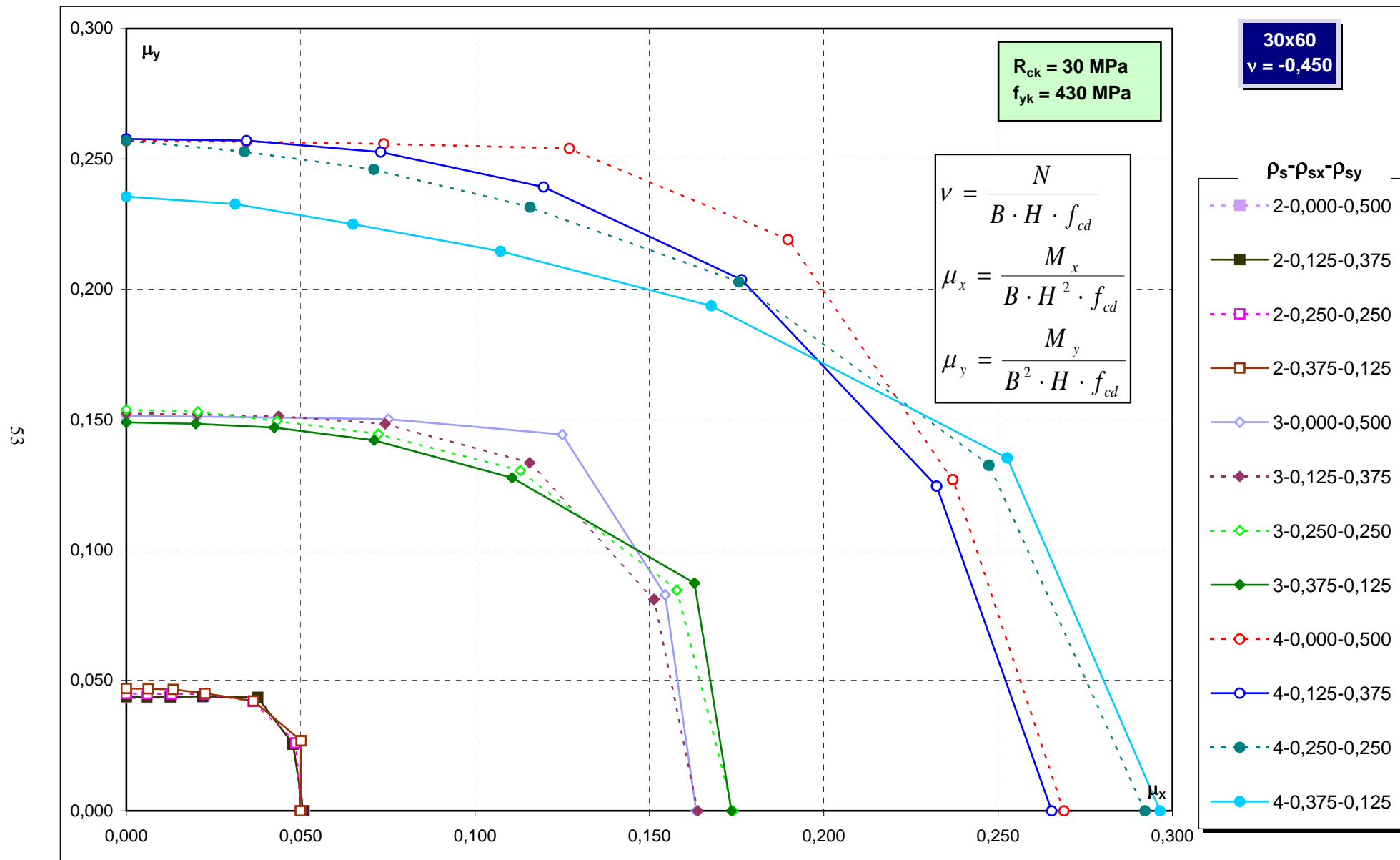
Abachi di progetto



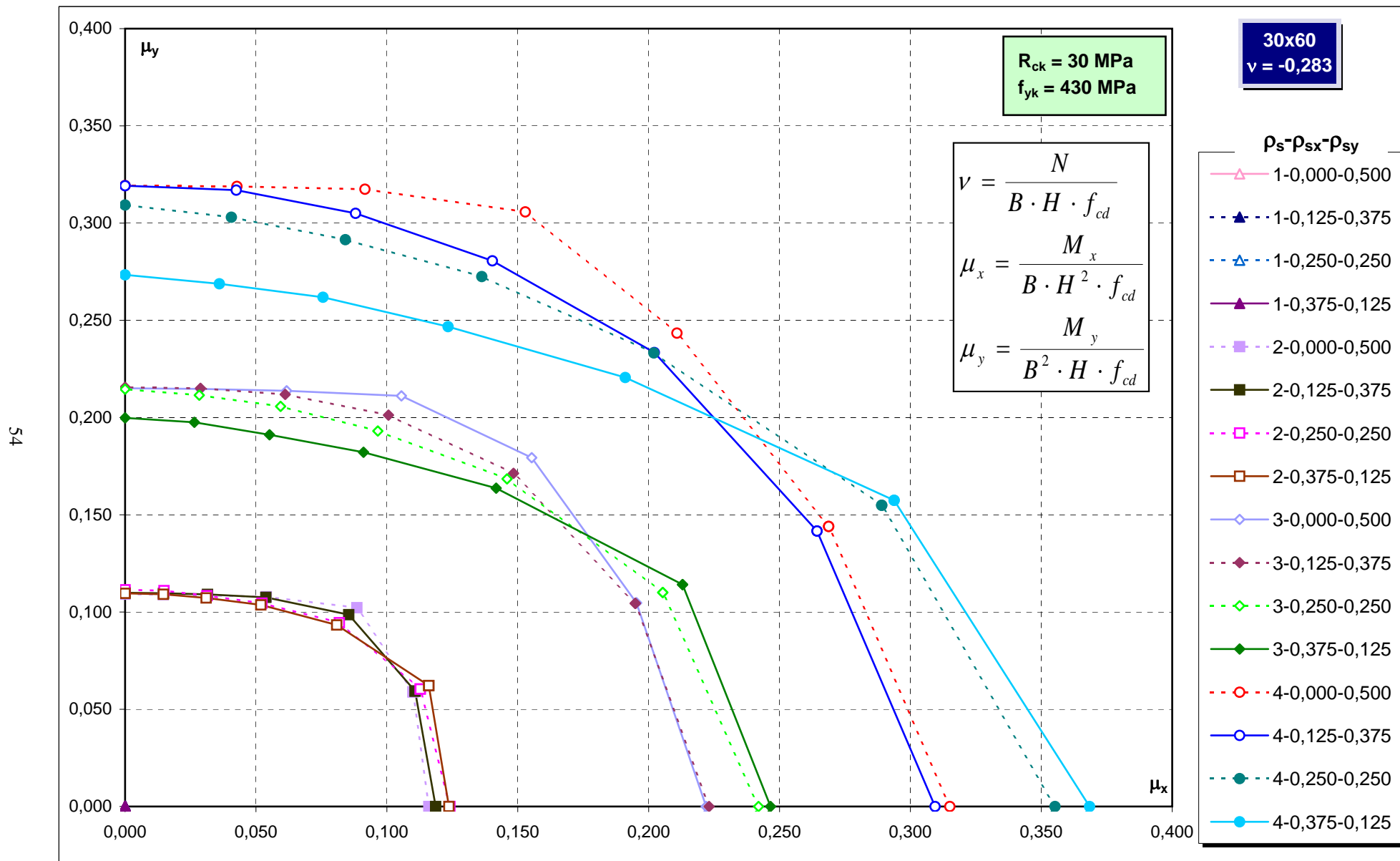
Abachi di progetto



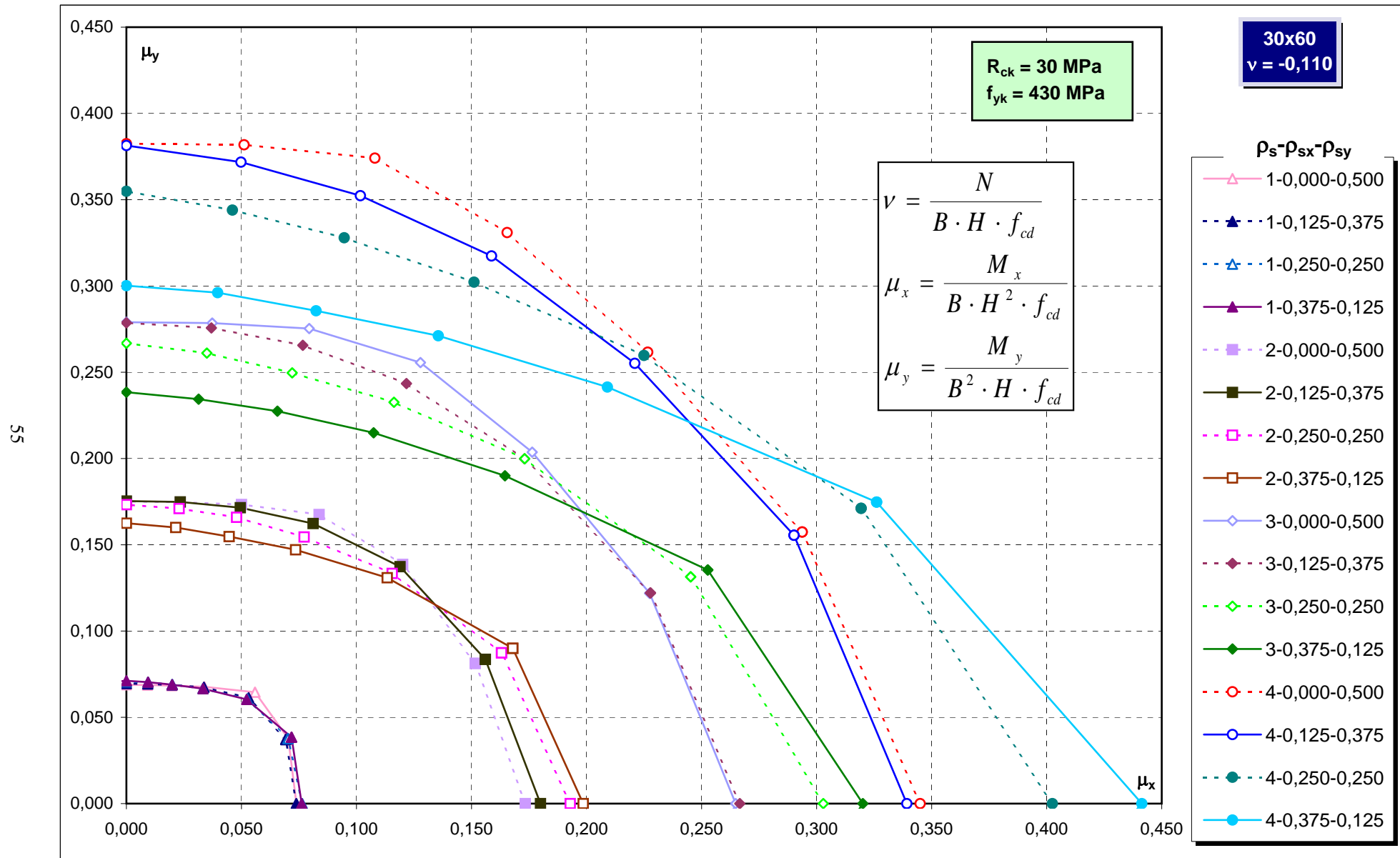
Abachi di progetto



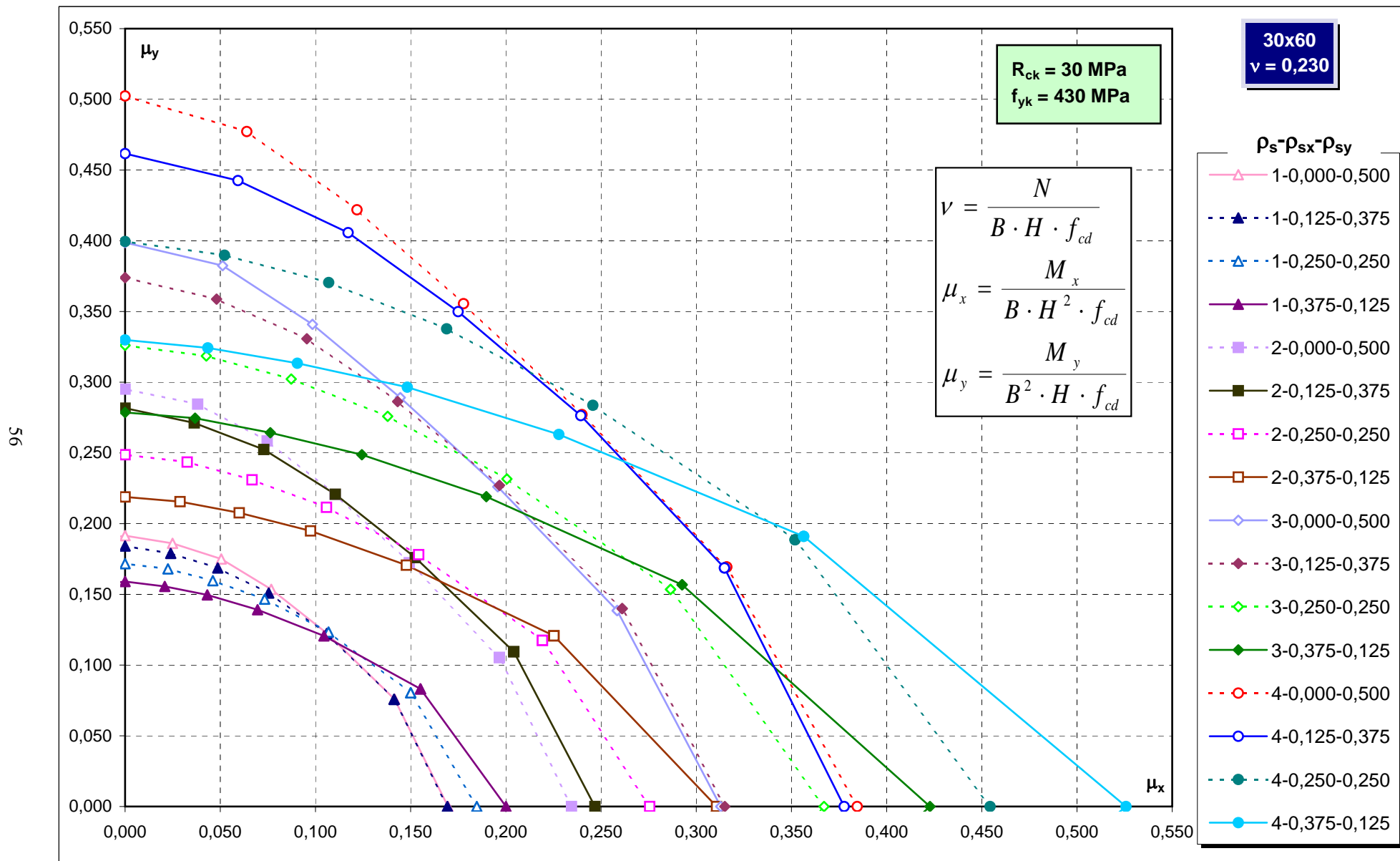
Abachi di progetto



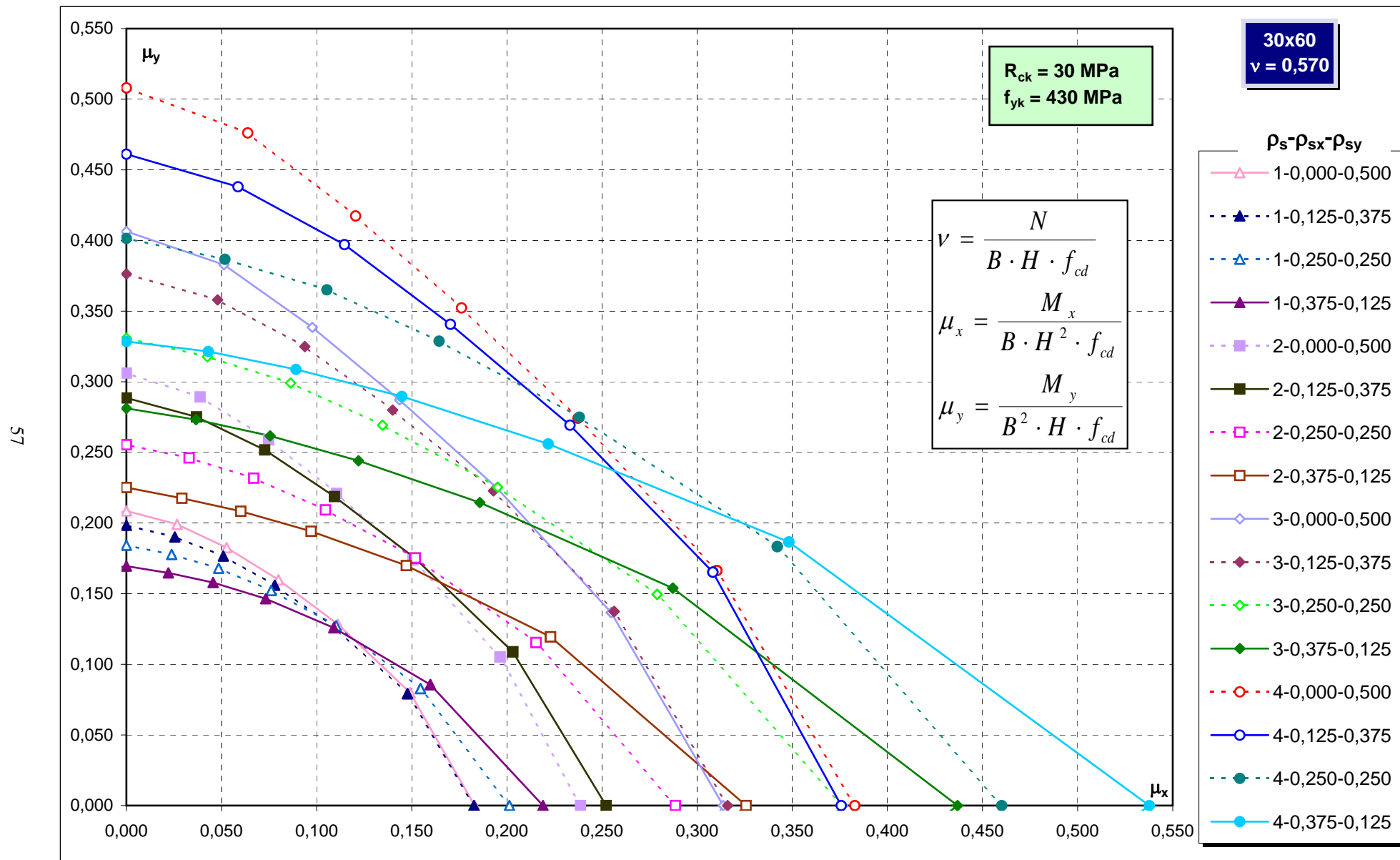
Abachi di progetto



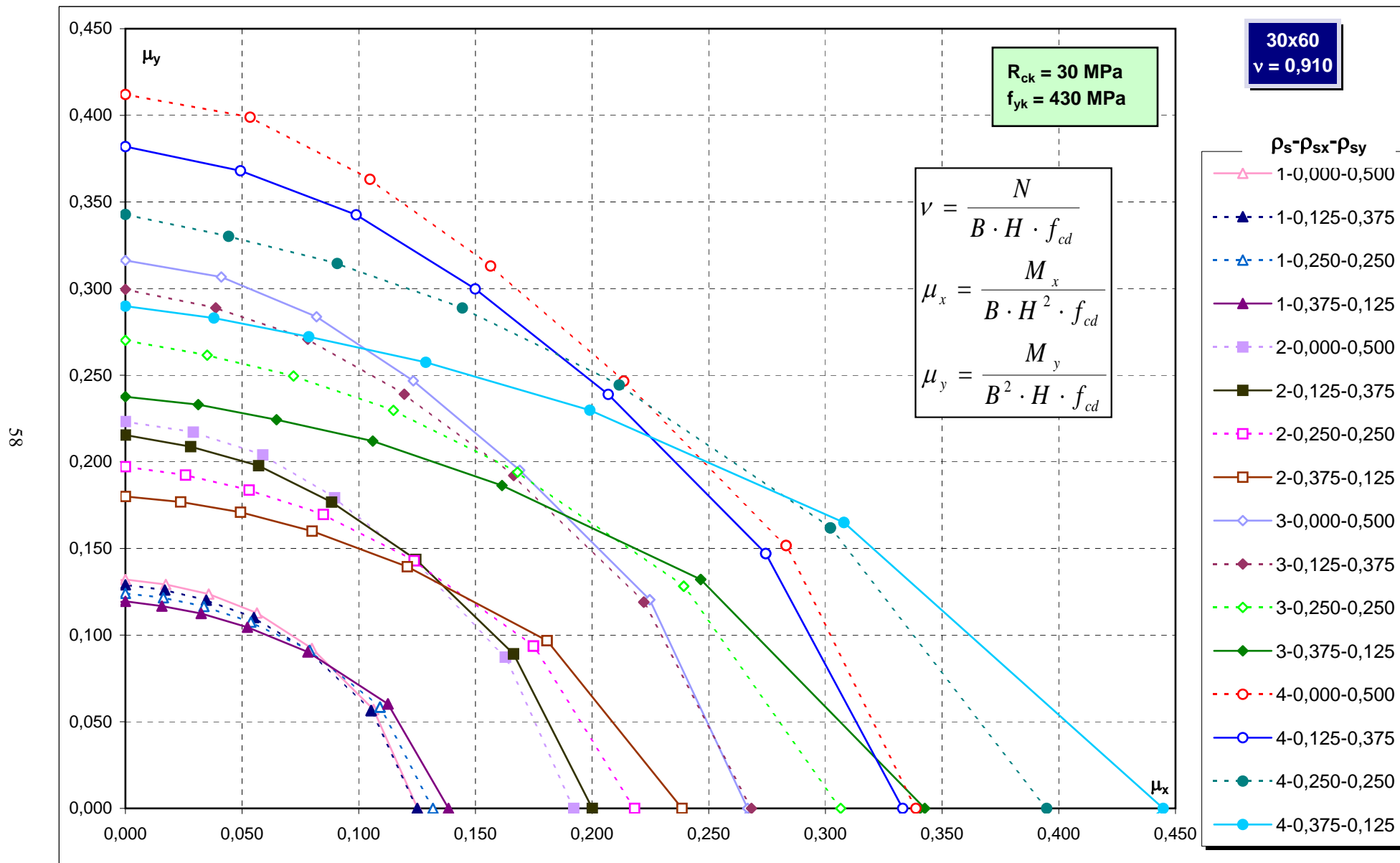
Abachi di progetto



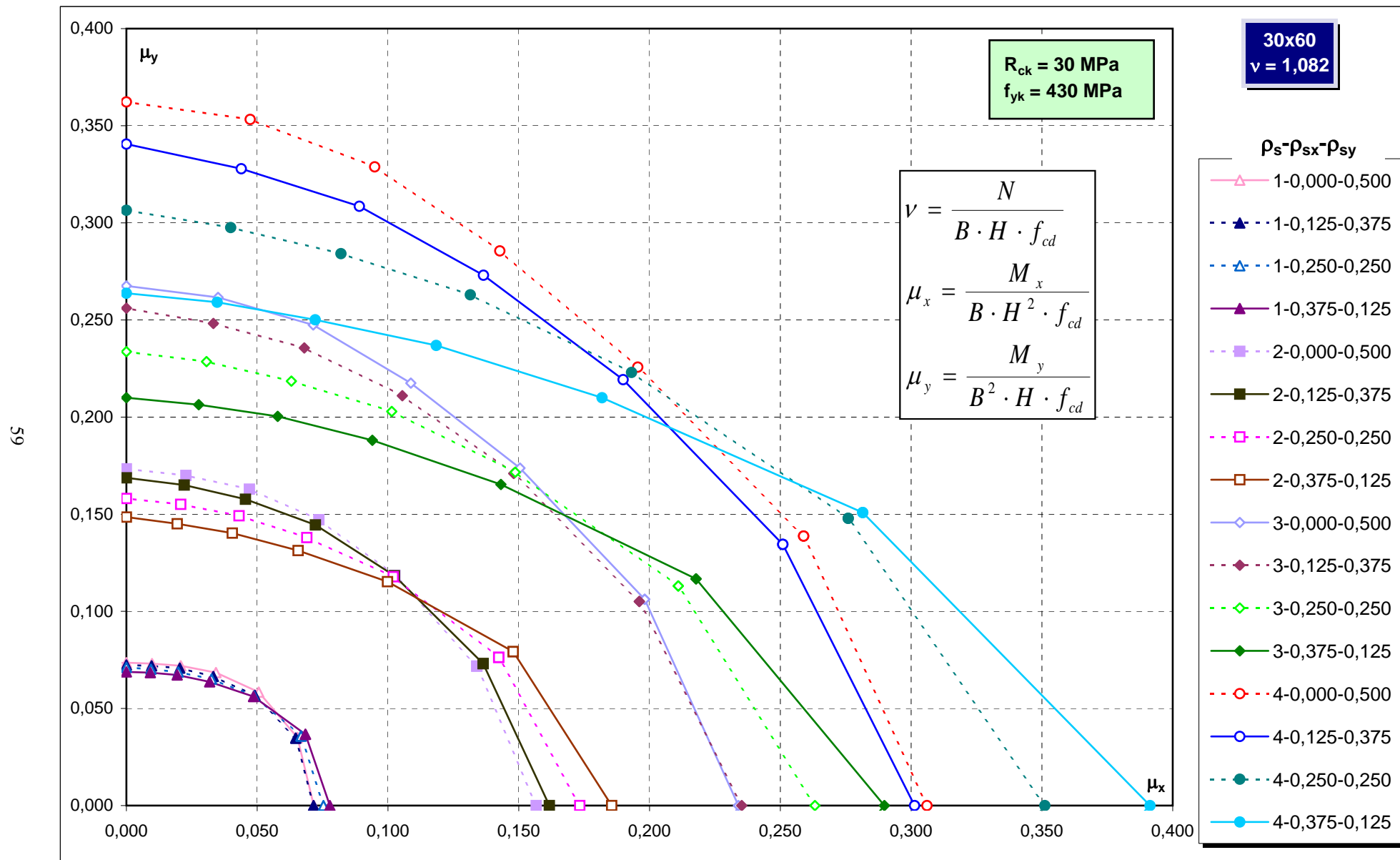
Abachi di progetto



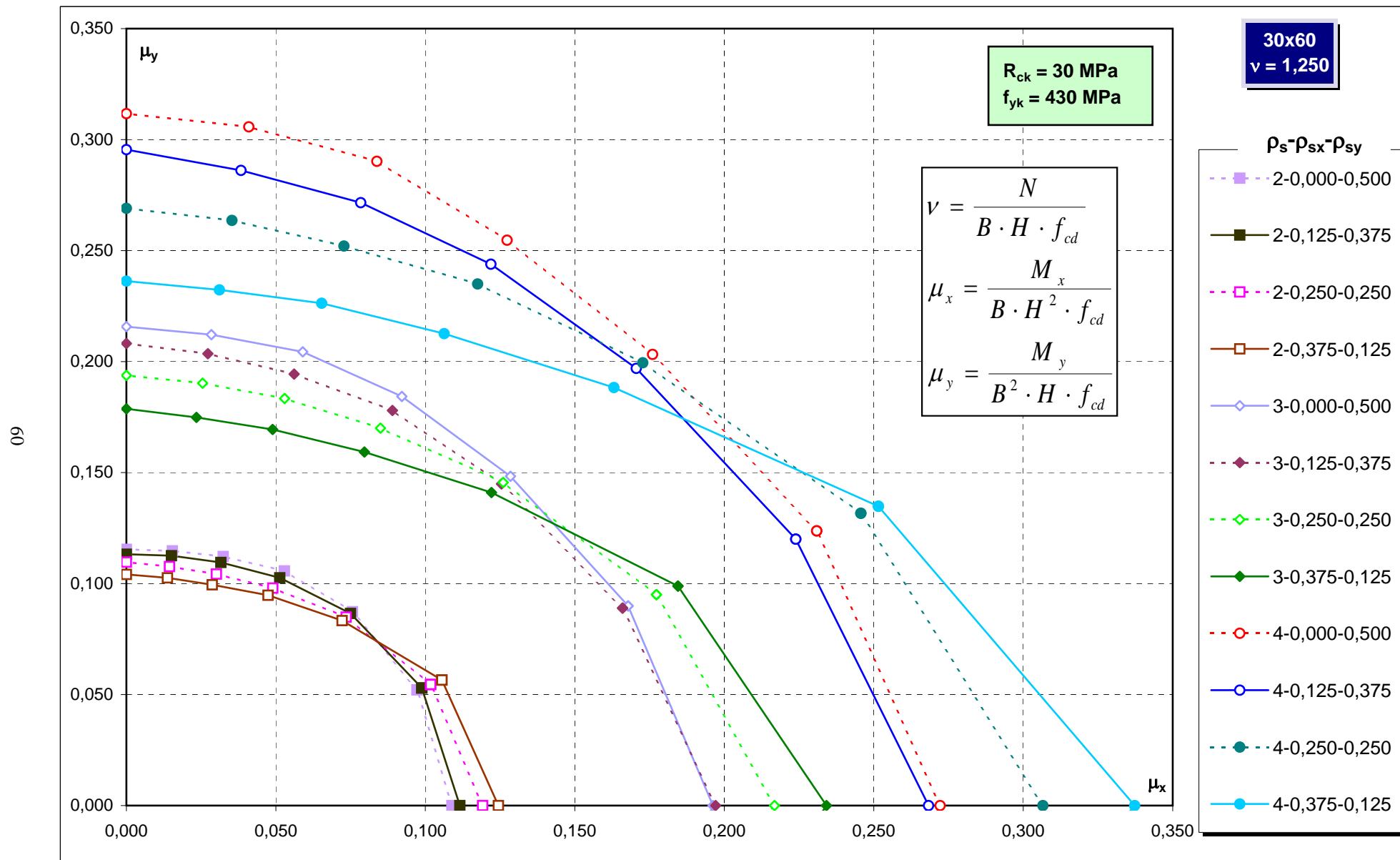
Abachi di progetto



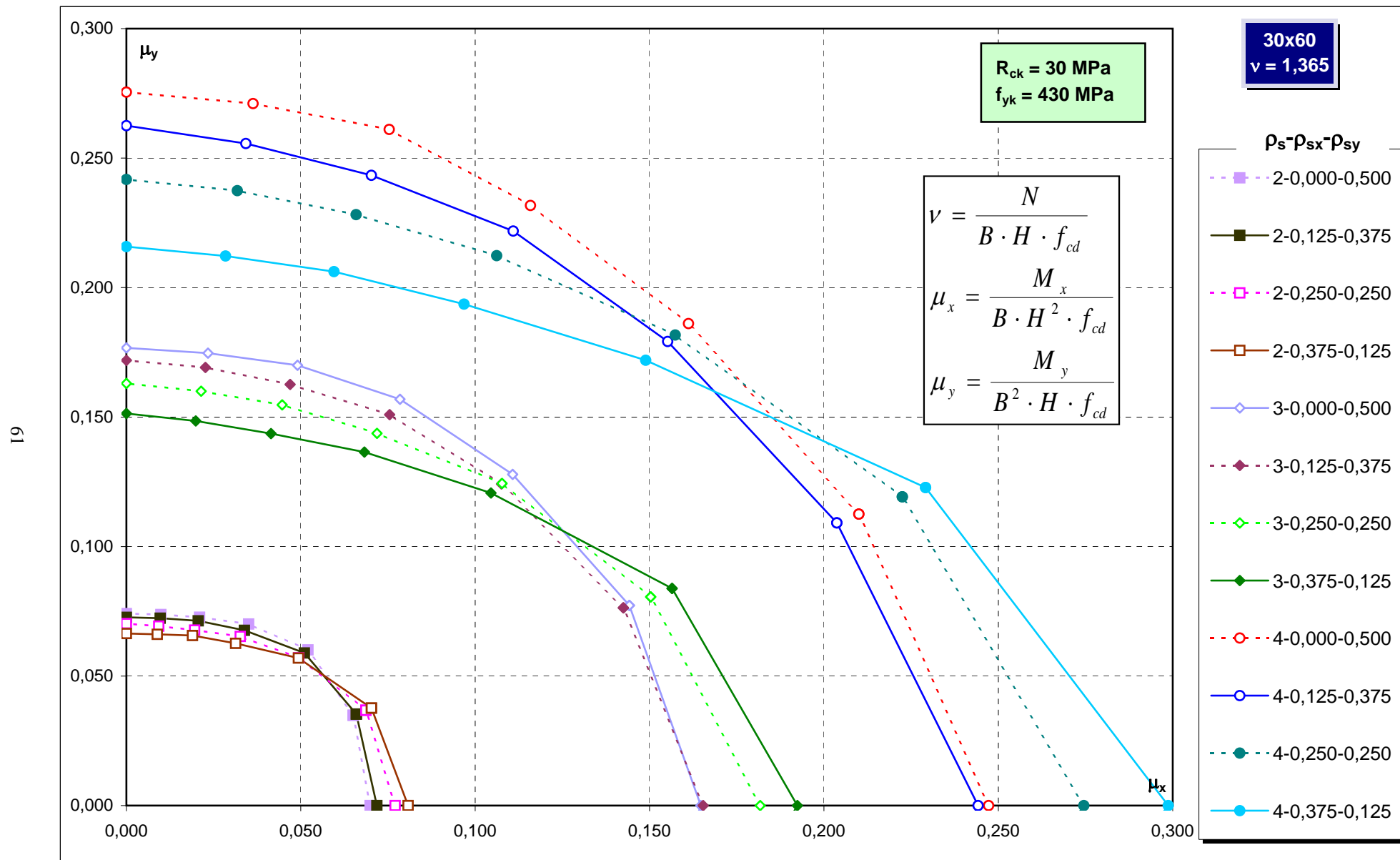
Abachi di progetto



Abachi di progetto

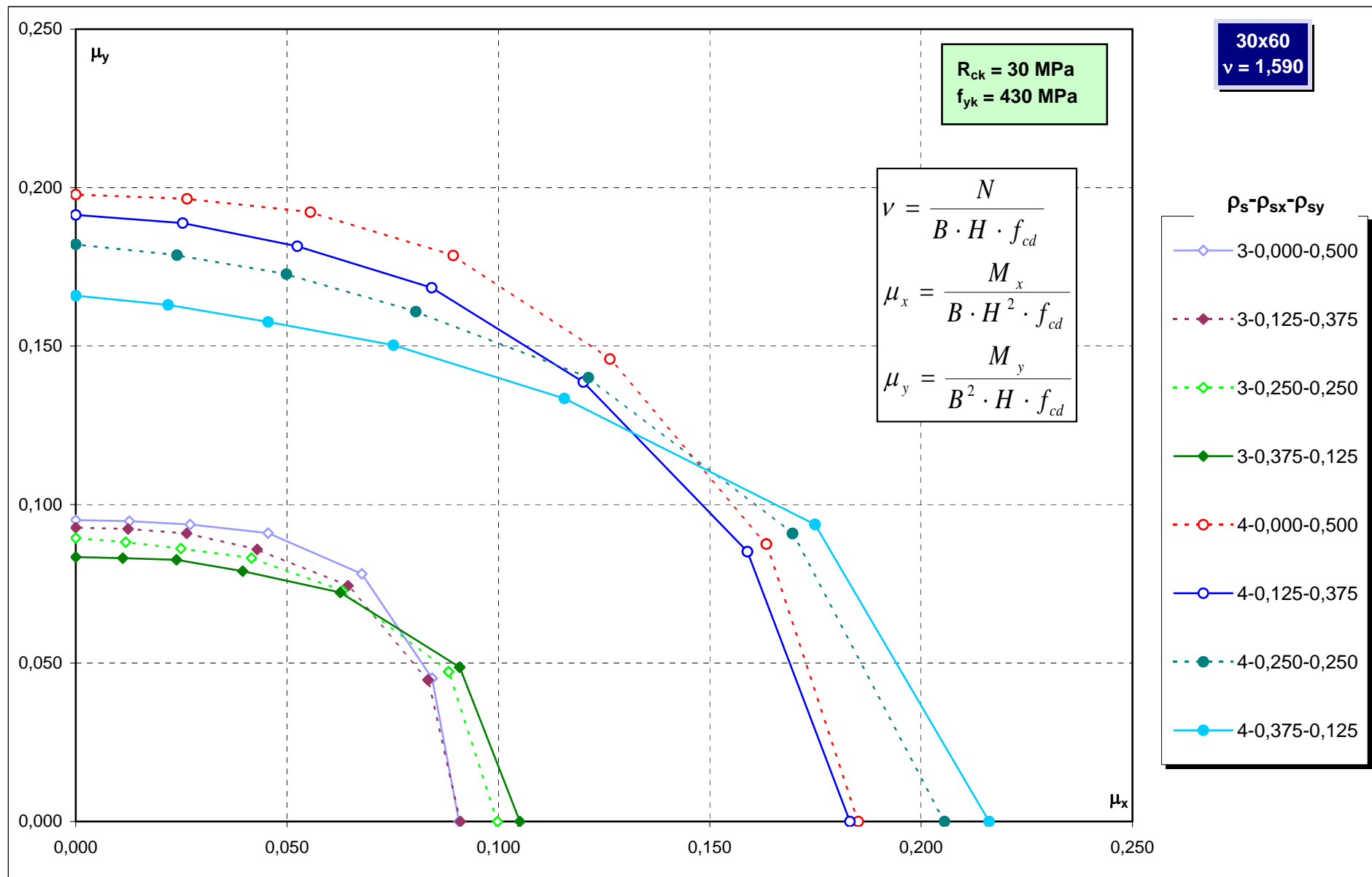


Abachi di progetto

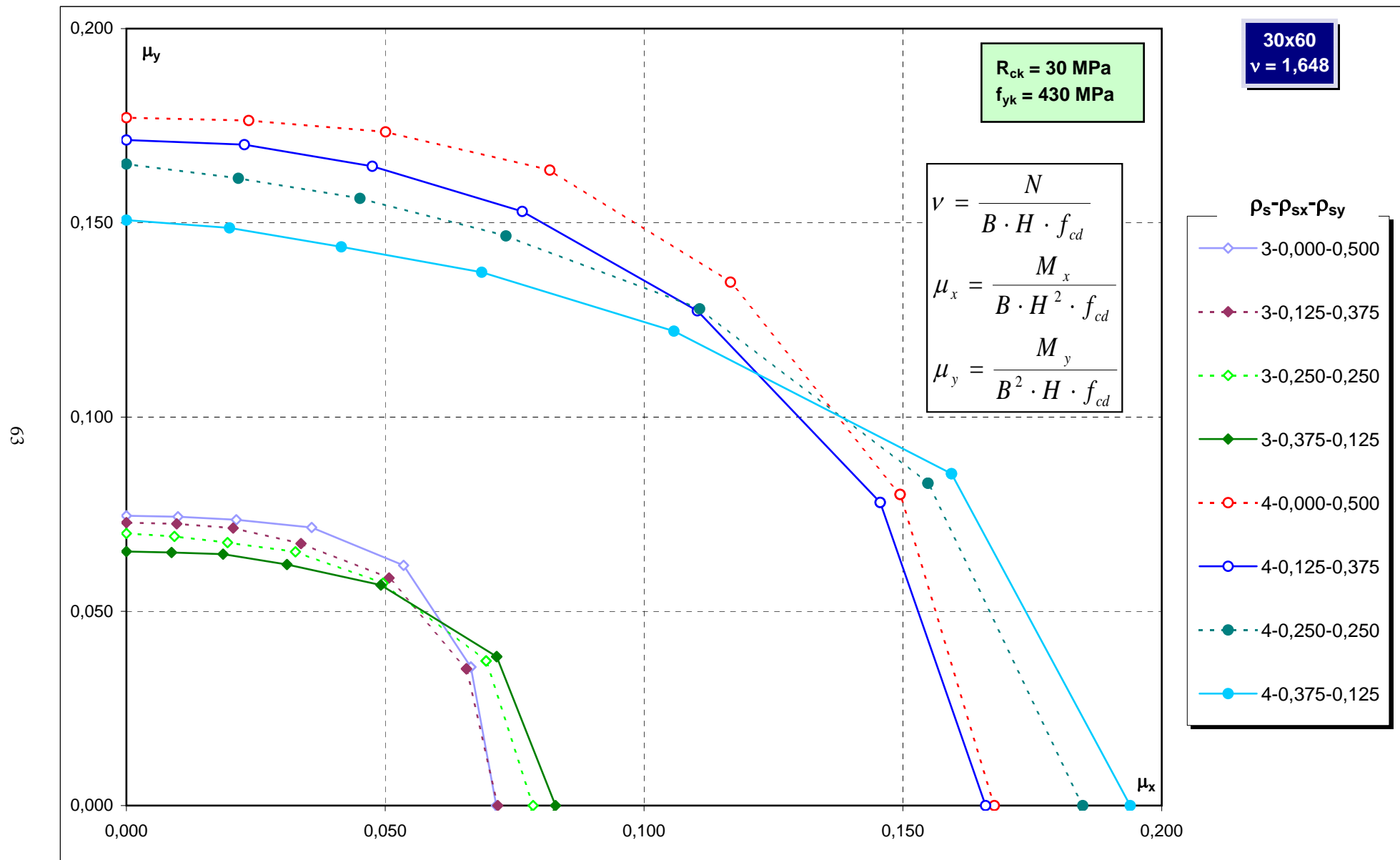


Abachi di progetto

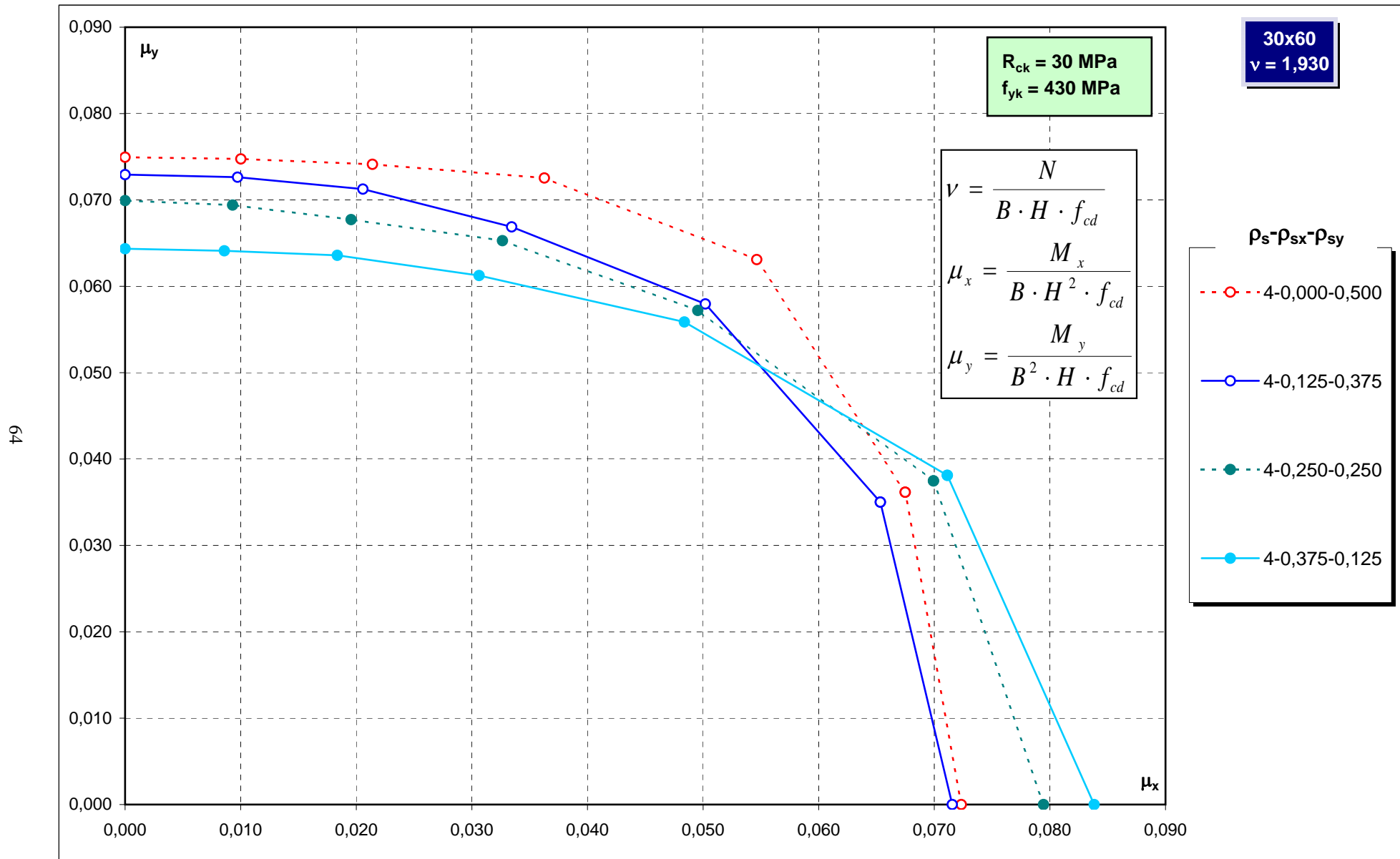
62



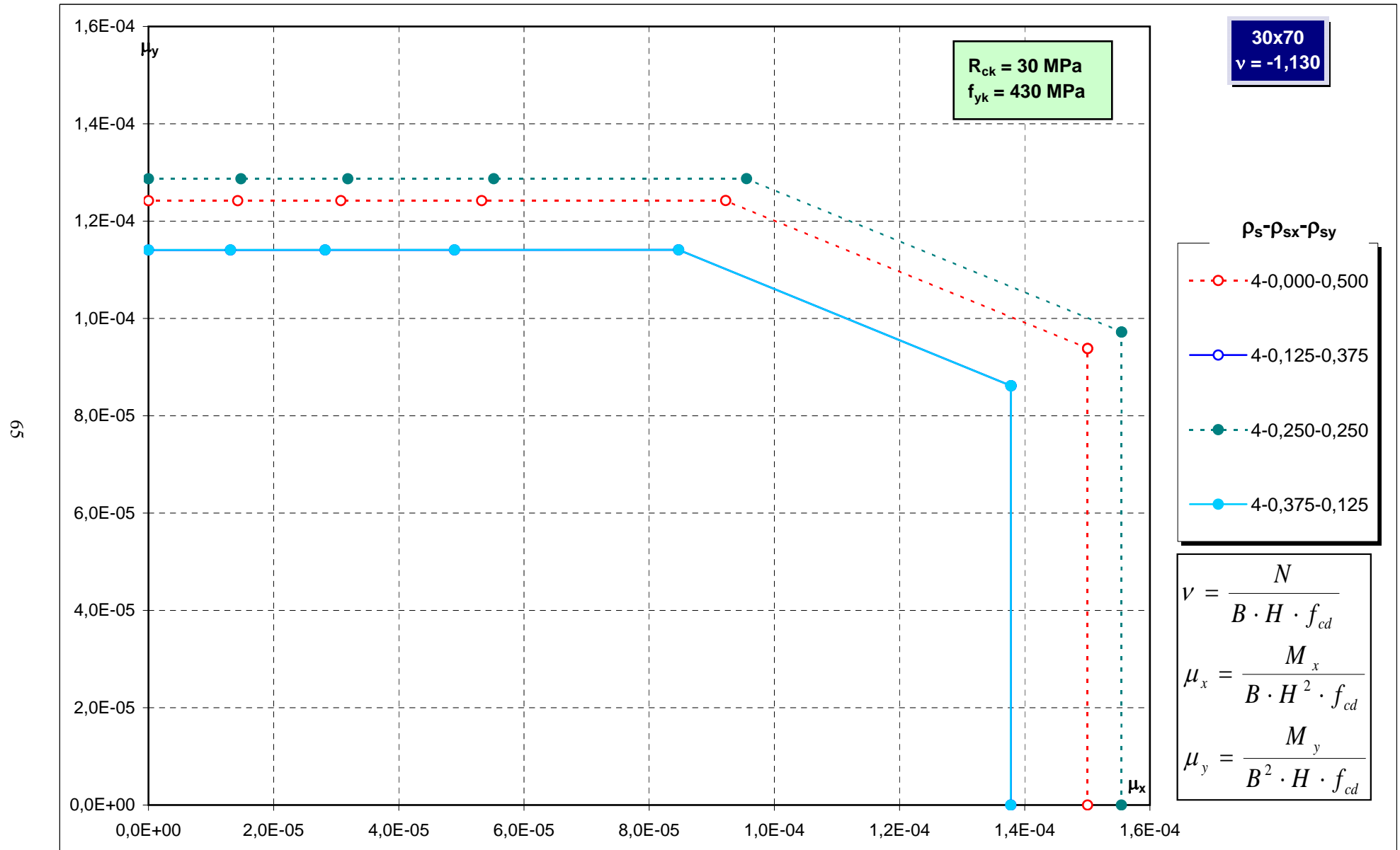
Abachi di progetto



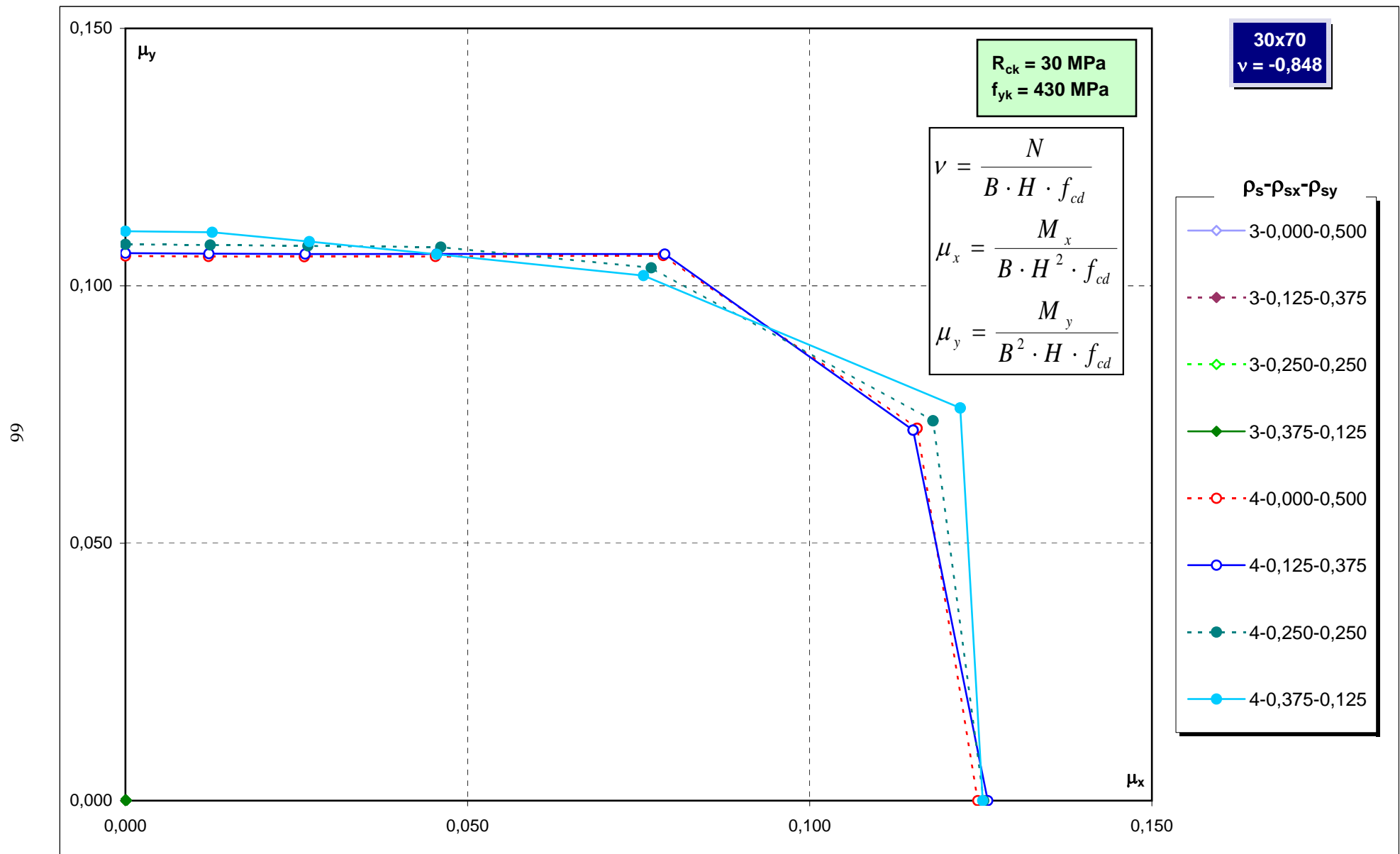
Abachi di progetto



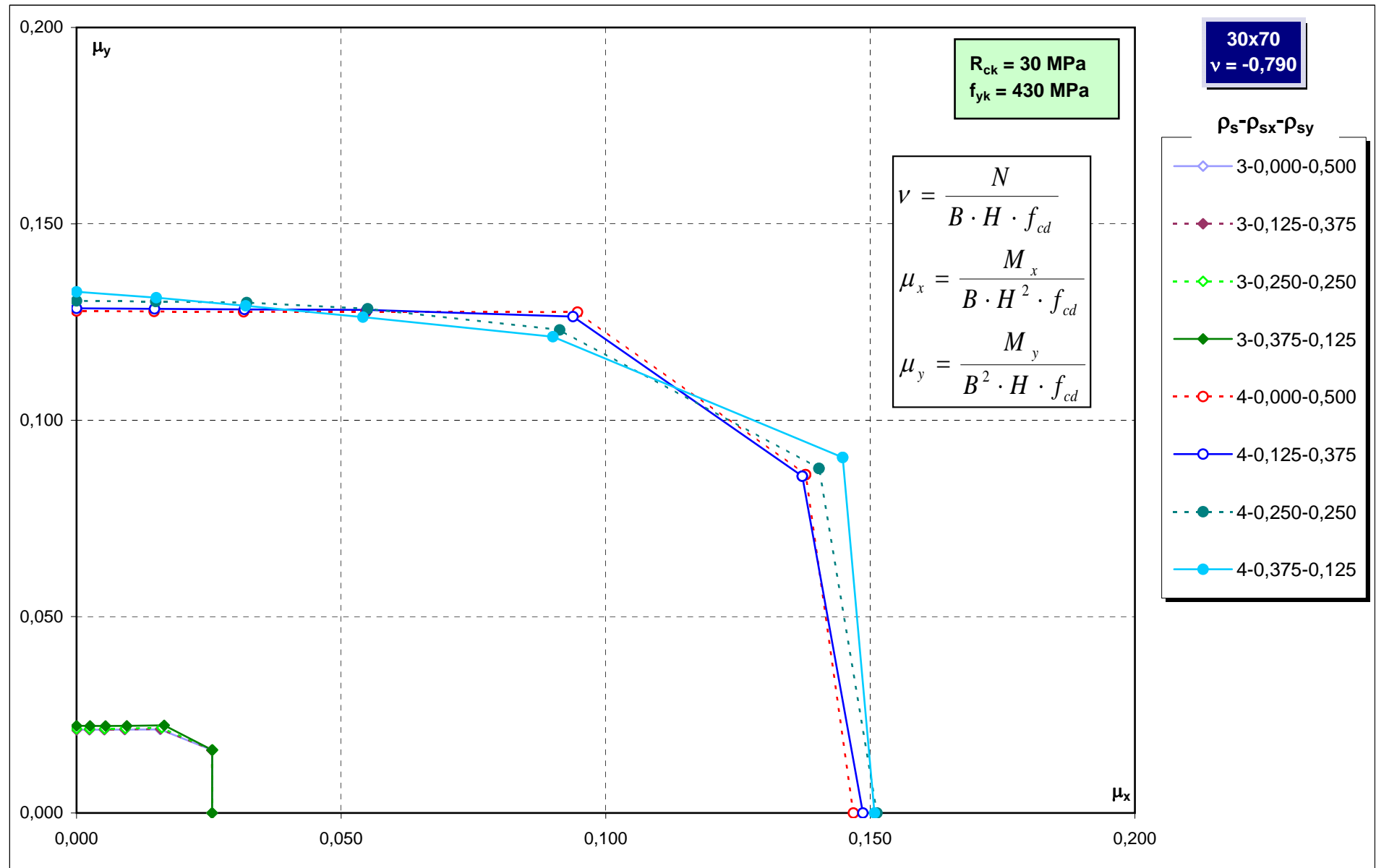
Abachi di progetto



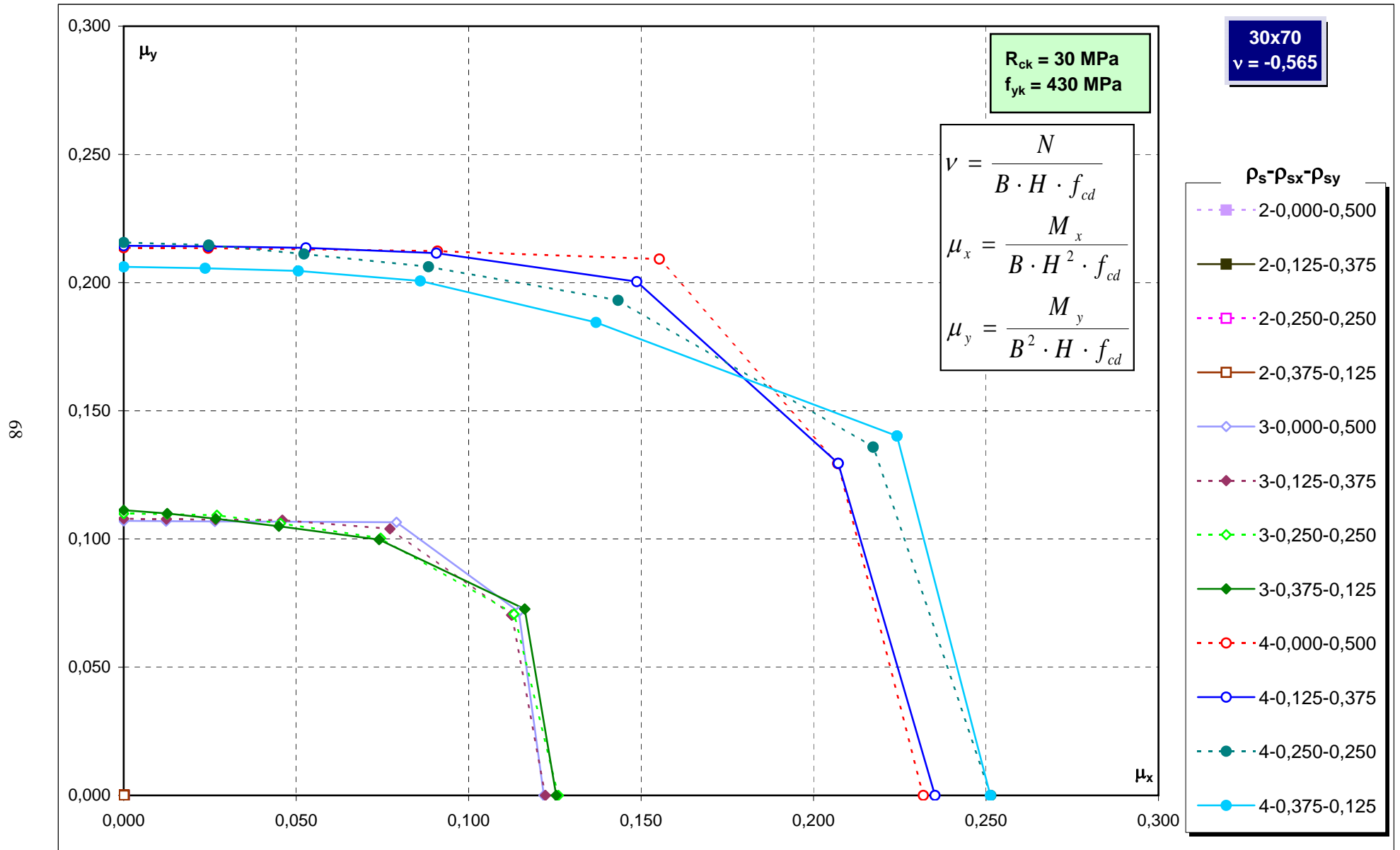
Abachi di progetto



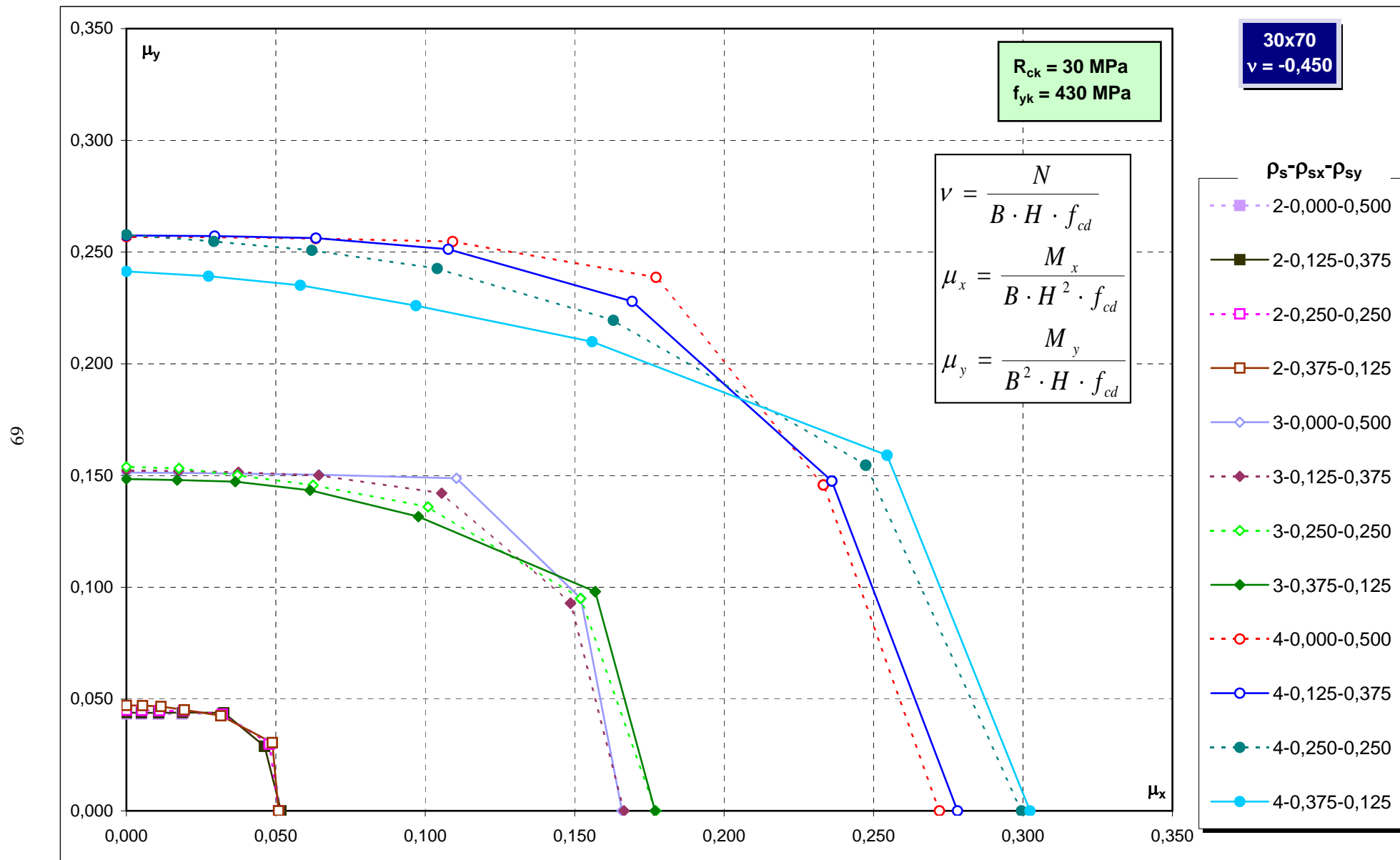
Abachi di progetto



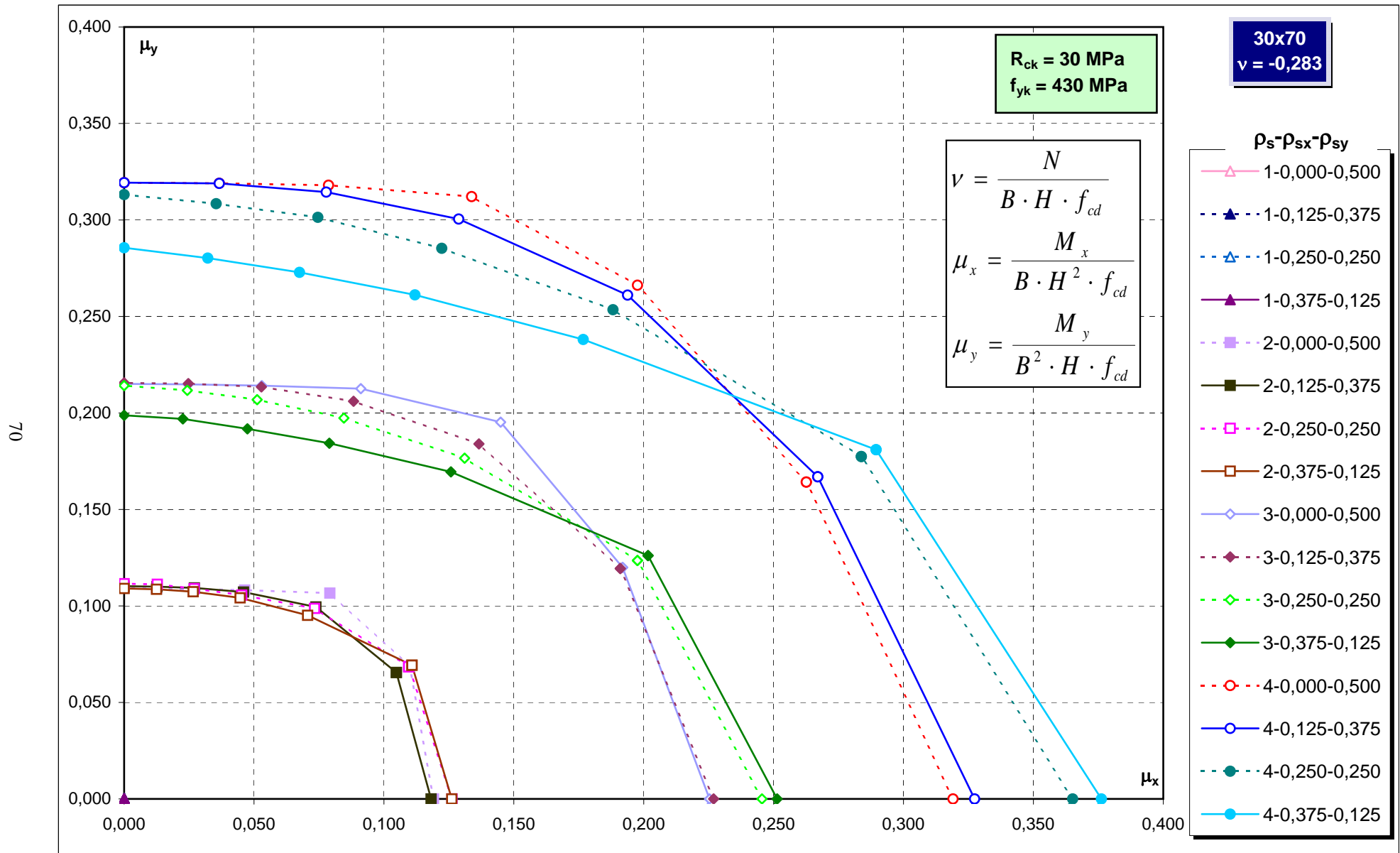
Abachi di progetto



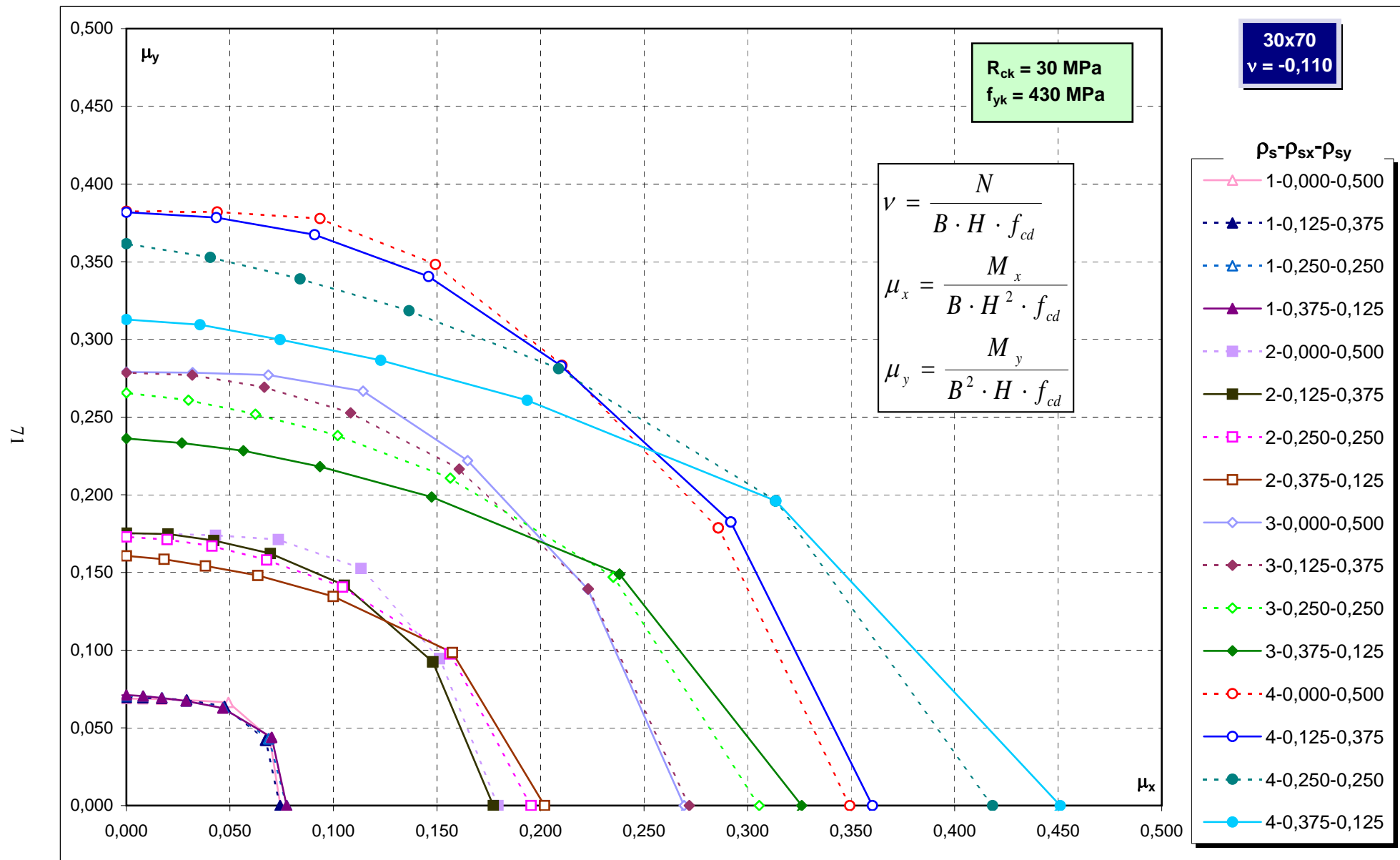
Abachi di progetto



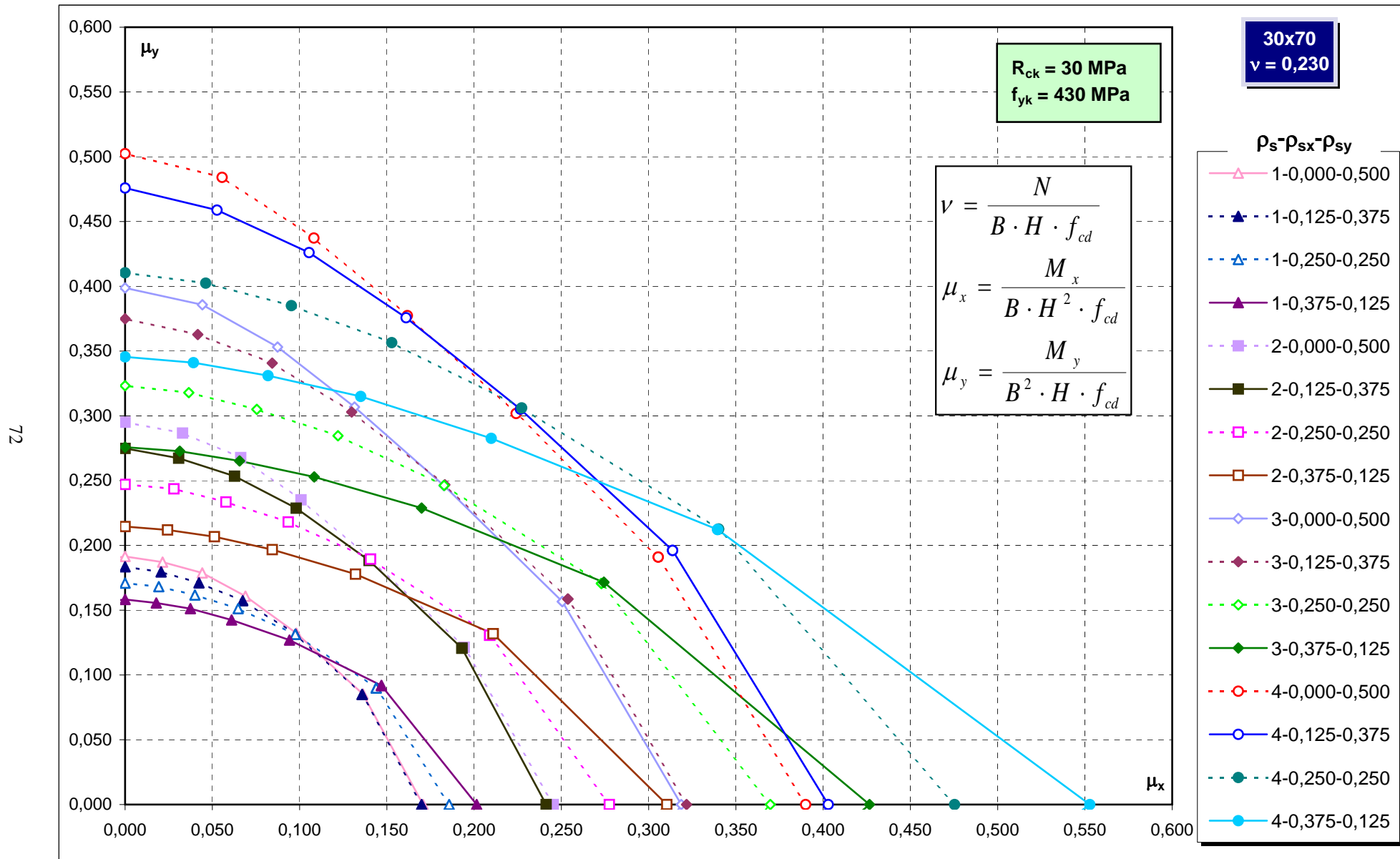
Abachi di progetto



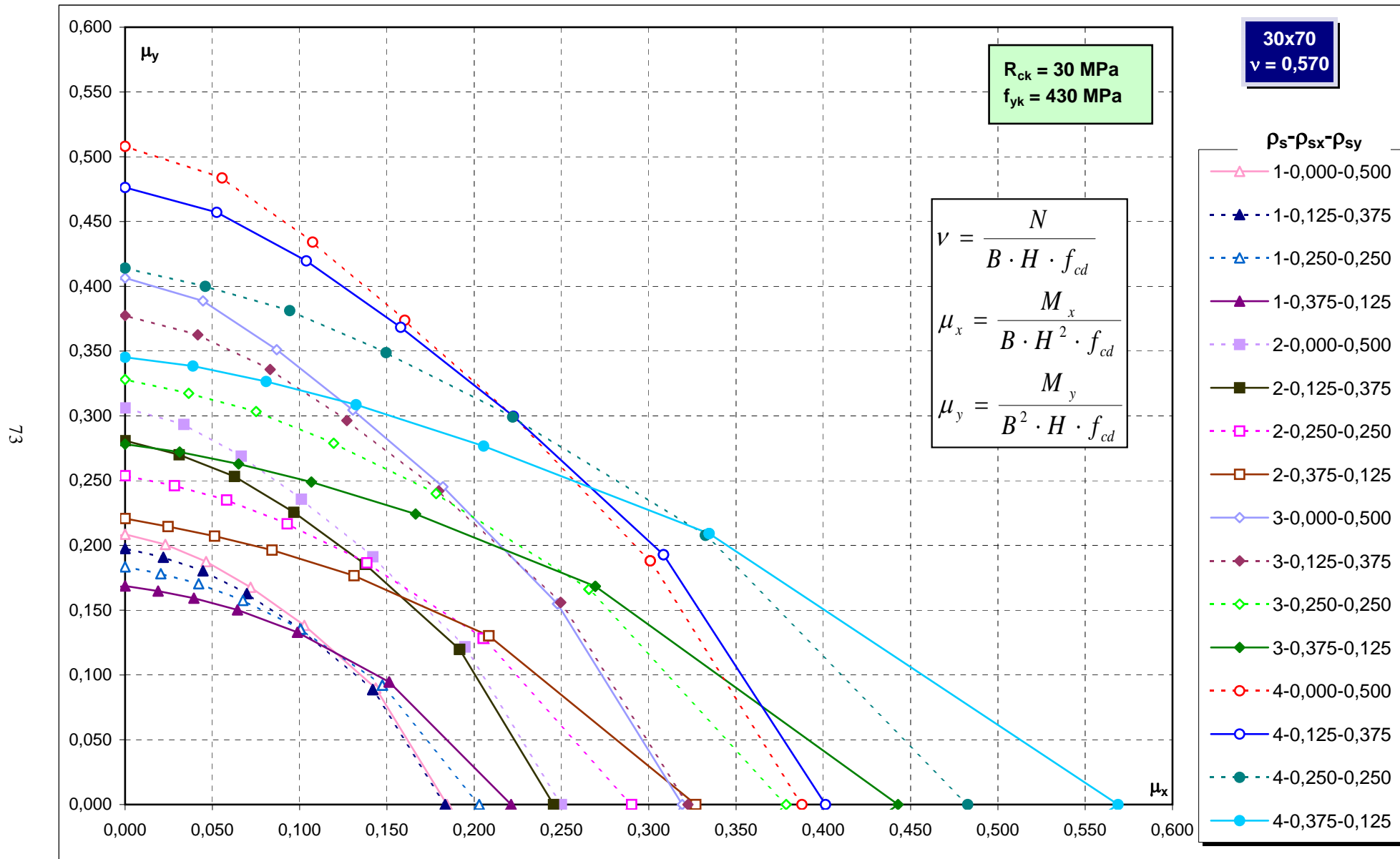
Abachi di progetto



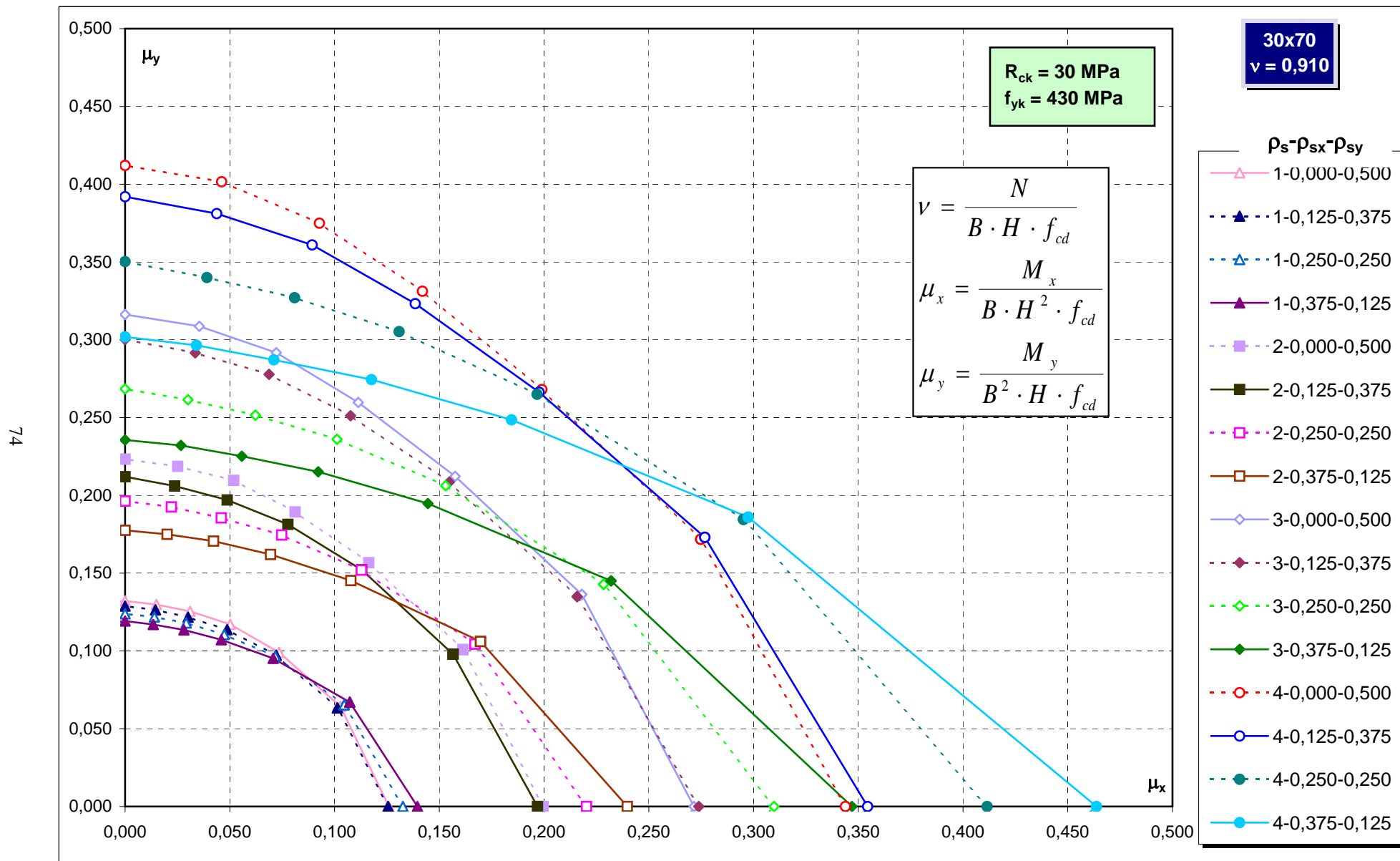
Abachi di progetto



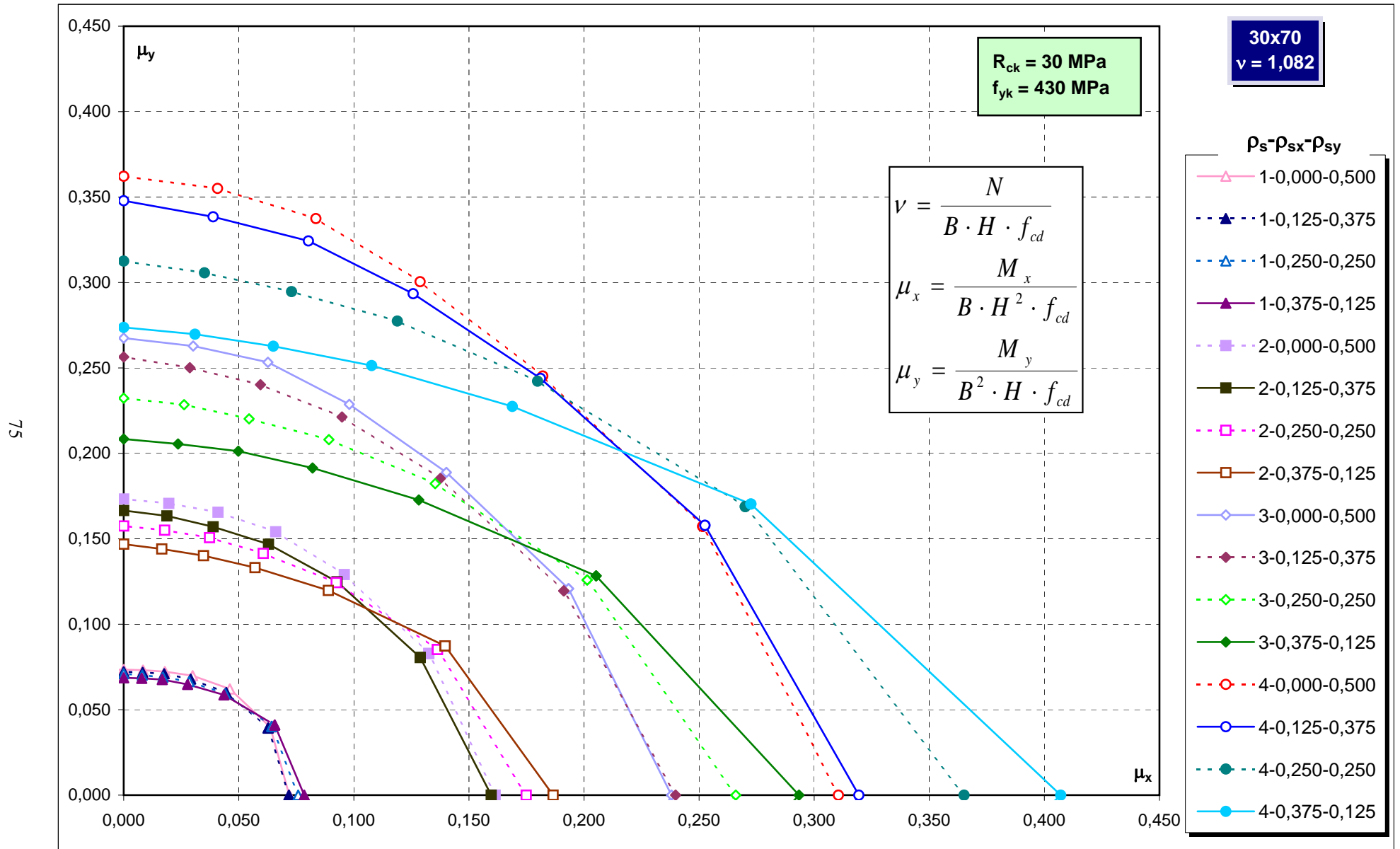
Abachi di progetto



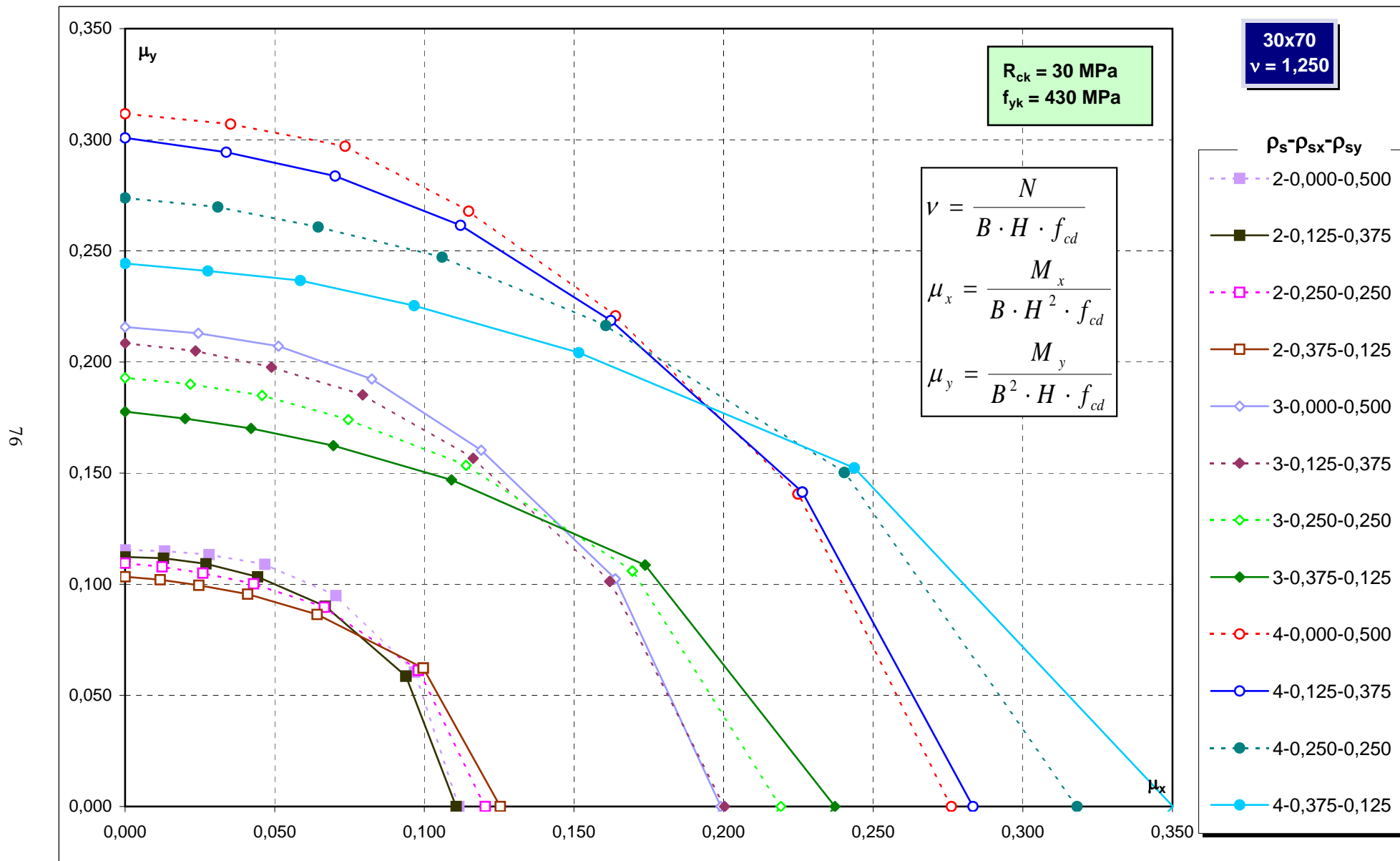
Abachi di progetto



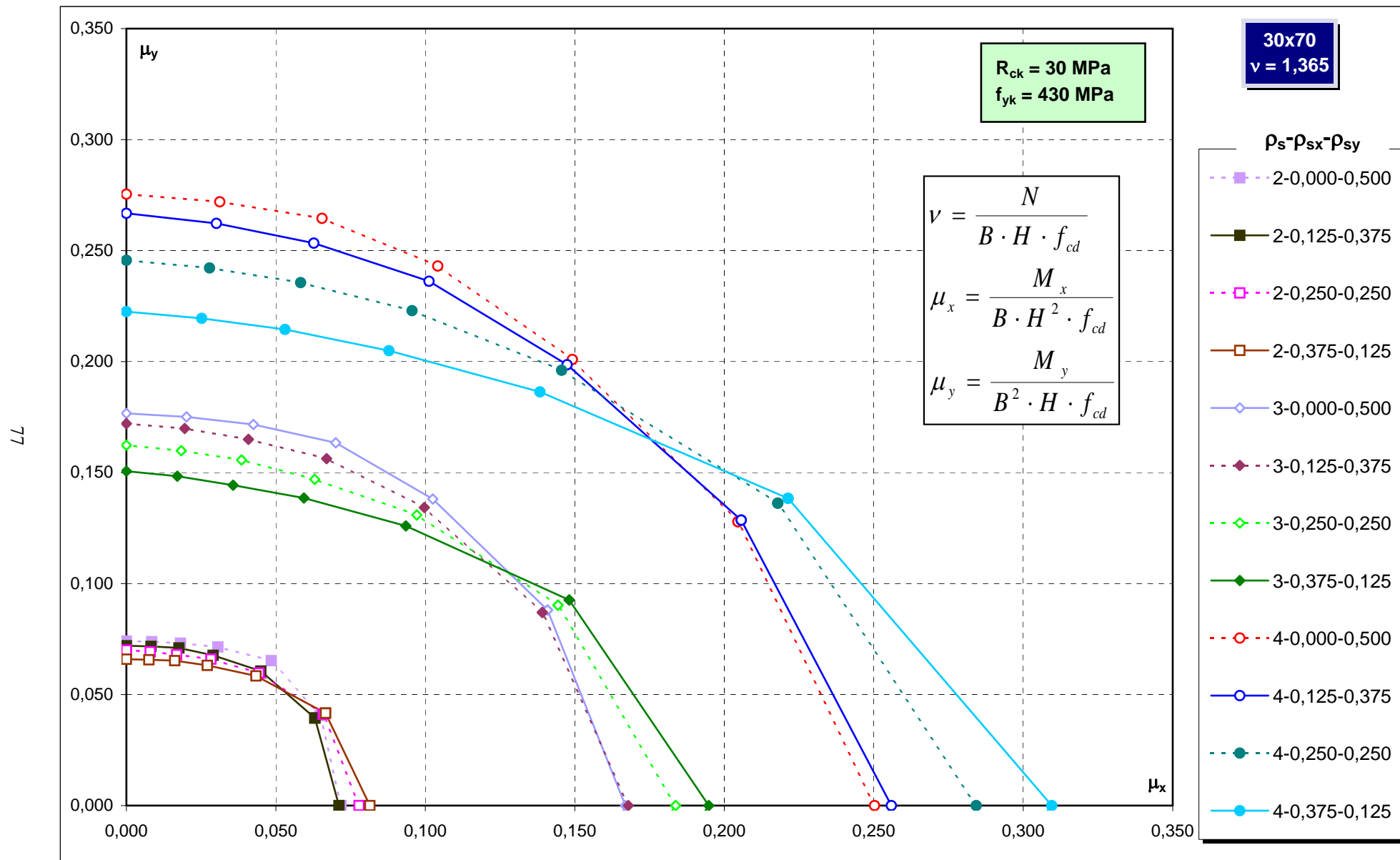
Abachi di progetto



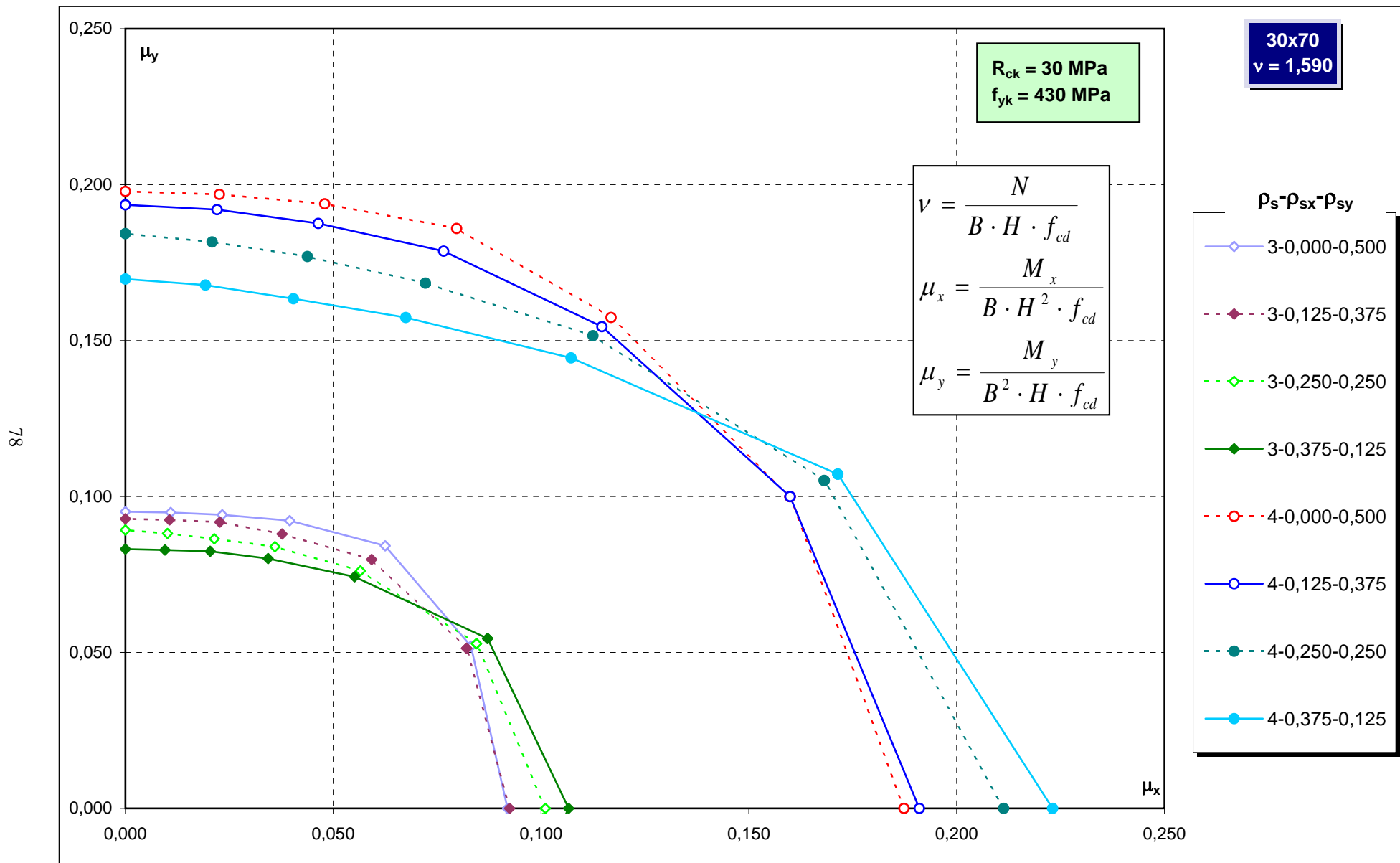
Abachi di progetto



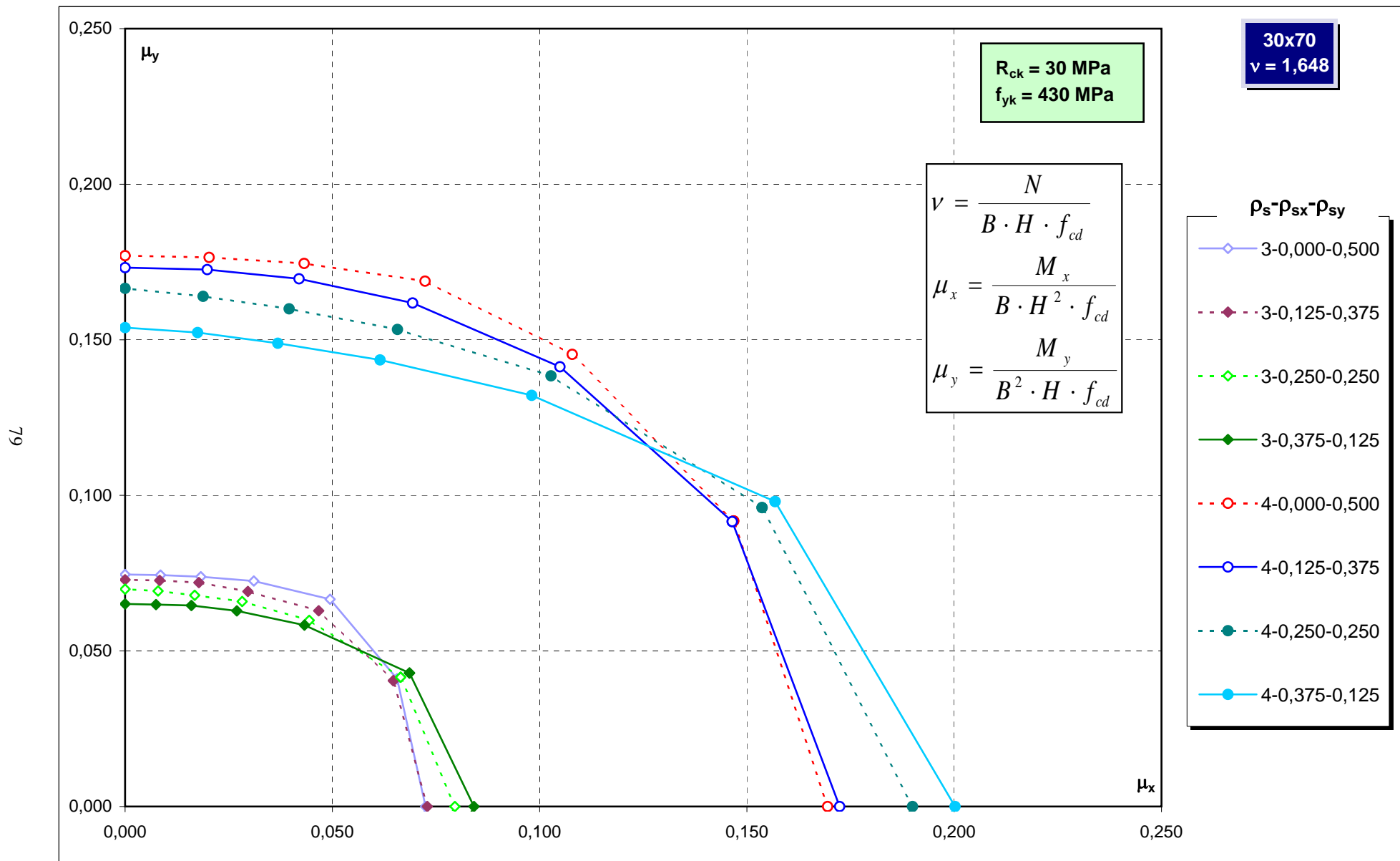
Abachi di progetto



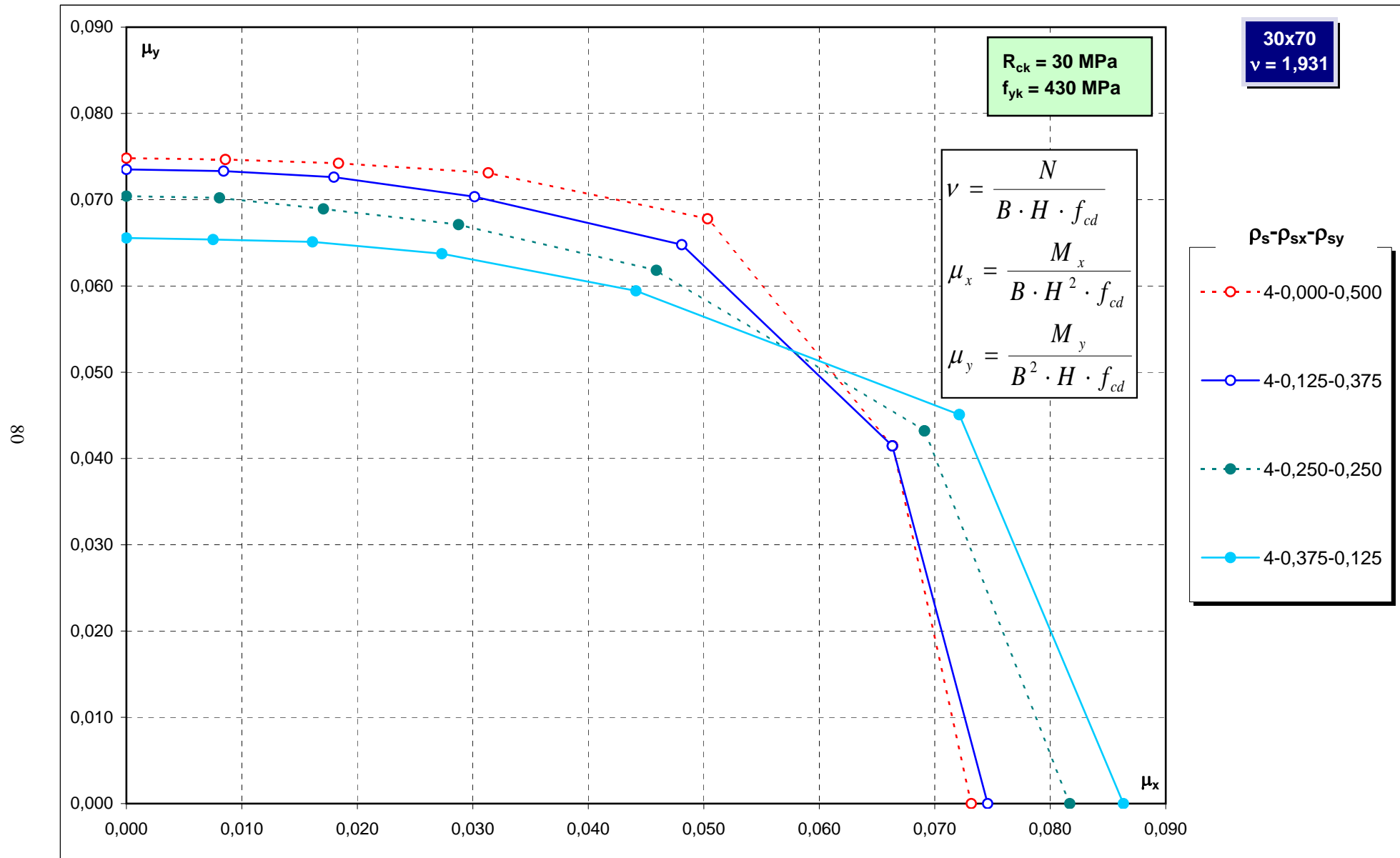
Abachi di progetto



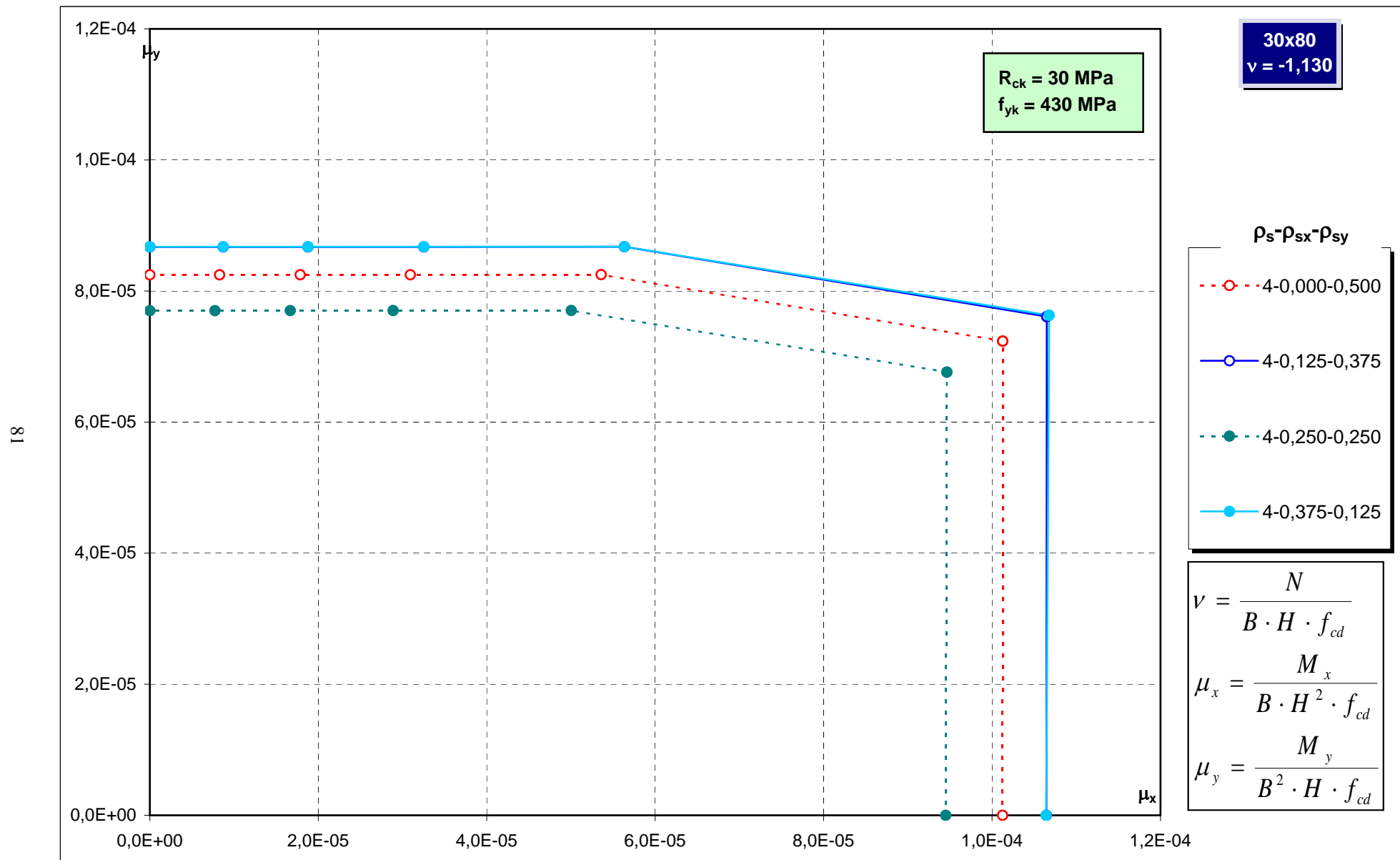
Abachi di progetto



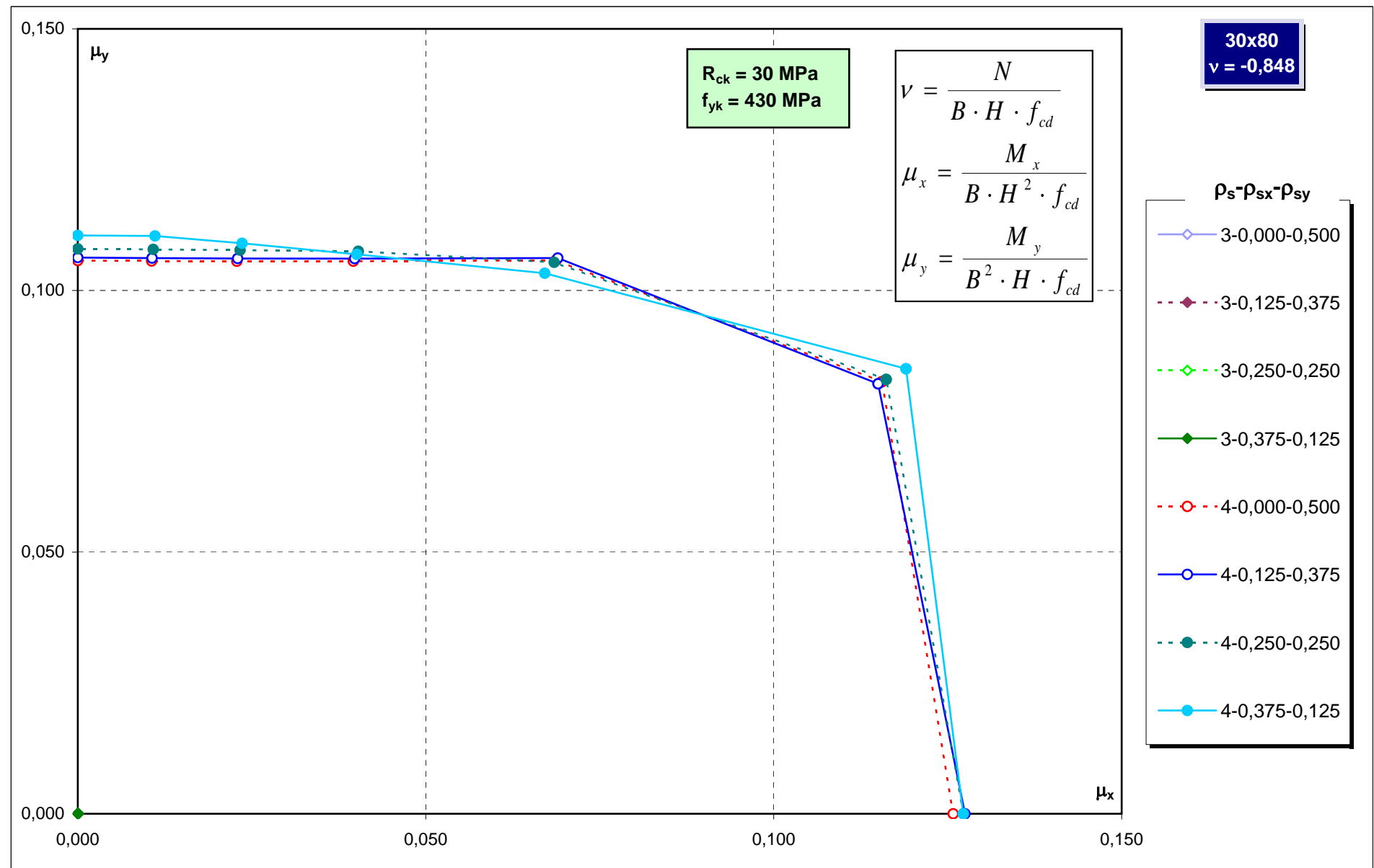
Abachi di progetto



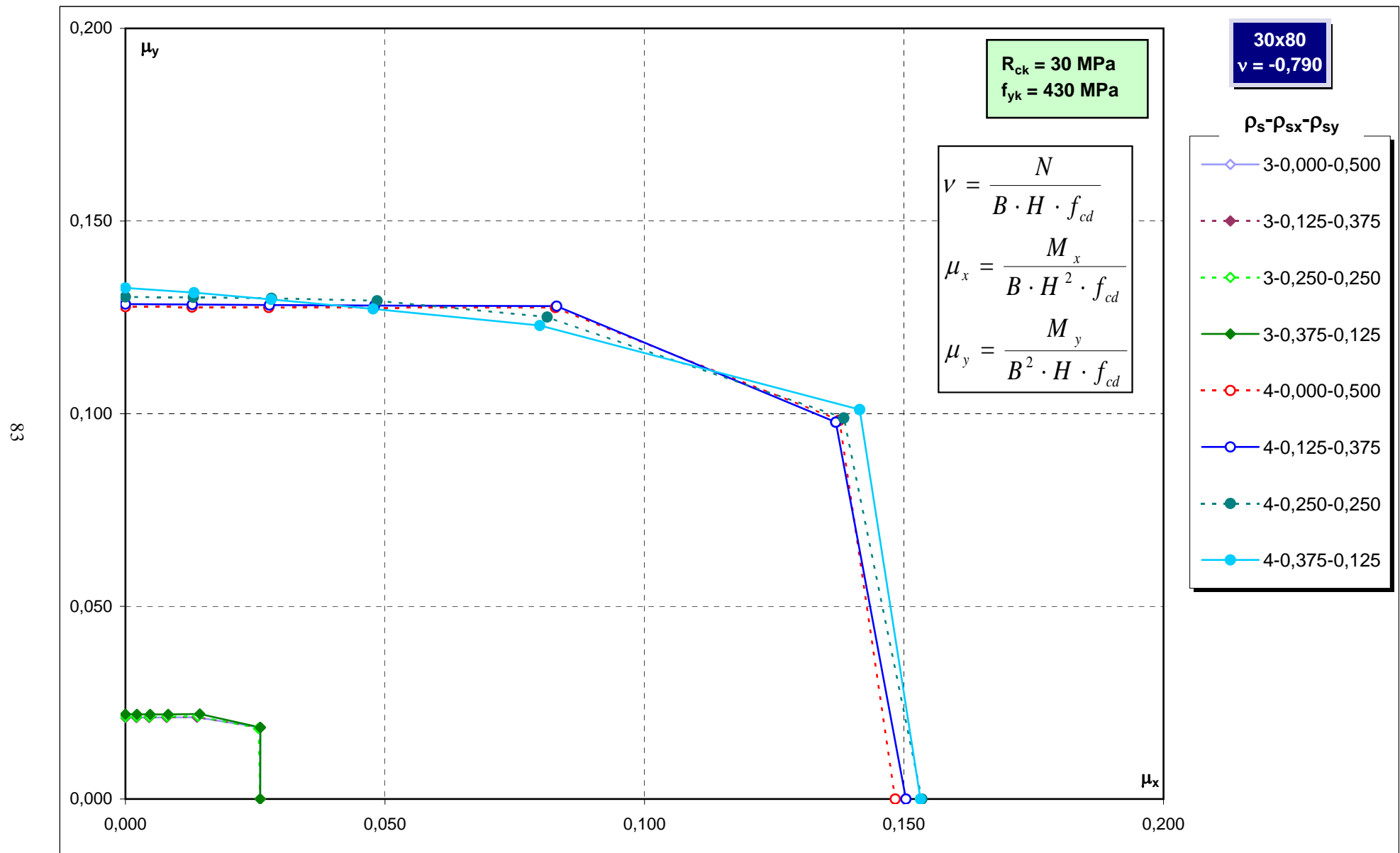
Abachi di progetto



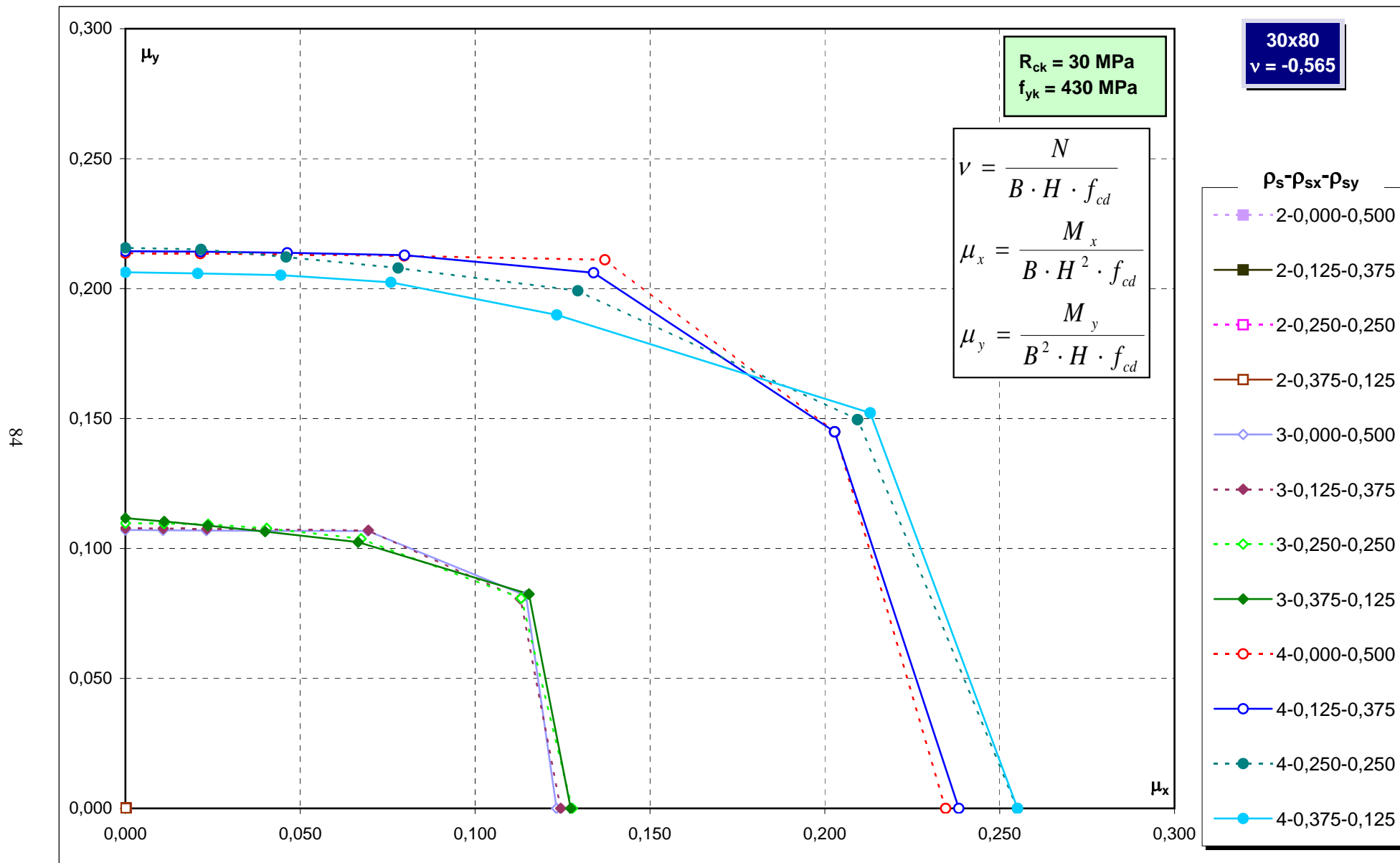
Abachi di progetto



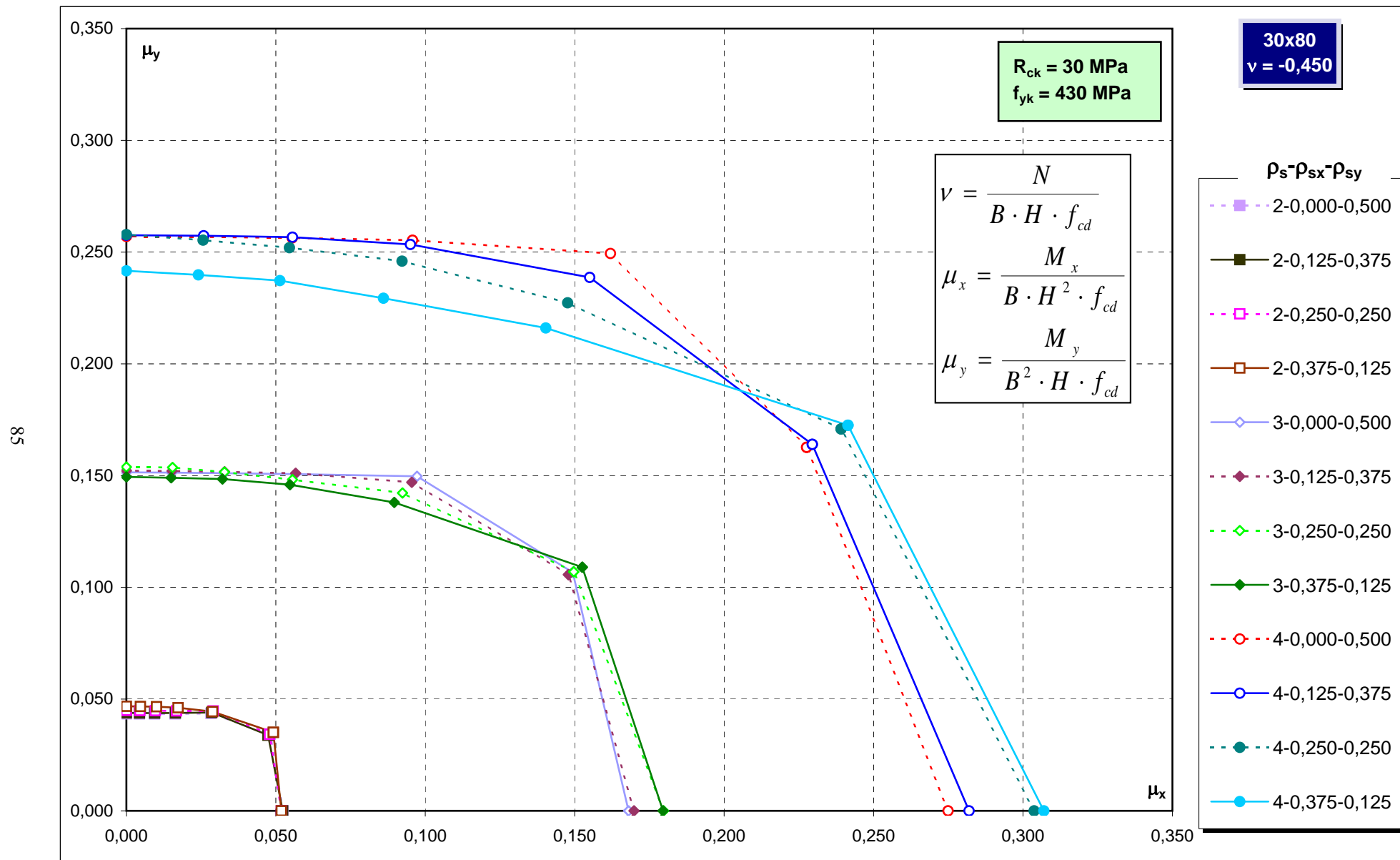
Abachi di progetto



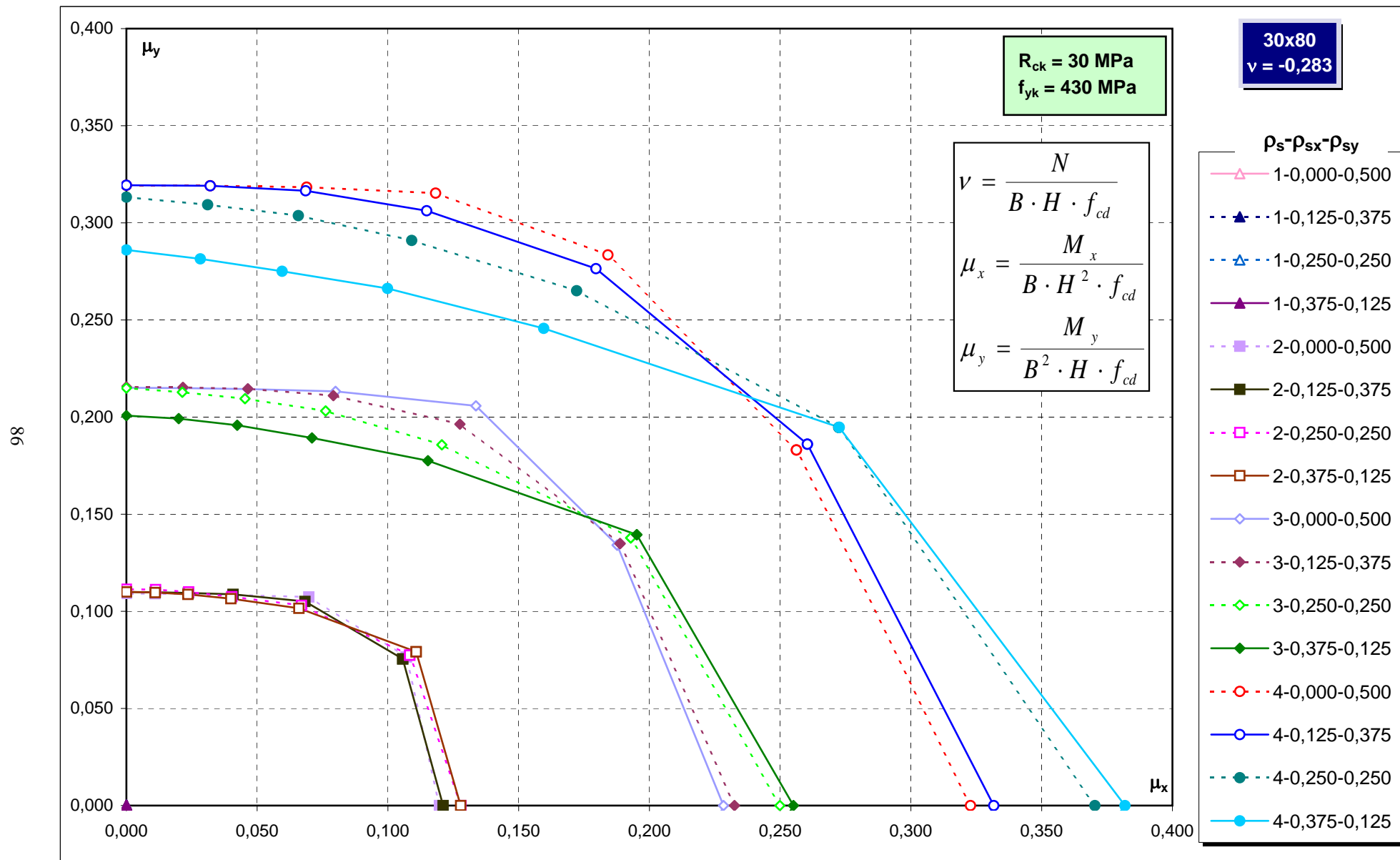
Abachi di progetto



Abachi di progetto

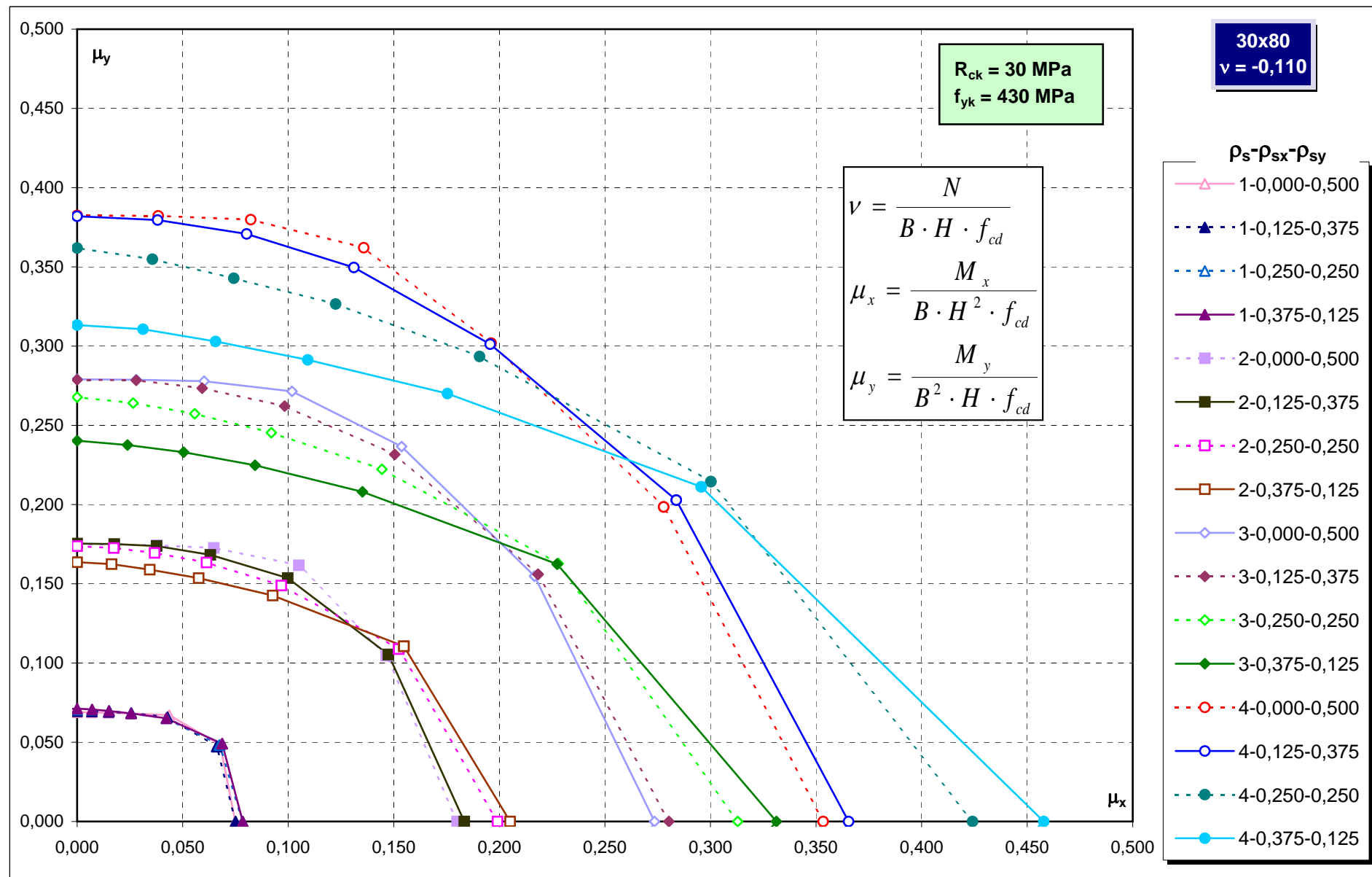


Abachi di progetto

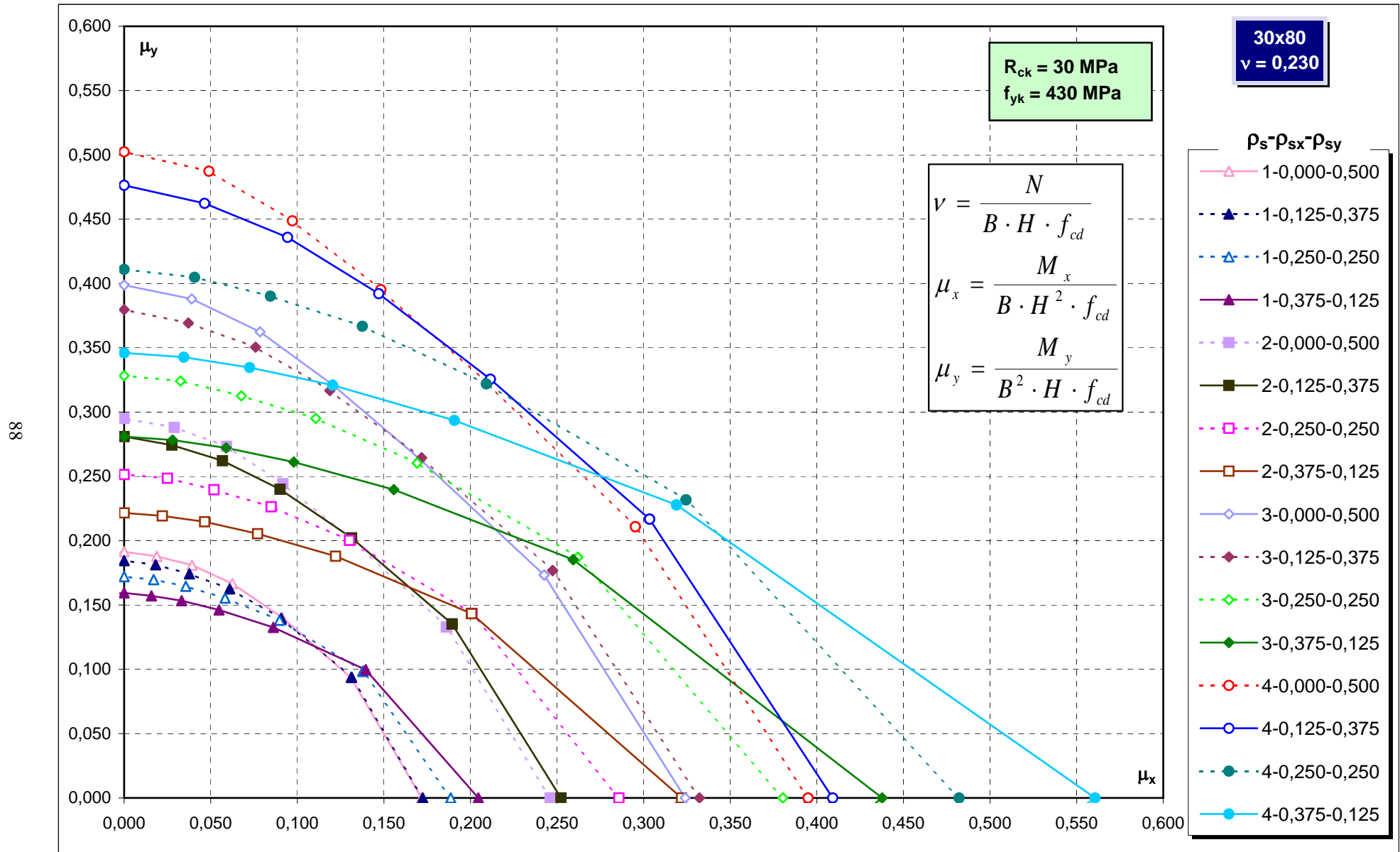


Abachi di progetto

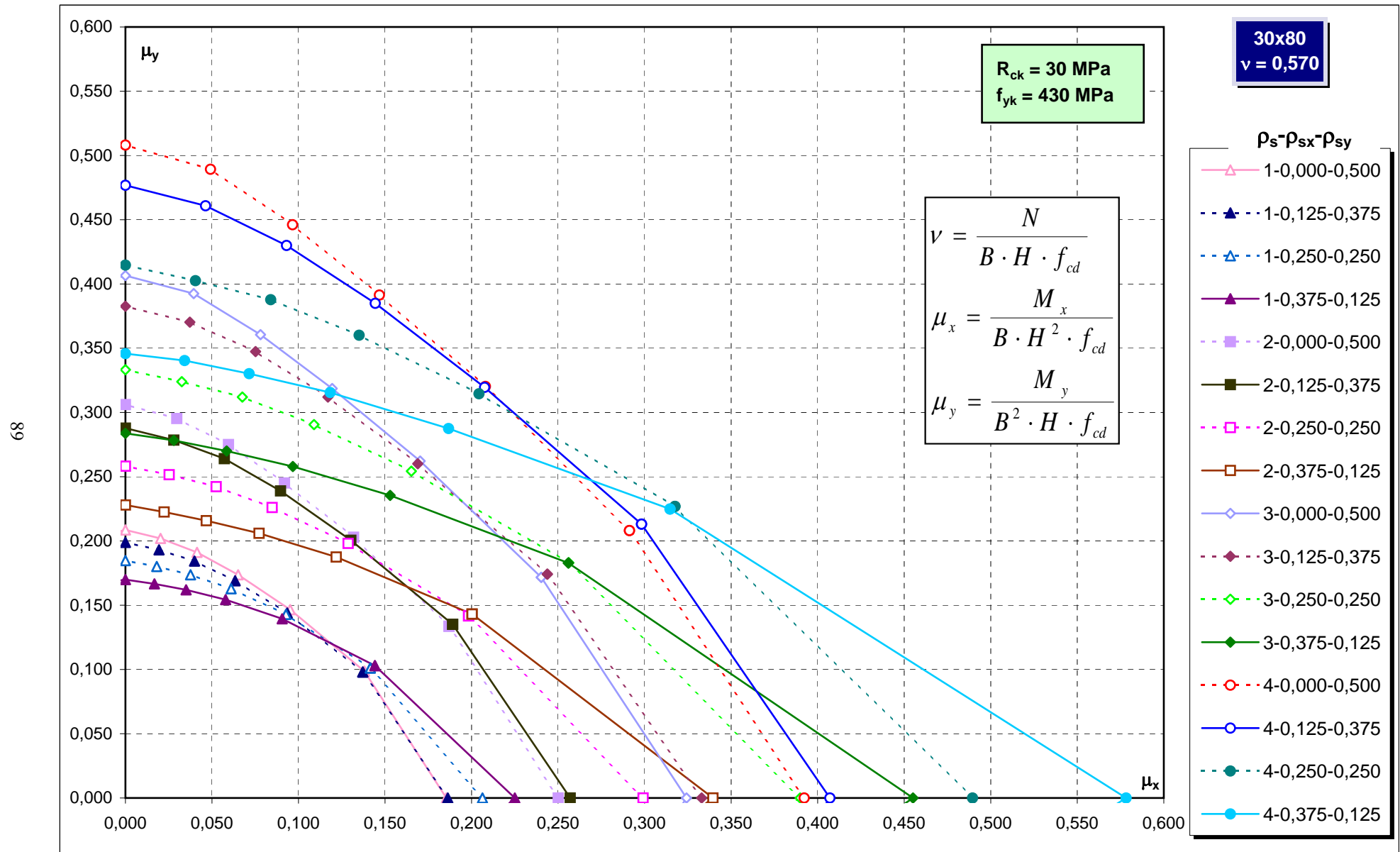
87



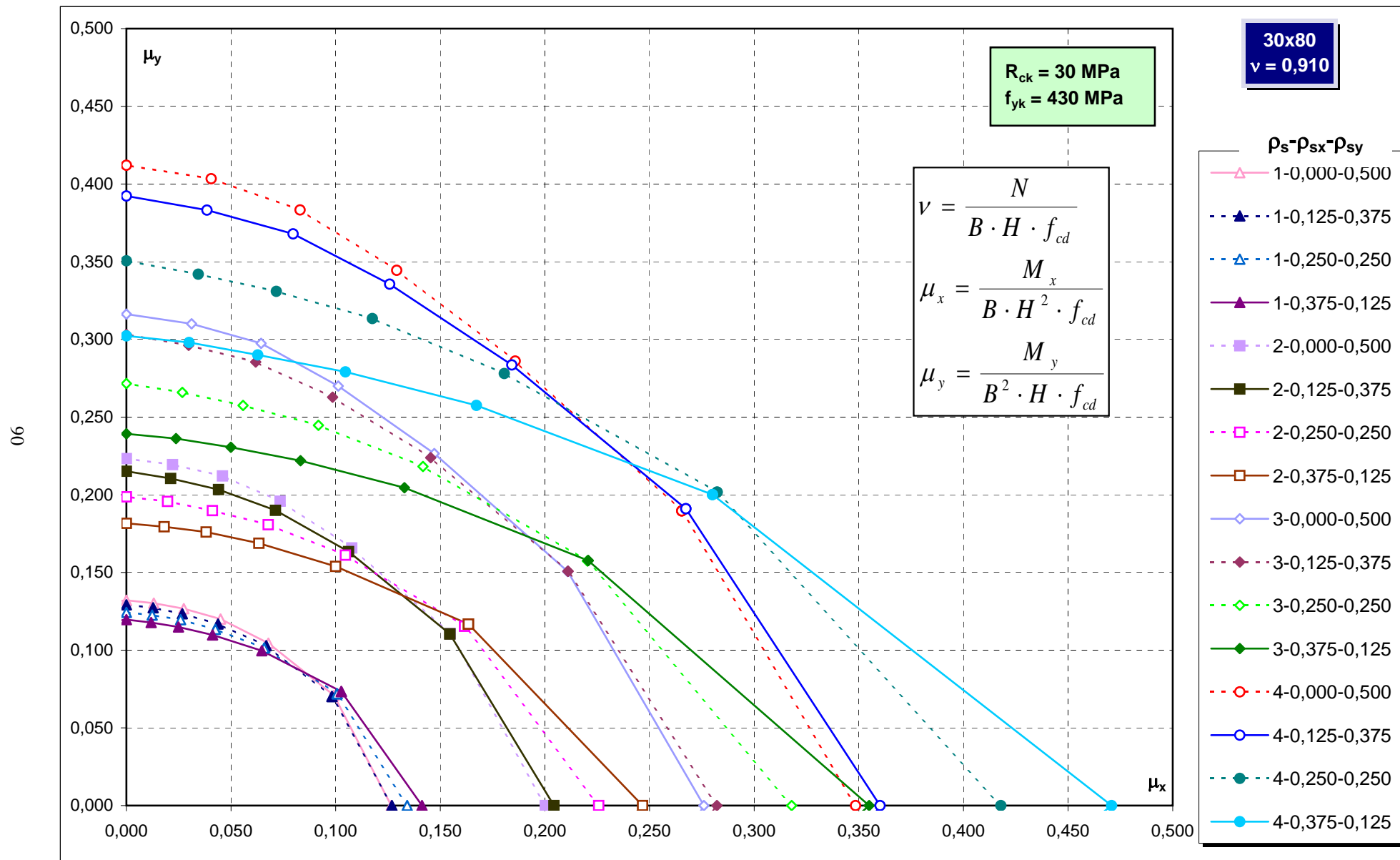
Abachi di progetto



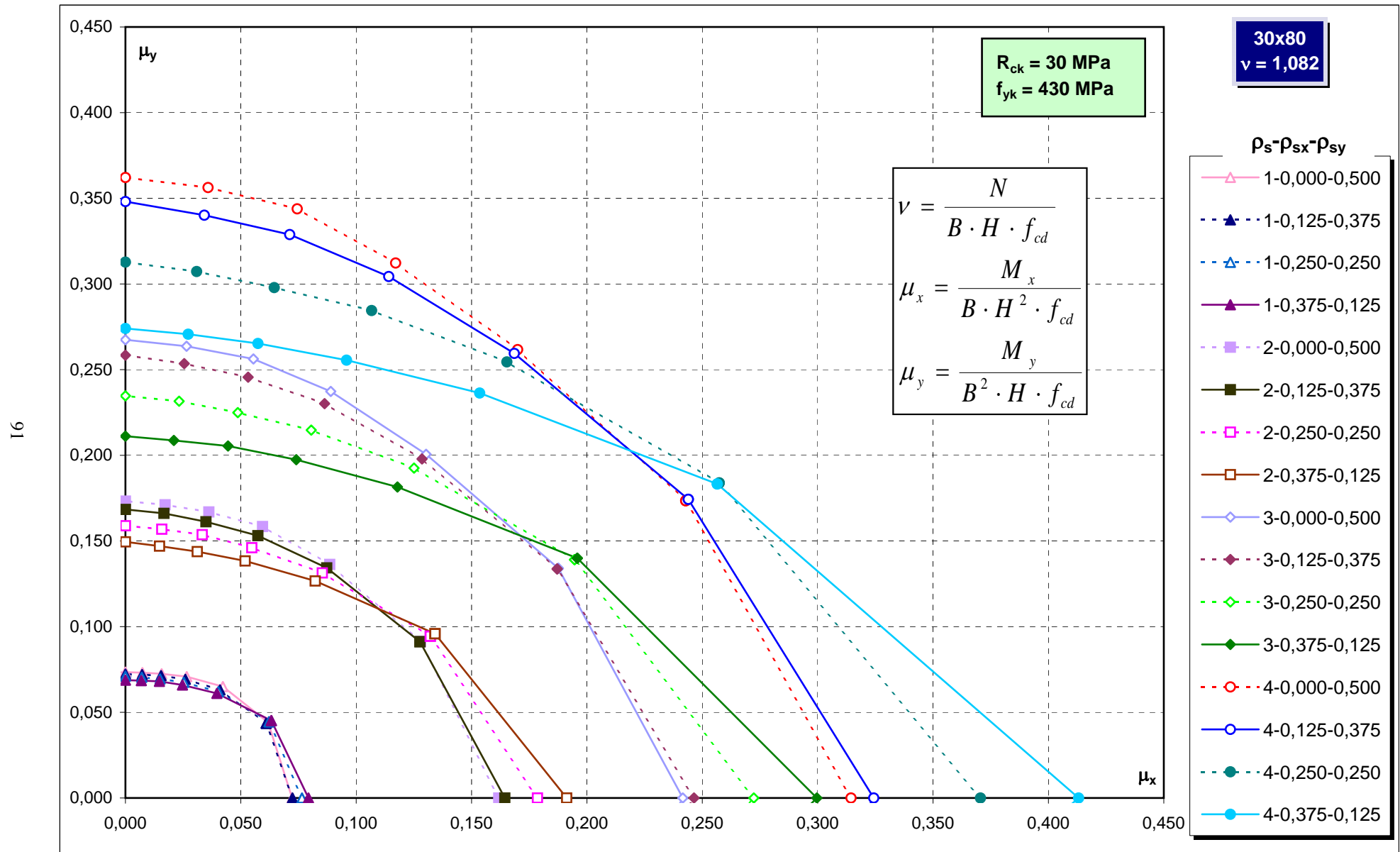
Abachi di progetto



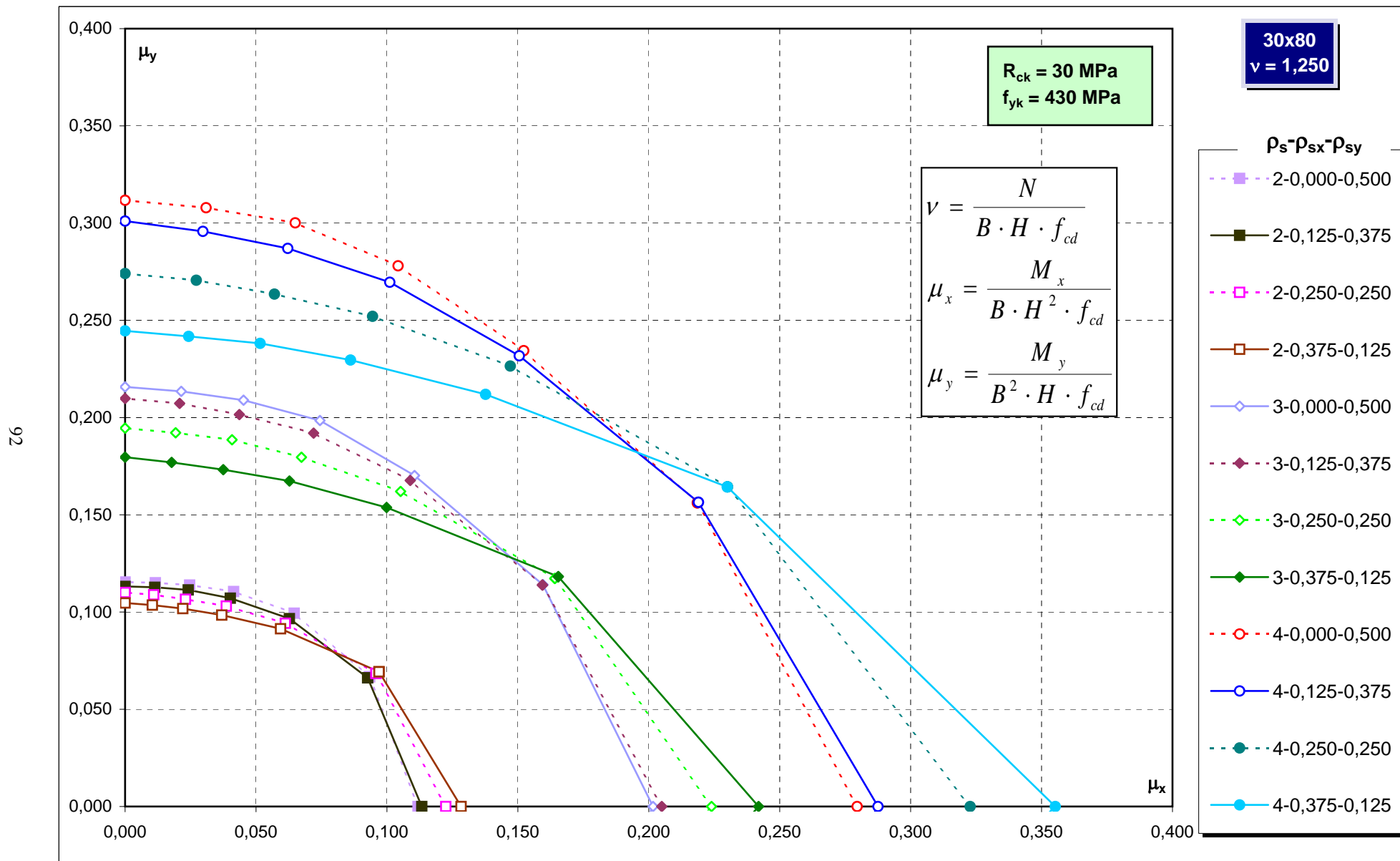
Abachi di progetto



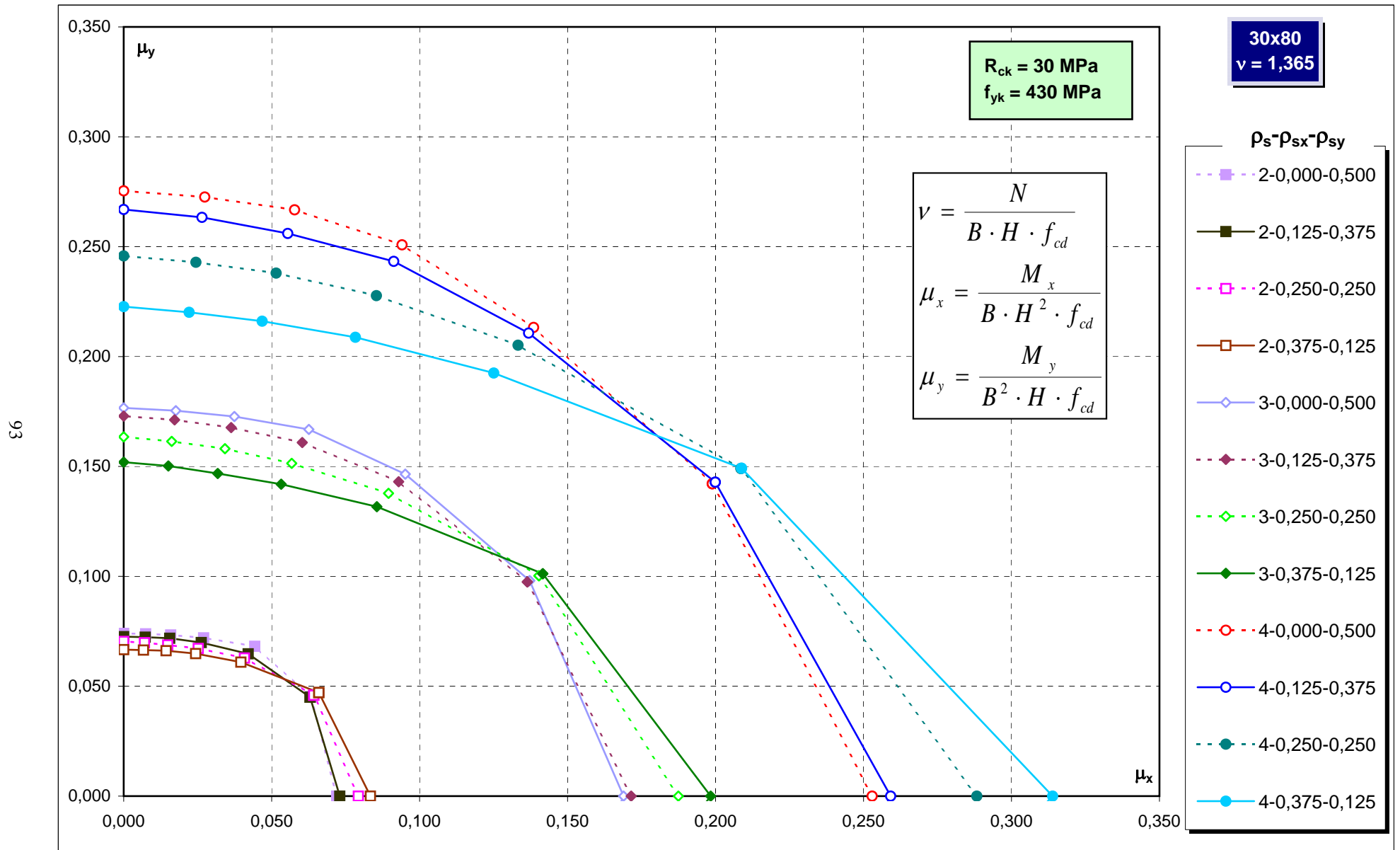
Abachi di progetto



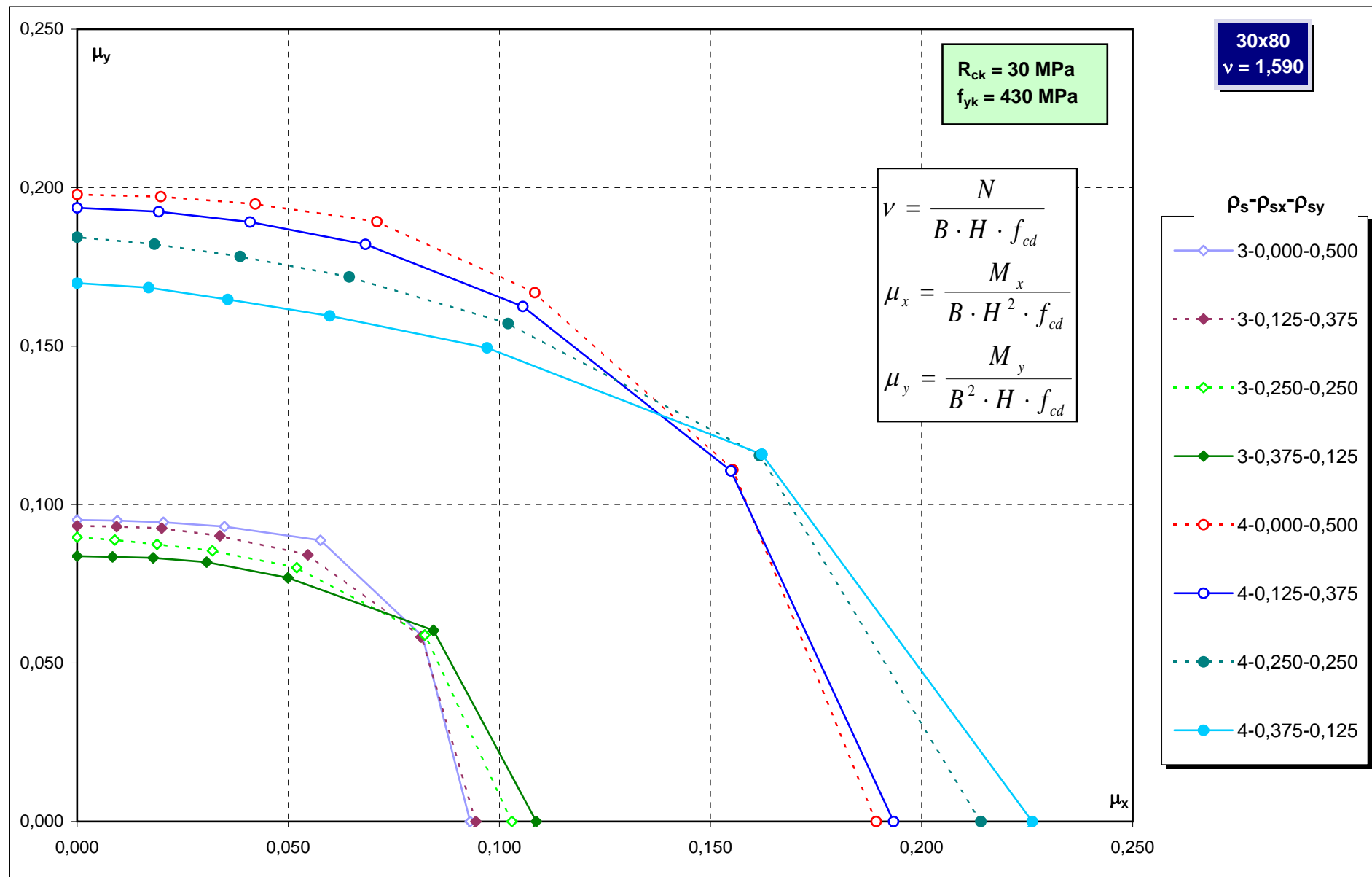
Abachi di progetto



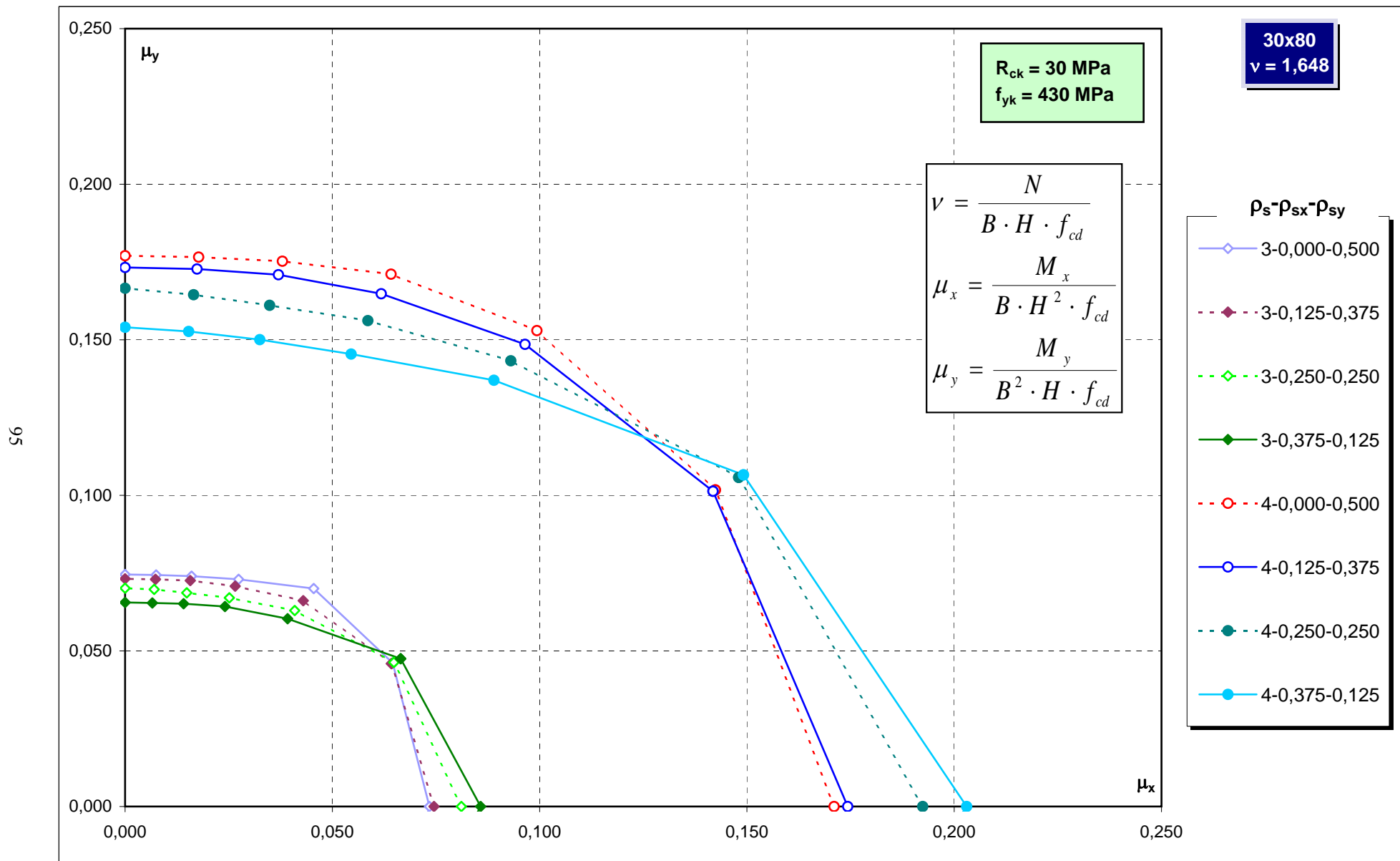
Abachi di progetto



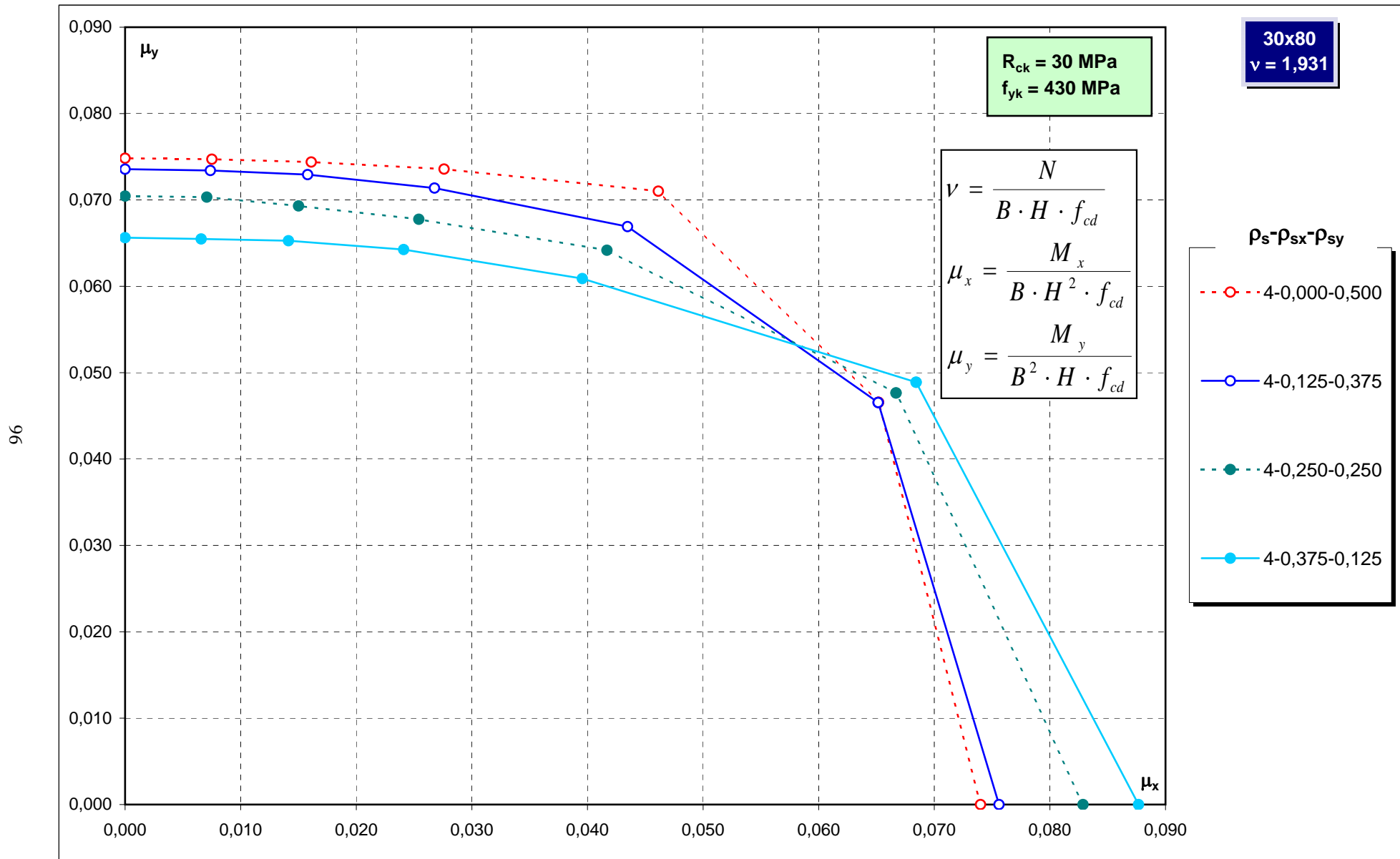
Abachi di progetto



Abachi di progetto

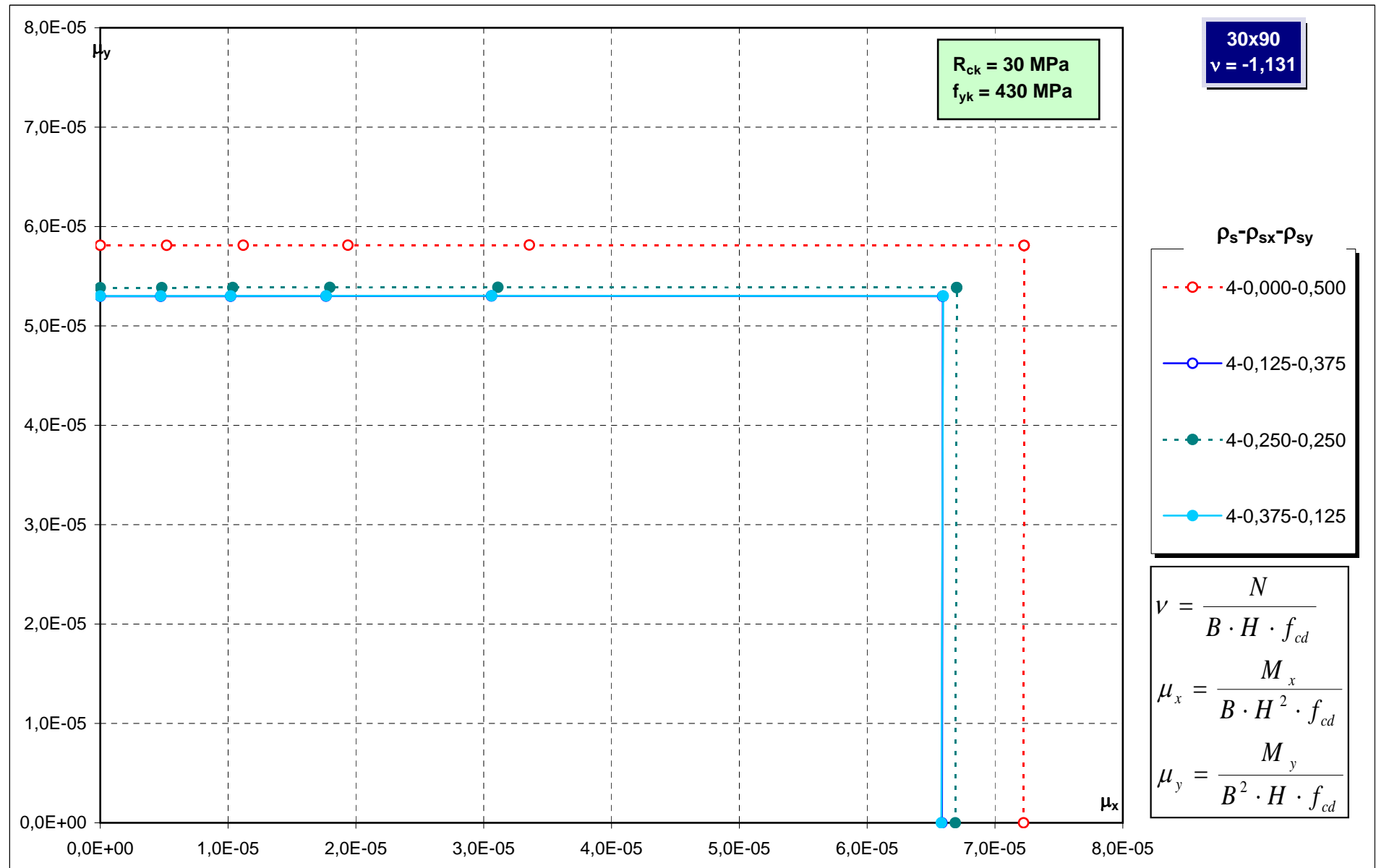


Abachi di progetto

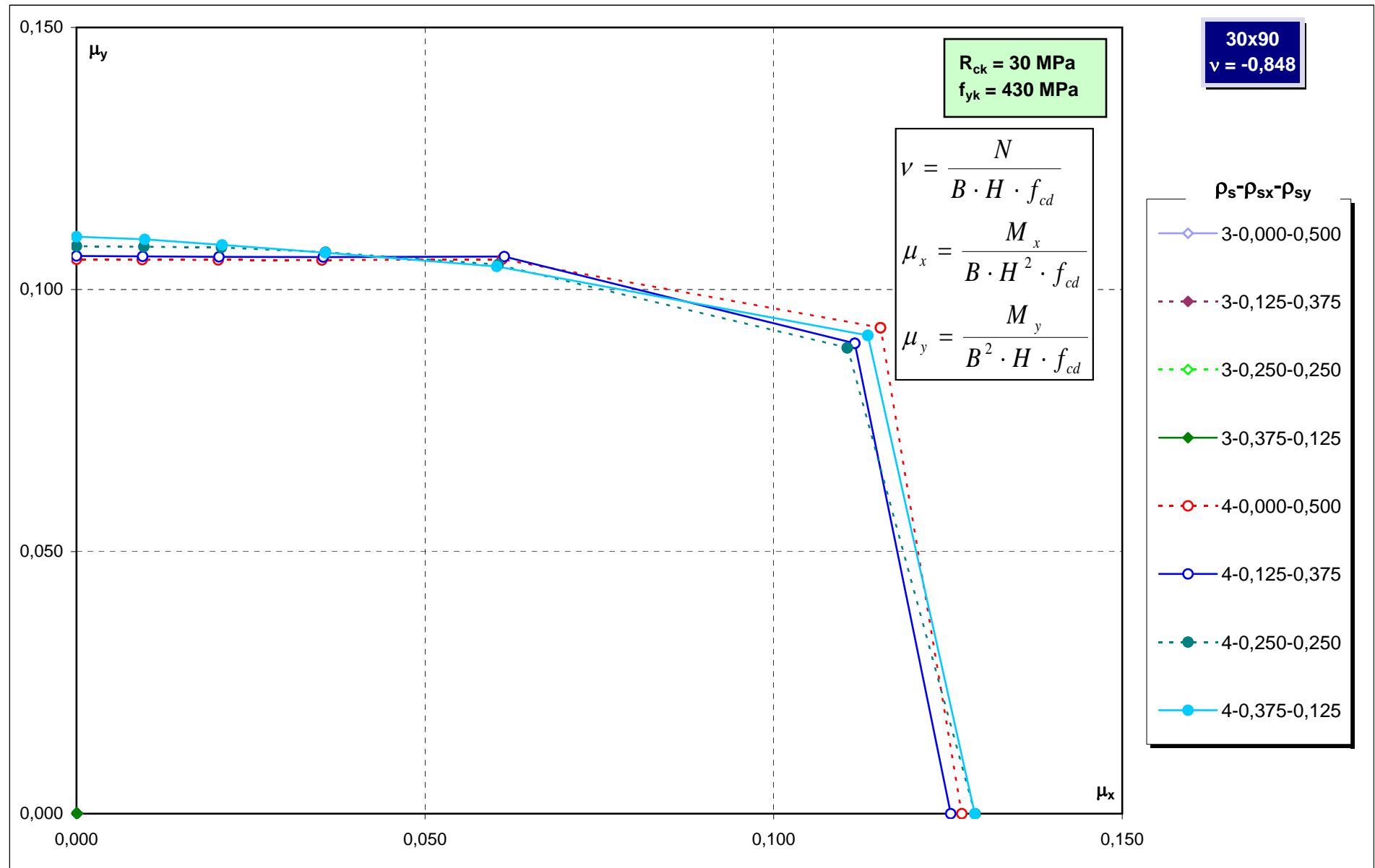


Abachi di progetto

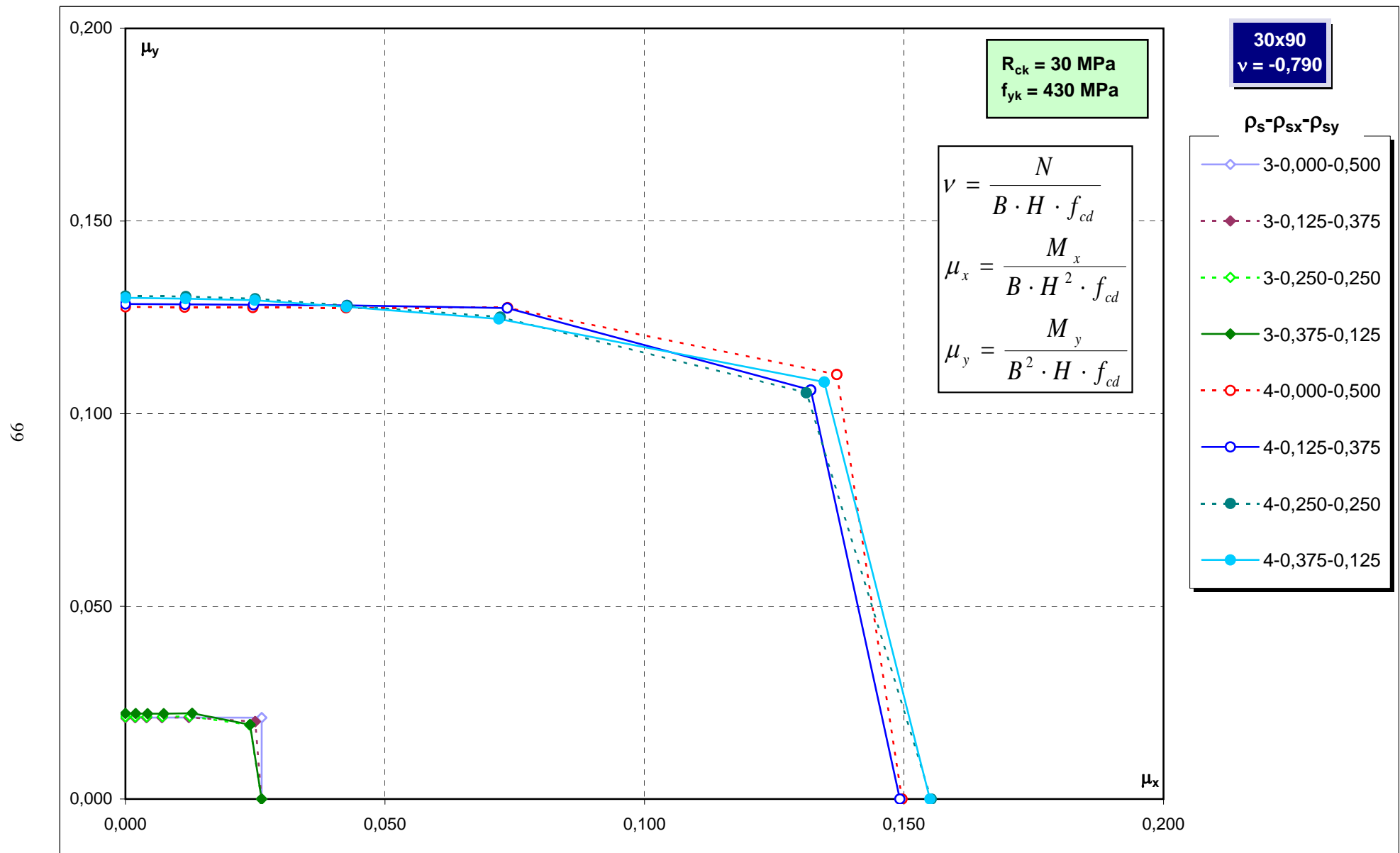
97



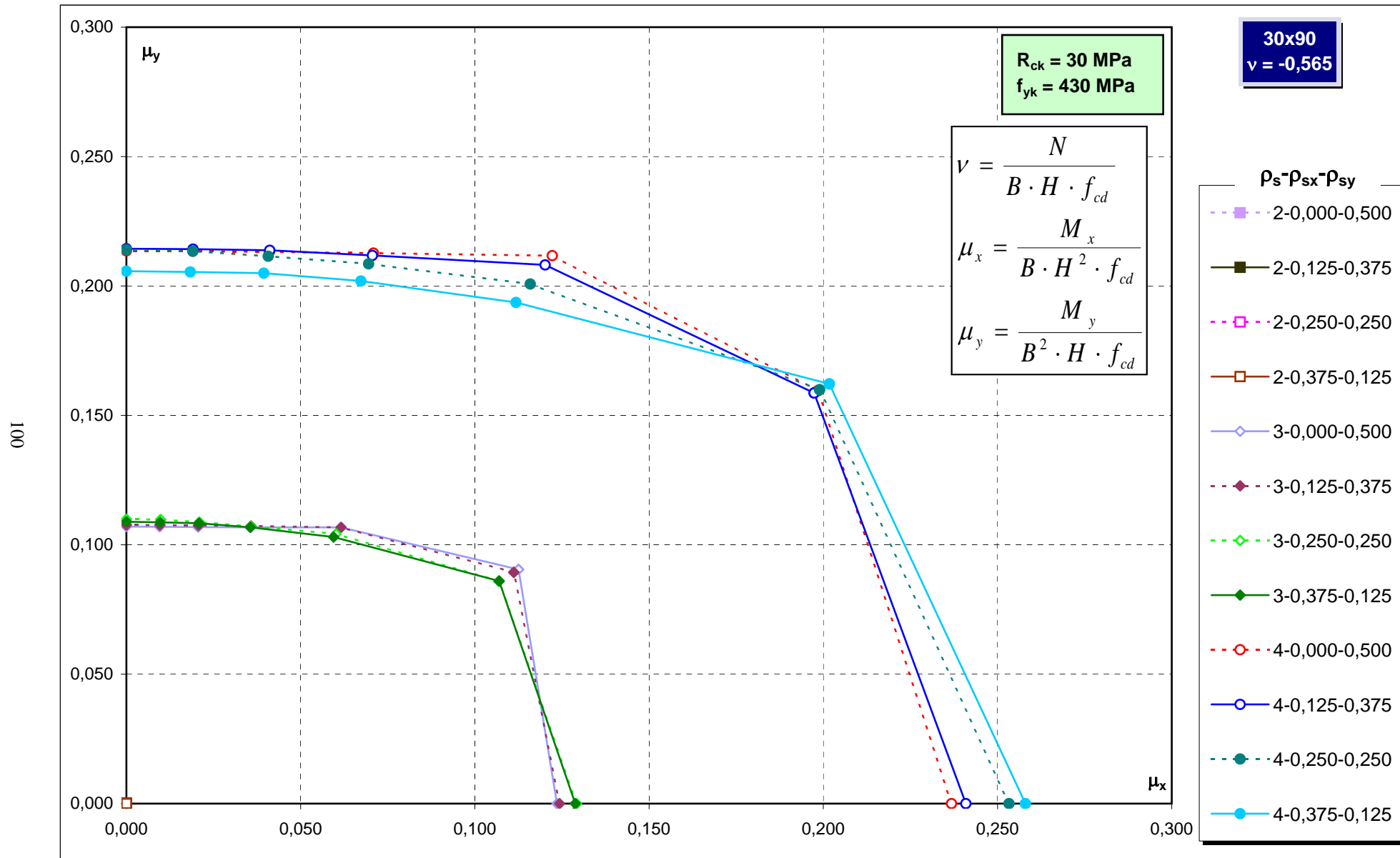
Abachi di progetto



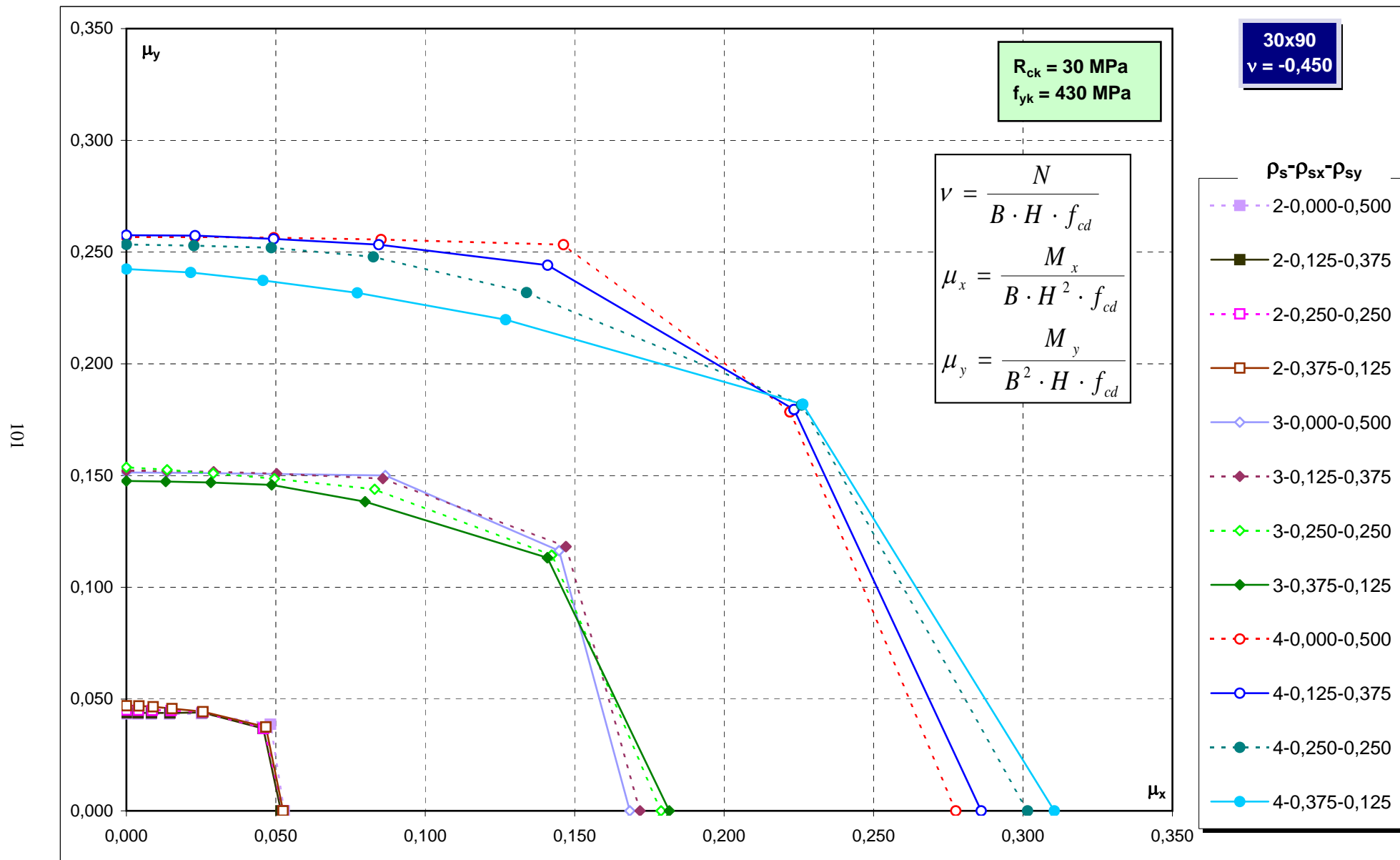
Abachi di progetto



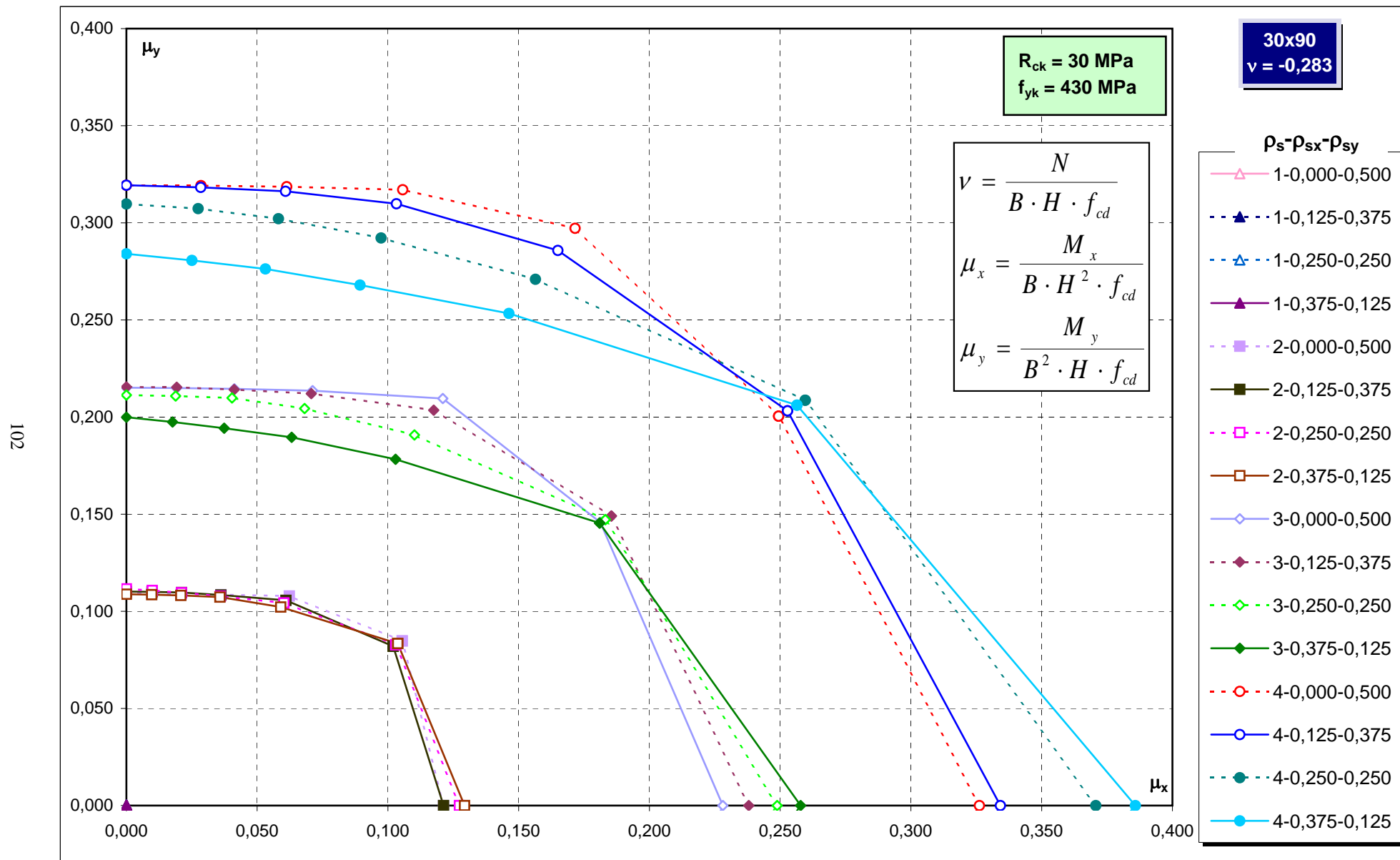
Abachi di progetto



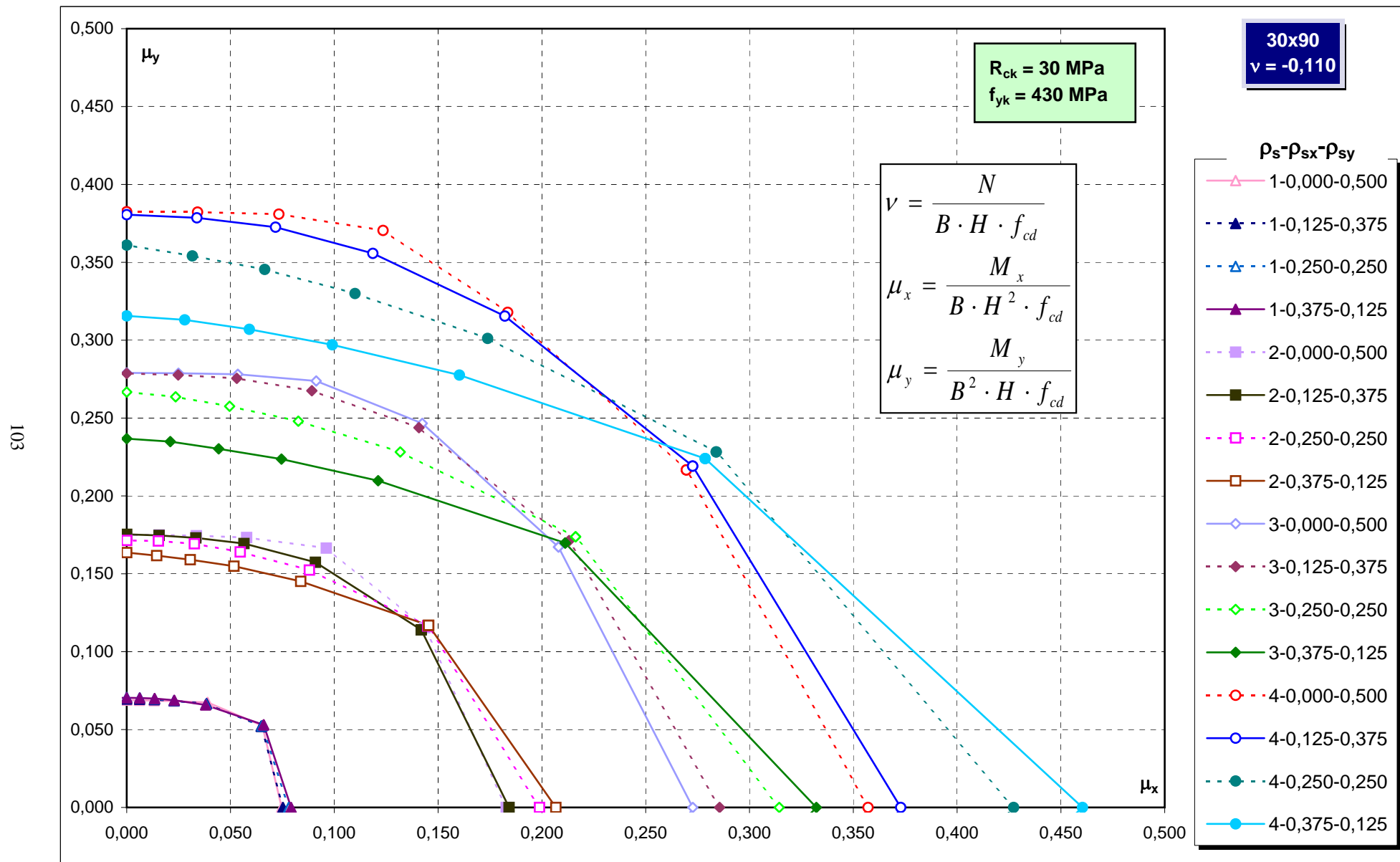
Abachi di progetto



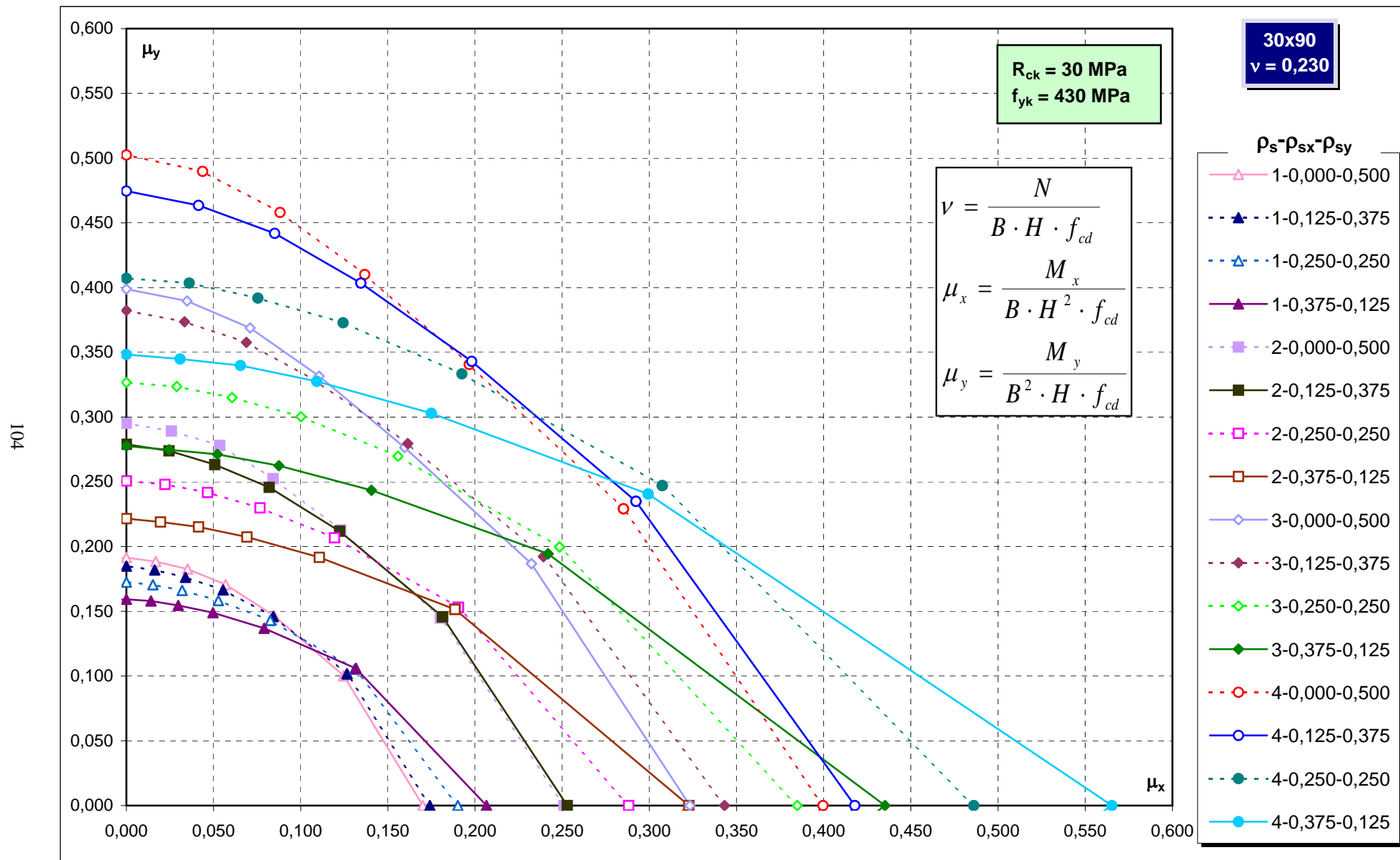
Abachi di progetto



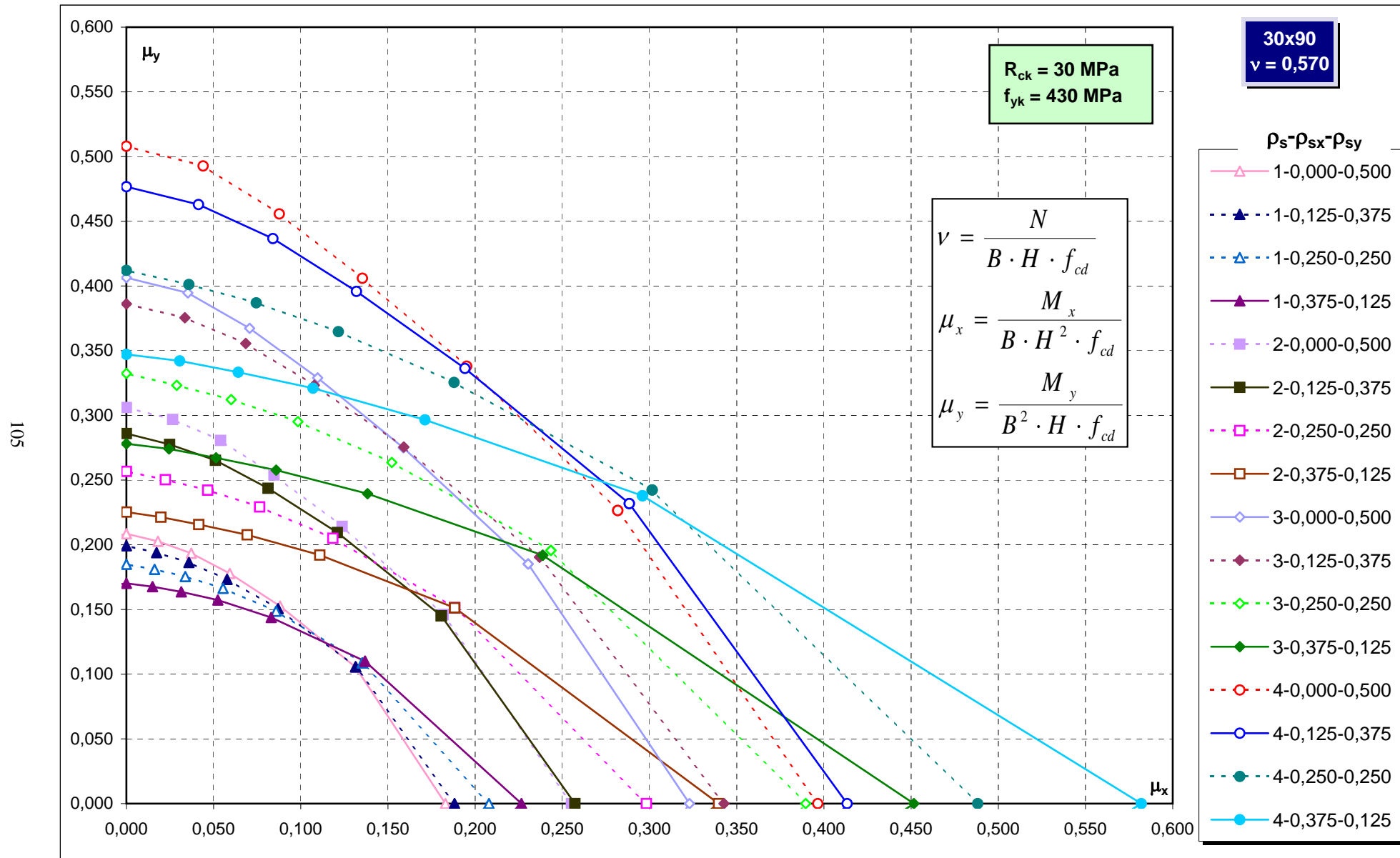
Abachi di progetto



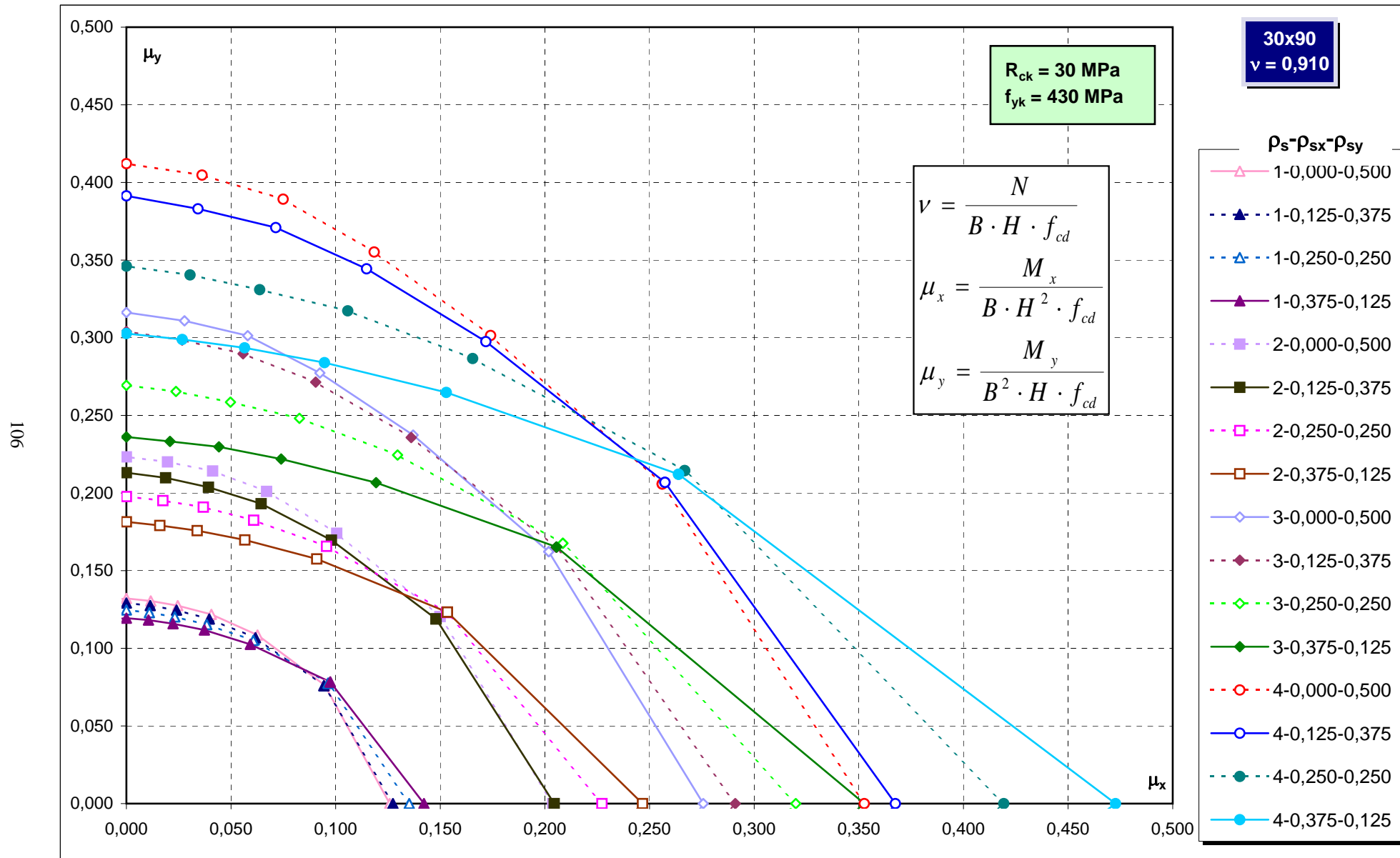
Abachi di progetto



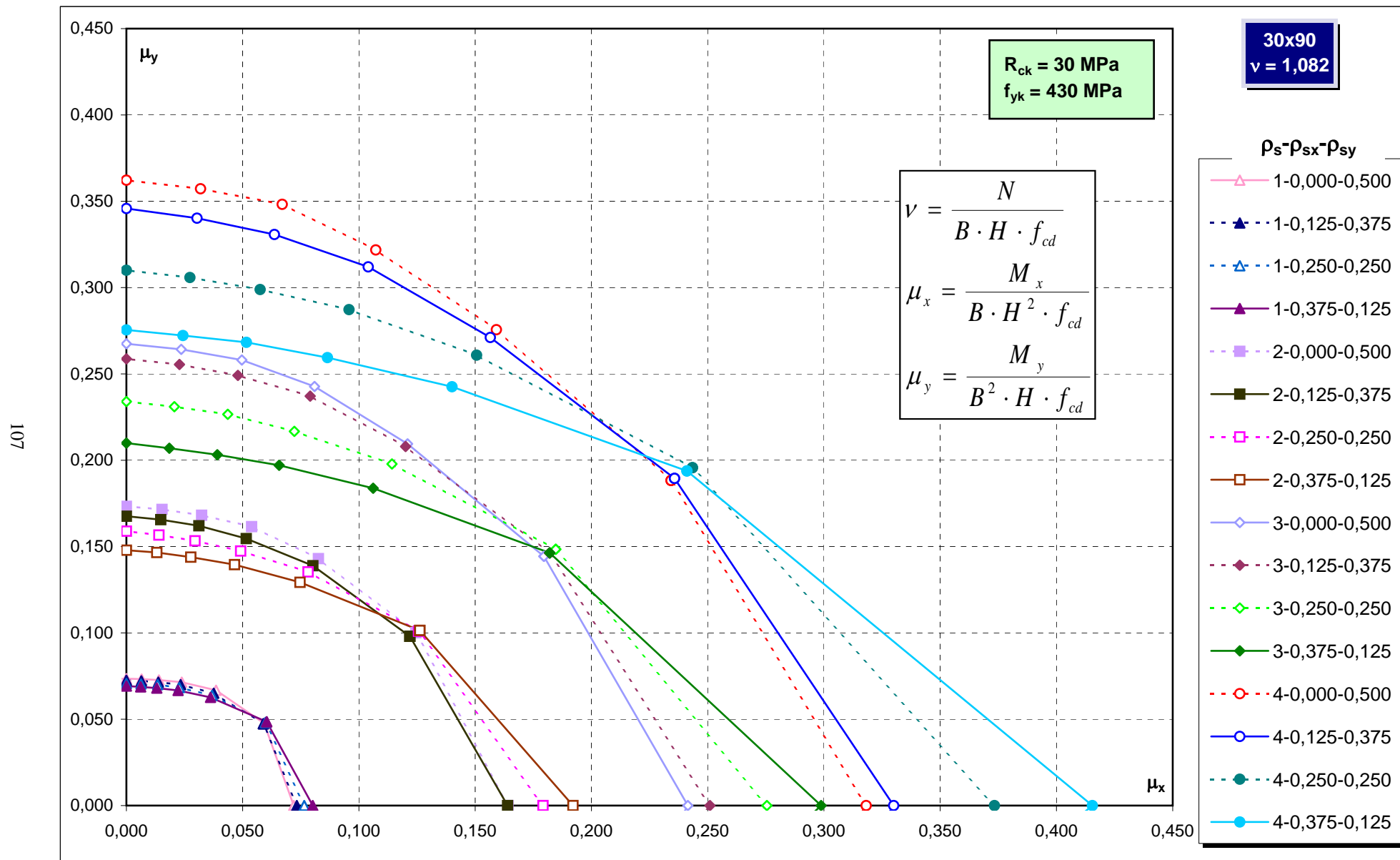
Abachi di progetto



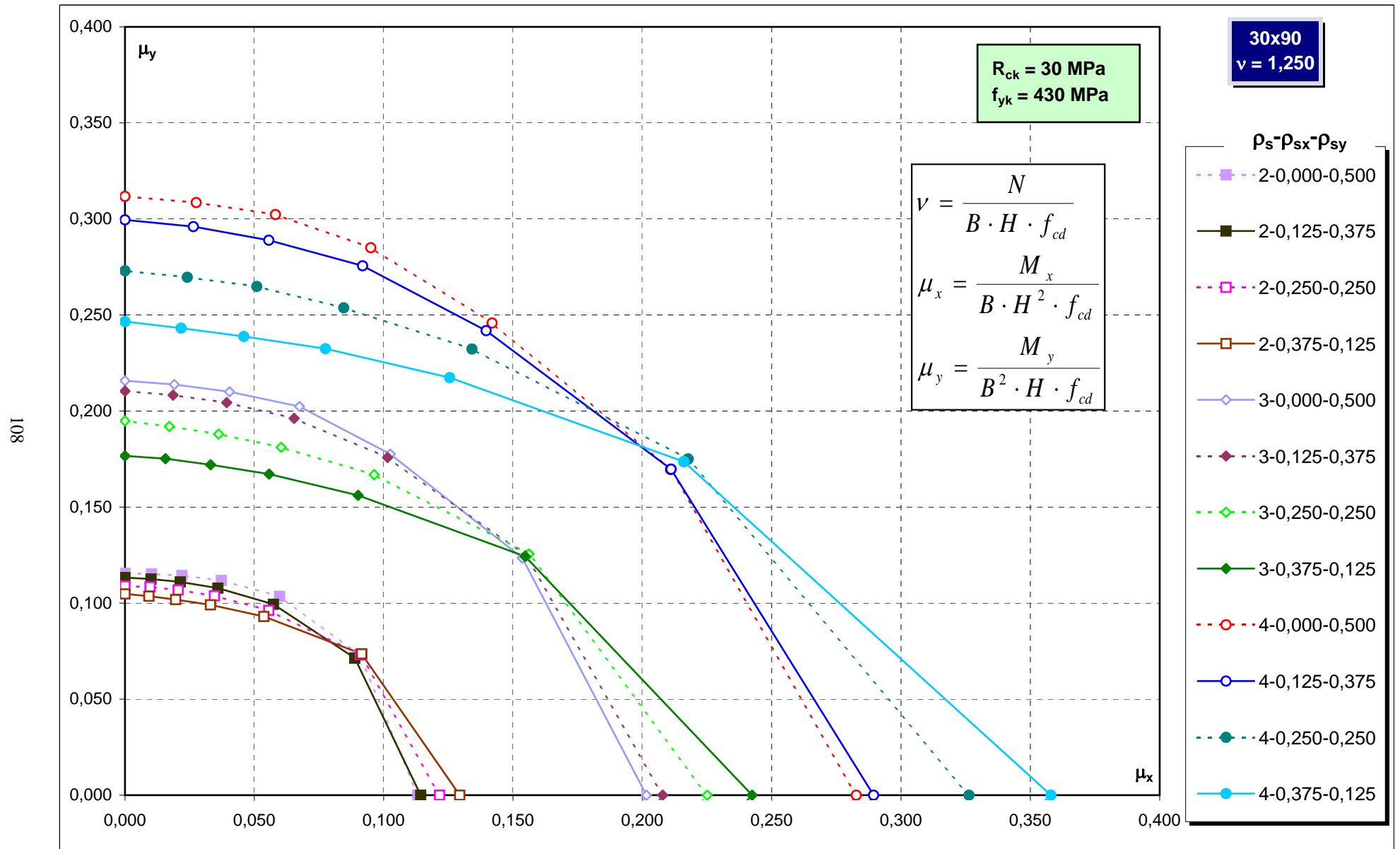
Abachi di progetto



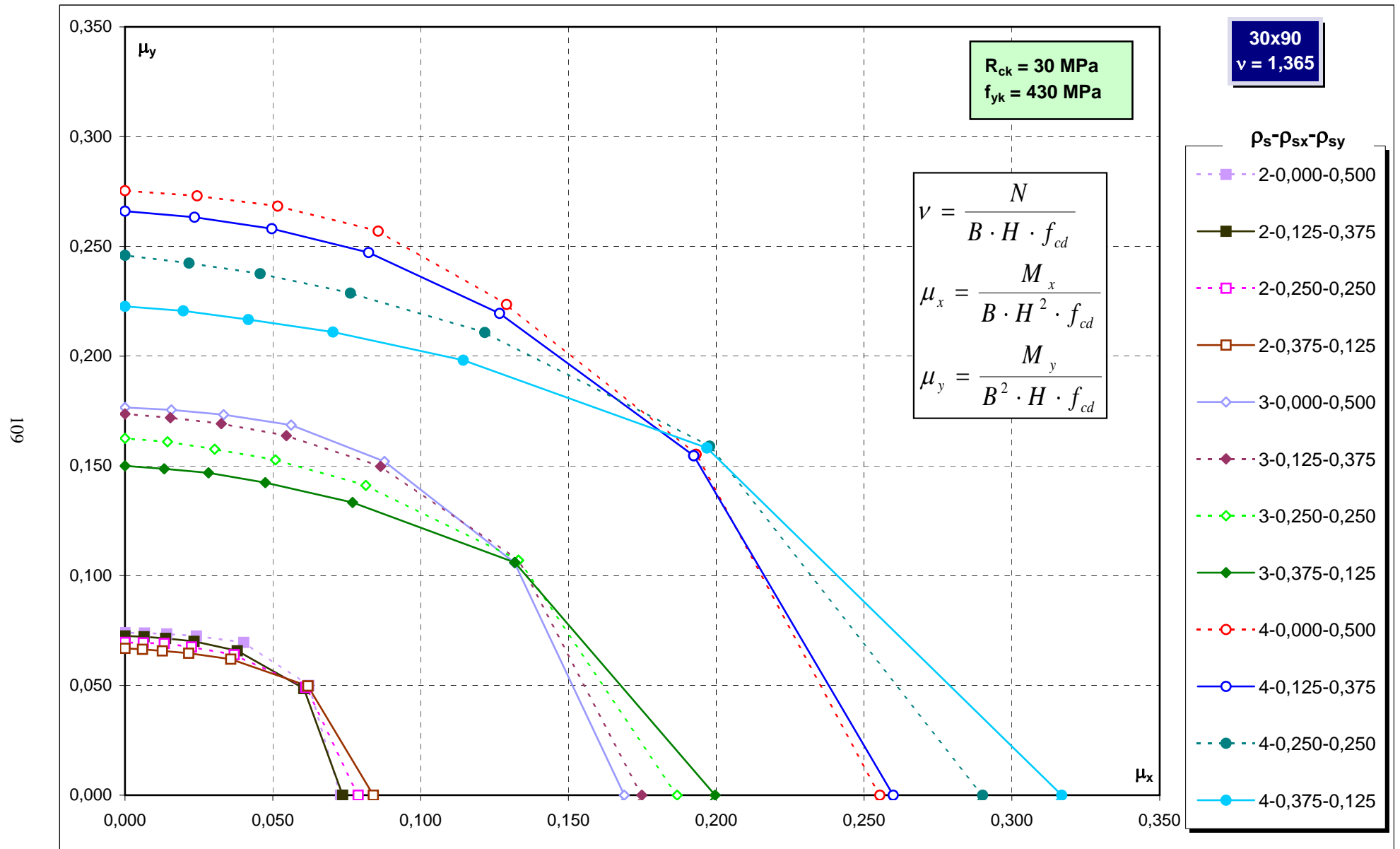
Abachi di progetto



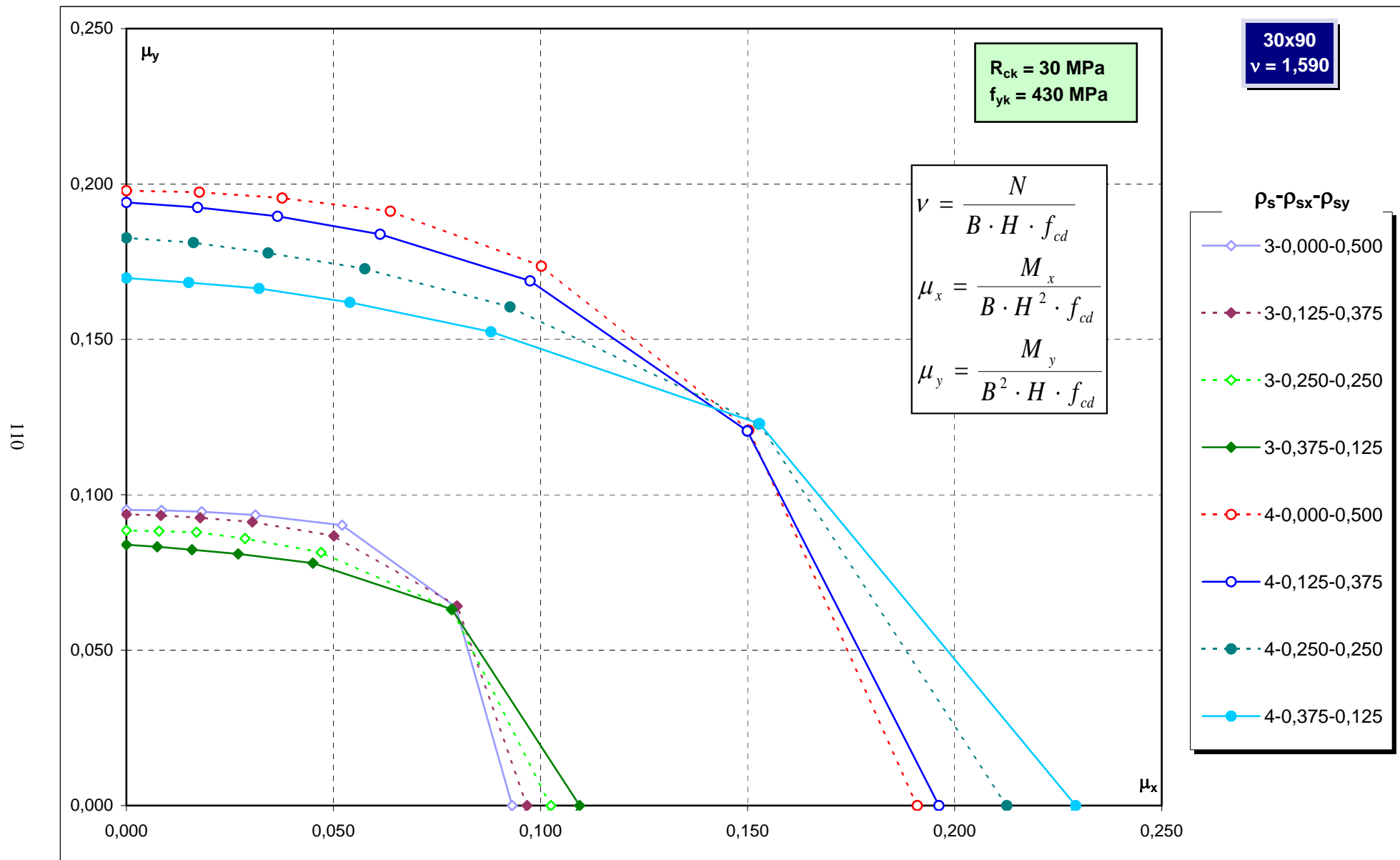
Abachi di progetto



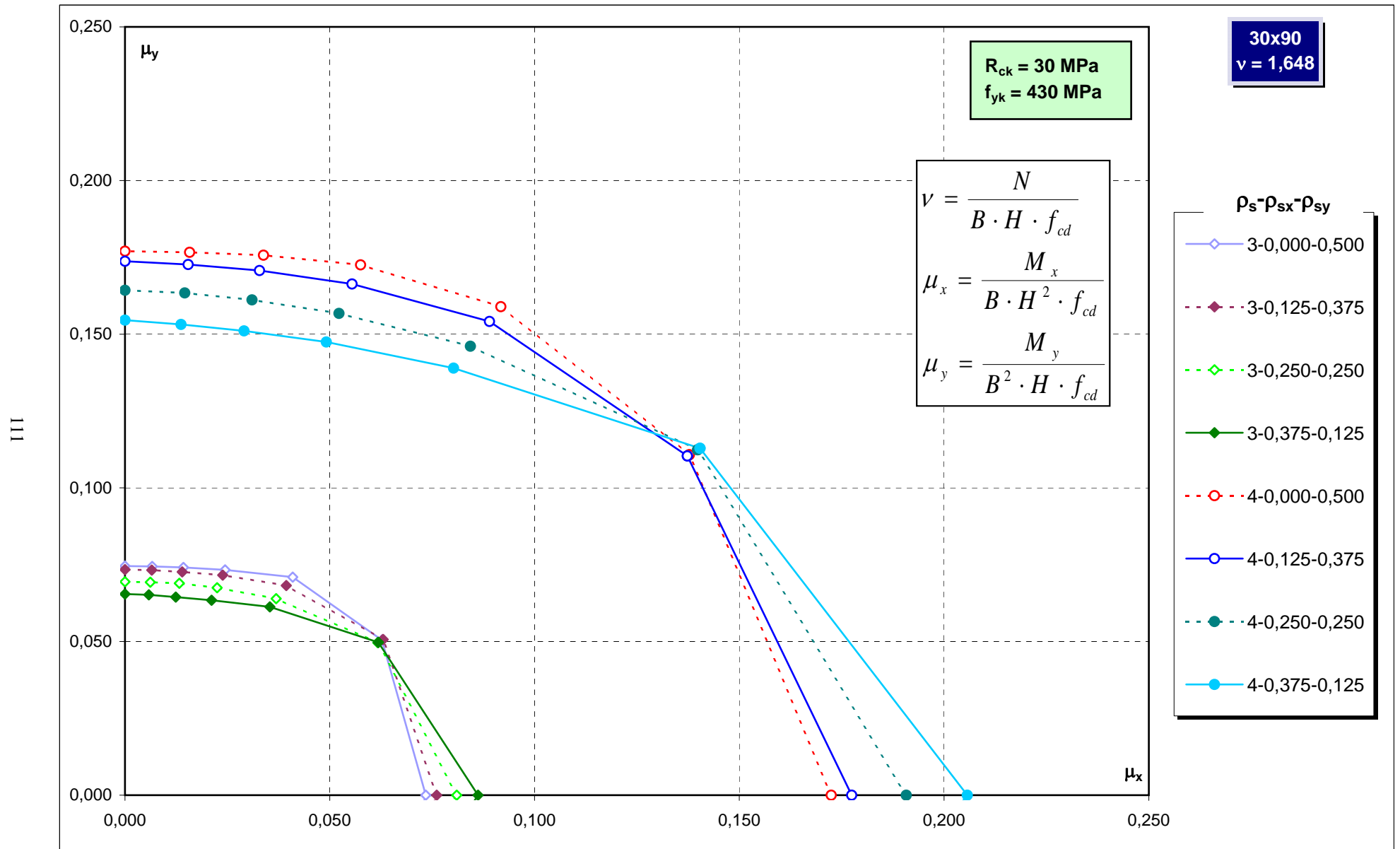
Abachi di progetto



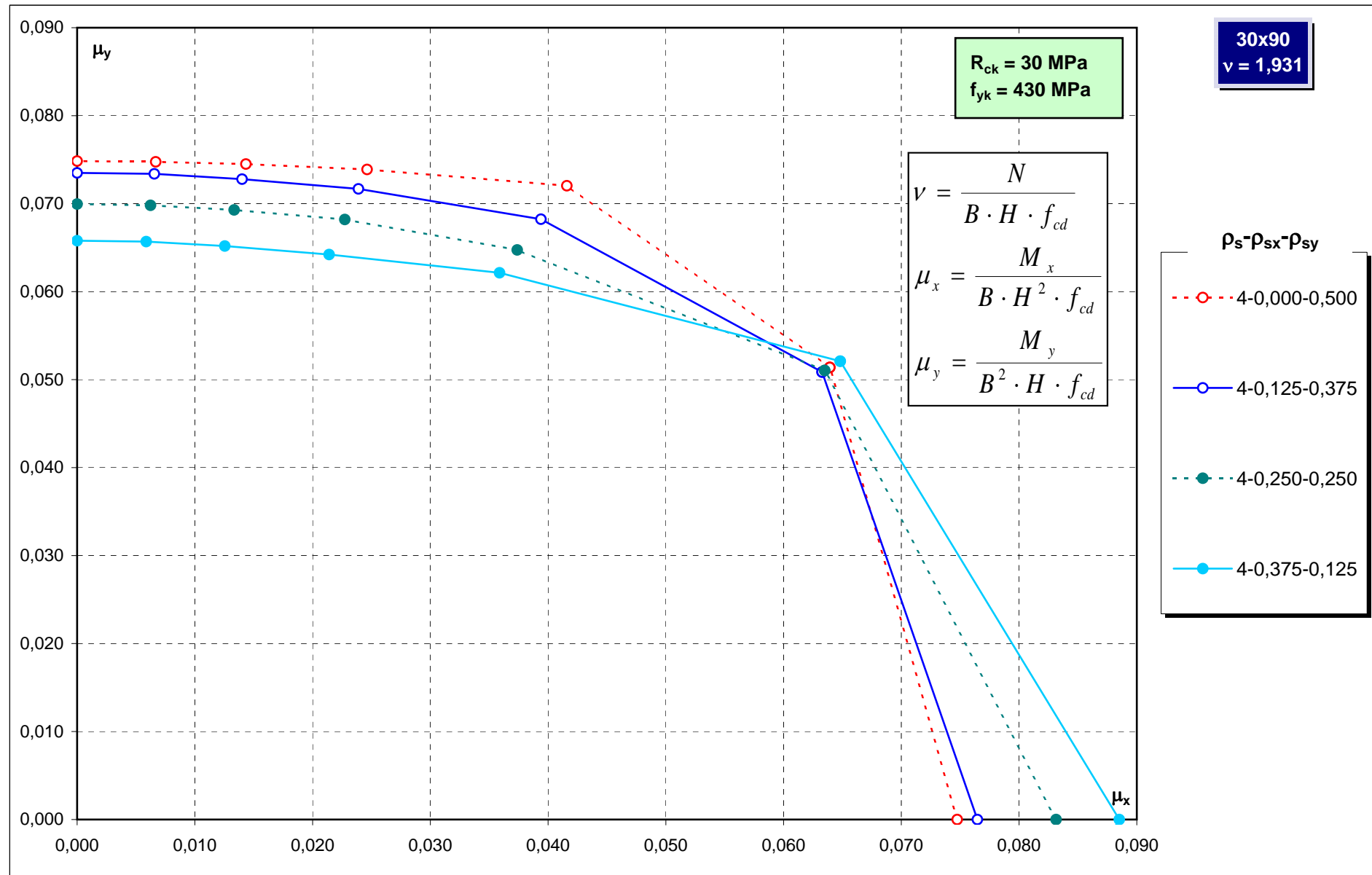
Abachi di progetto



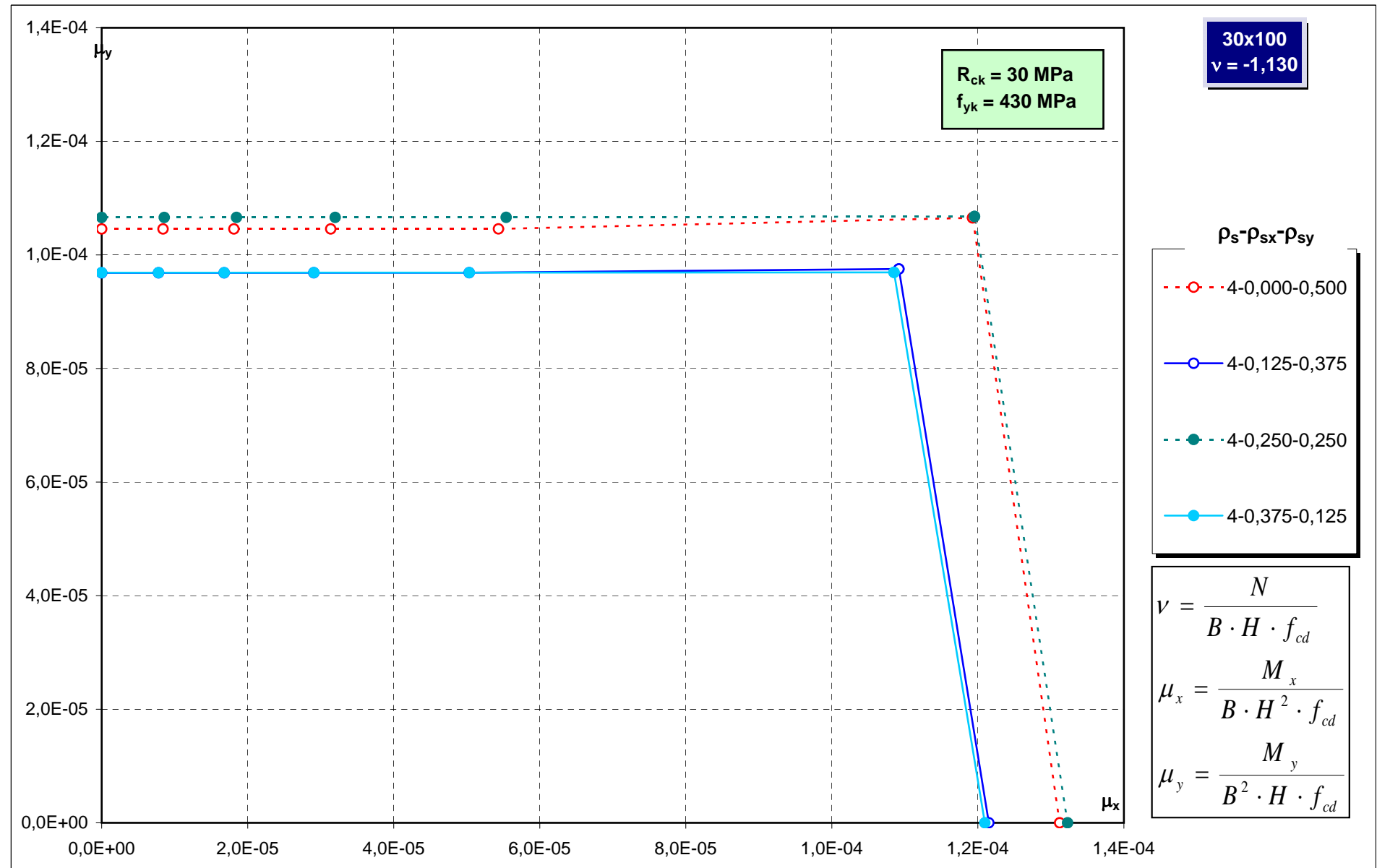
Abachi di progetto



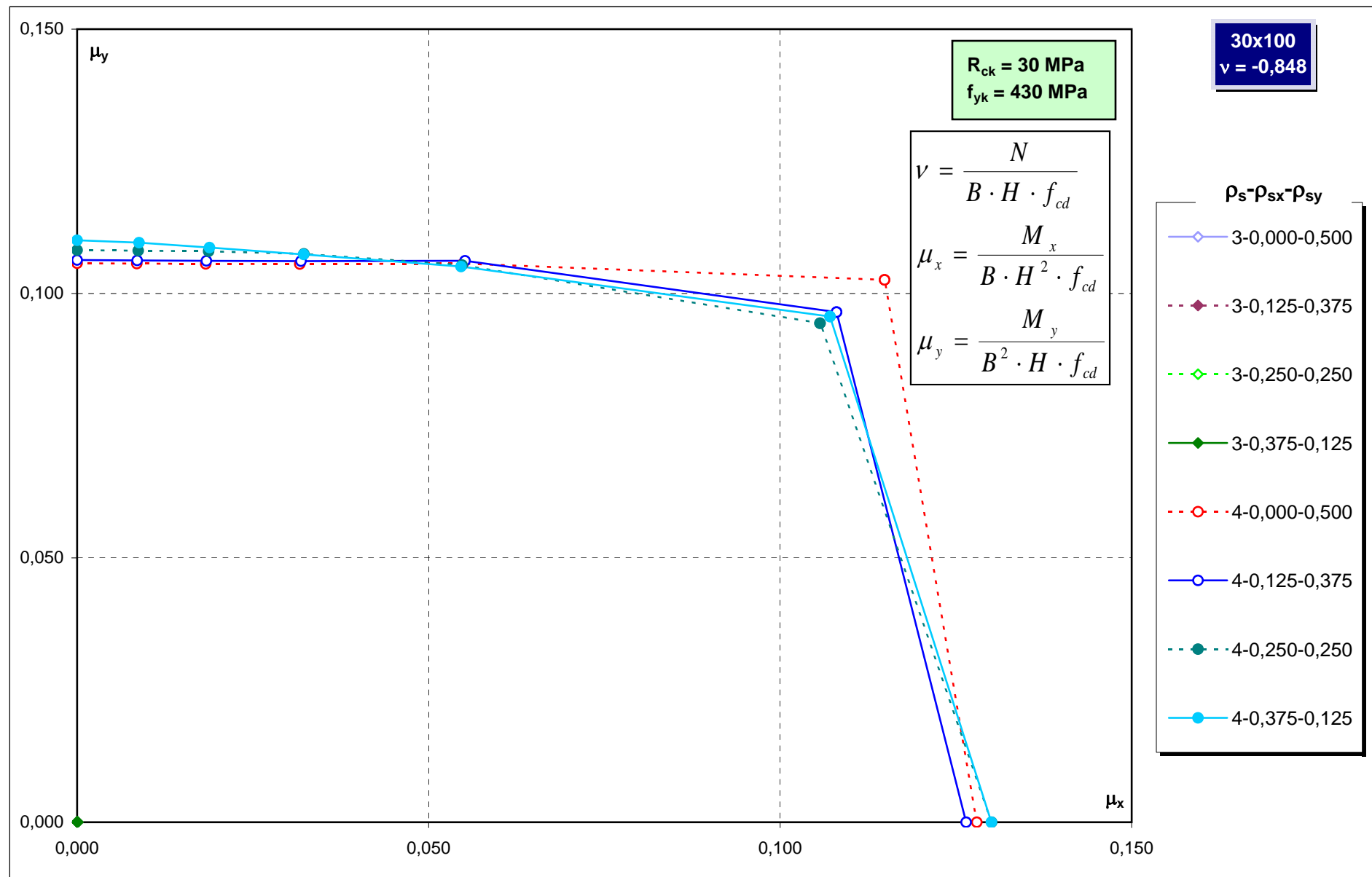
Abachi di progetto



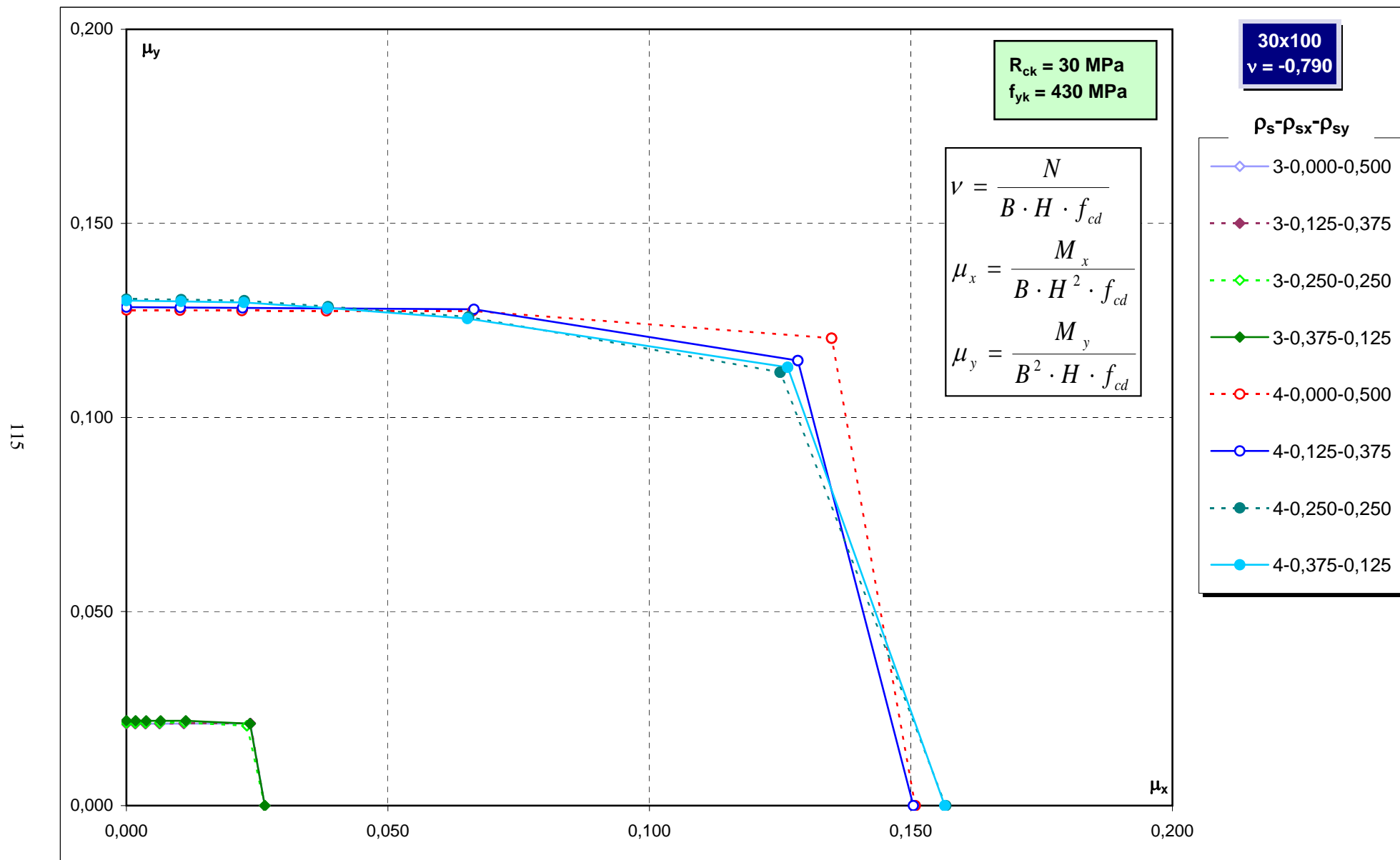
Abachi di progetto



Abachi di progetto

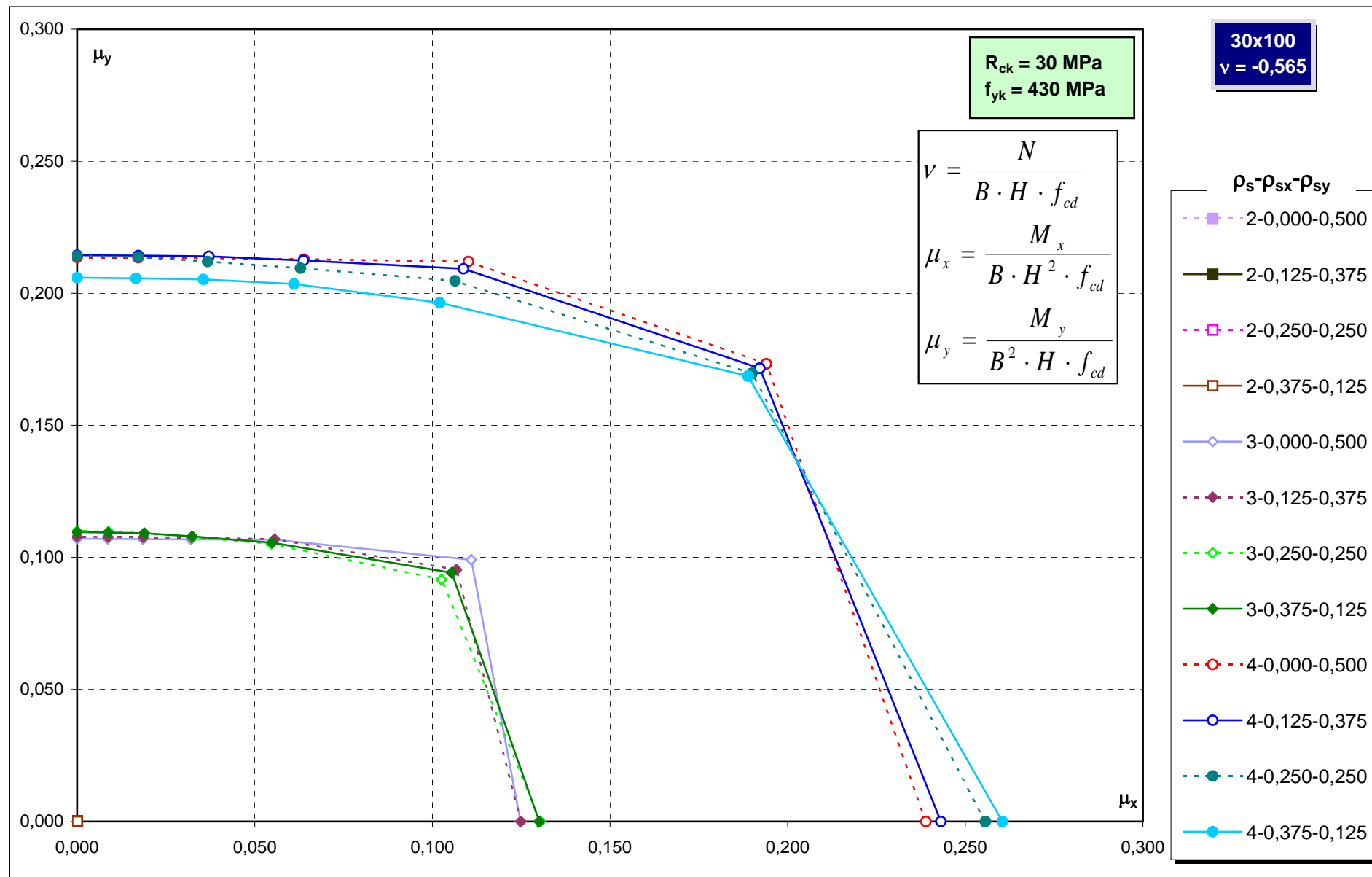


Abachi di progetto

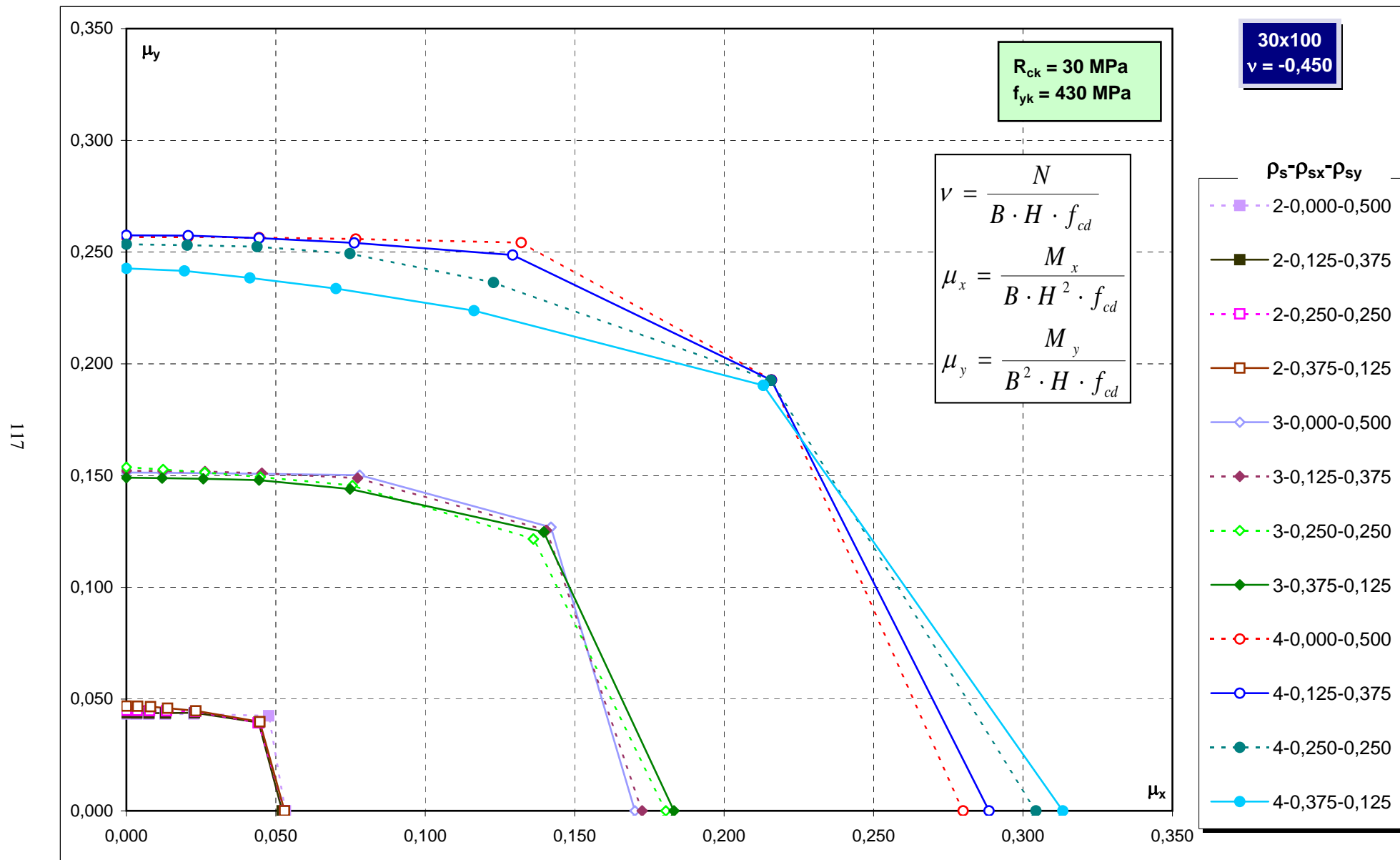


Abachi di progetto

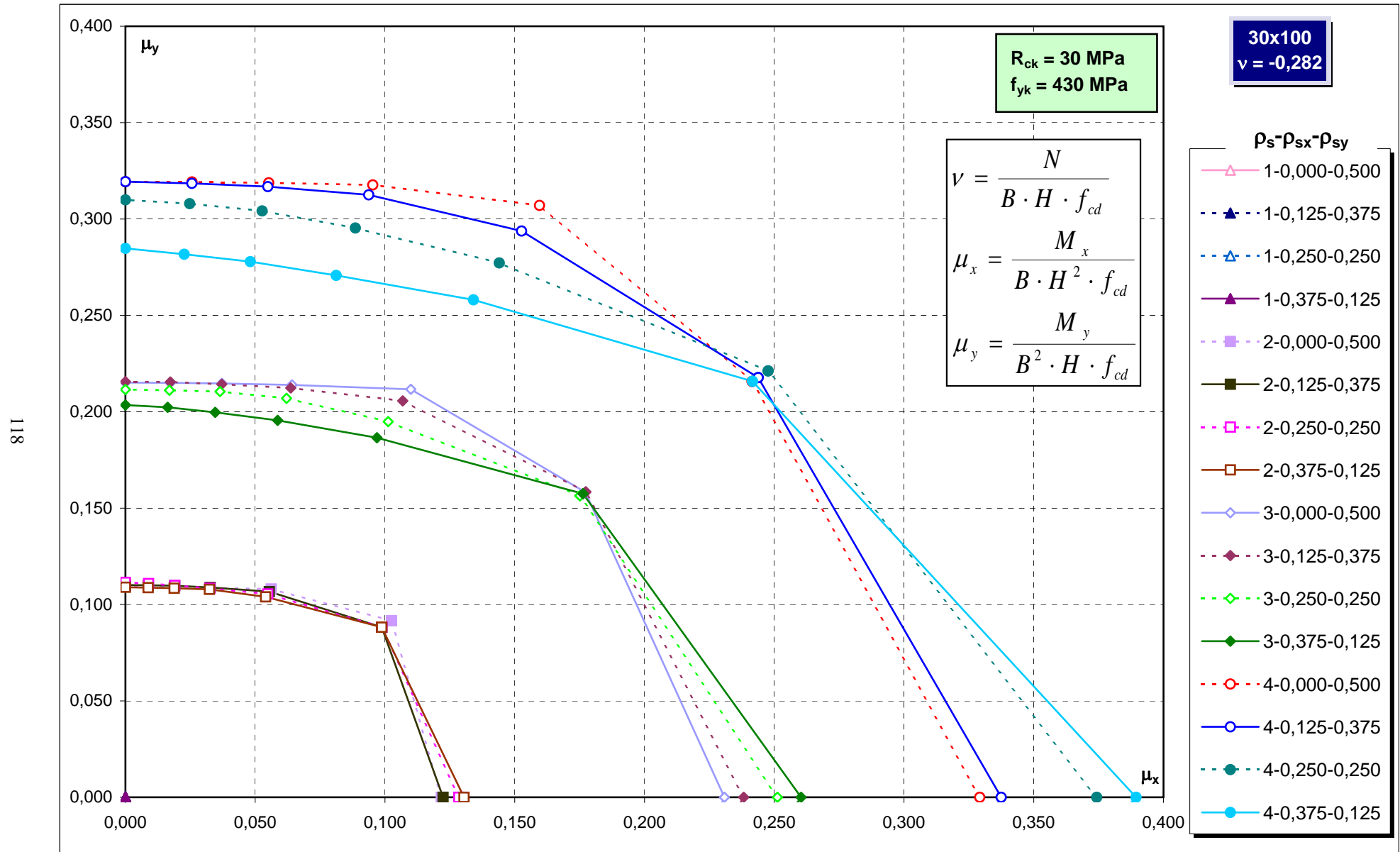
116



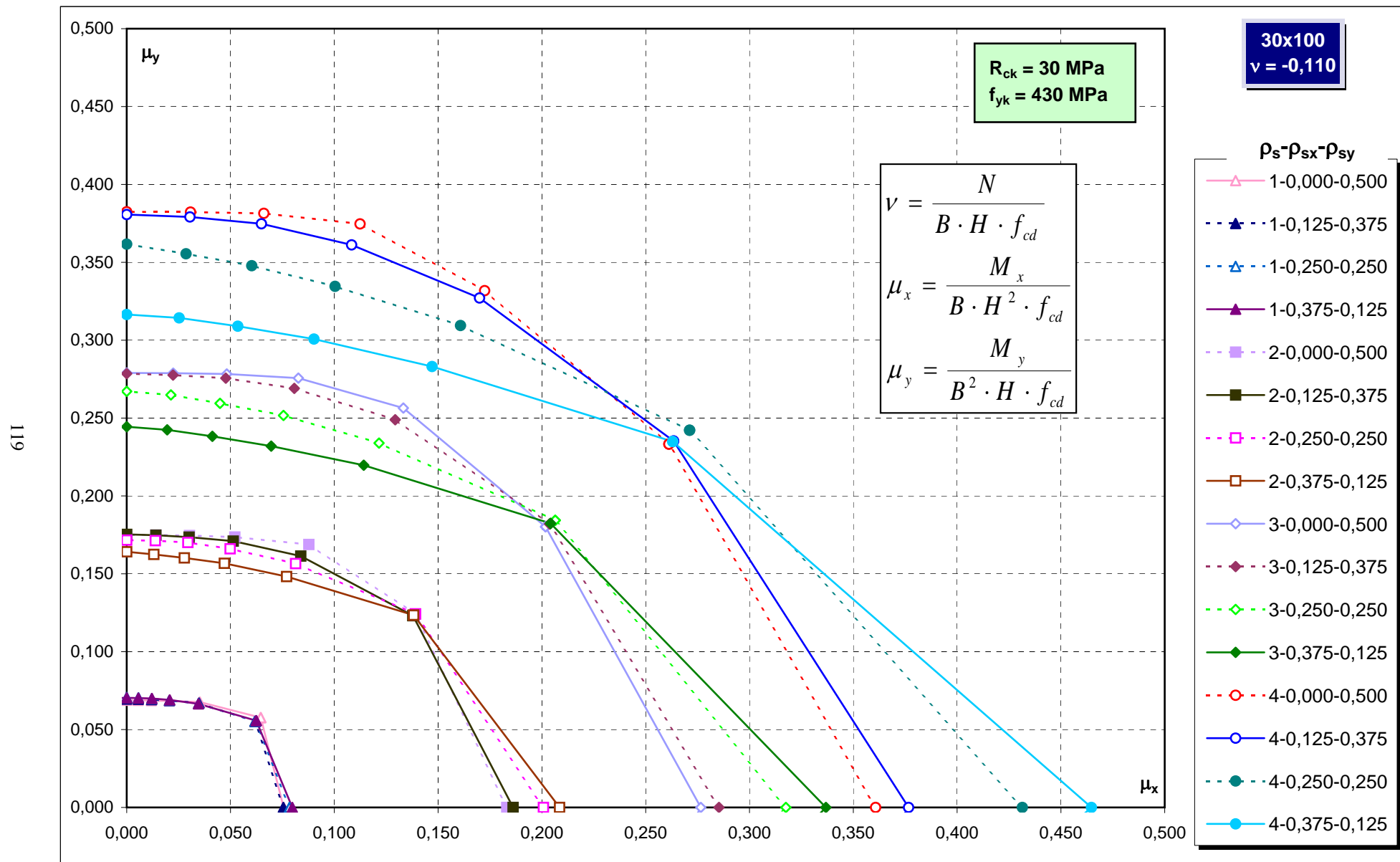
Abachi di progetto



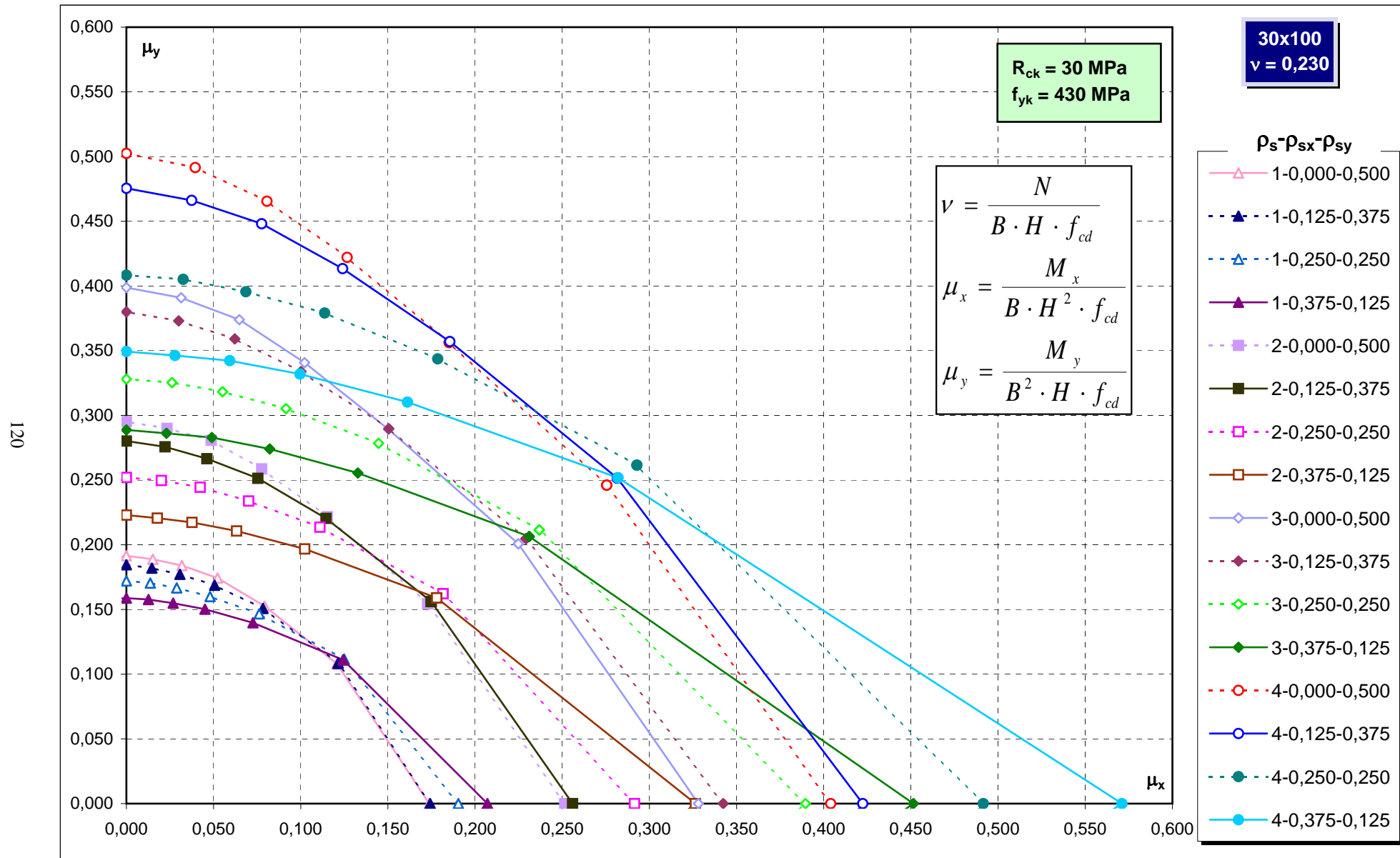
Abachi di progetto



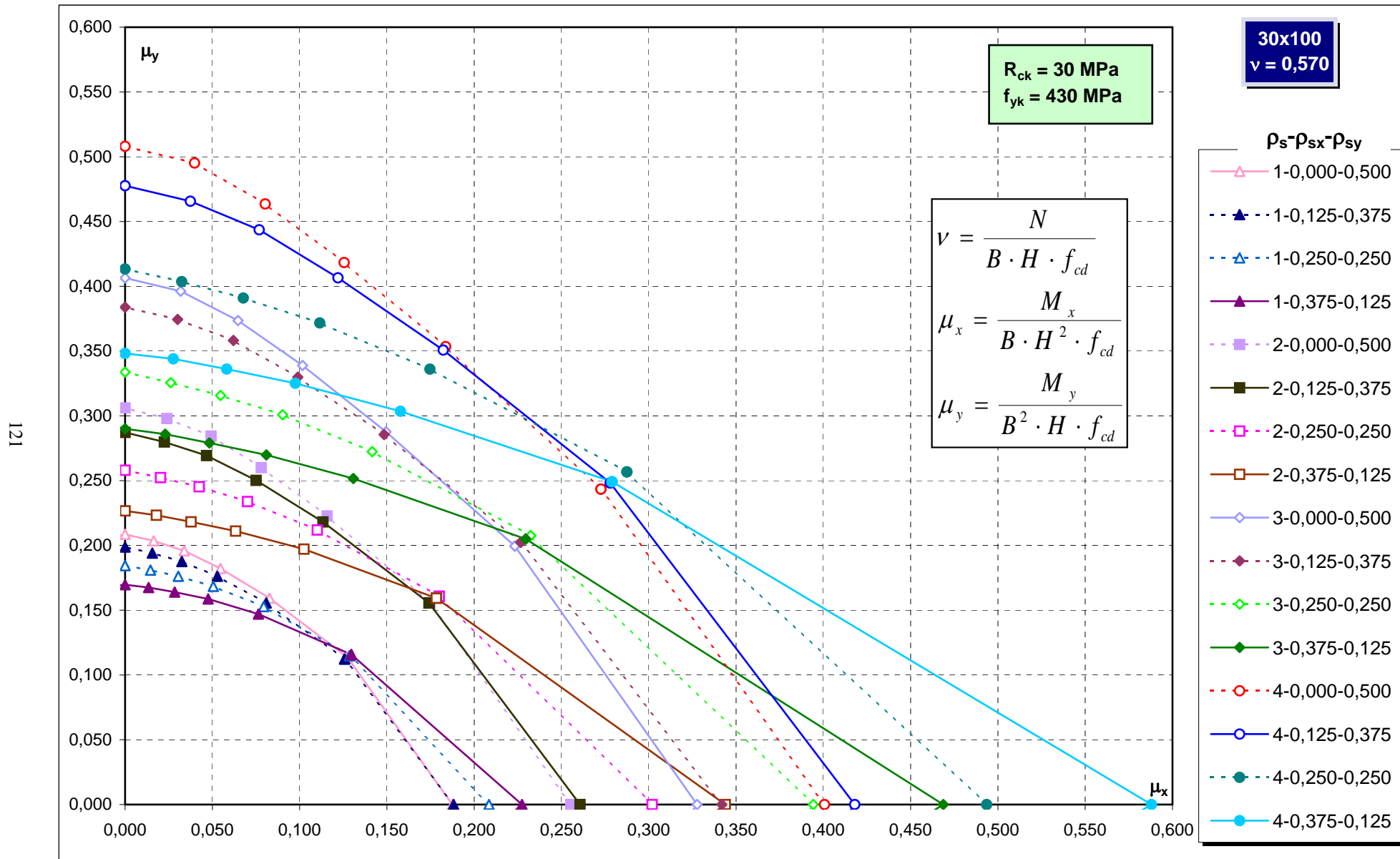
Abachi di progetto



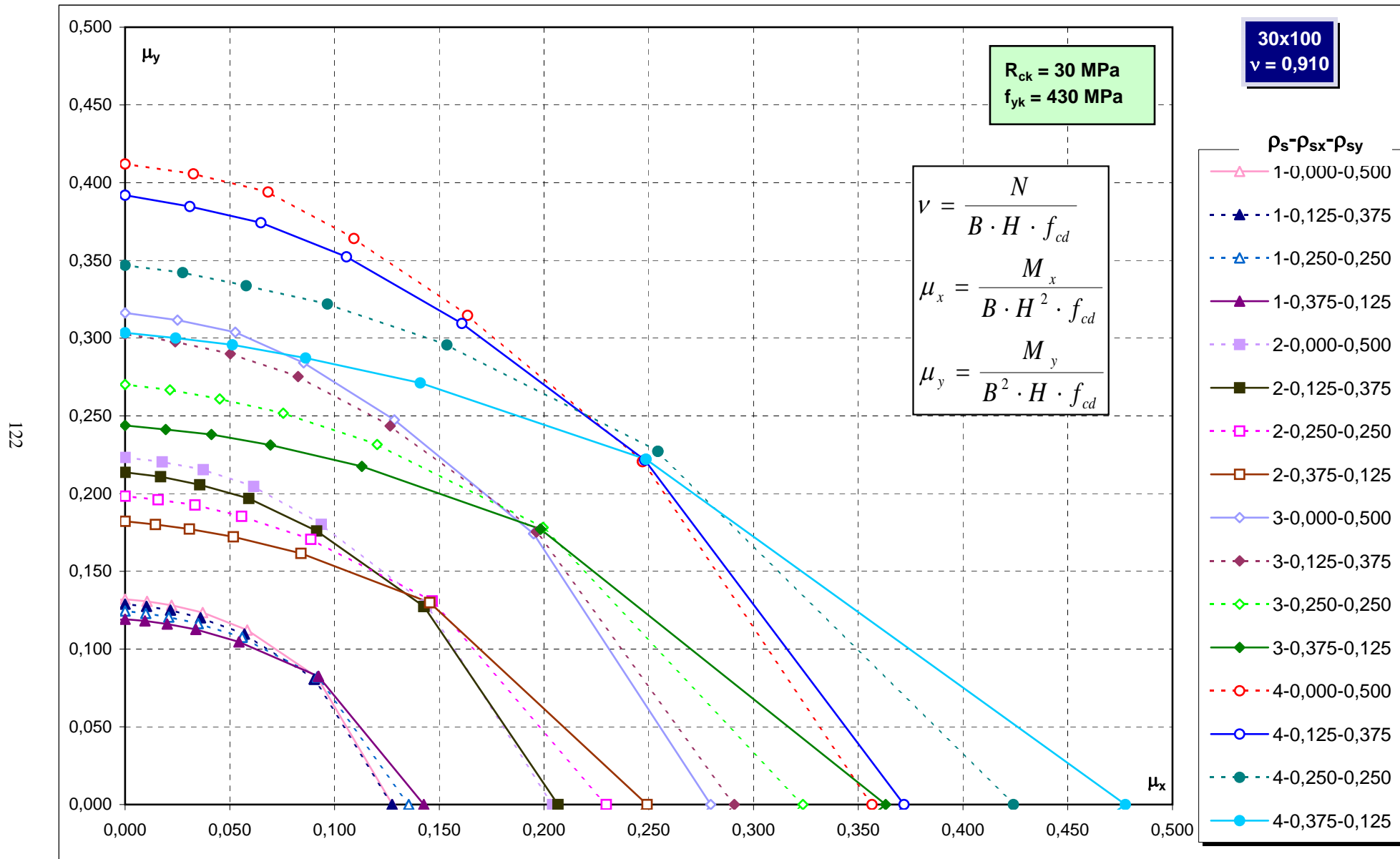
Abachi di progetto



Abachi di progetto

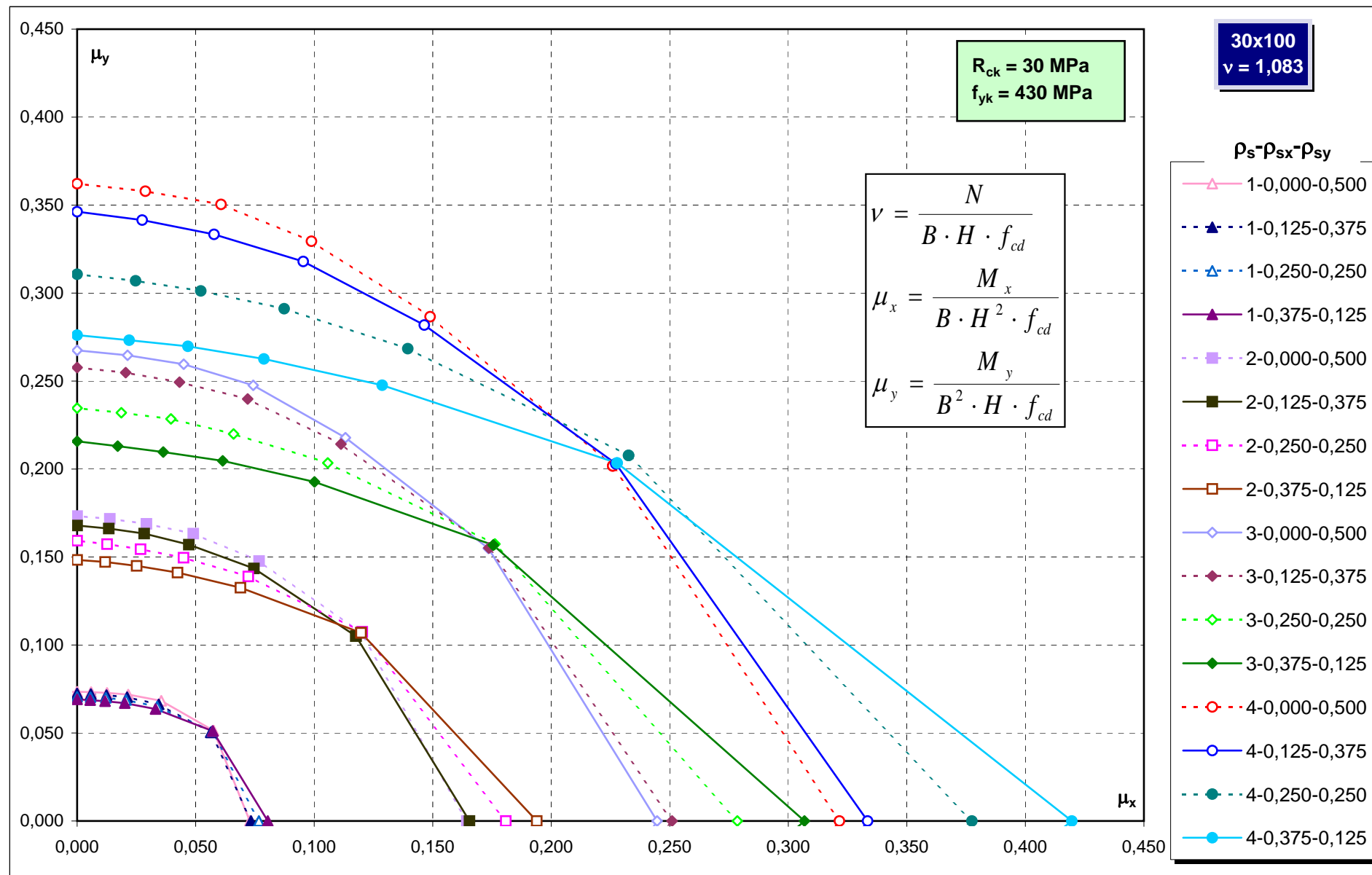


Abachi di progetto

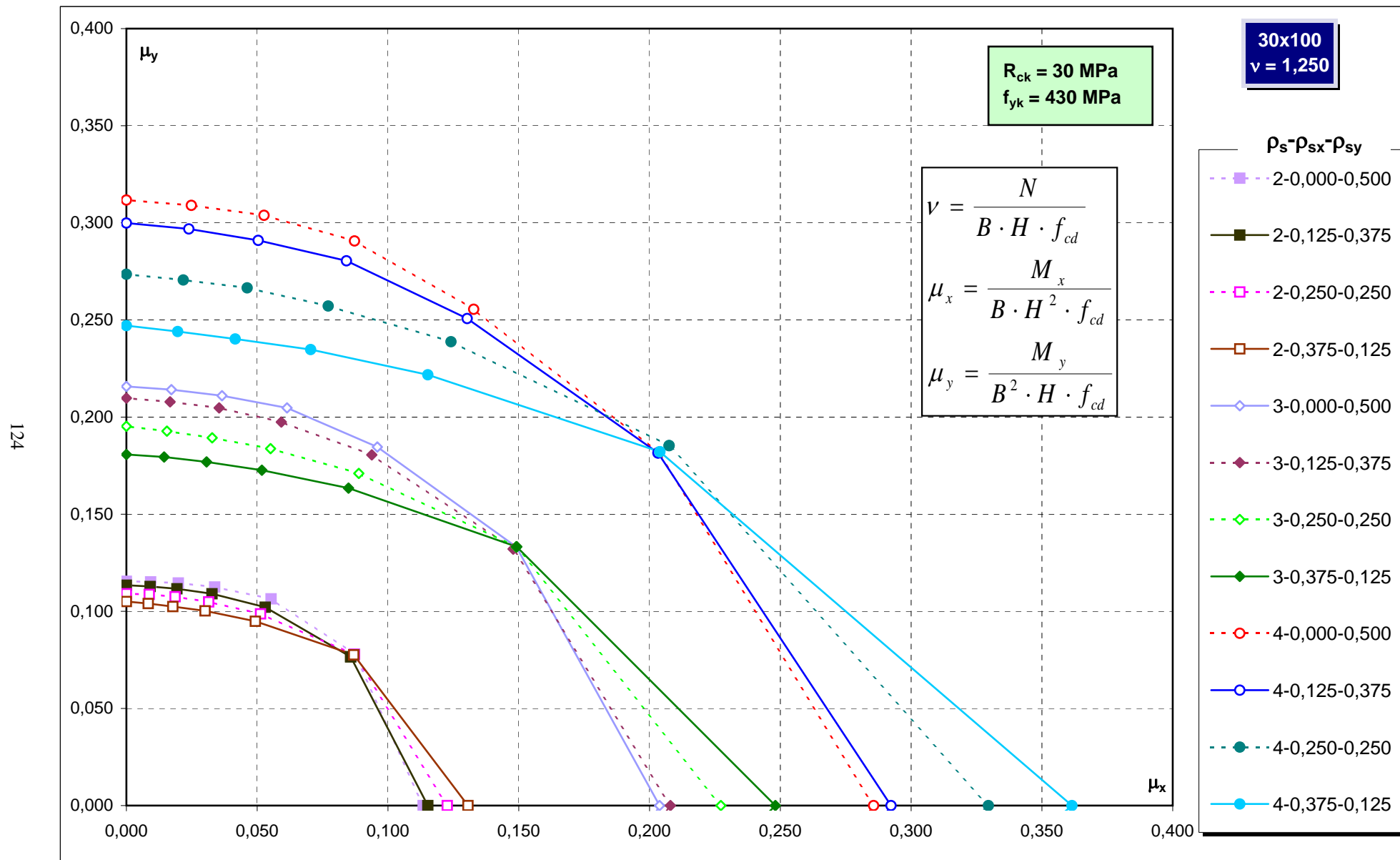


Abachi di progetto

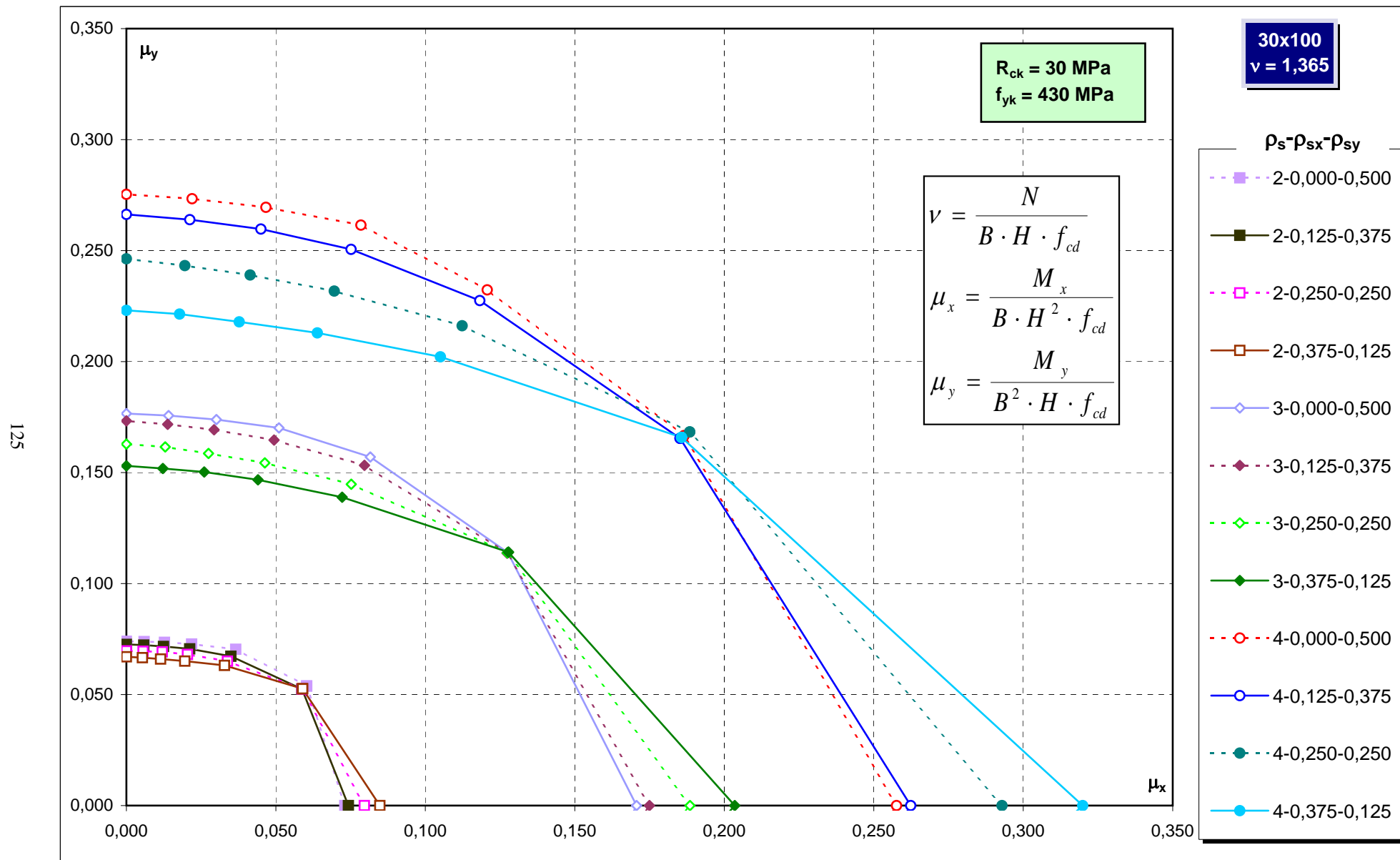
123



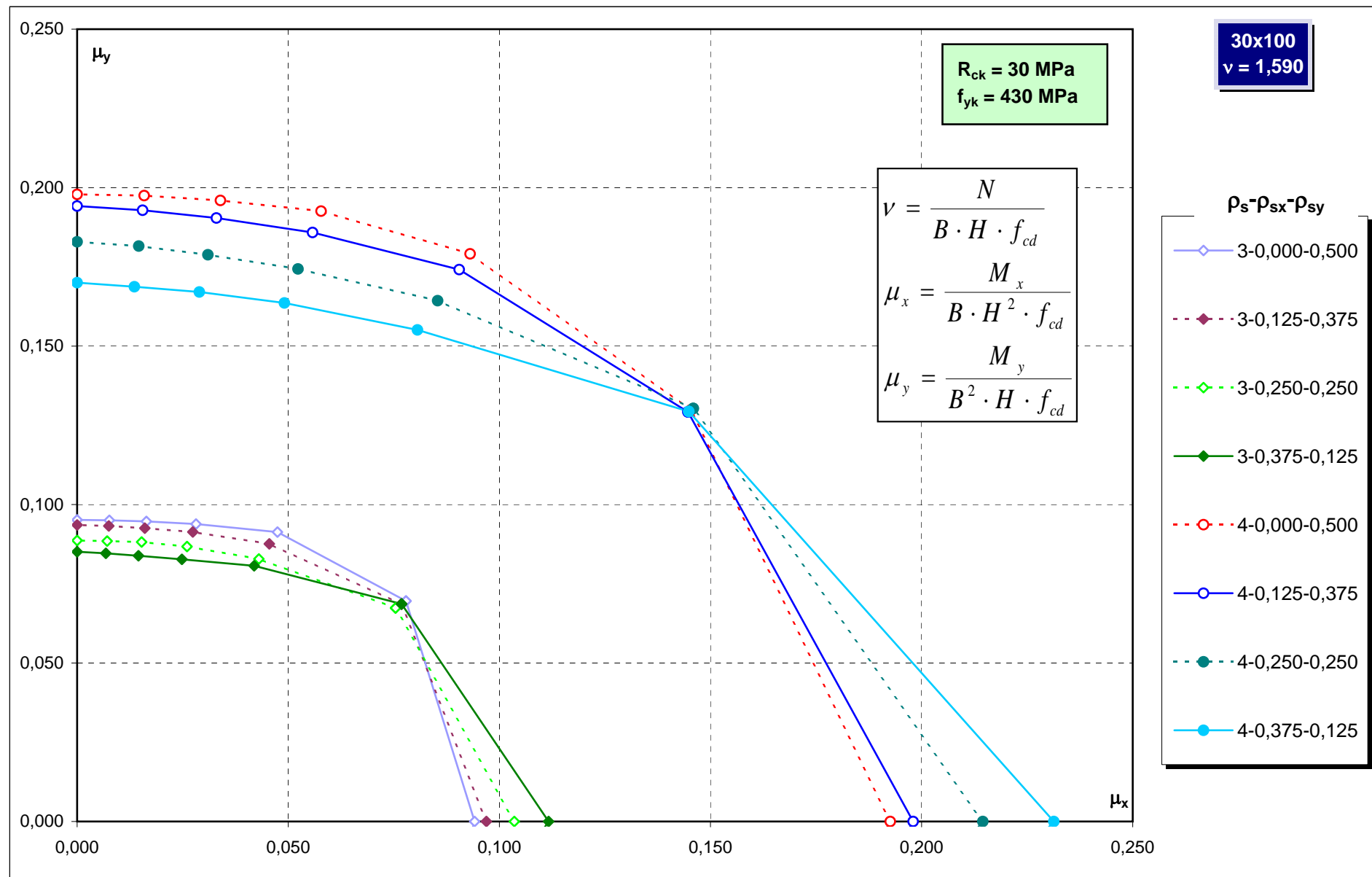
Abachi di progetto



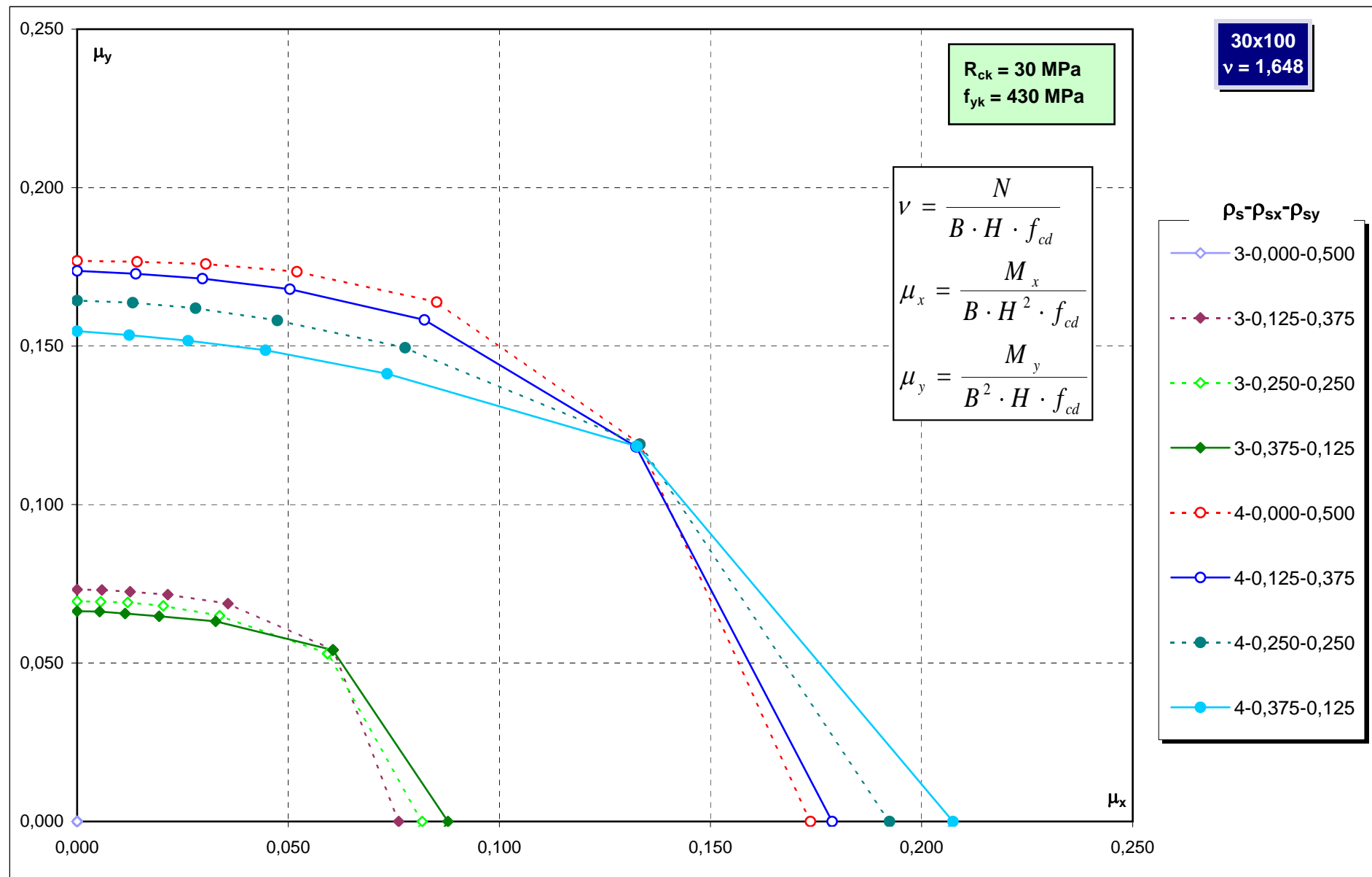
Abachi di progetto



Abachi di progetto

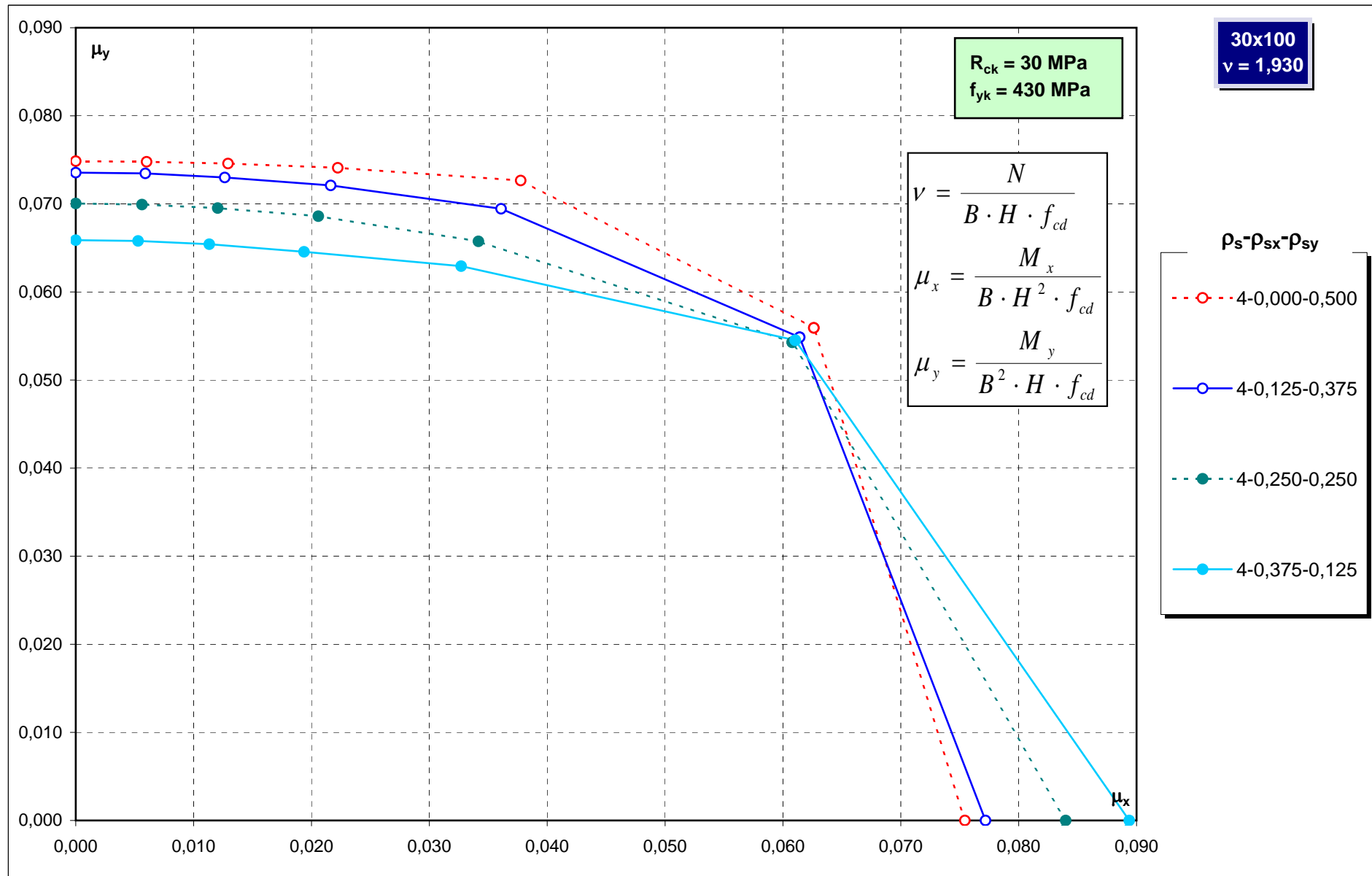


Abachi di progetto



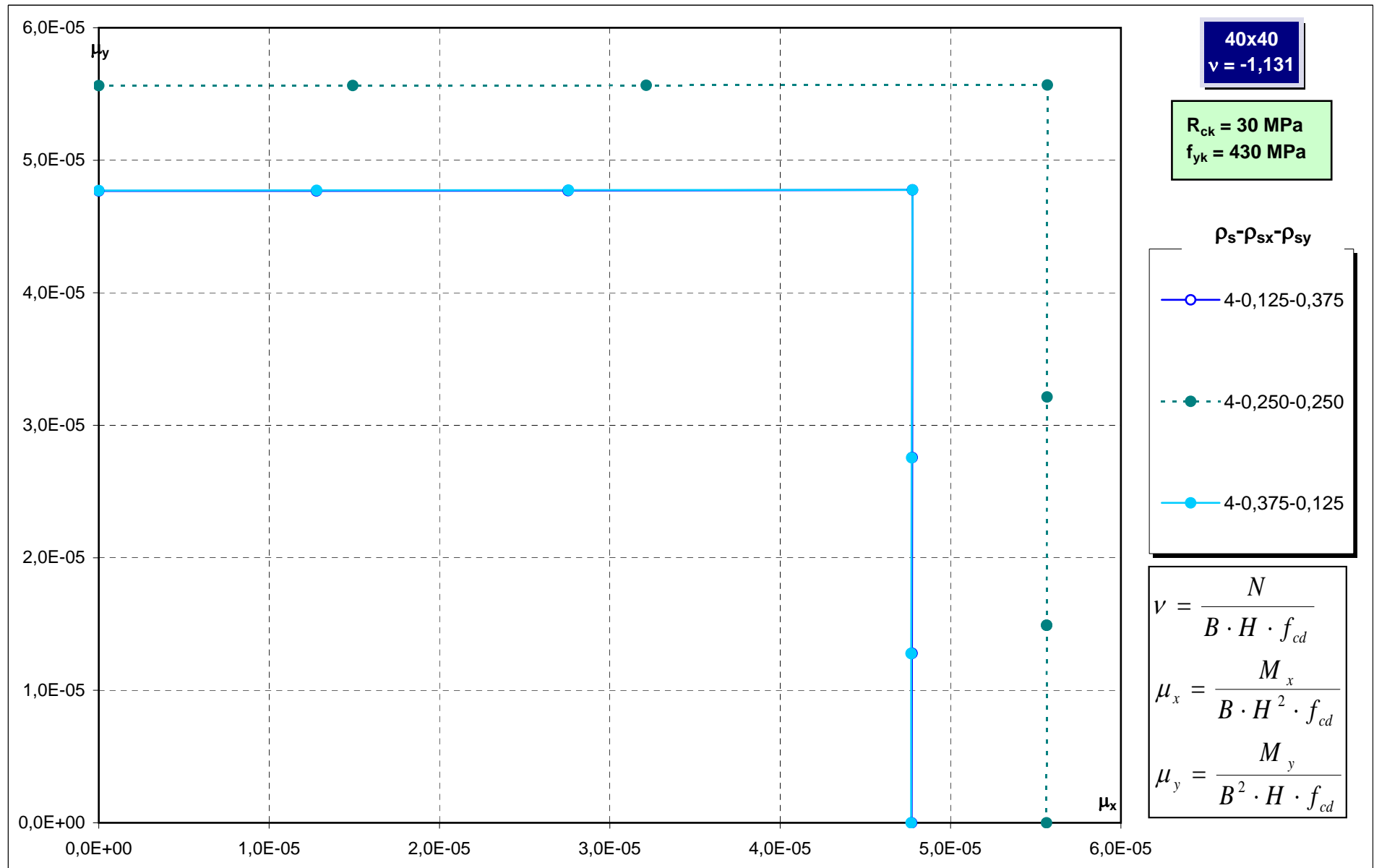
Abachi di progetto

128

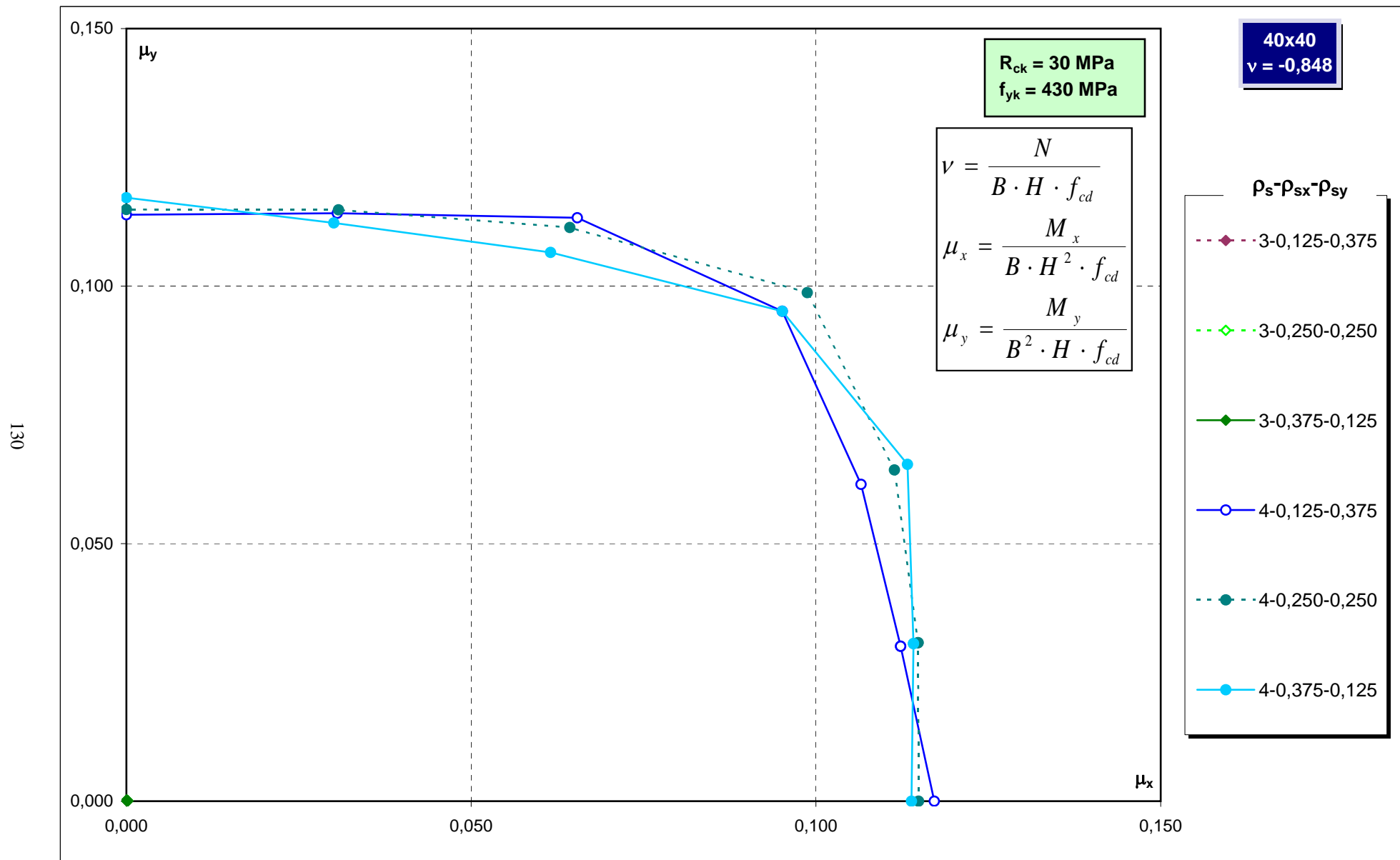


Abachi di progetto

129

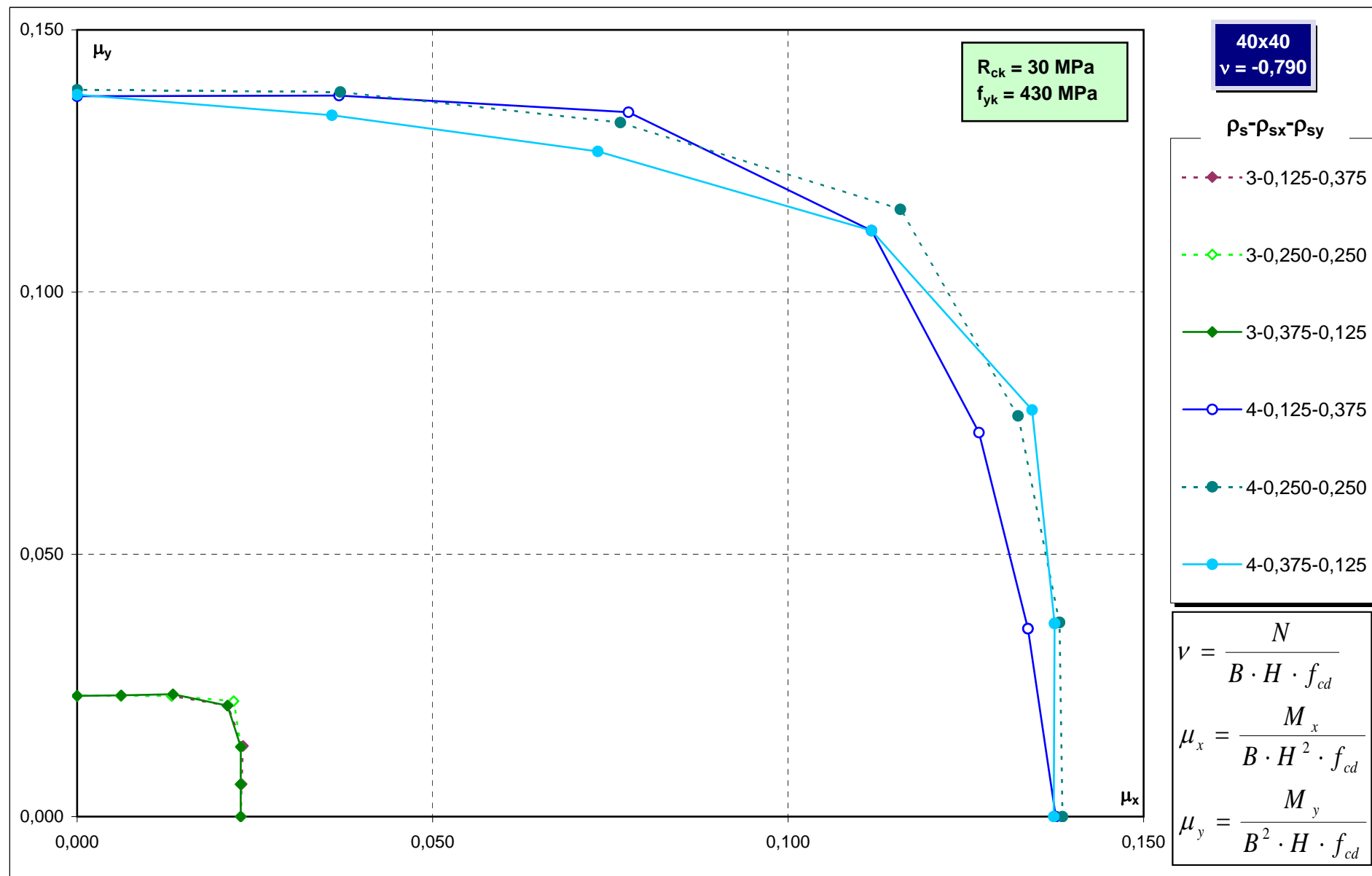


Abachi di progetto

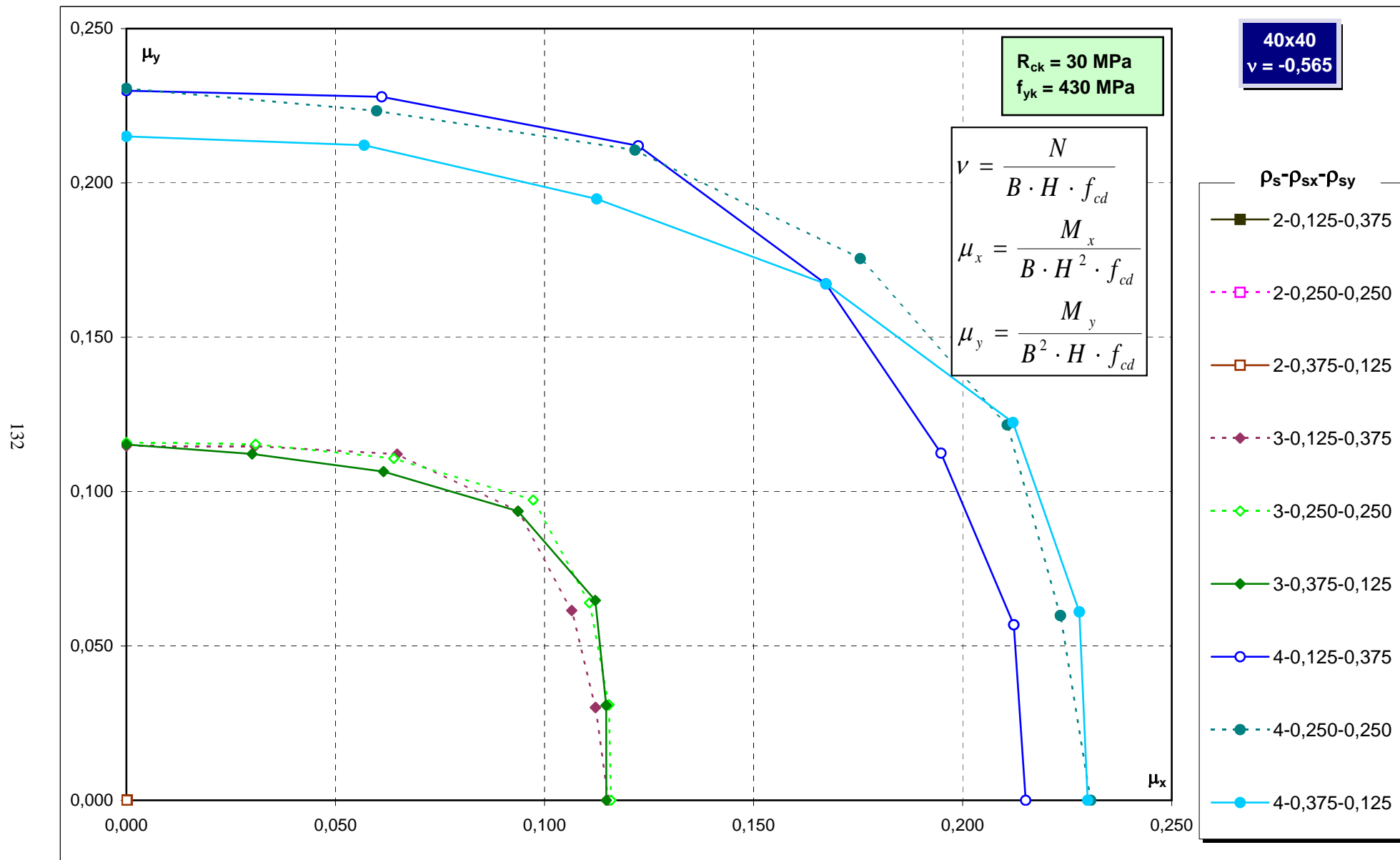


Abachi di progetto

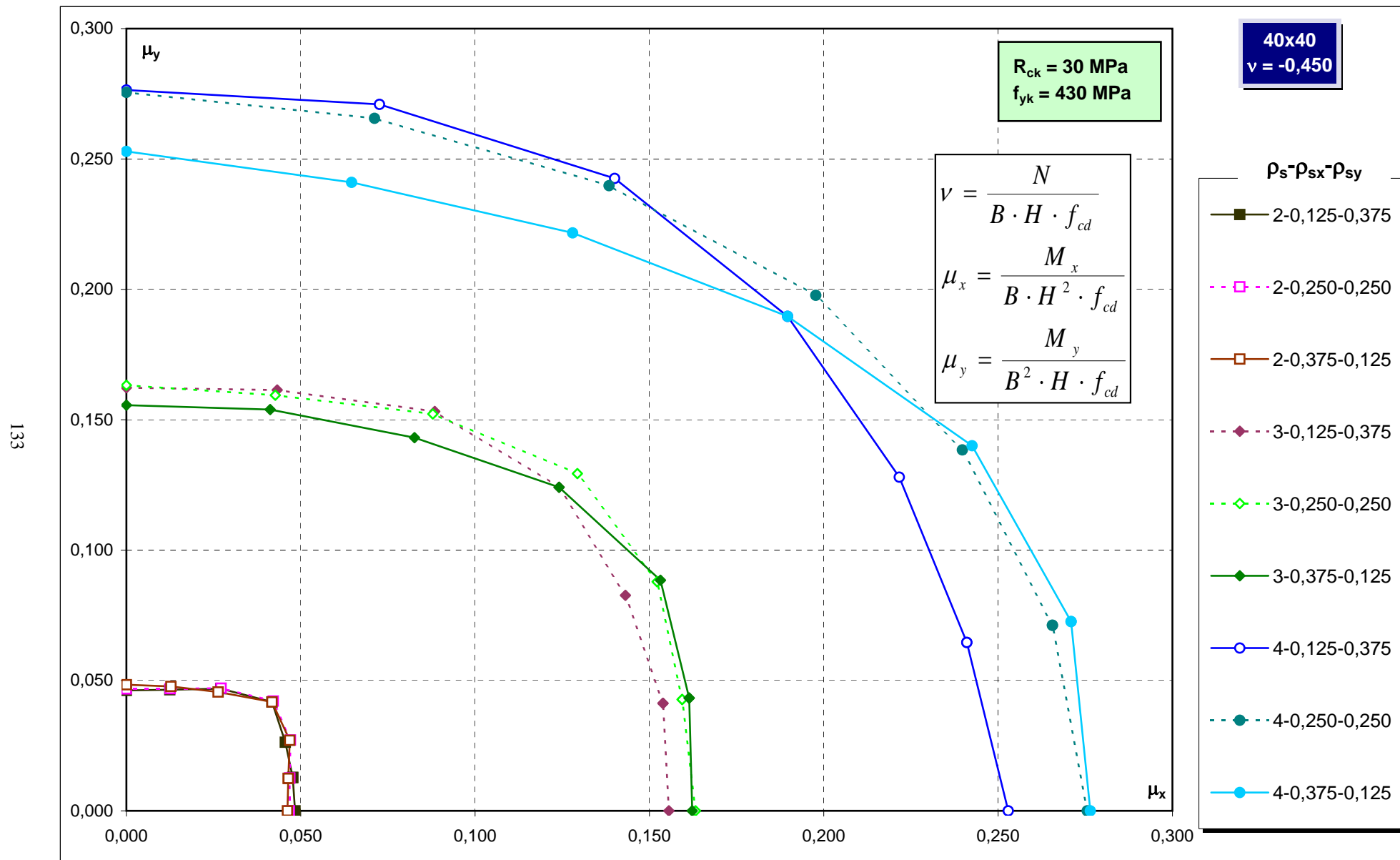
131



Abachi di progetto

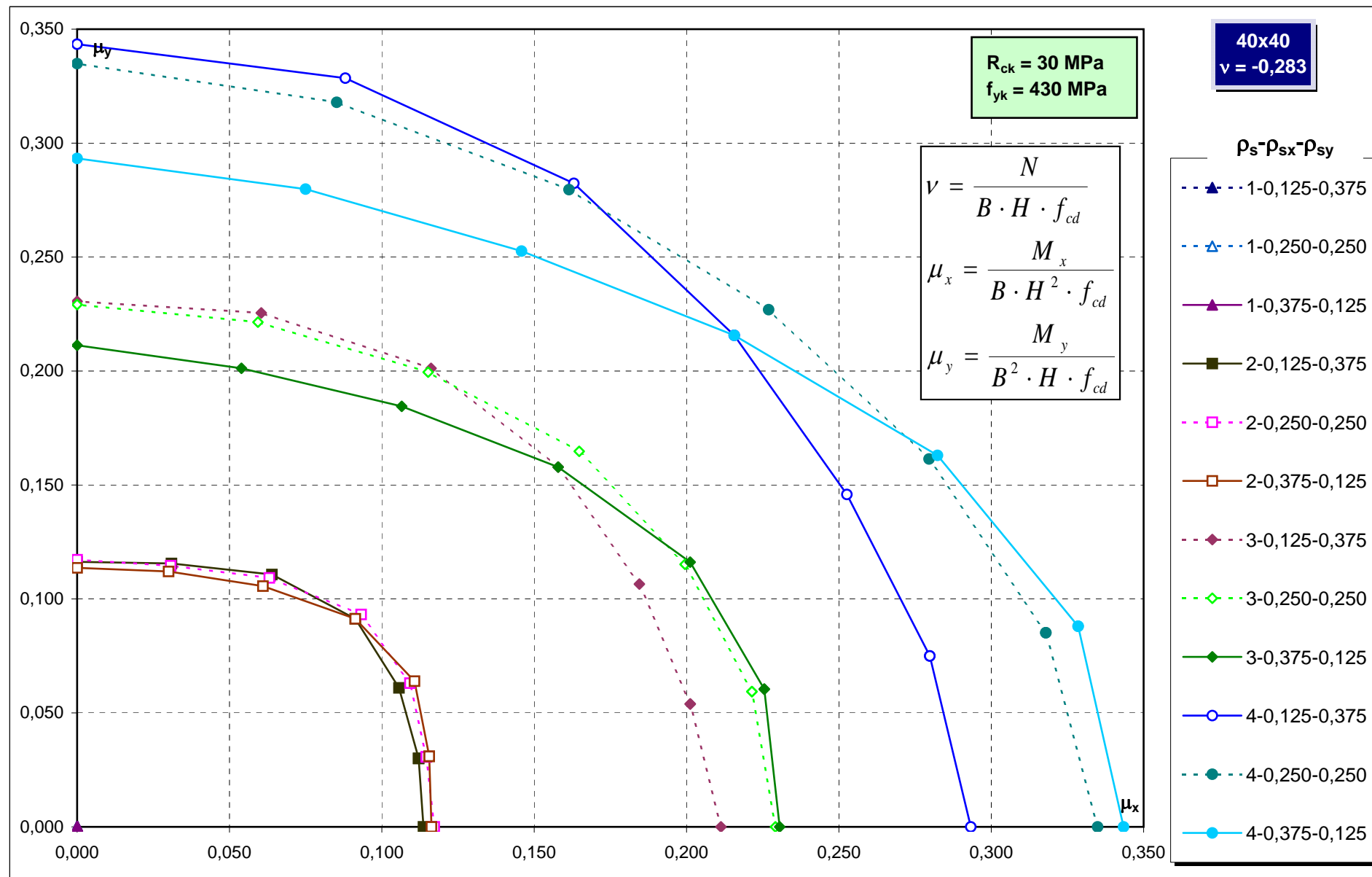


Abachi di progetto

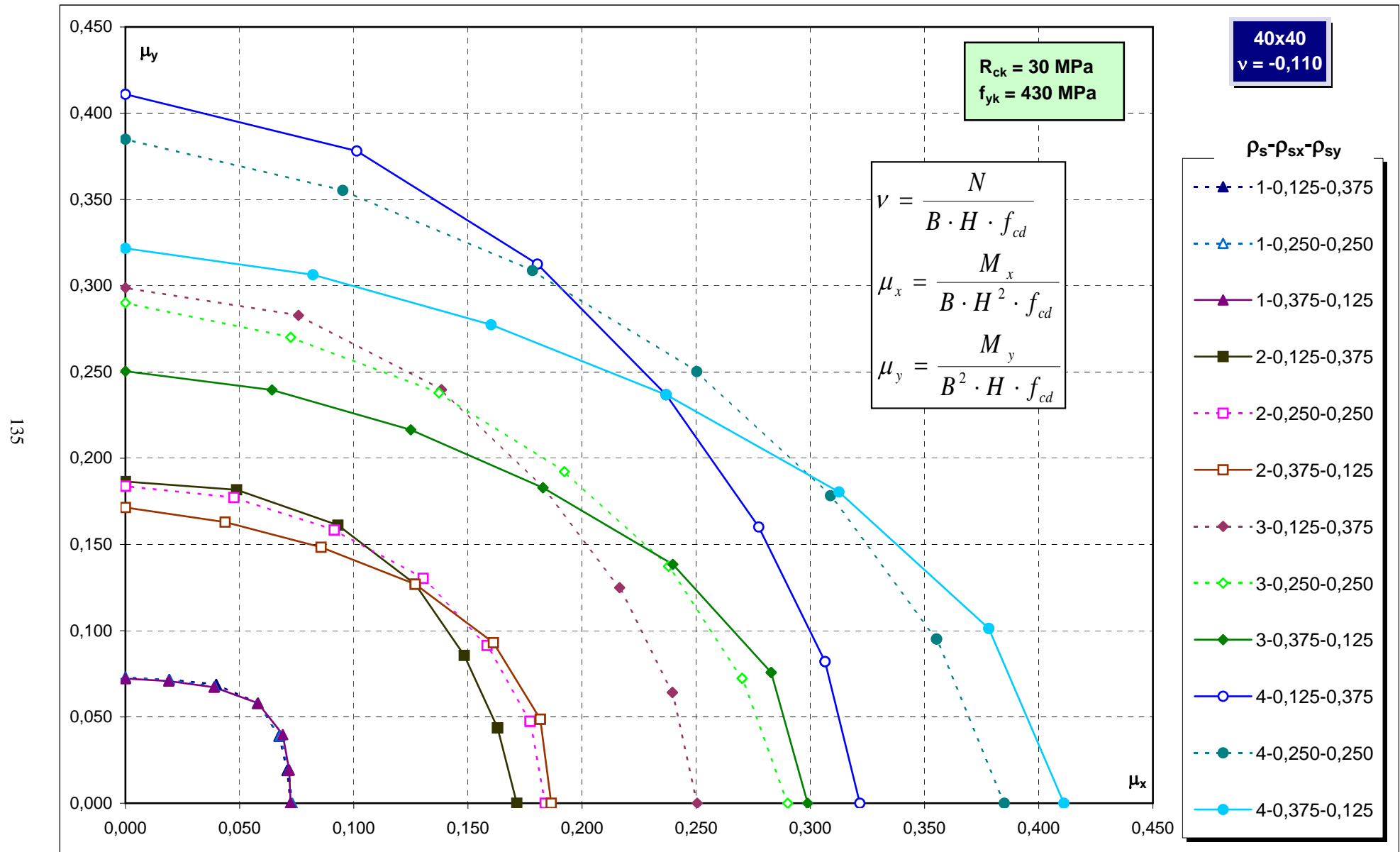


Abachi di progetto

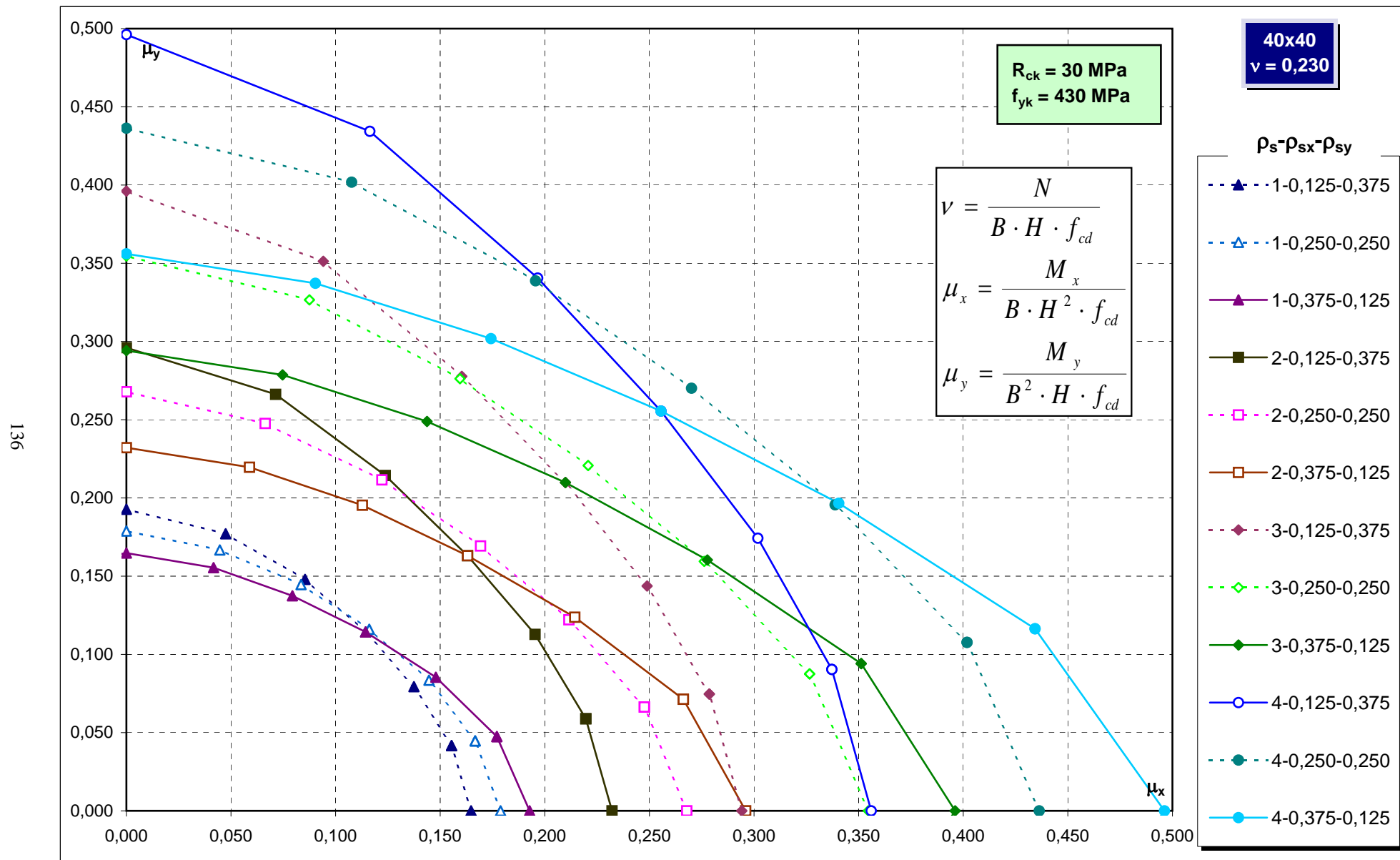
134



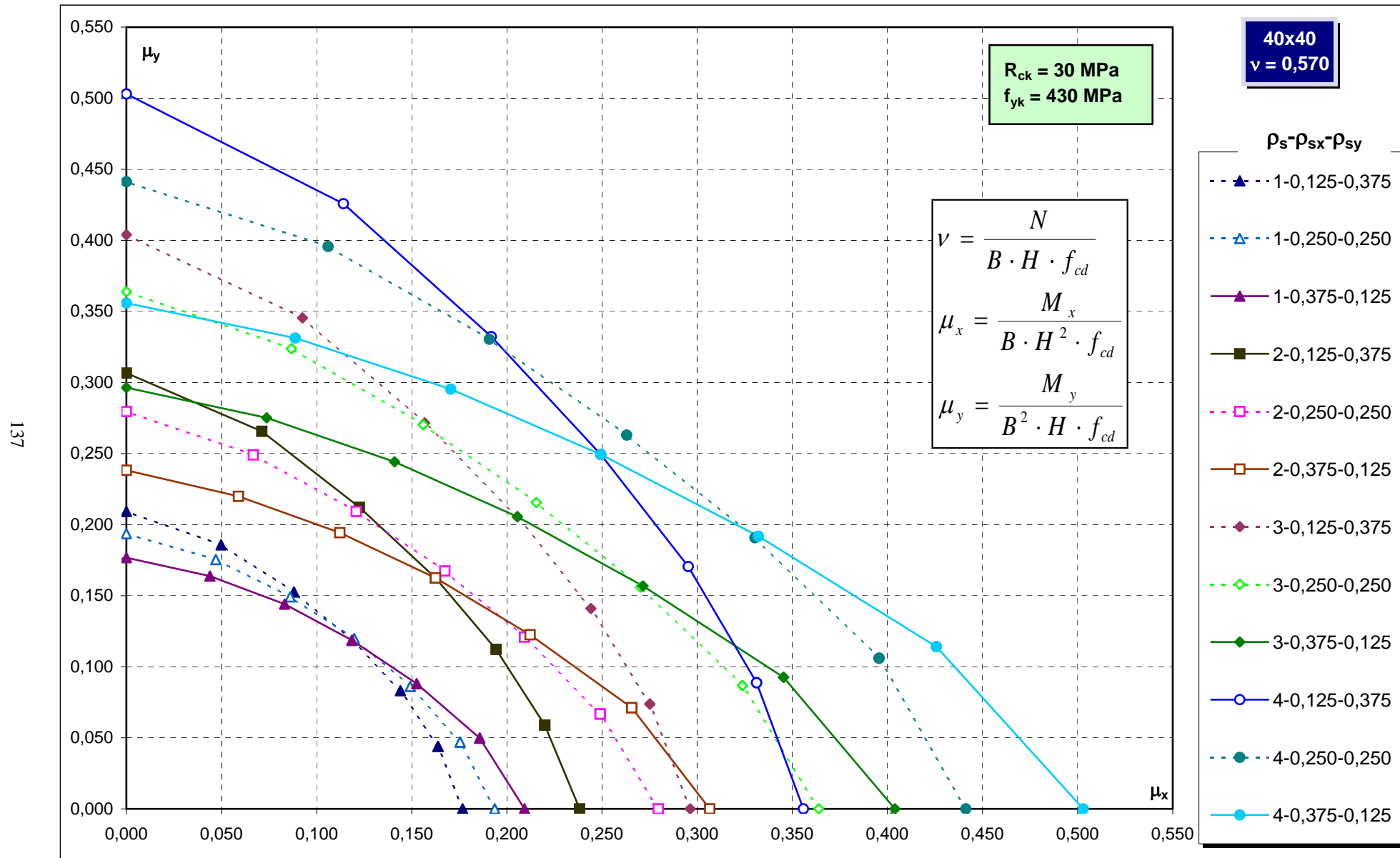
Abachi di progetto



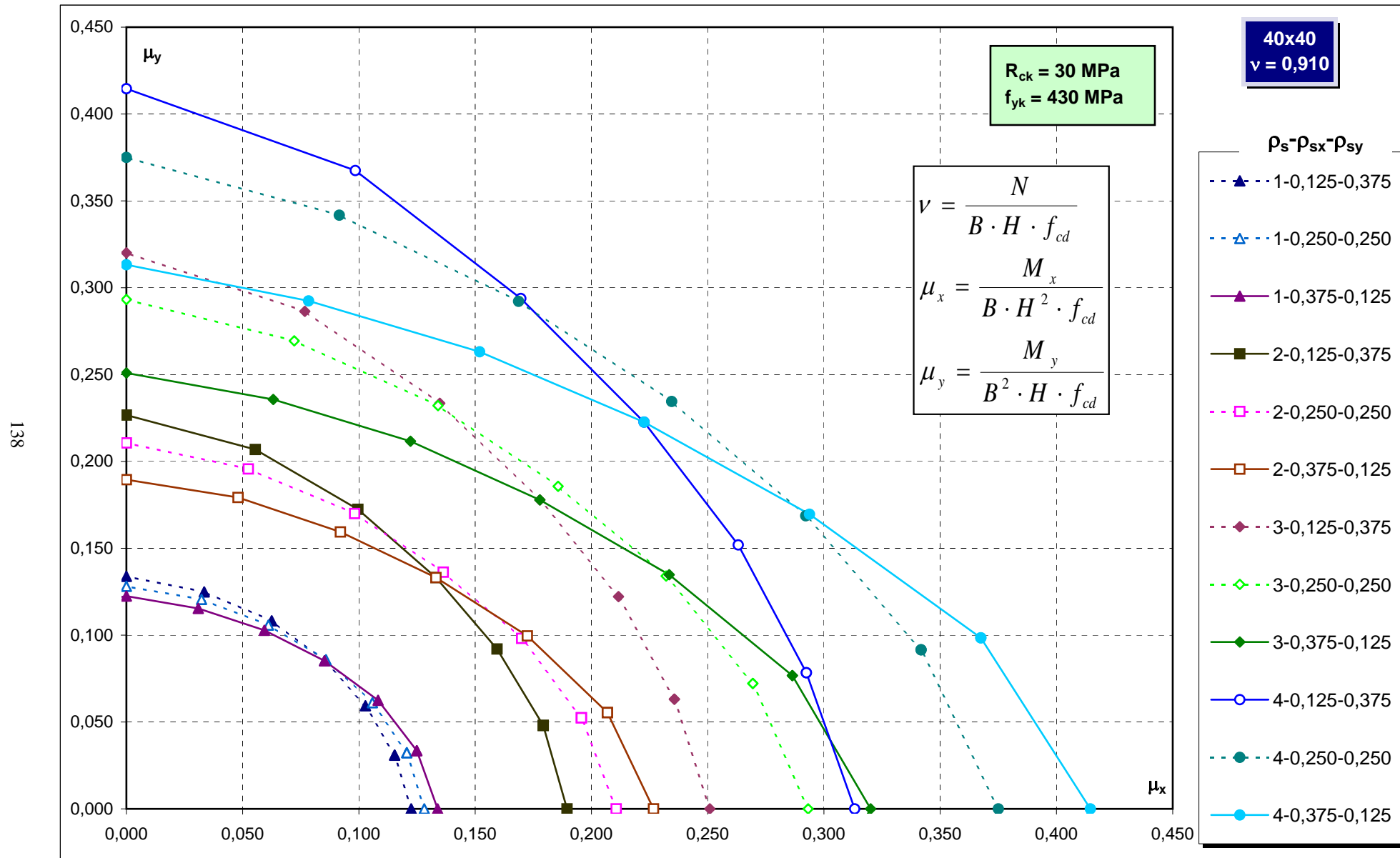
Abachi di progetto



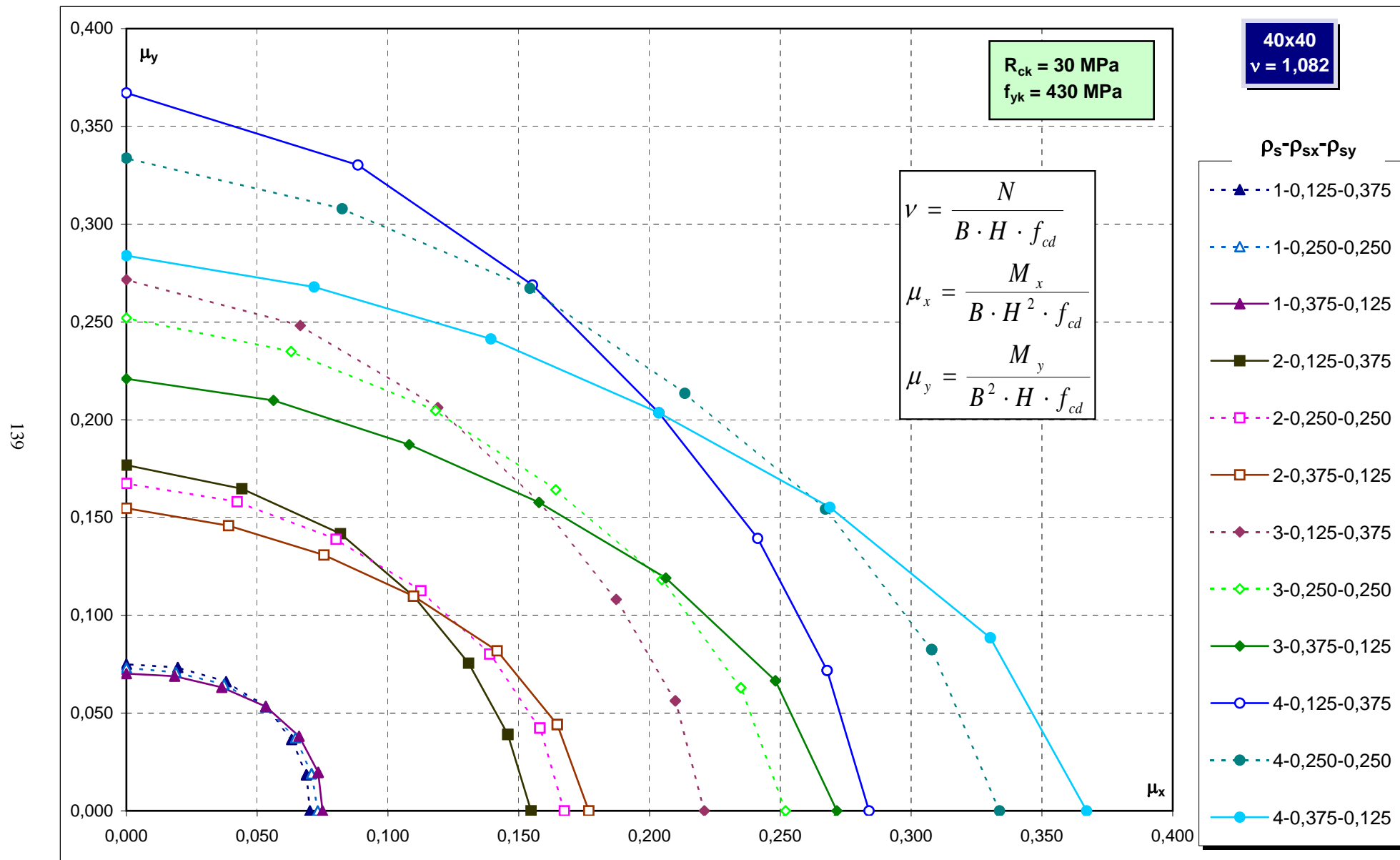
Abachi di progetto



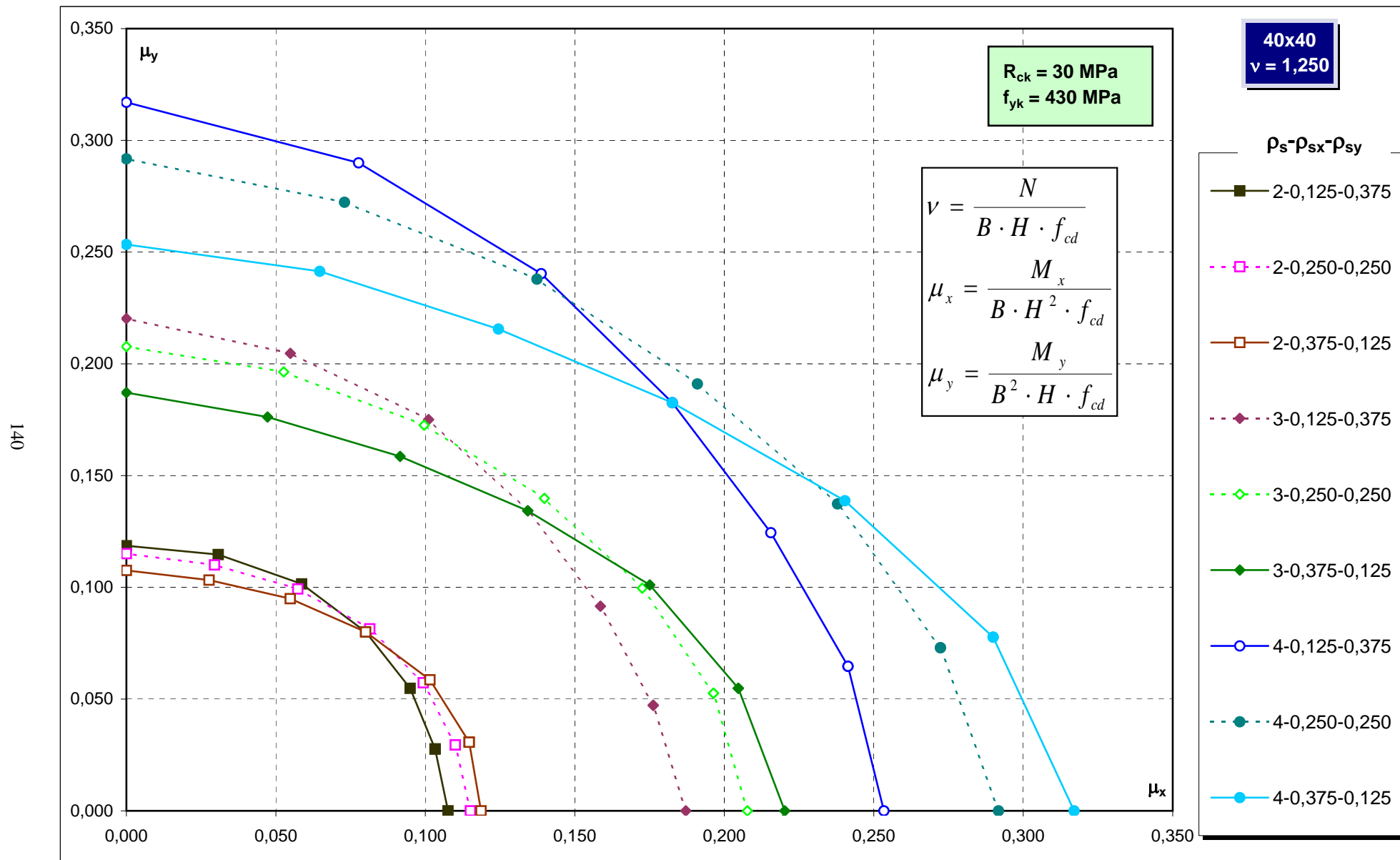
Abachi di progetto



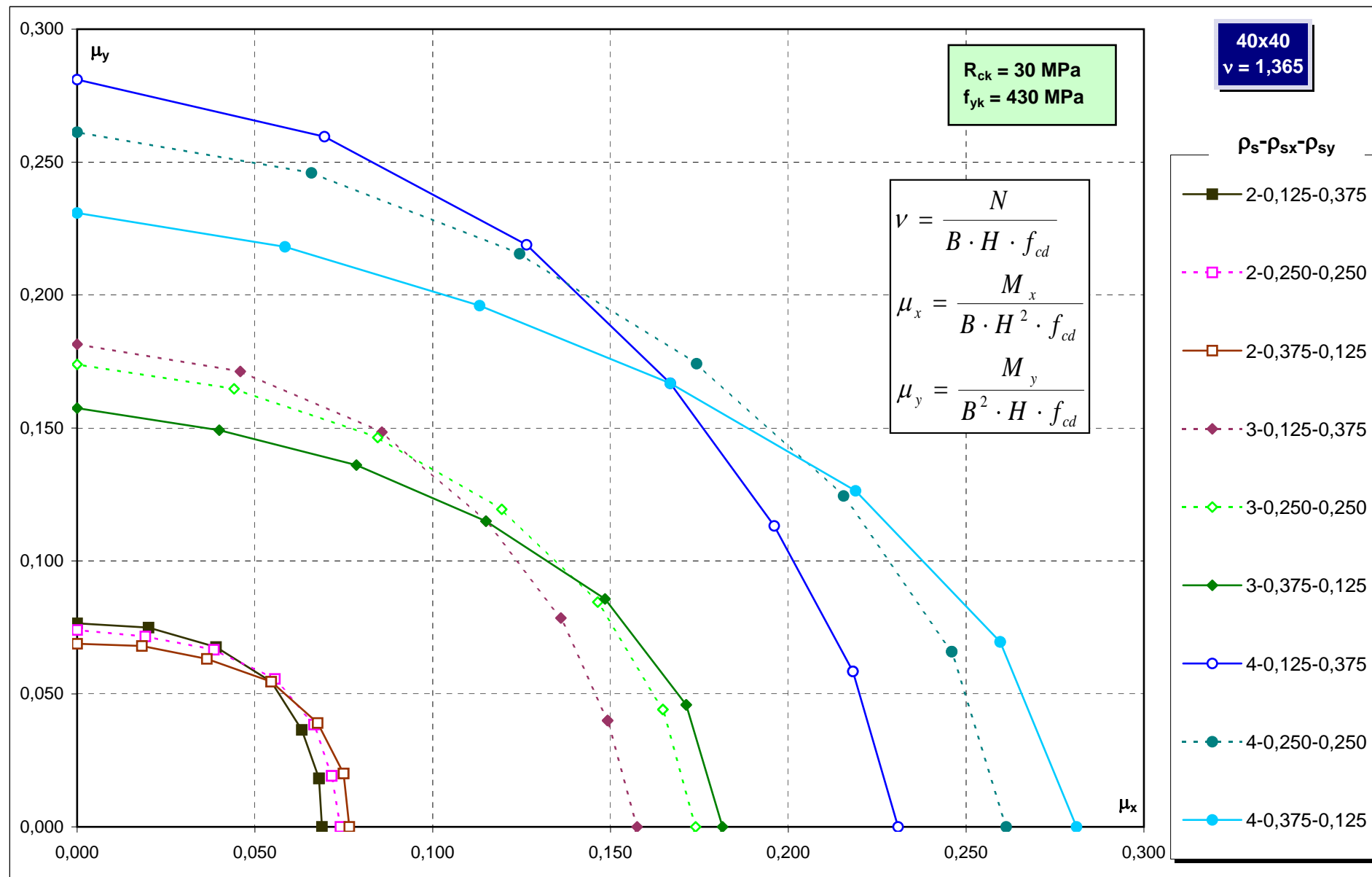
Abachi di progetto



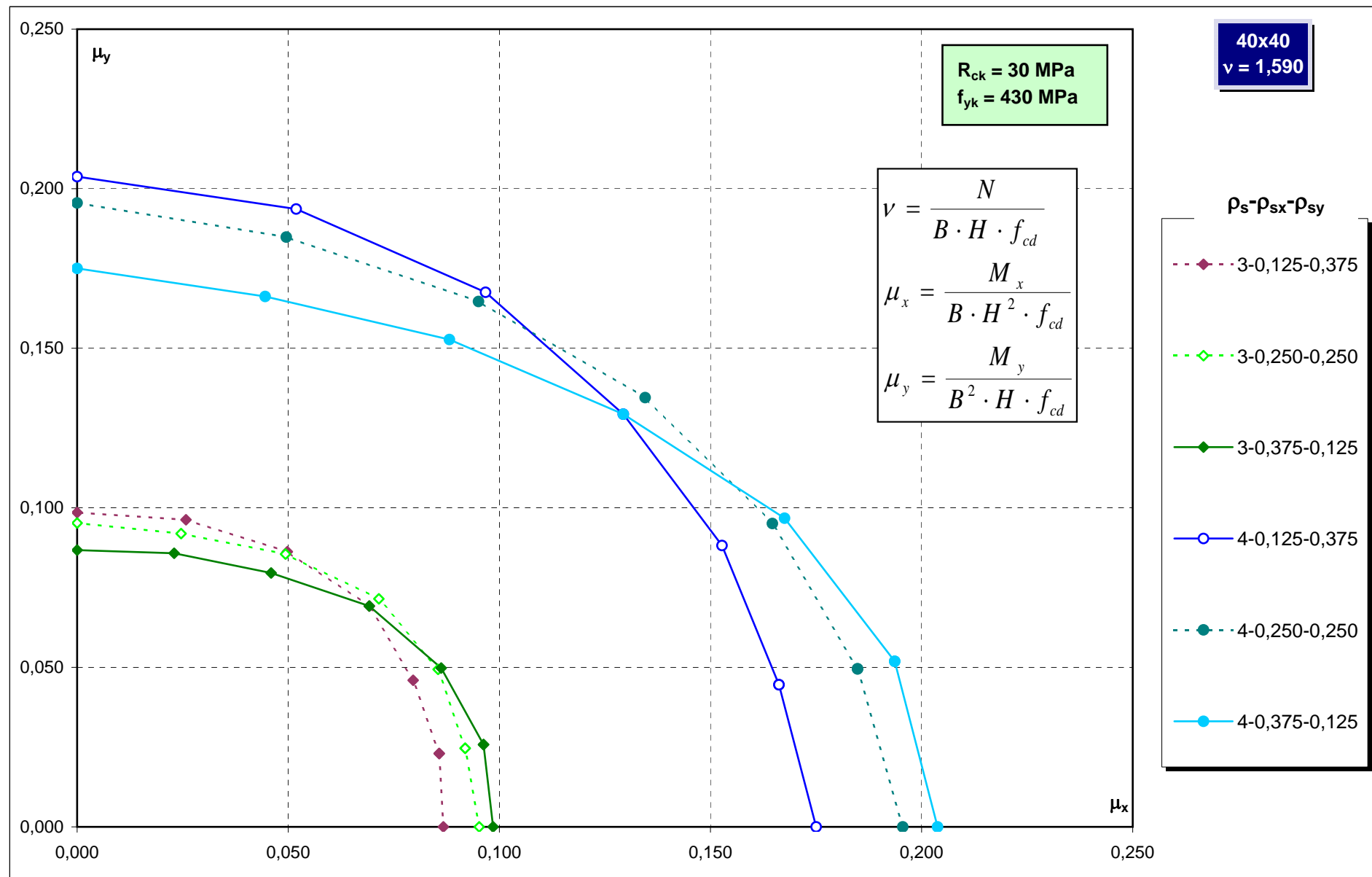
Abachi di progetto



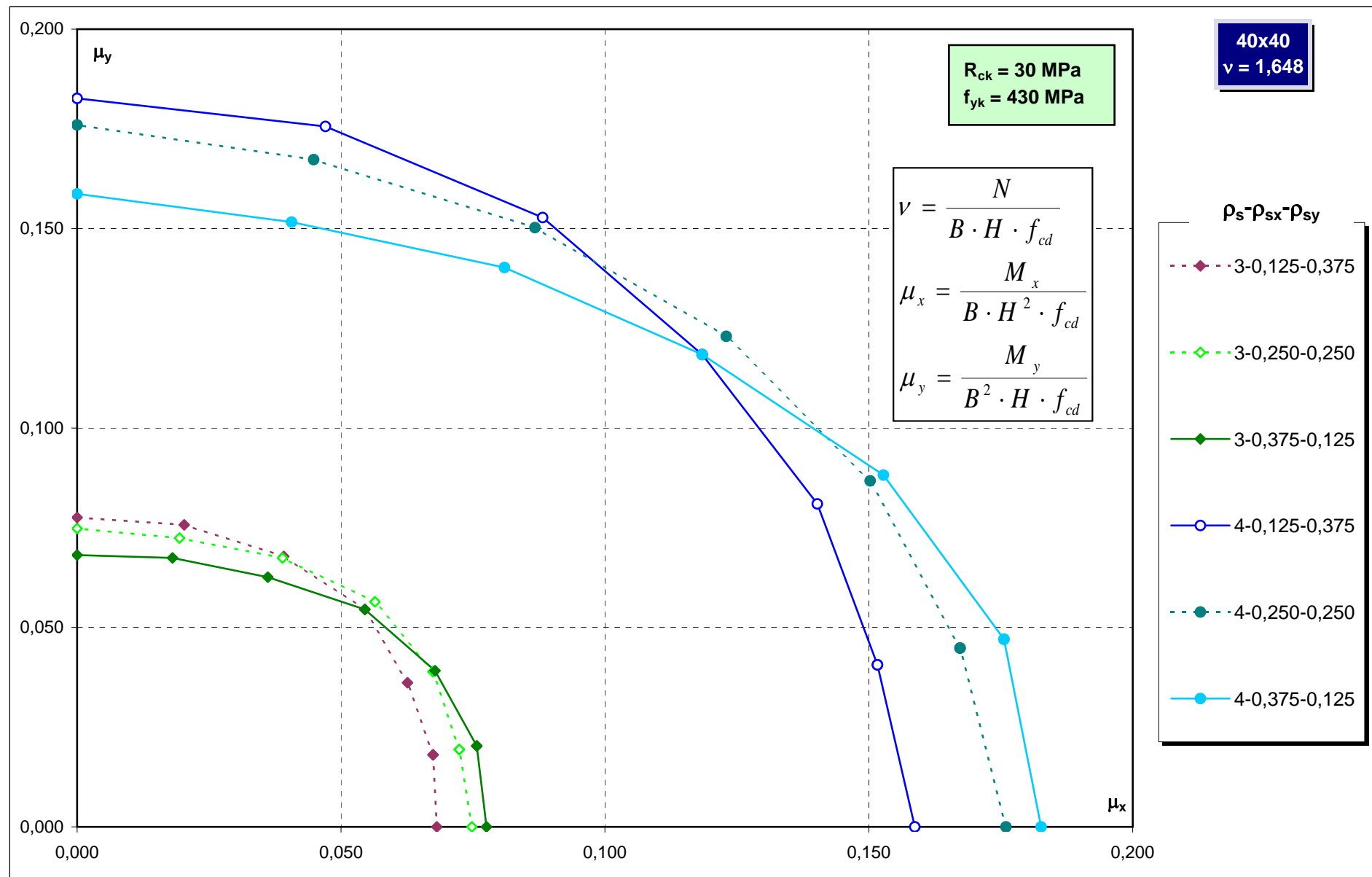
Abachi di progetto



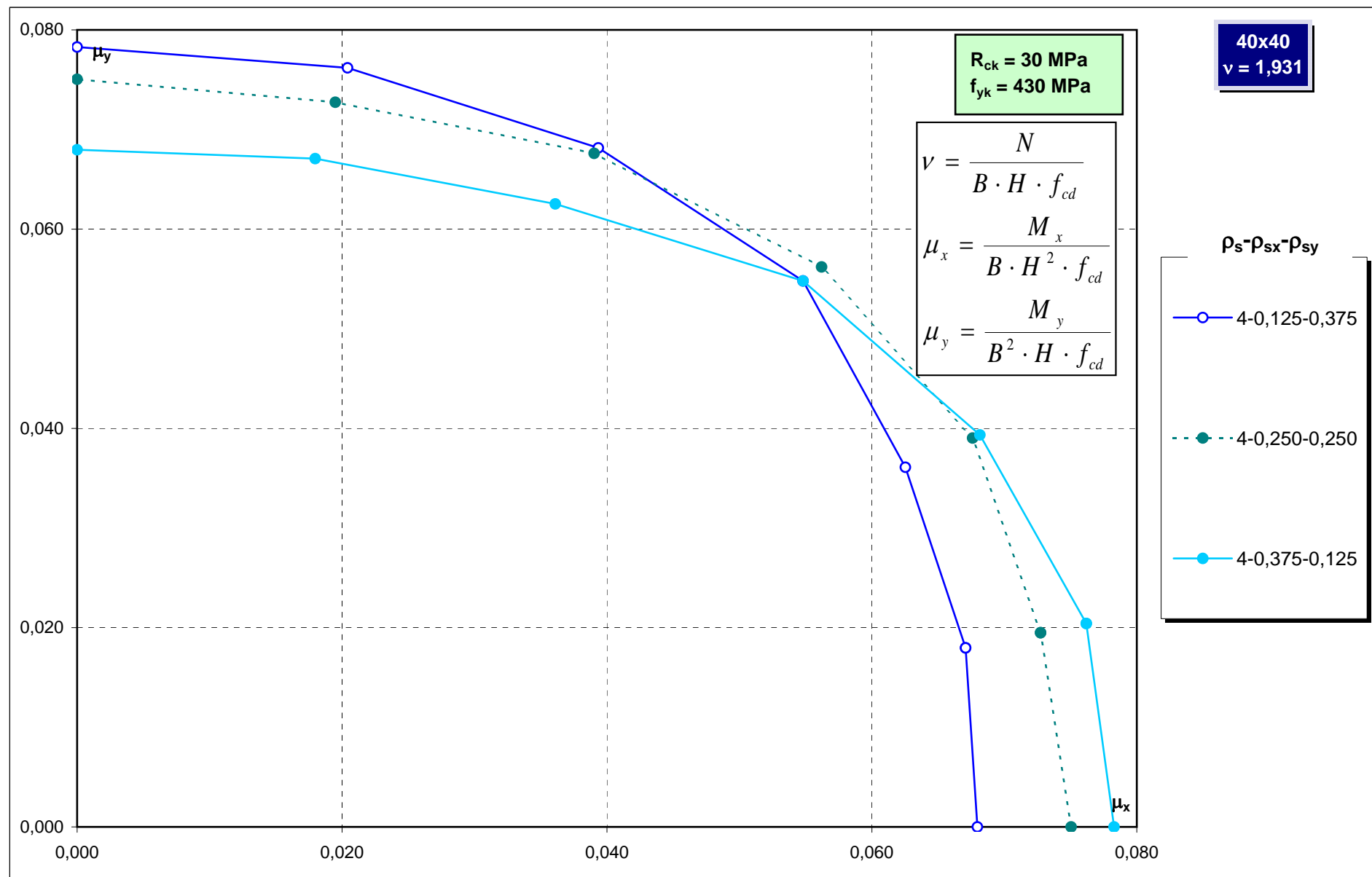
Abachi di progetto



Abachi di progetto

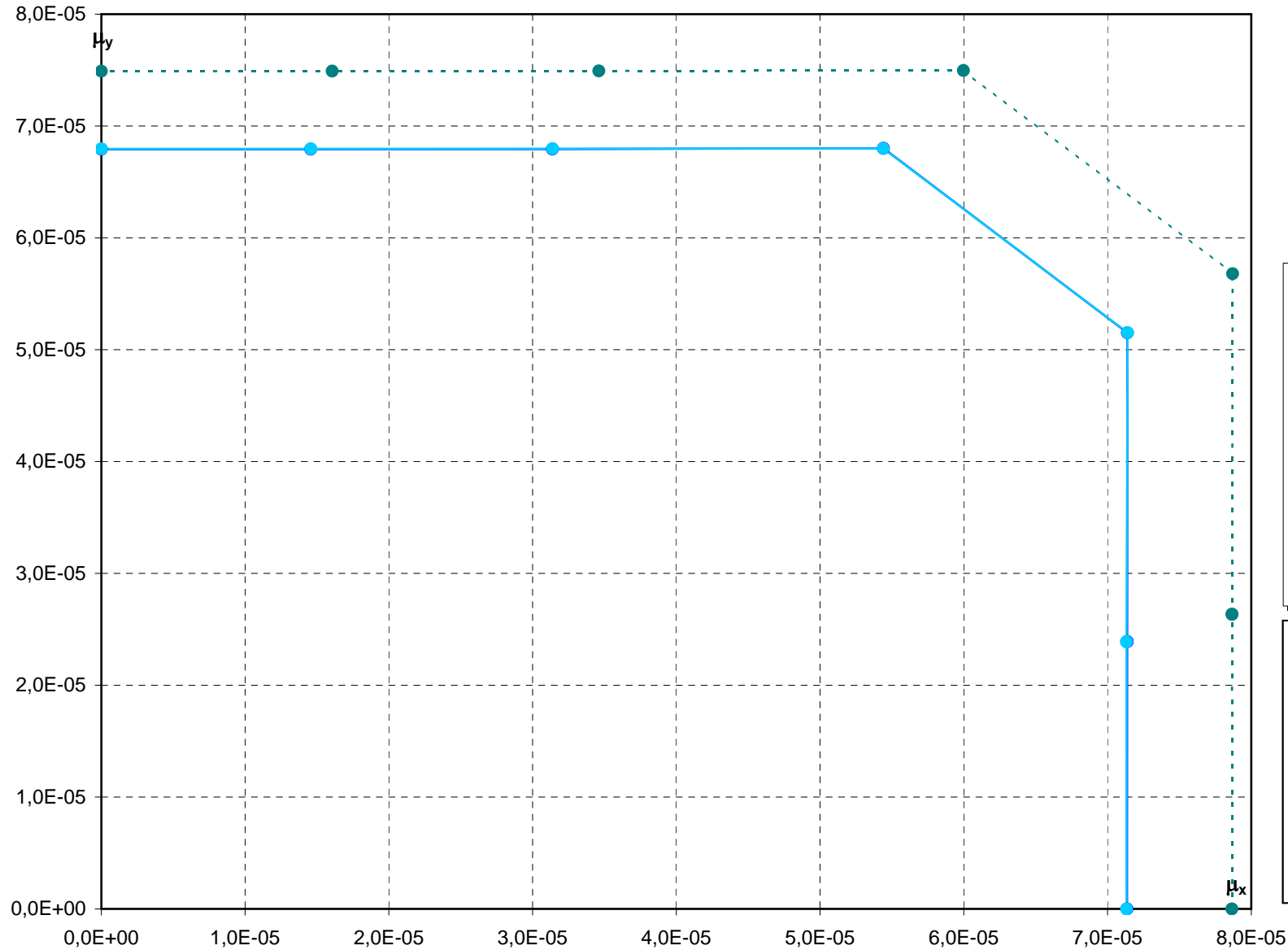


Abachi di progetto



Abachi di progetto

145



40x50
 $\nu = -1,131$

$R_{ck} = 30 \text{ MPa}$
 $f_{yk} = 430 \text{ MPa}$

$\rho_s - \rho_{sx} - \rho_{sy}$

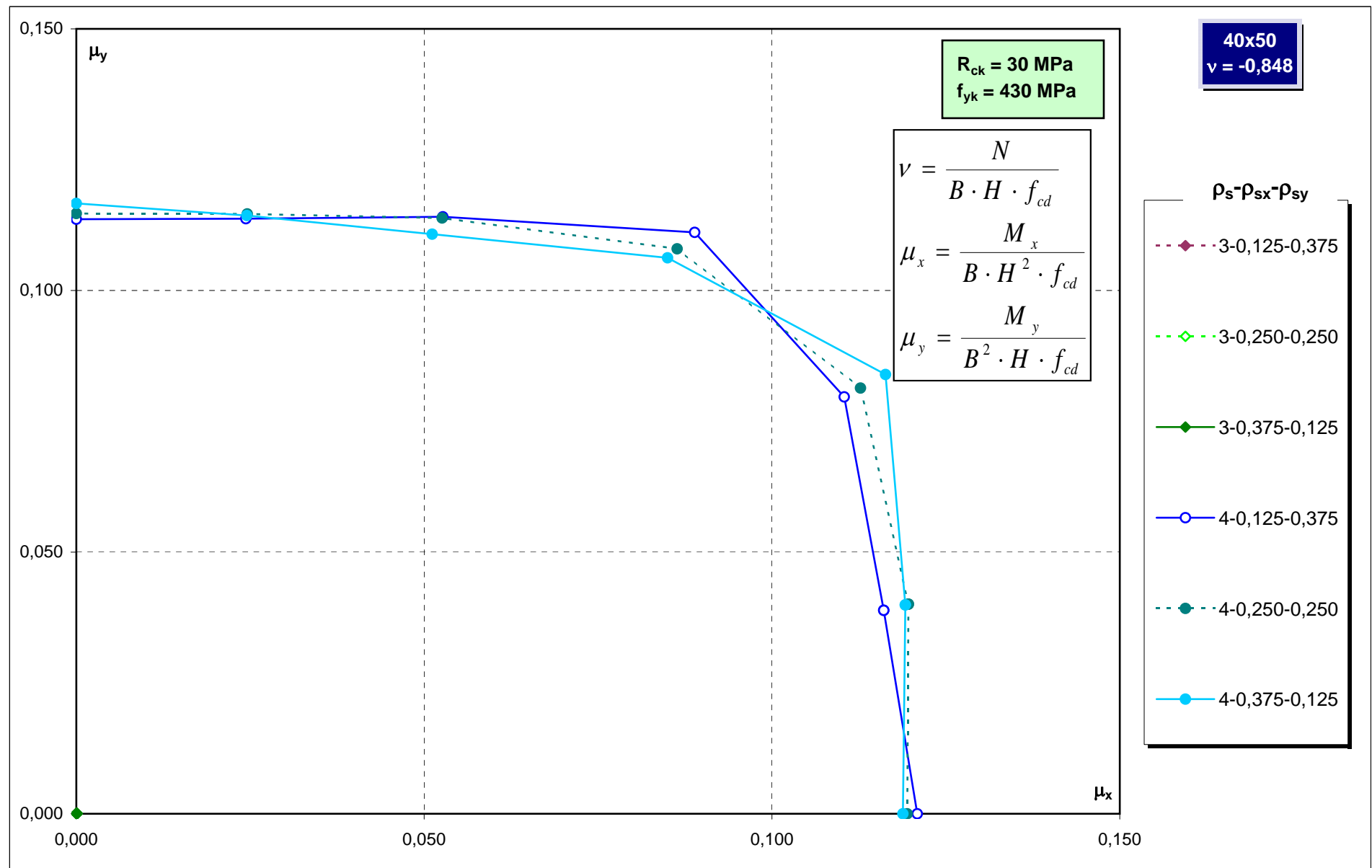
4-0,125-0,375

4-0,250-0,250

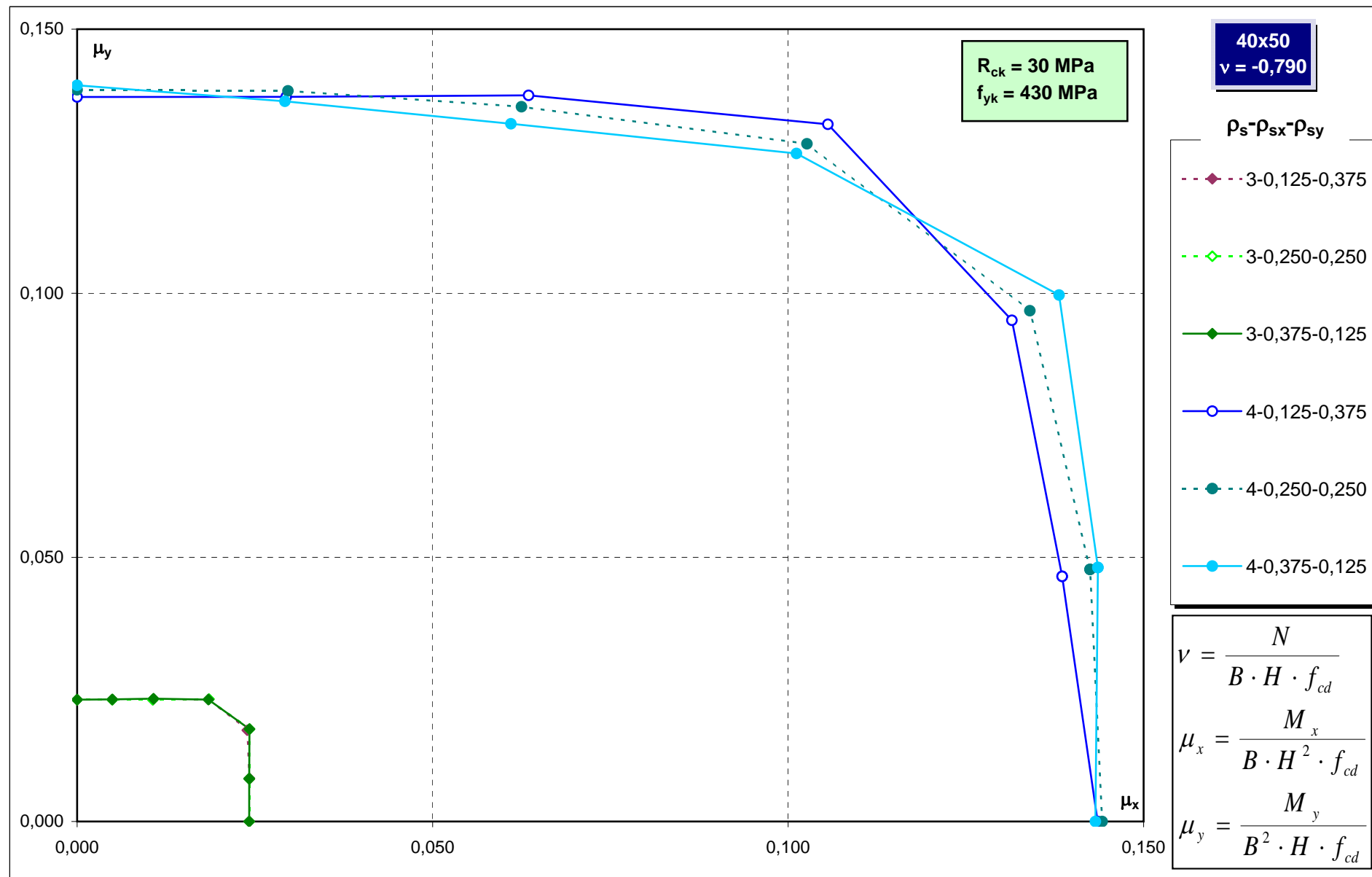
4-0,375-0,125

$$\nu = \frac{N}{B \cdot H \cdot f_{cd}}$$
$$\mu_x = \frac{M_x}{B \cdot H^2 \cdot f_{cd}}$$
$$\mu_y = \frac{M_y}{B^2 \cdot H \cdot f_{cd}}$$

Abachi di progetto

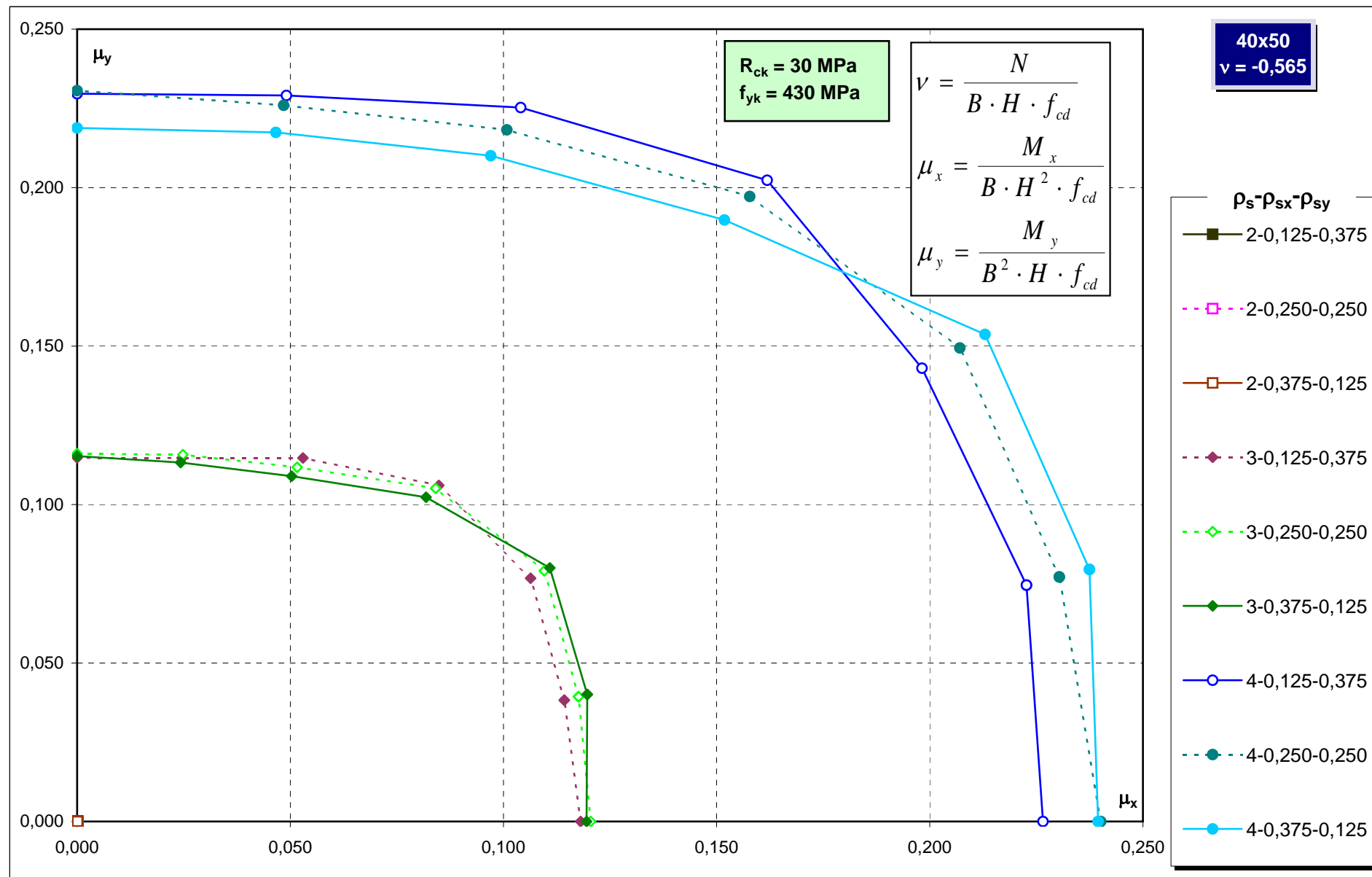


Abachi di progetto



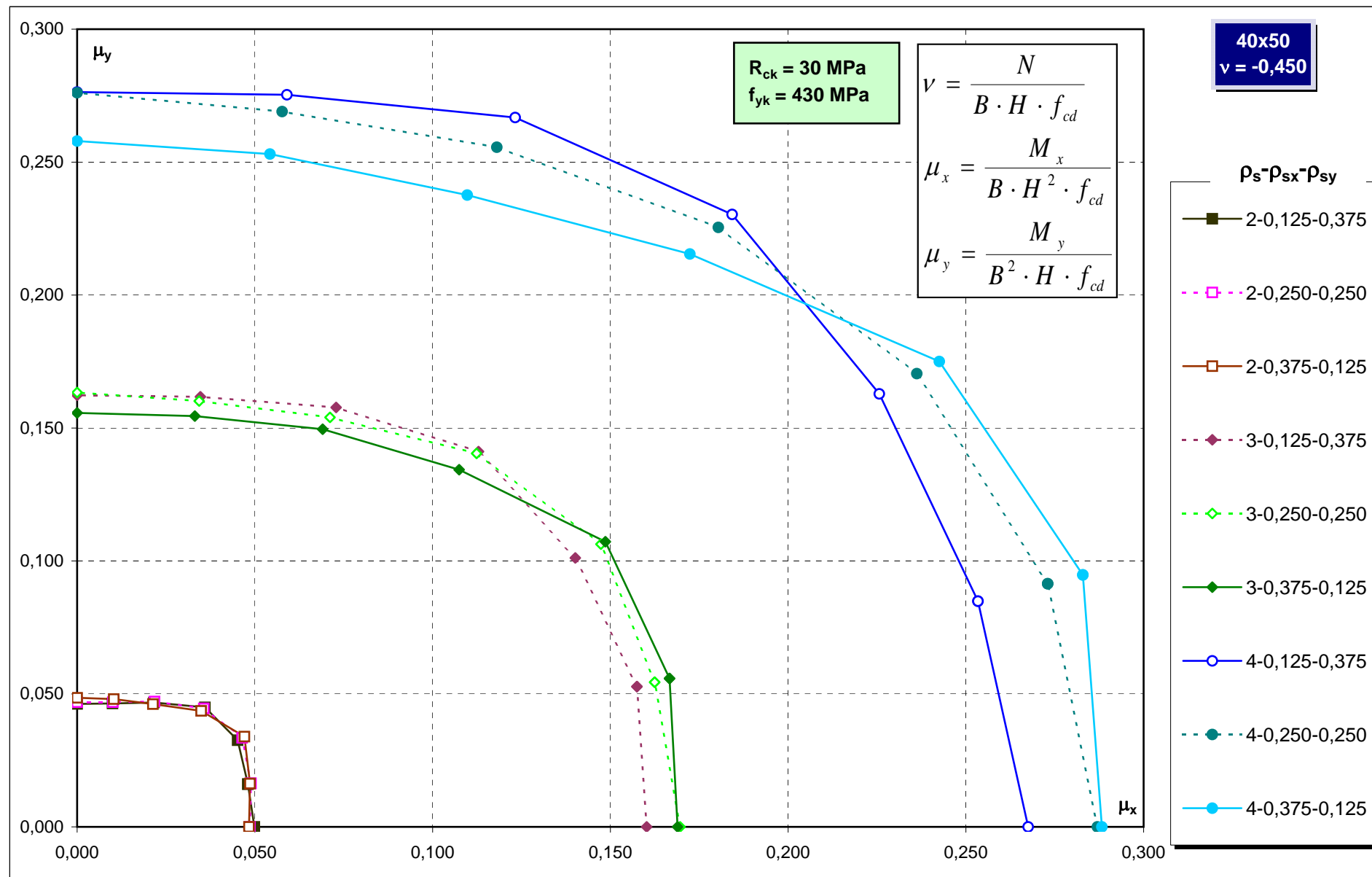
Abachi di progetto

148

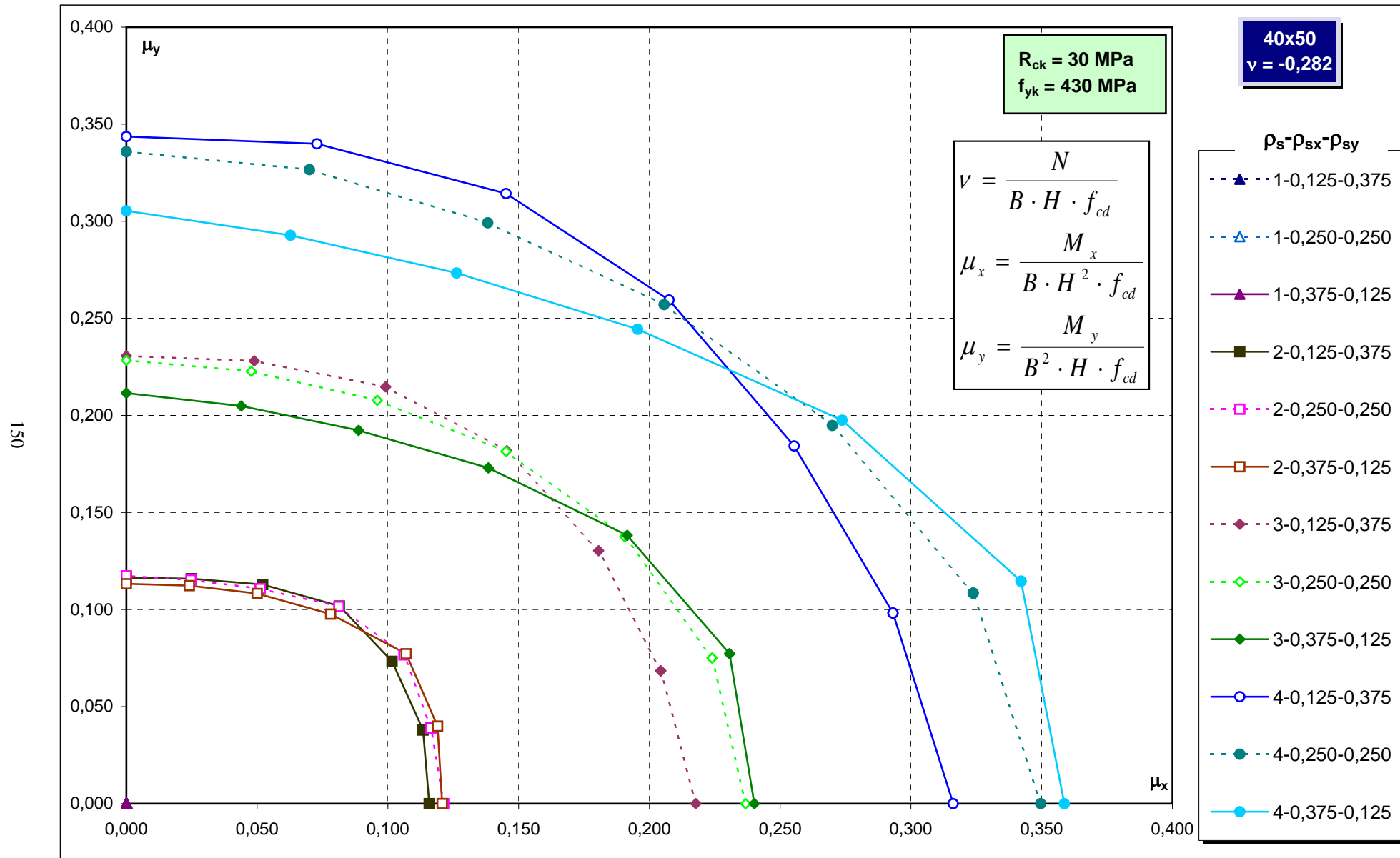


Abachi di progetto

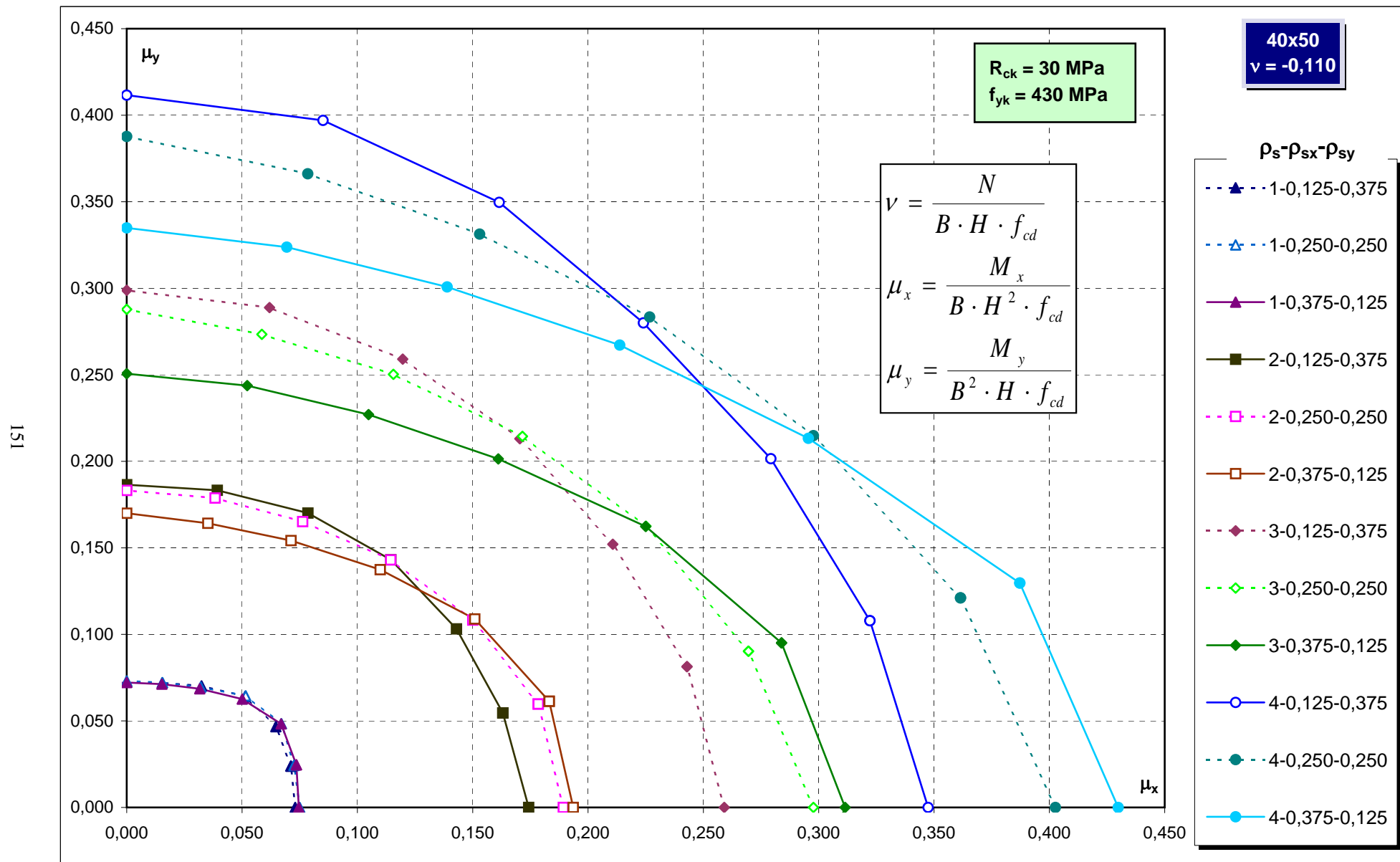
149



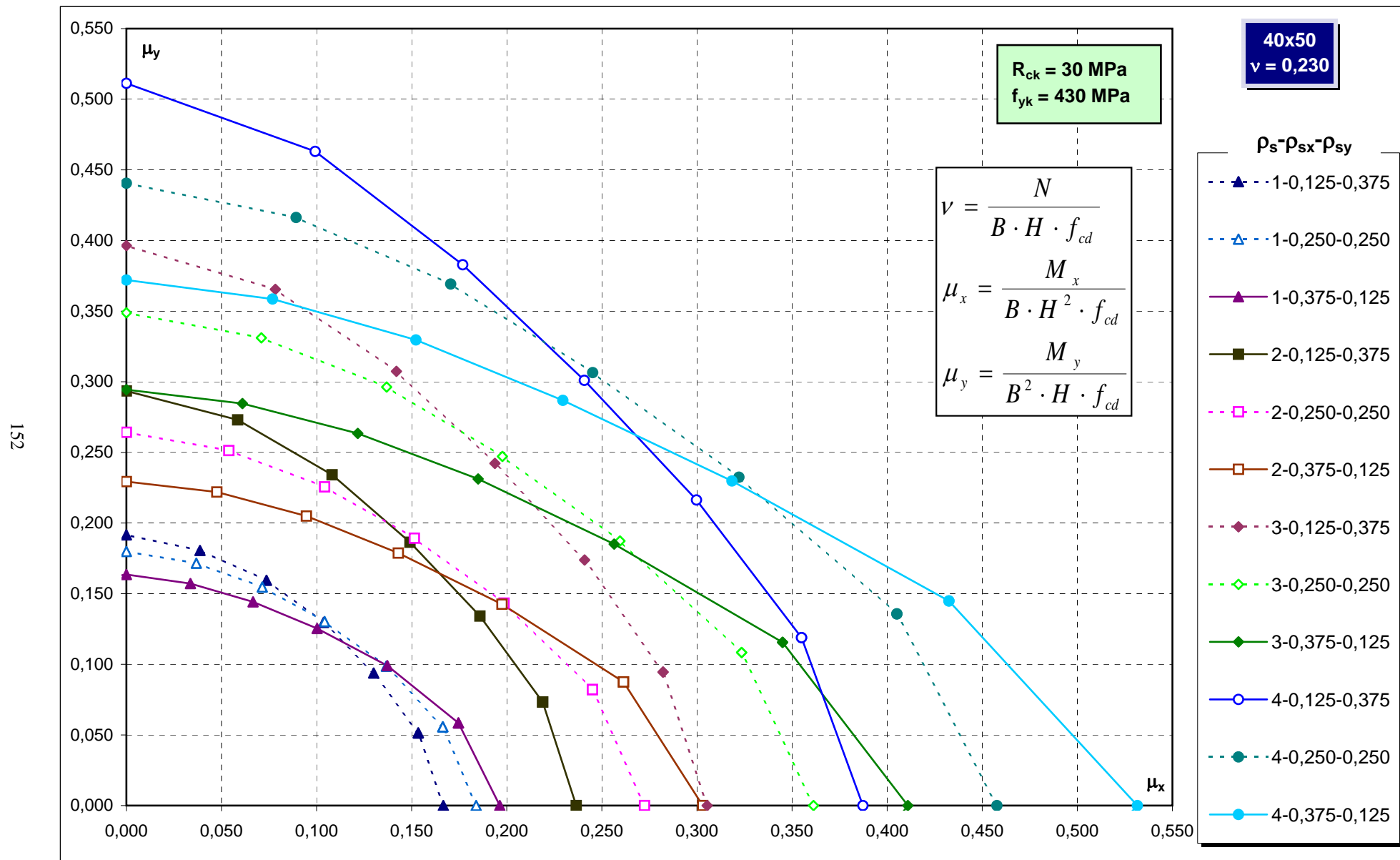
Abachi di progetto



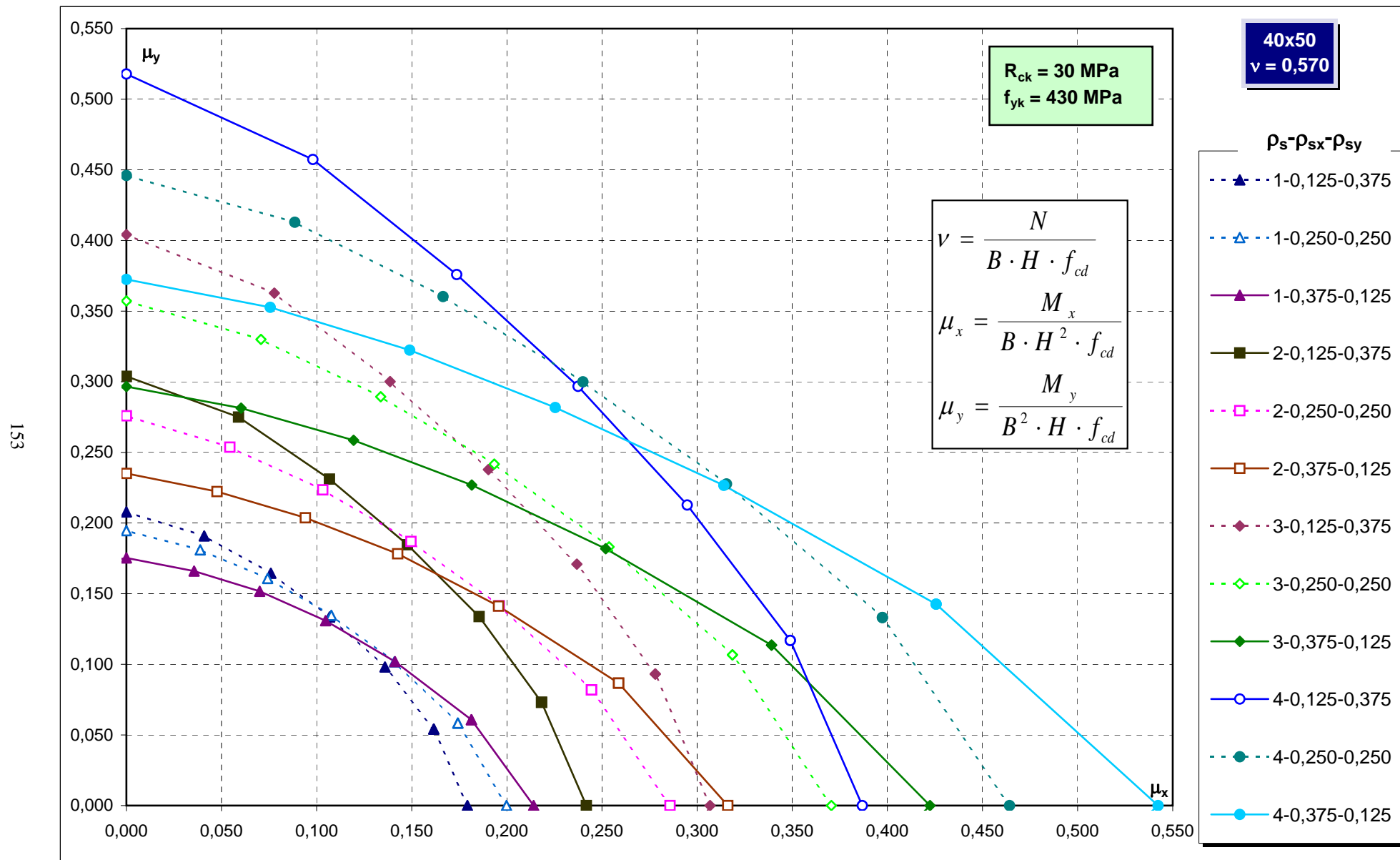
Abachi di progetto



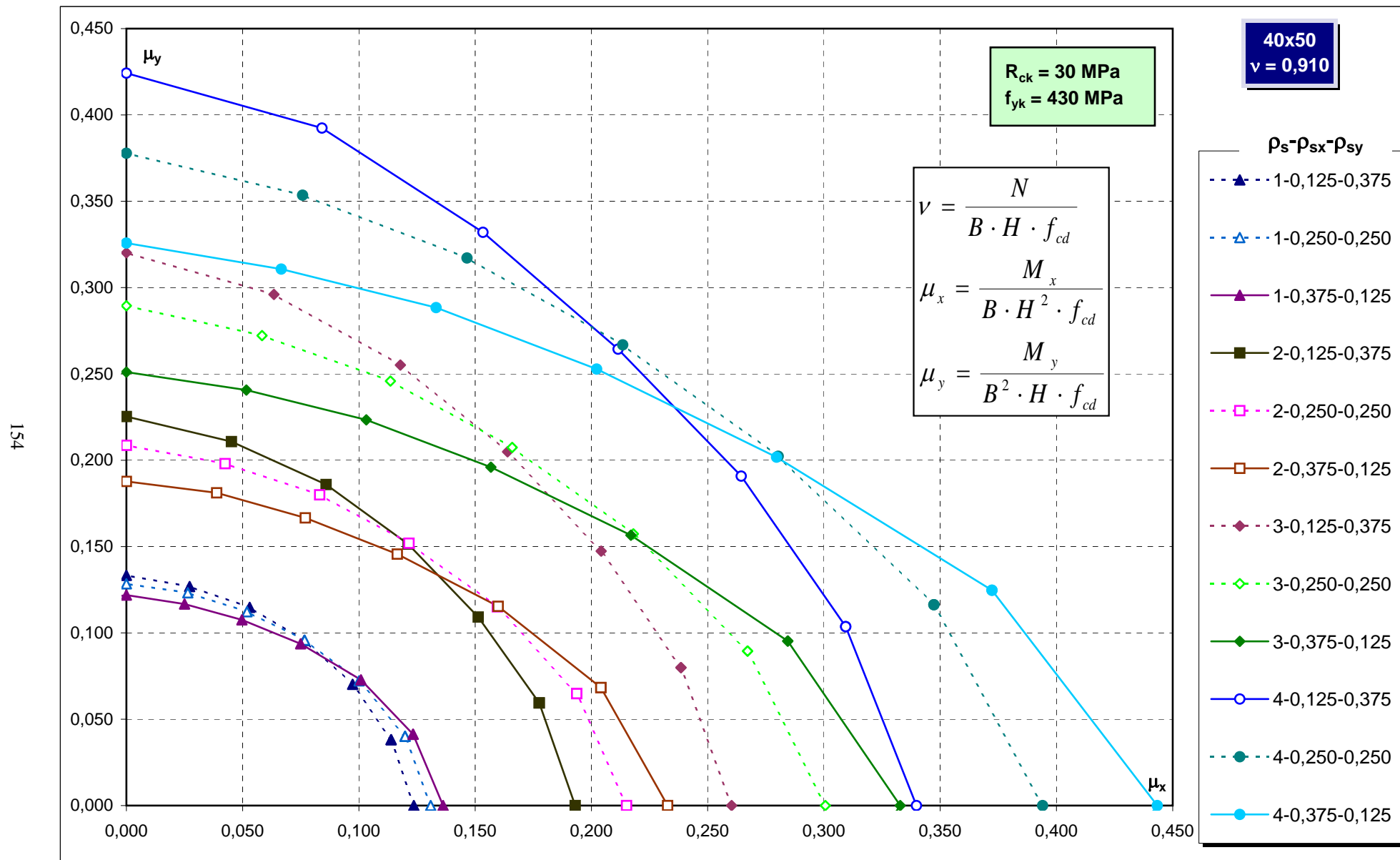
Abachi di progetto



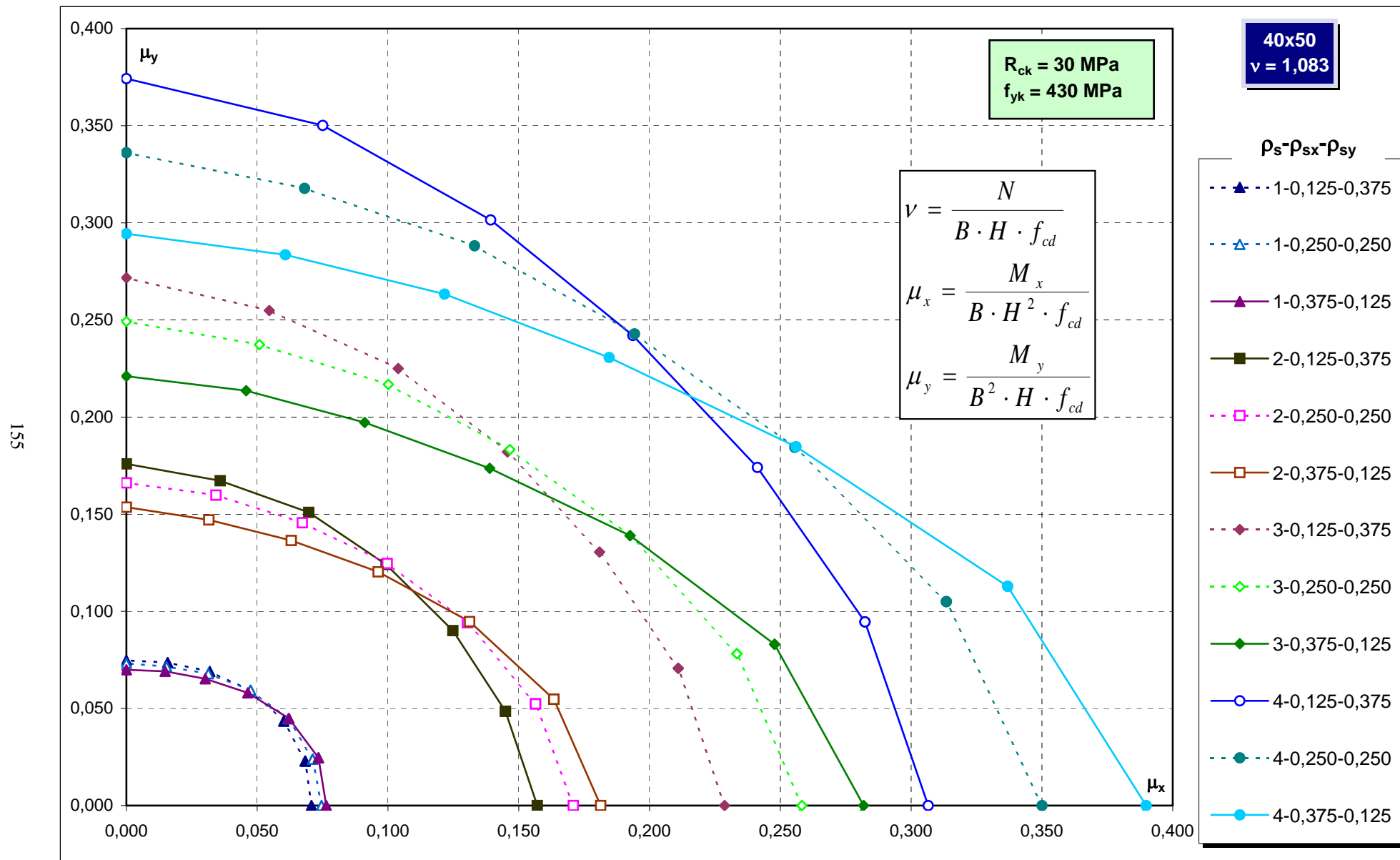
Abachi di progetto



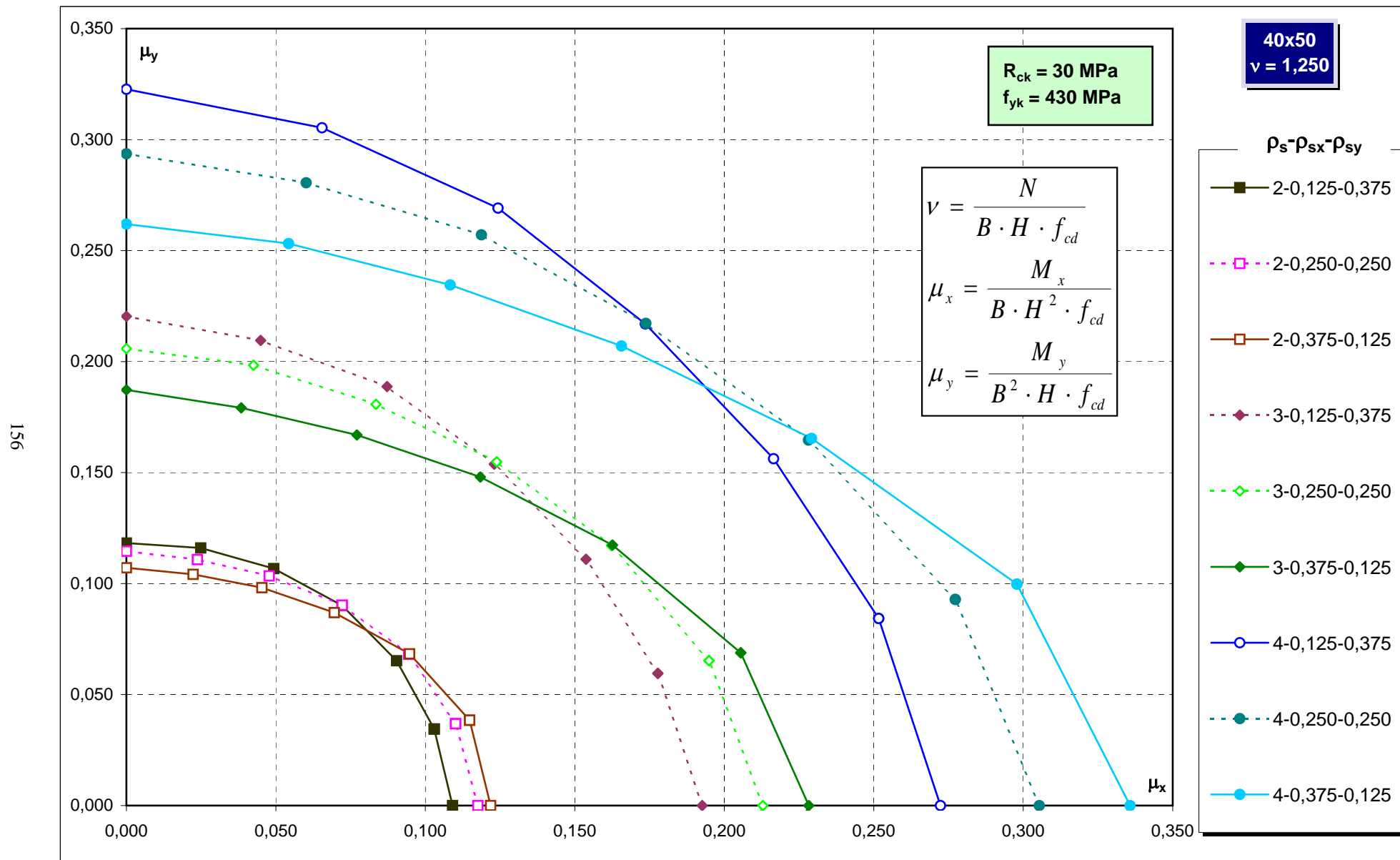
Abachi di progetto



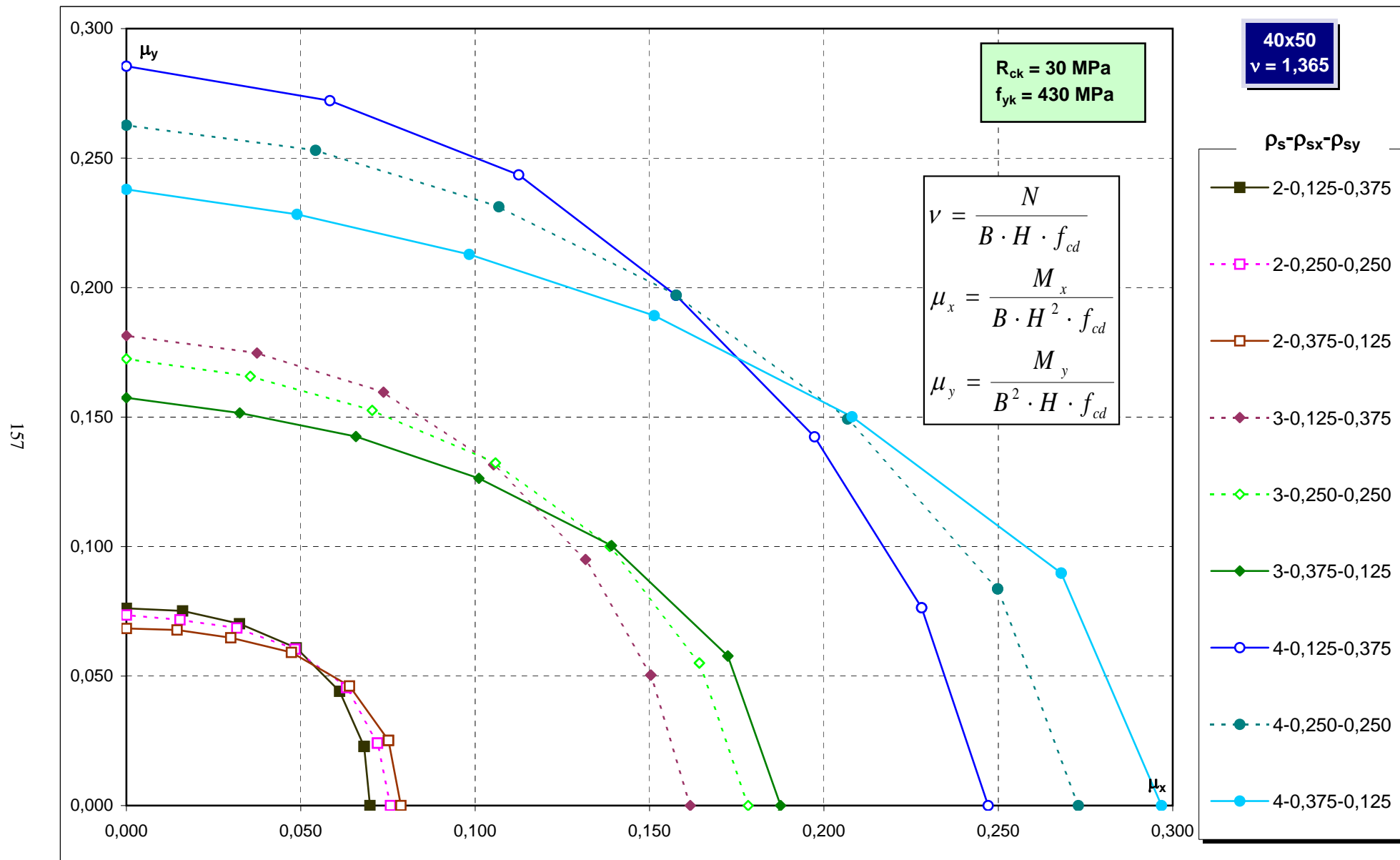
Abachi di progetto



Abachi di progetto

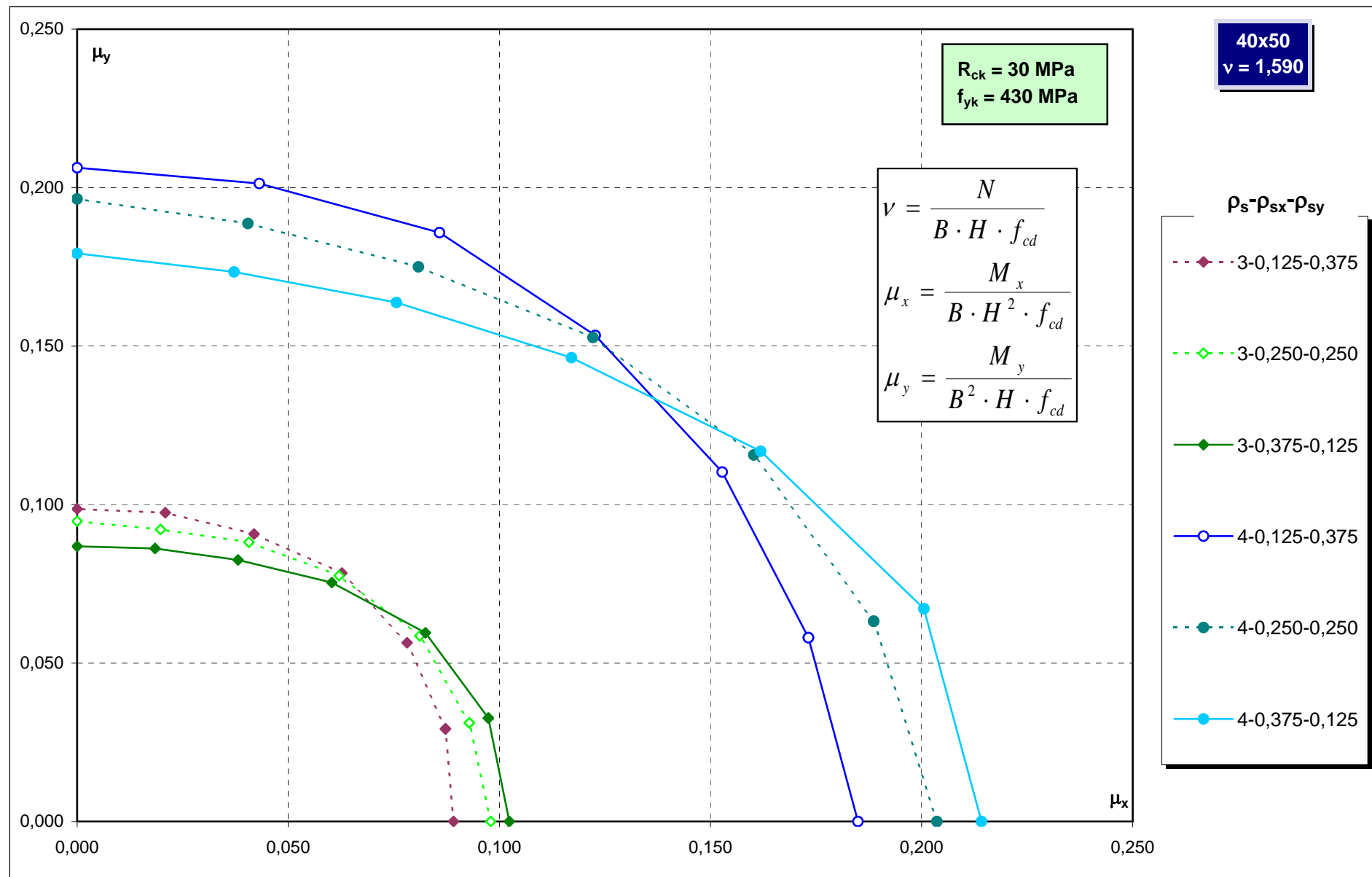


Abachi di progetto

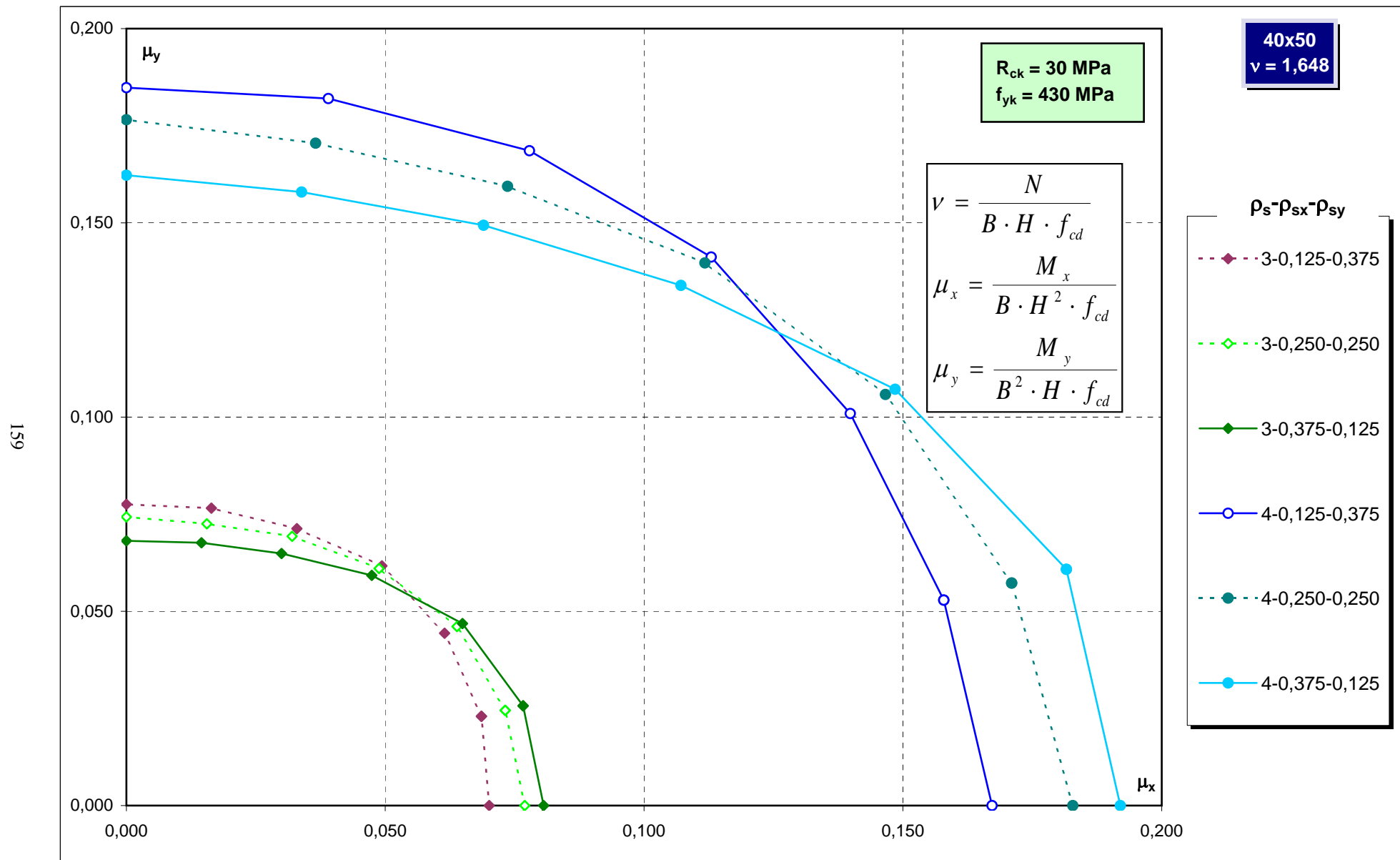


Abachi di progetto

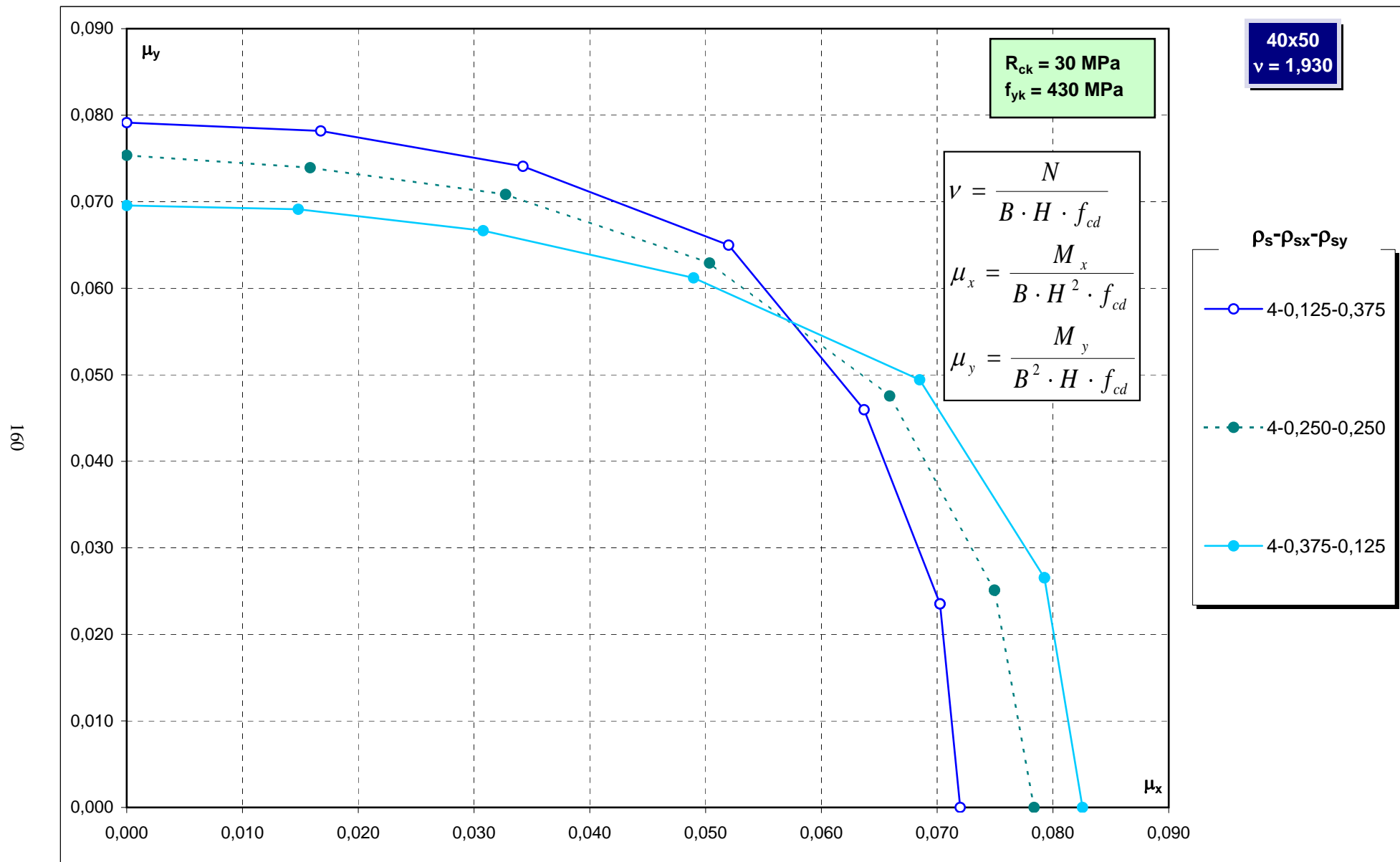
158



Abachi di progetto

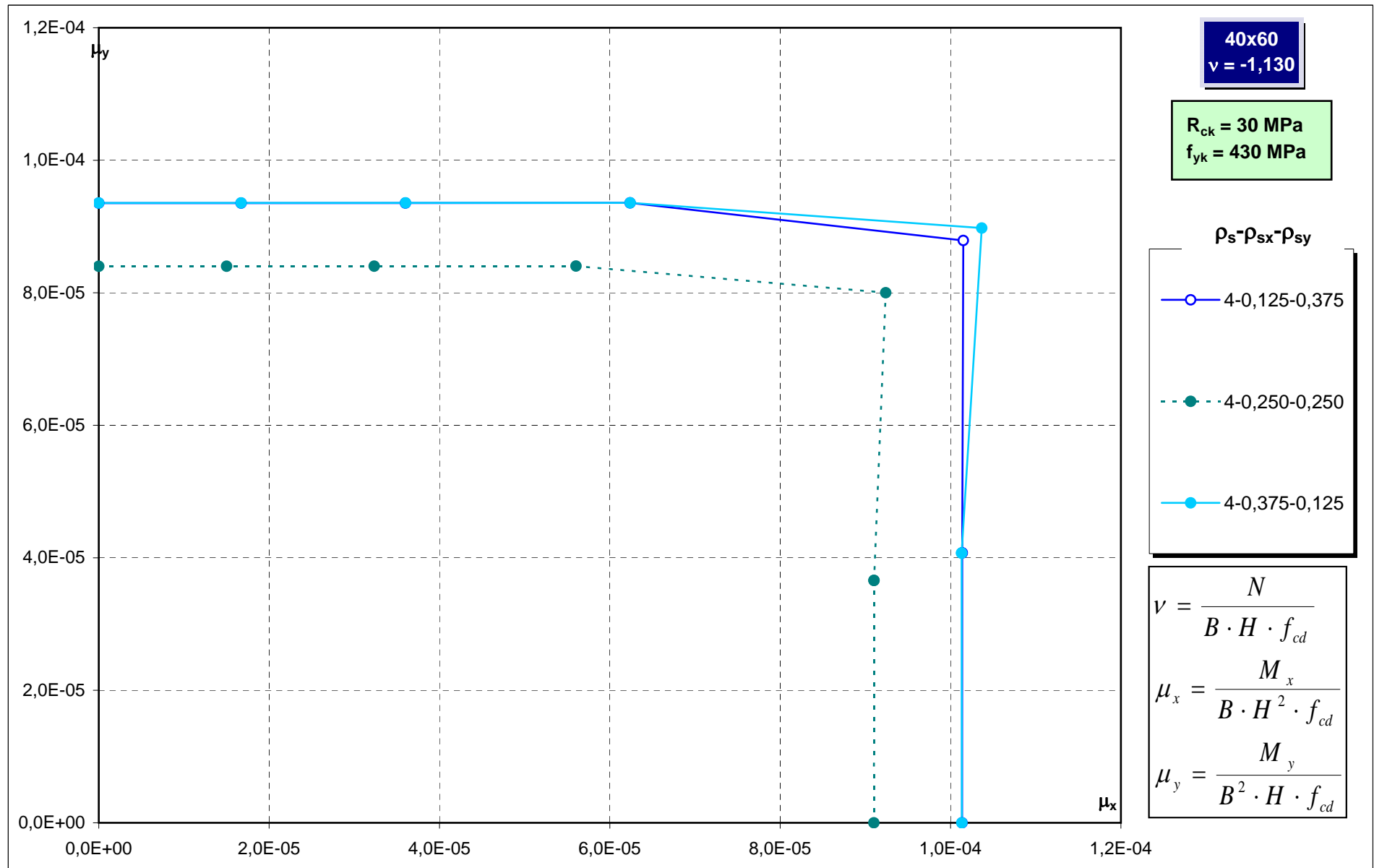


Abachi di progetto

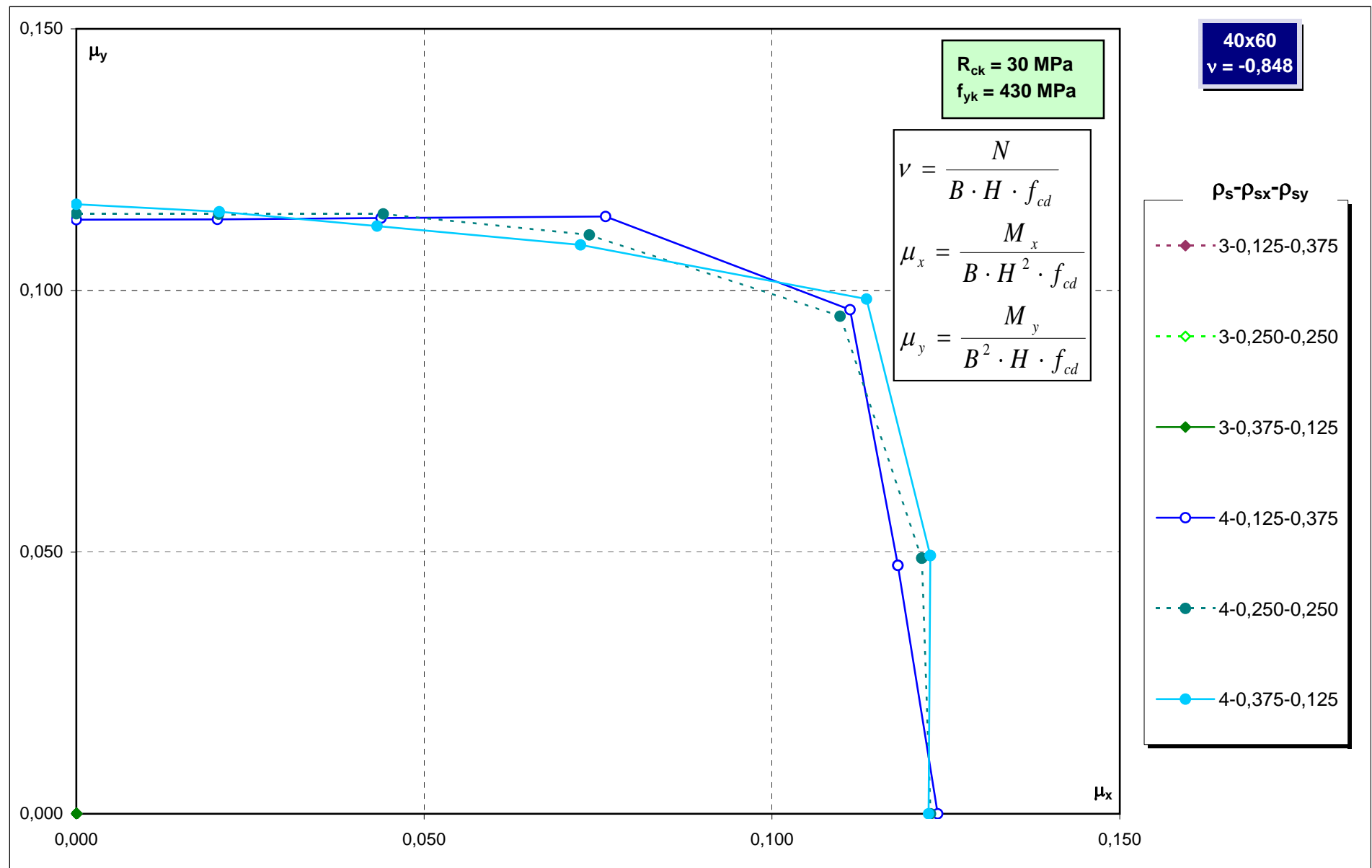


Abachi di progetto

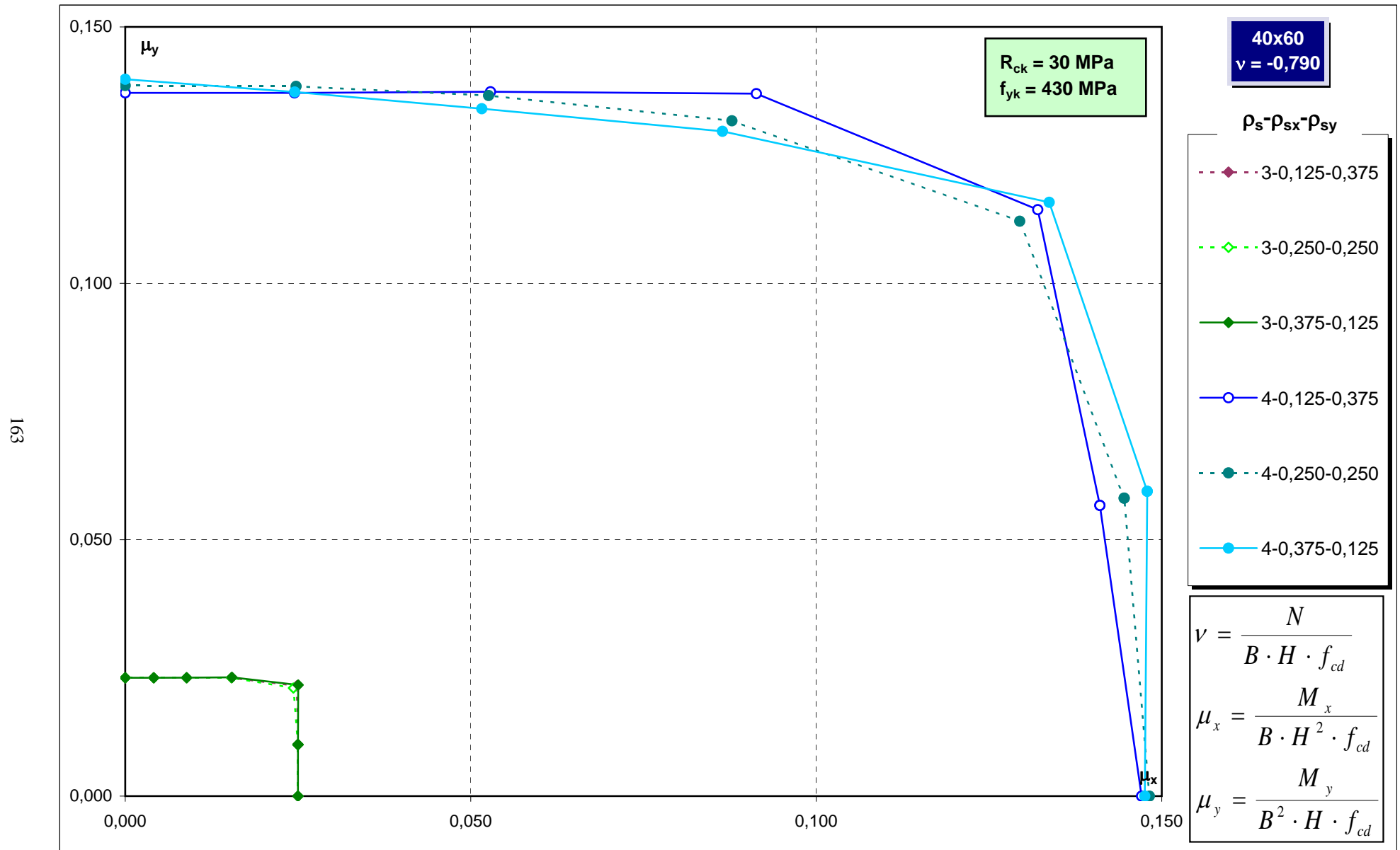
161



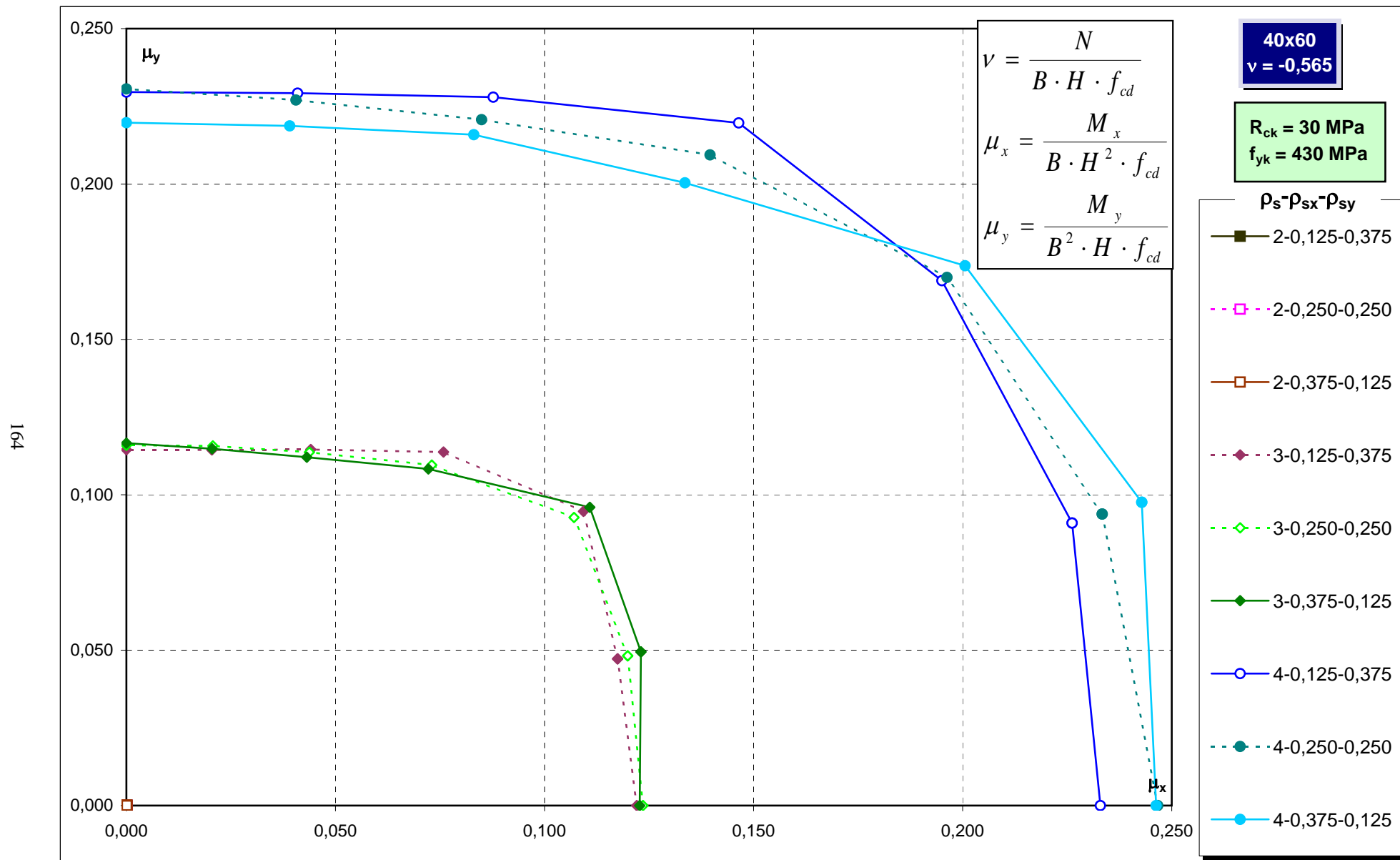
Abachi di progetto



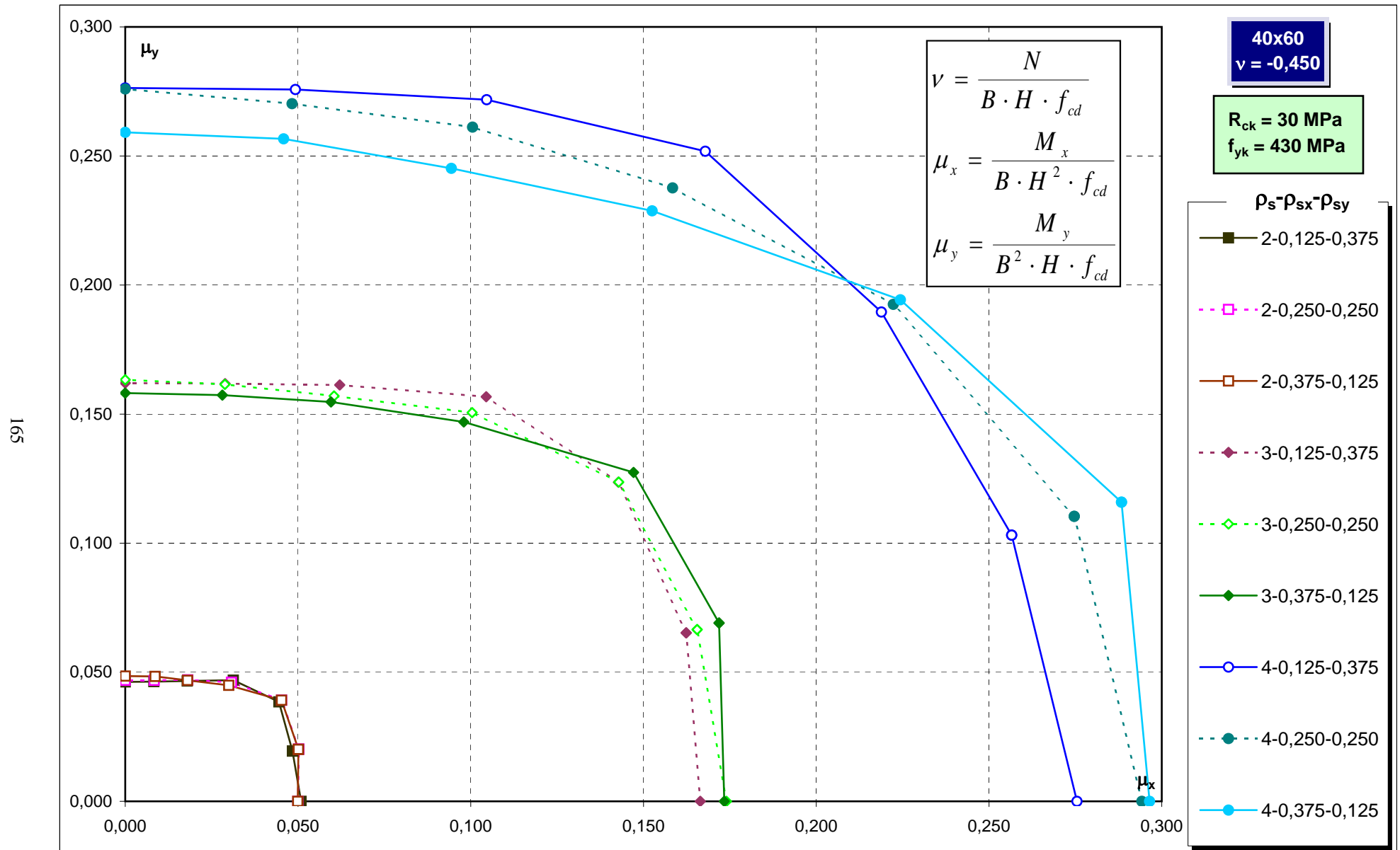
Abachi di progetto



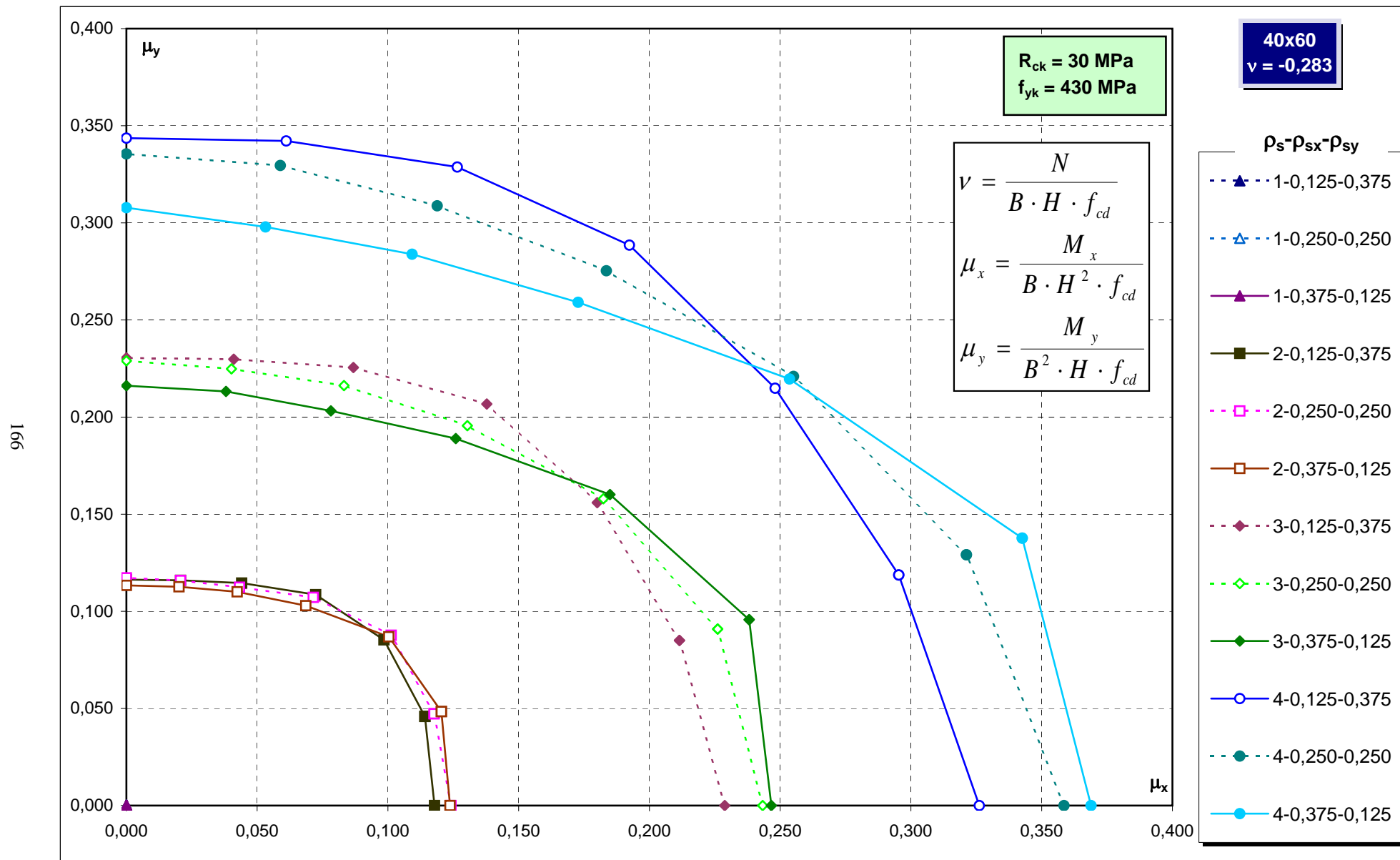
Abachi di progetto



Abachi di progetto

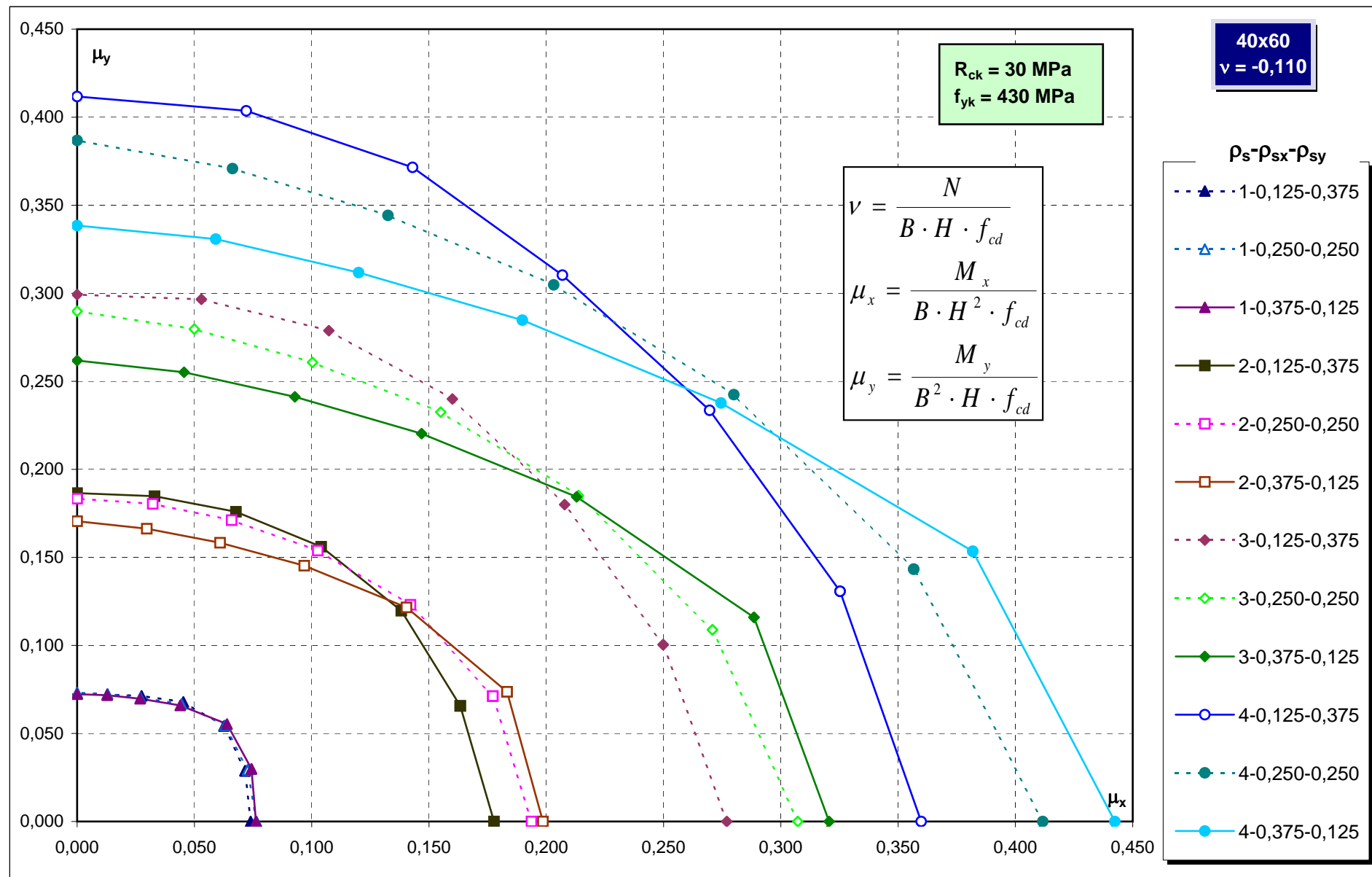


Abachi di progetto

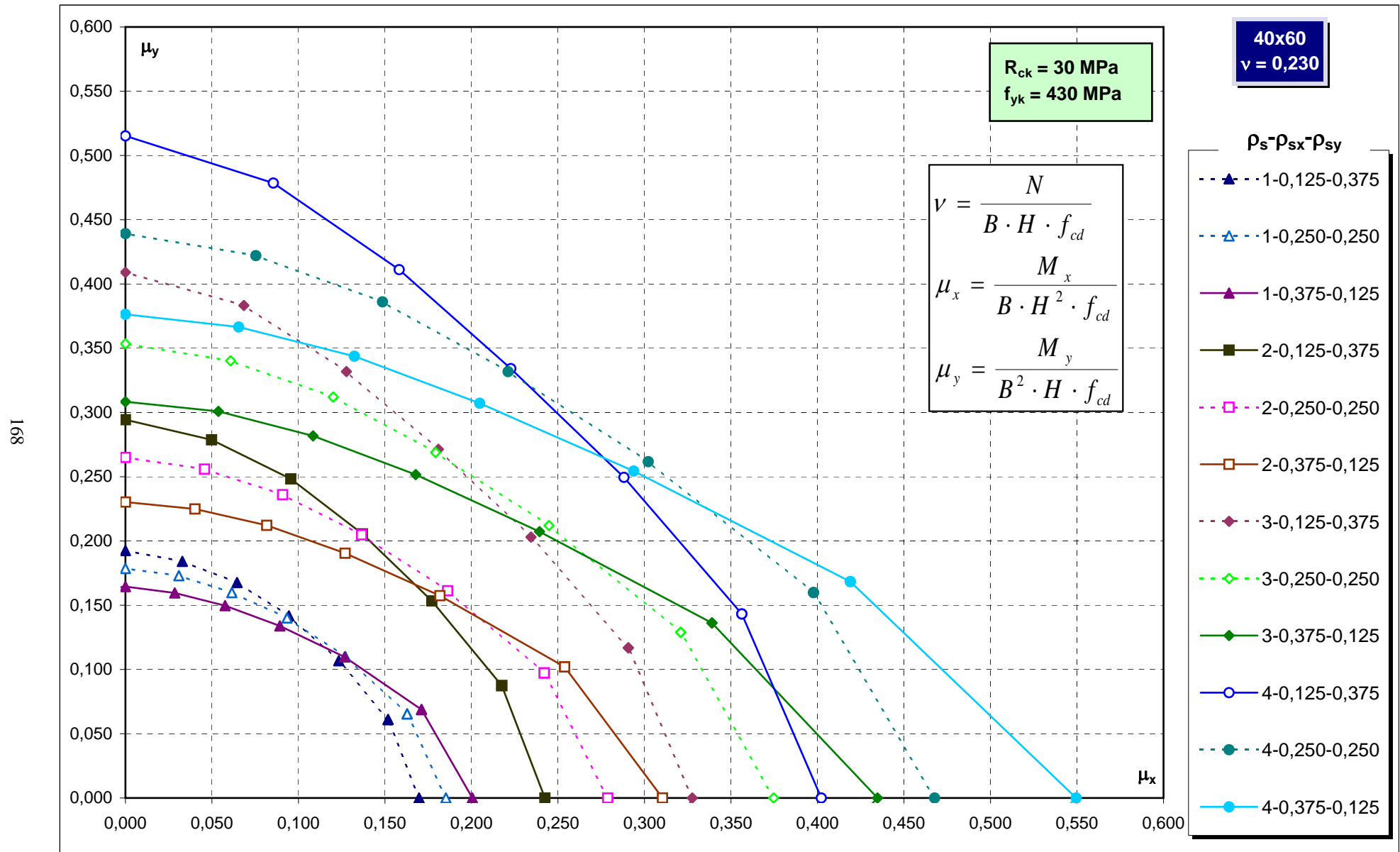


Abachi di progetto

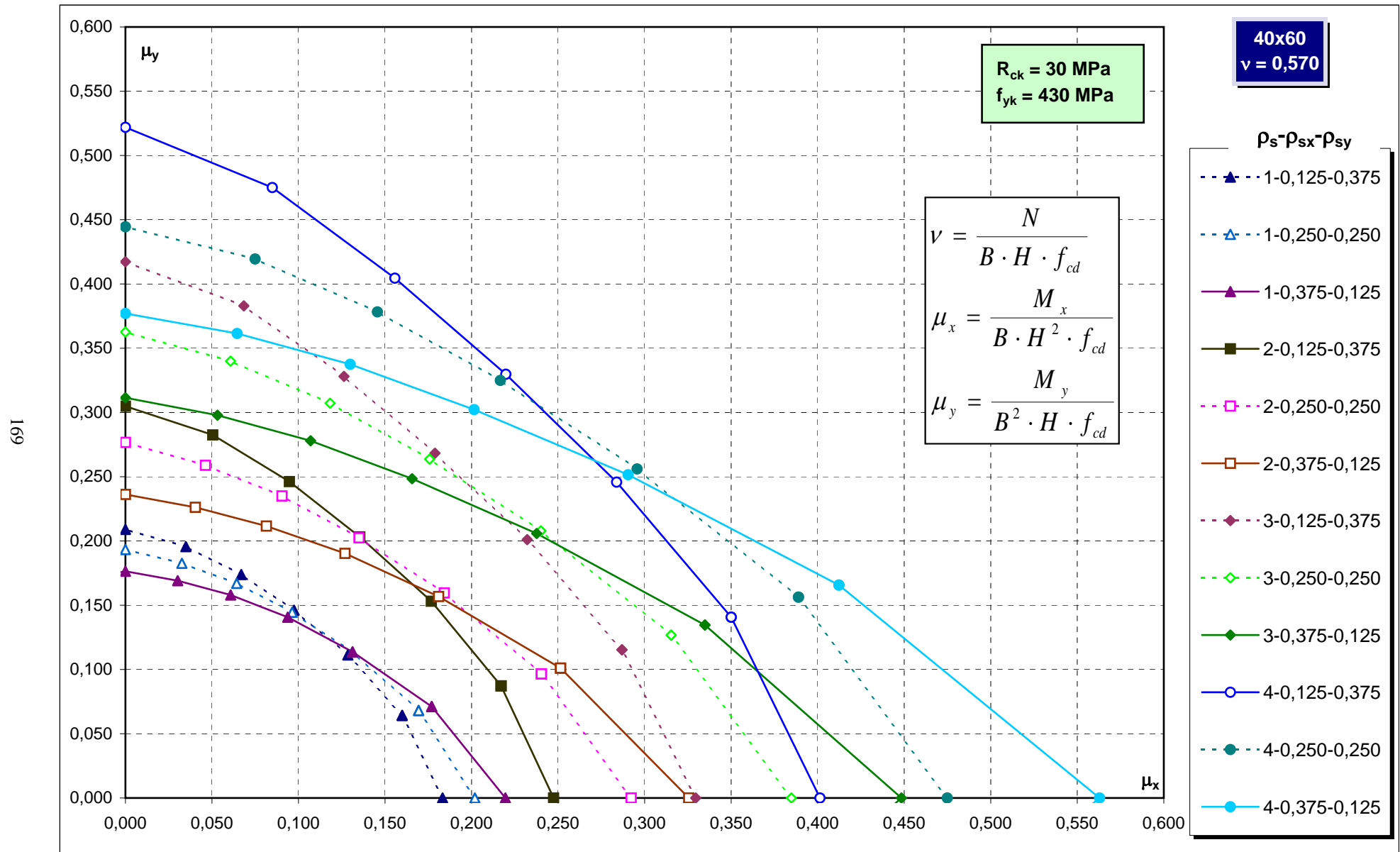
167



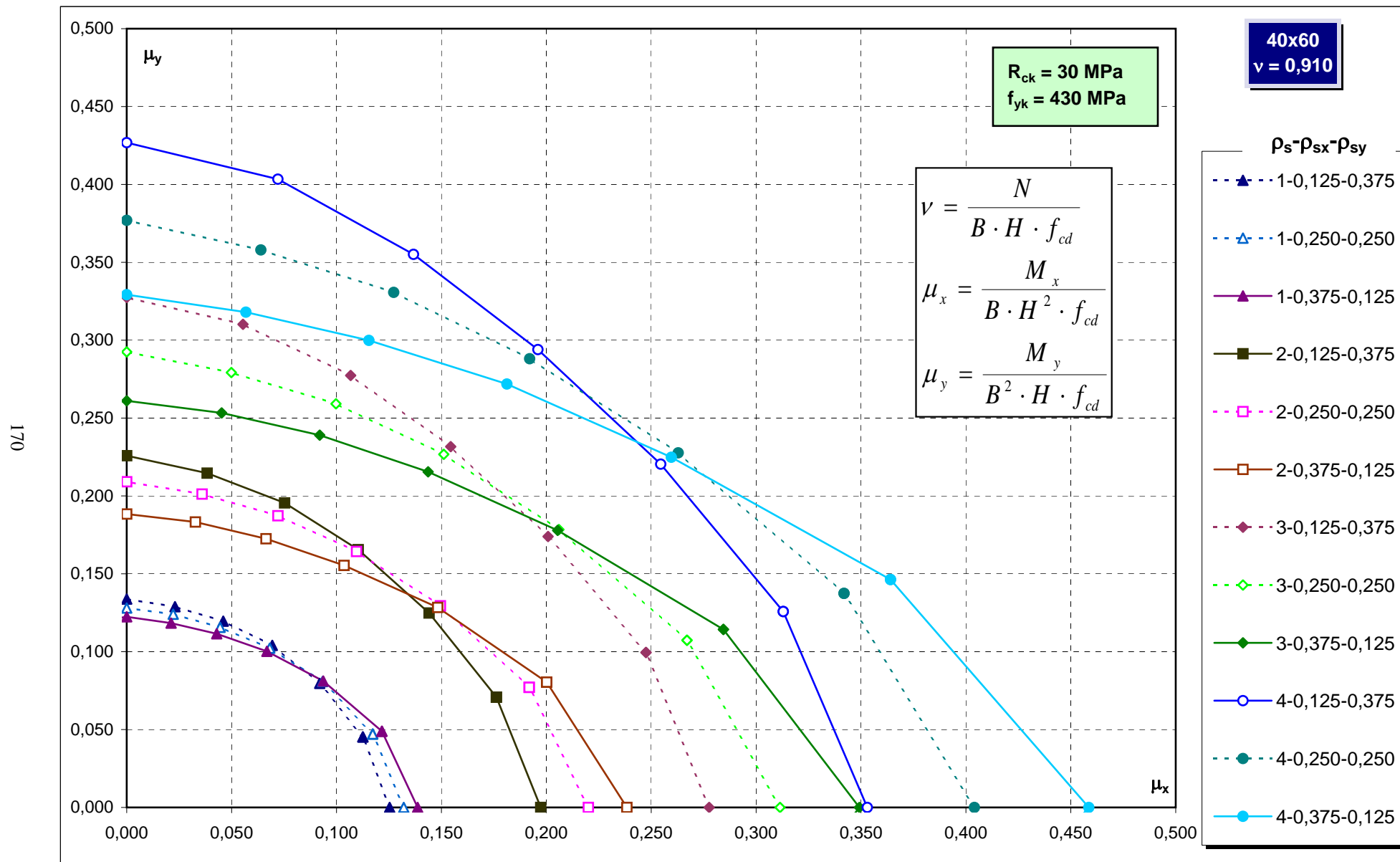
Abachi di progetto



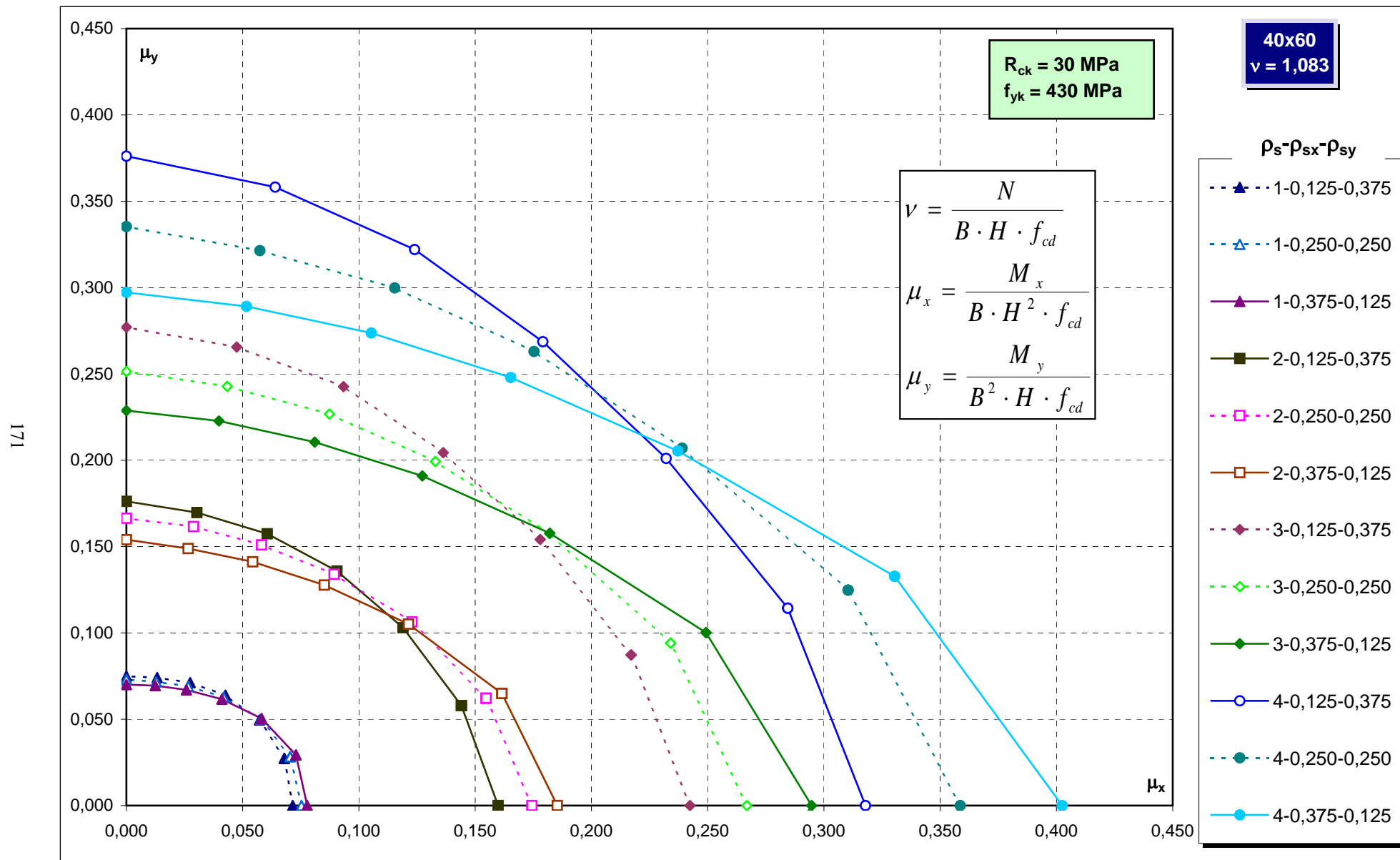
Abachi di progetto



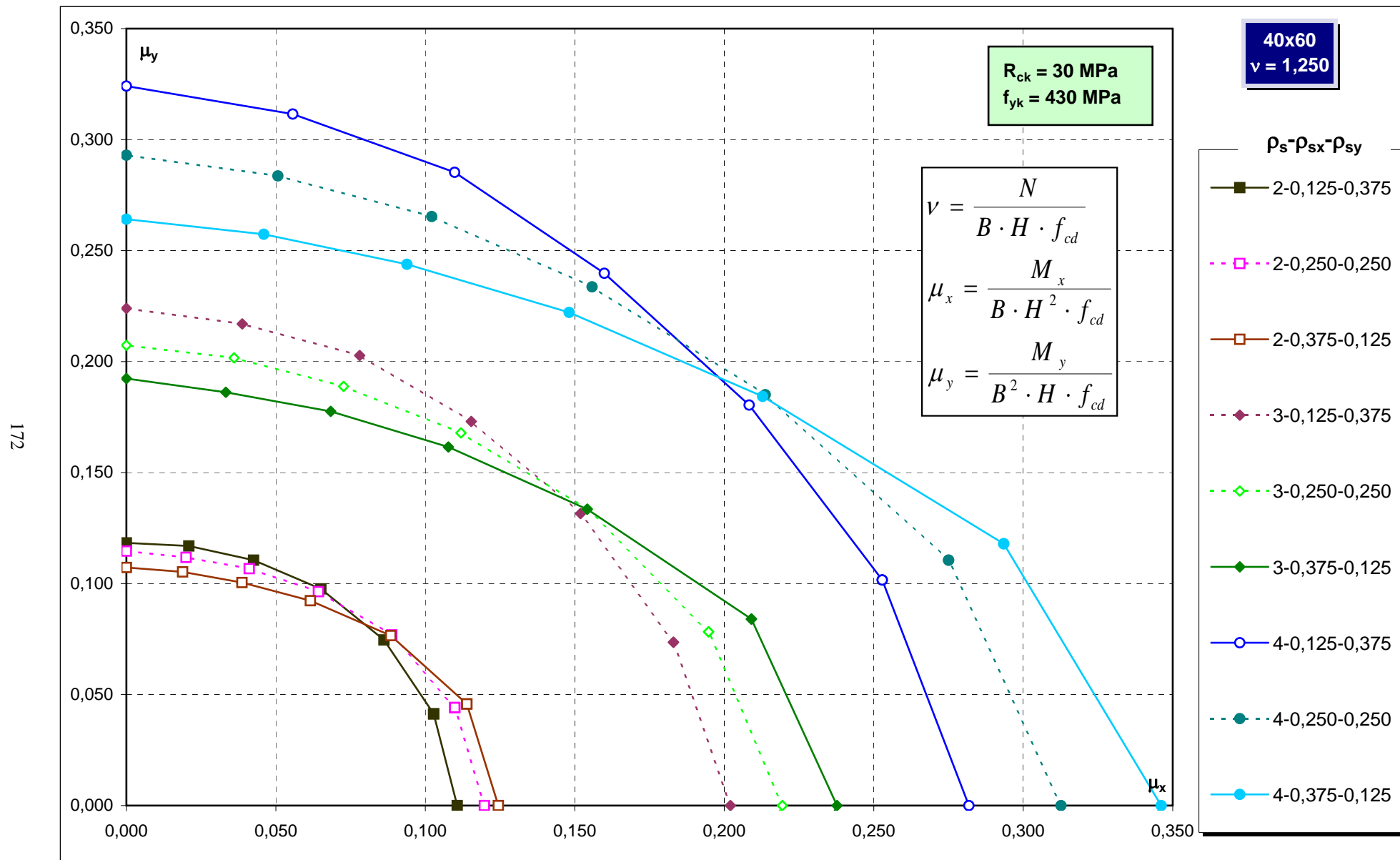
Abachi di progetto



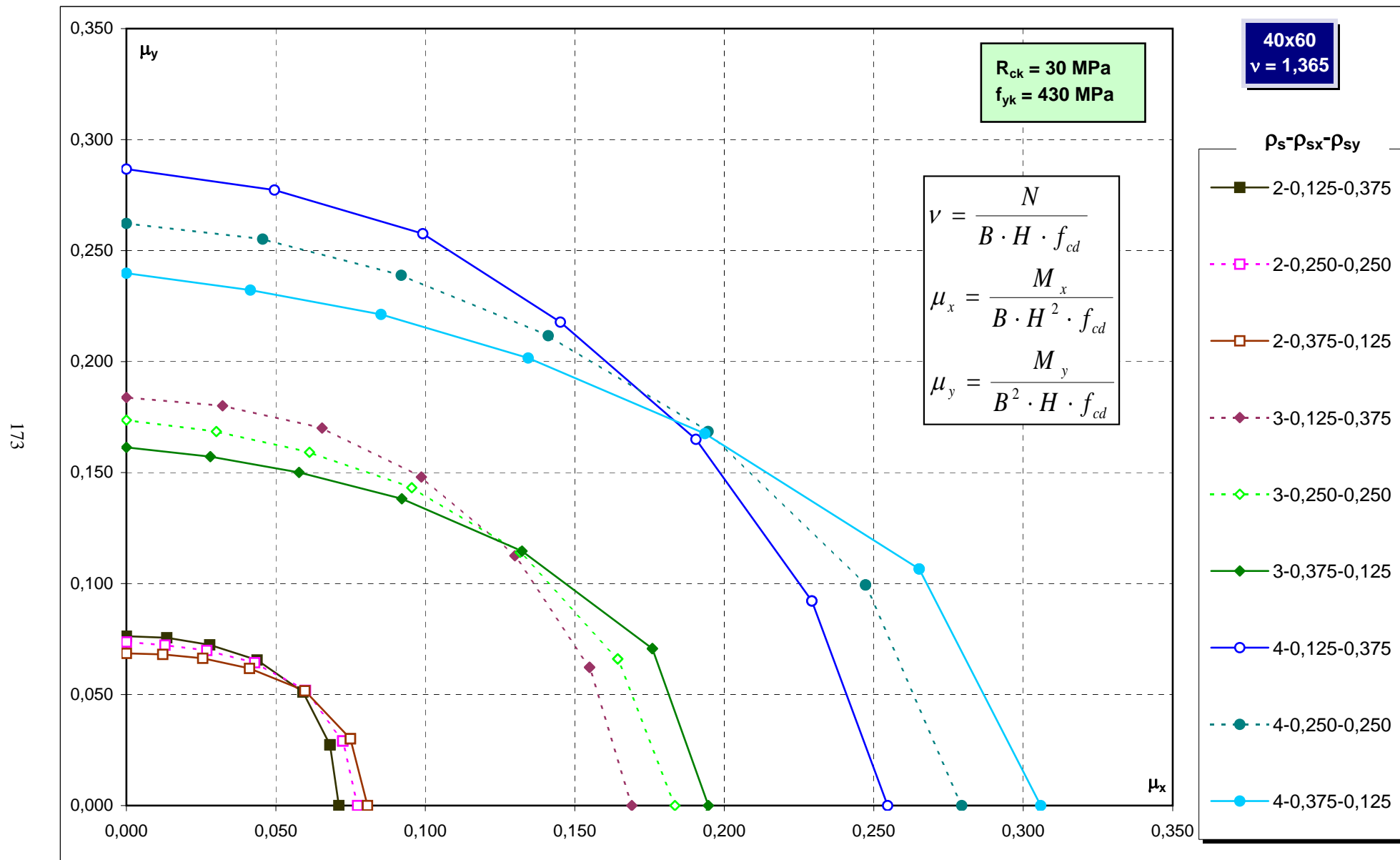
Abachi di progetto



Abachi di progetto

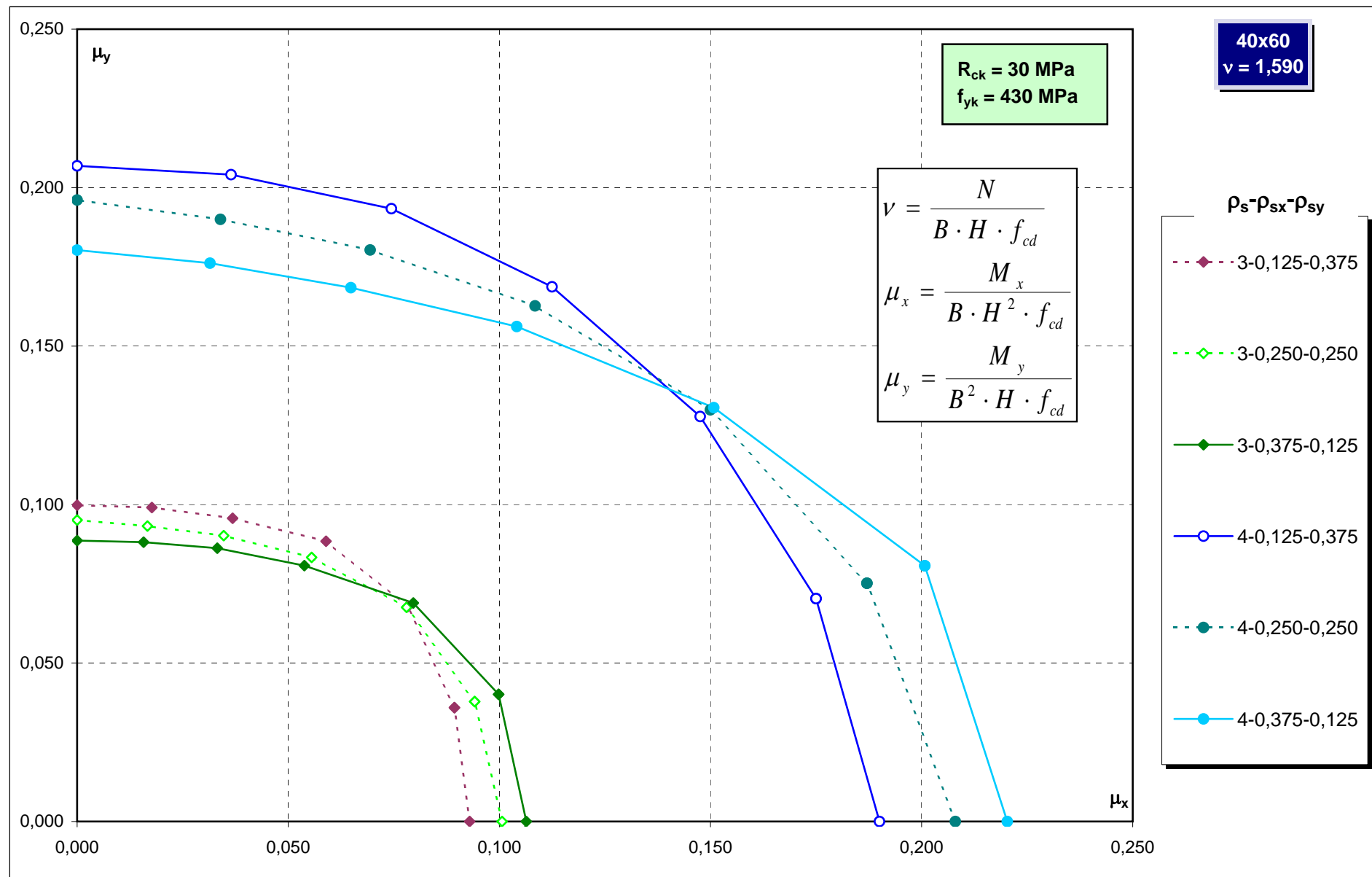


Abachi di progetto

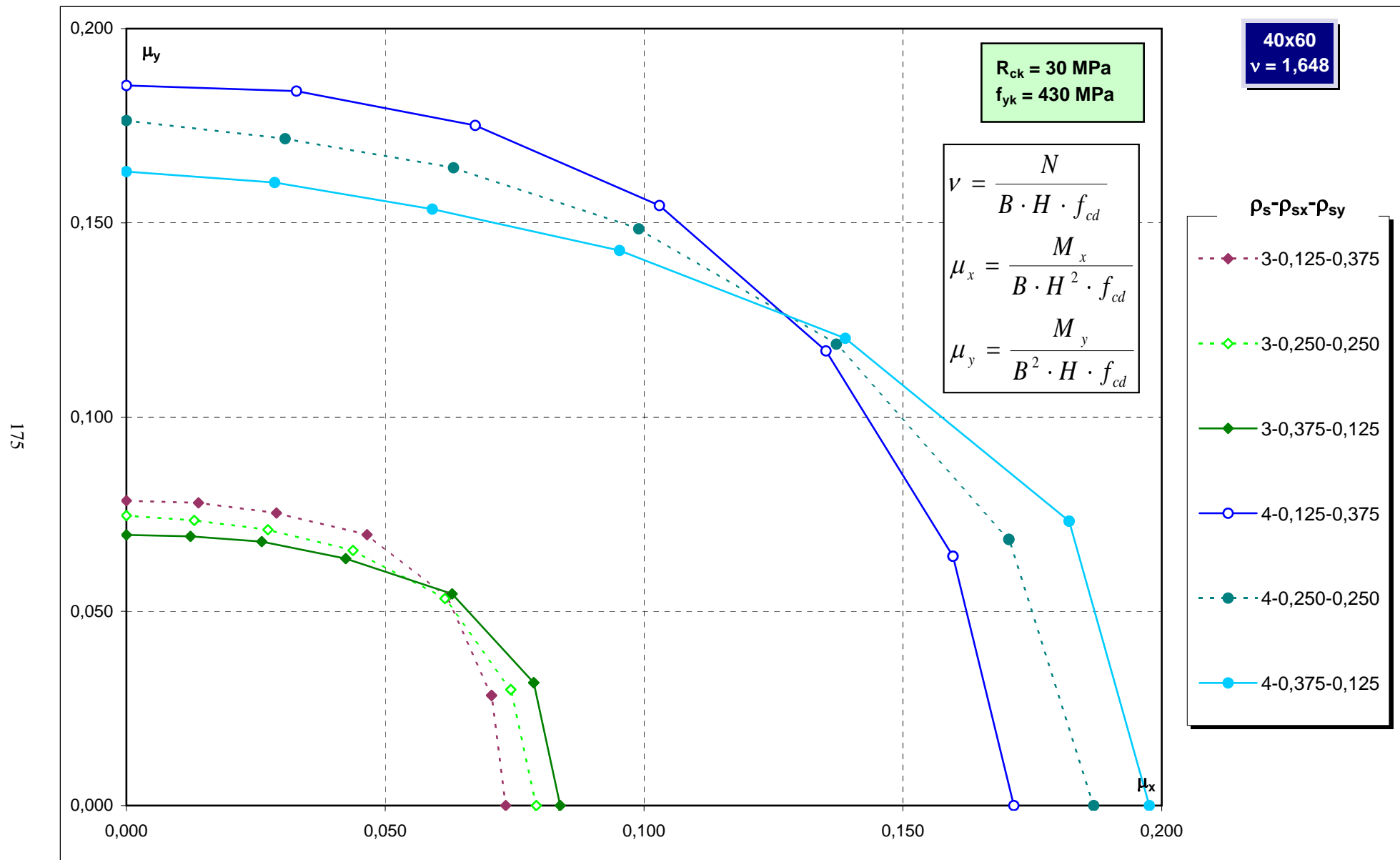


Abachi di progetto

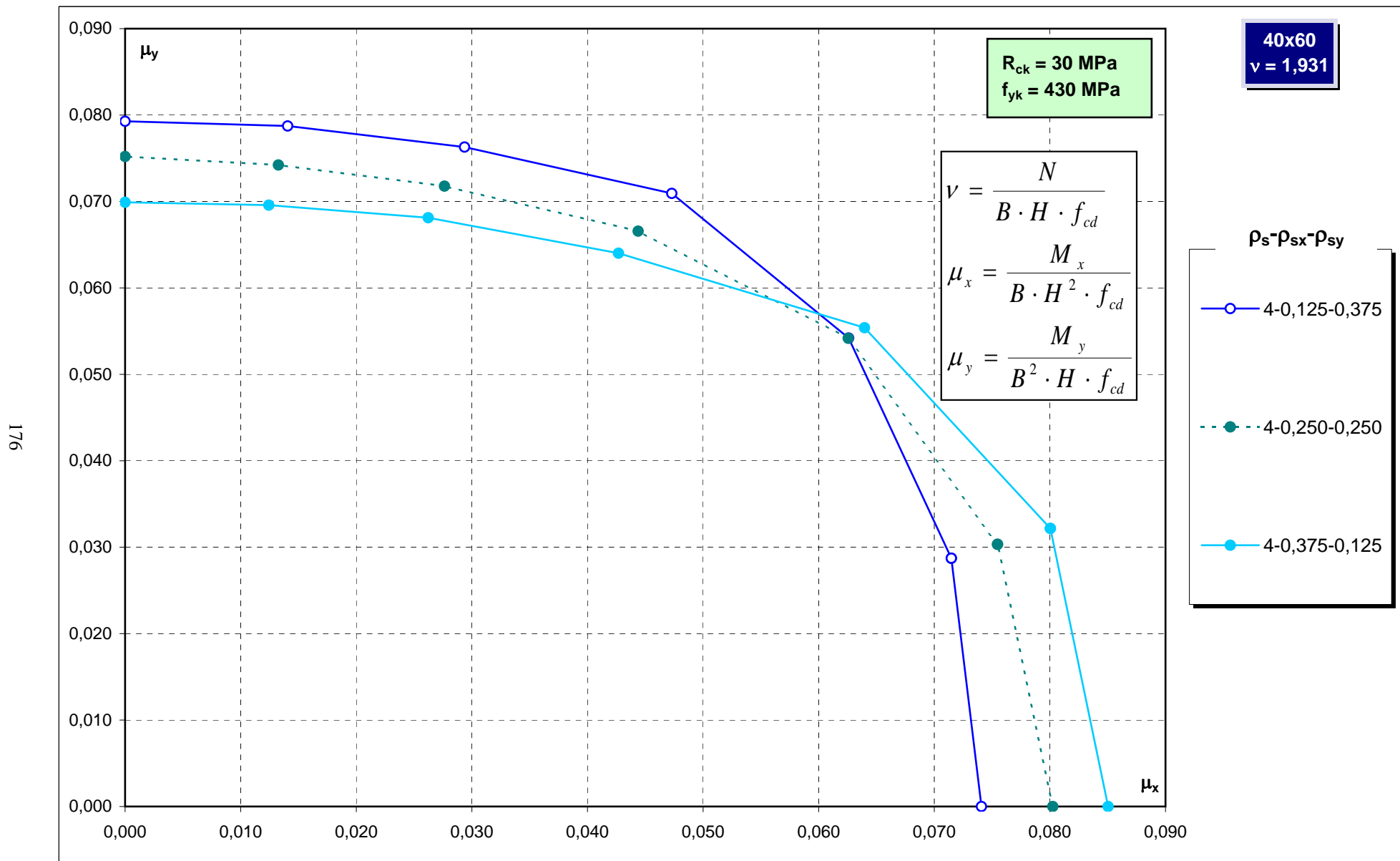
174



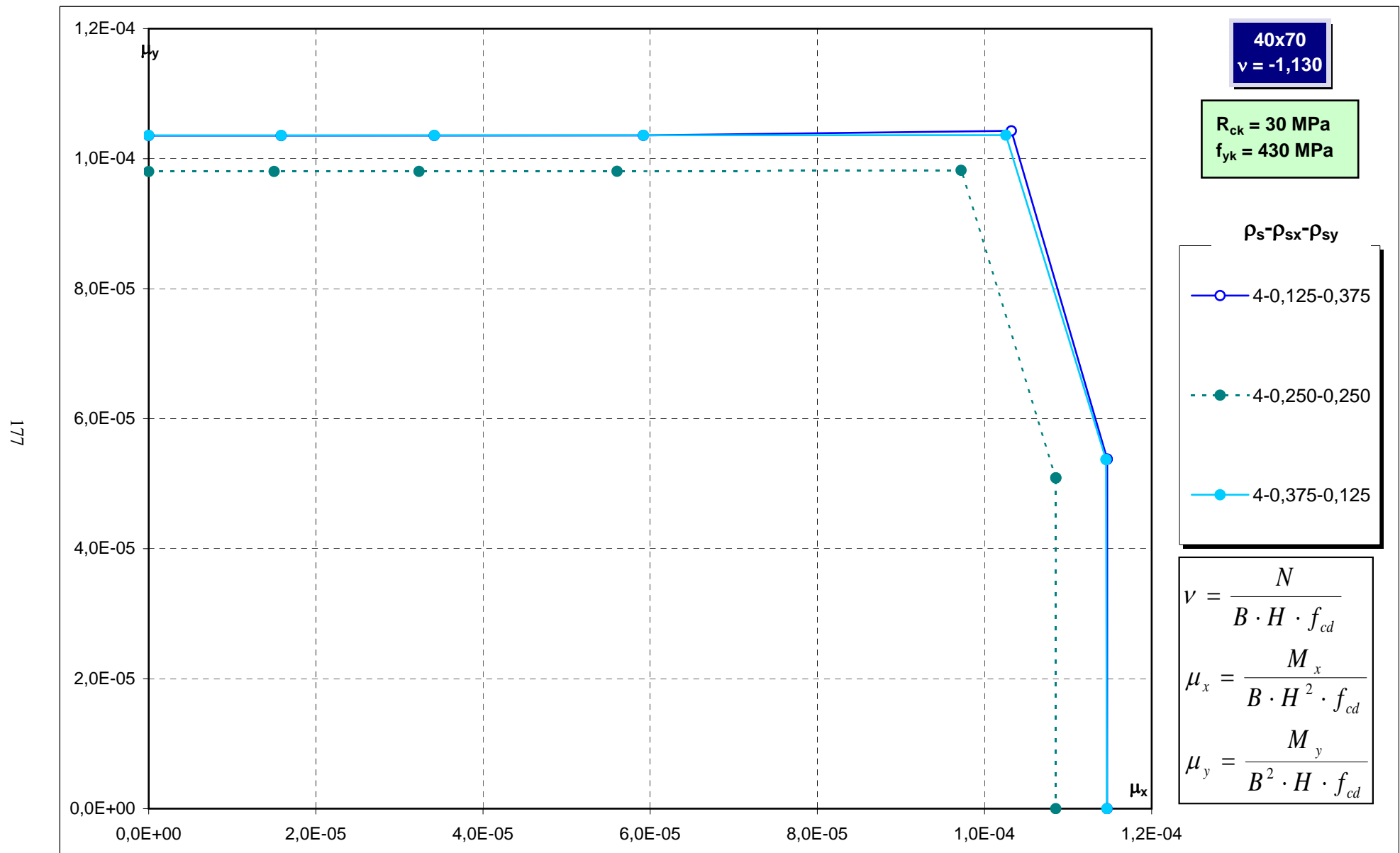
Abachi di progetto



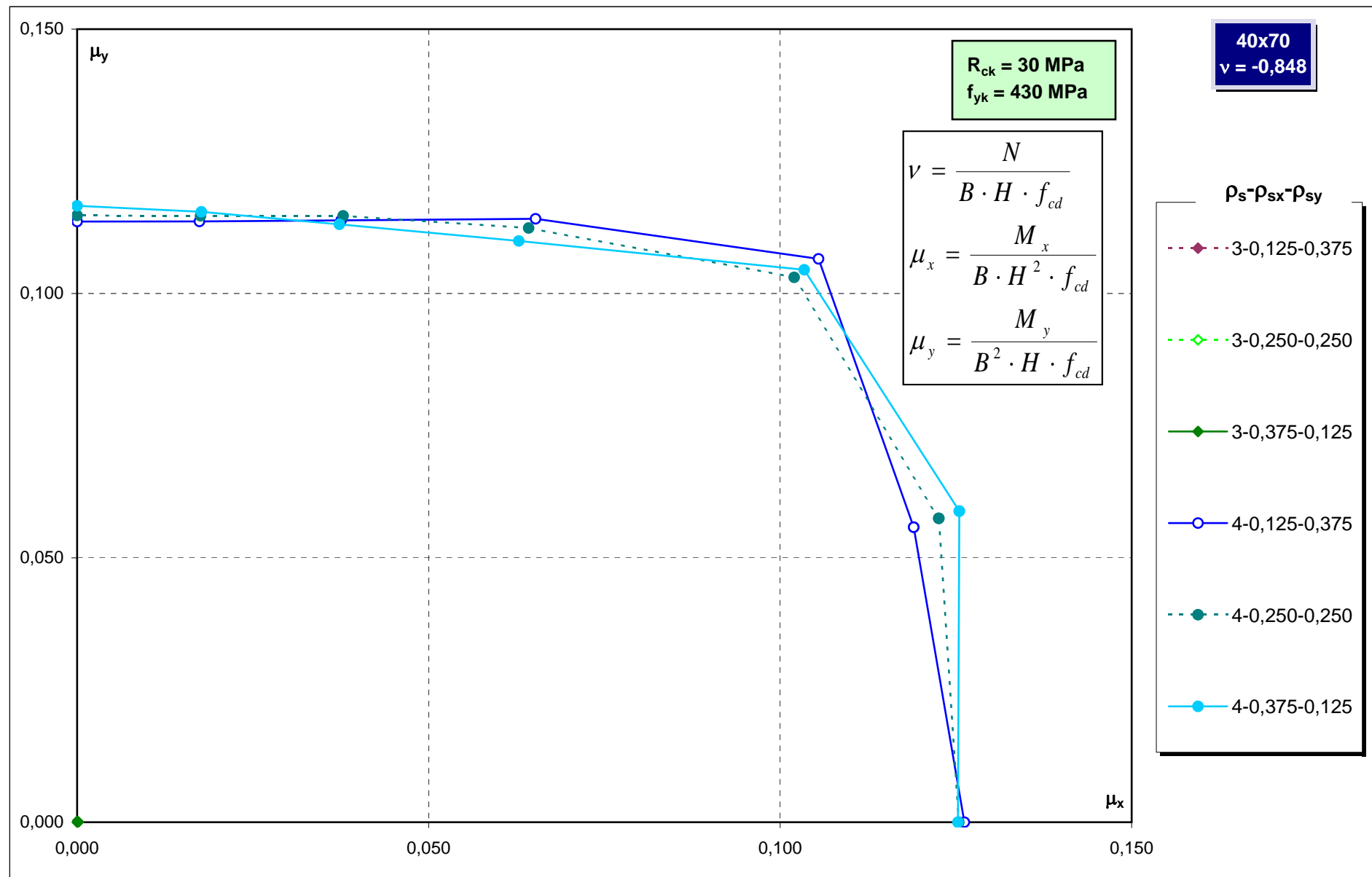
Abachi di progetto



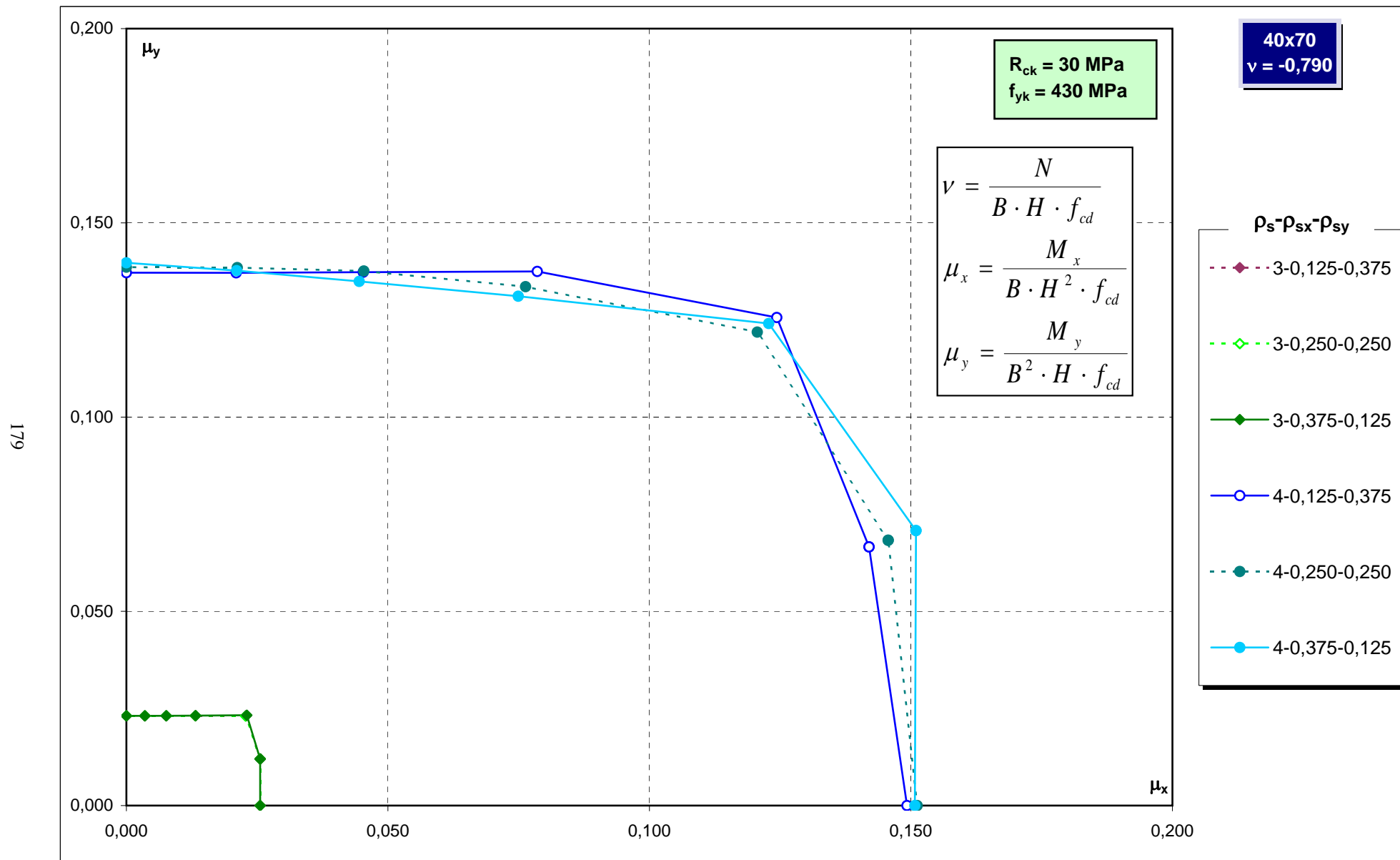
Abachi di progetto



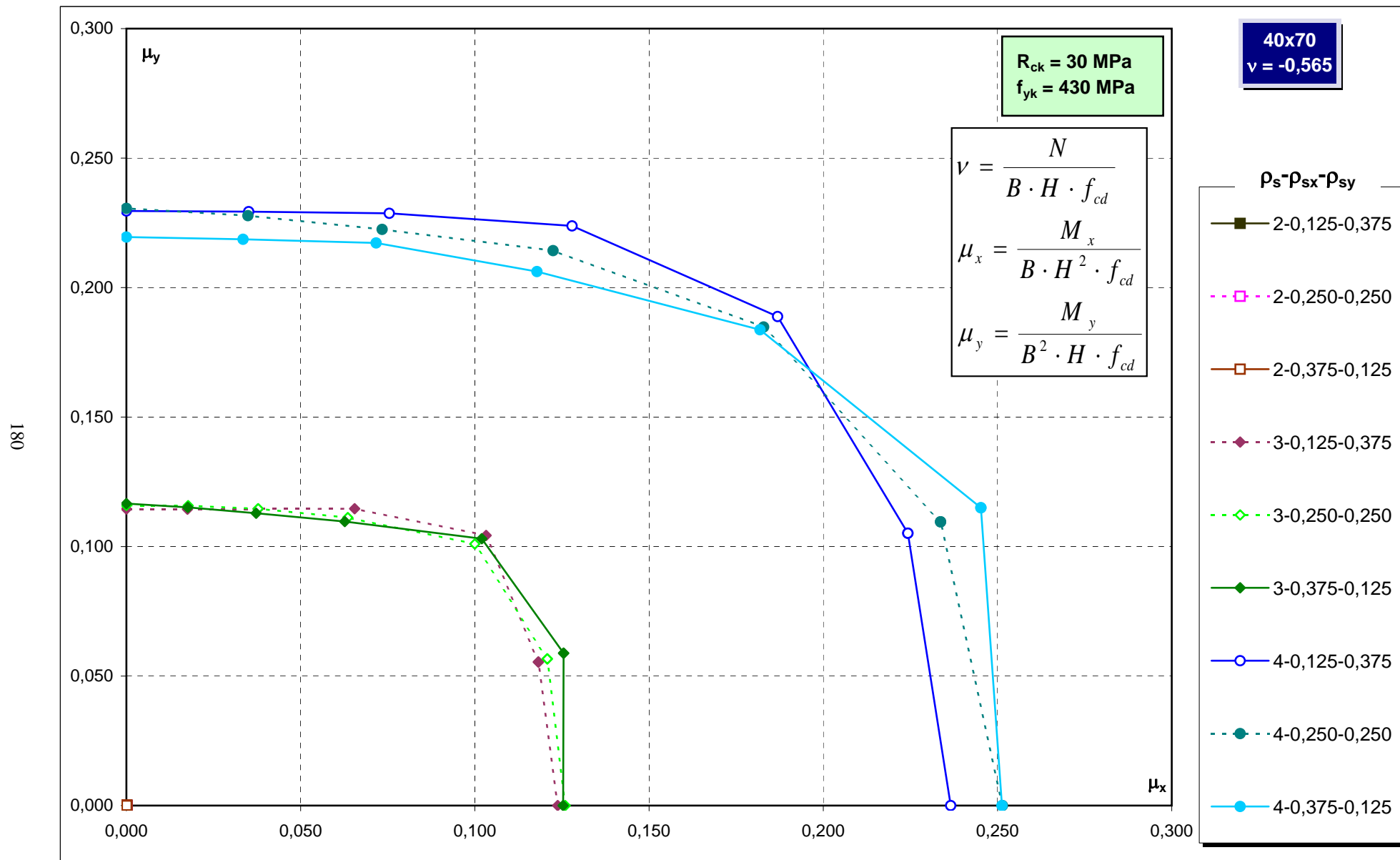
Abachi di progetto



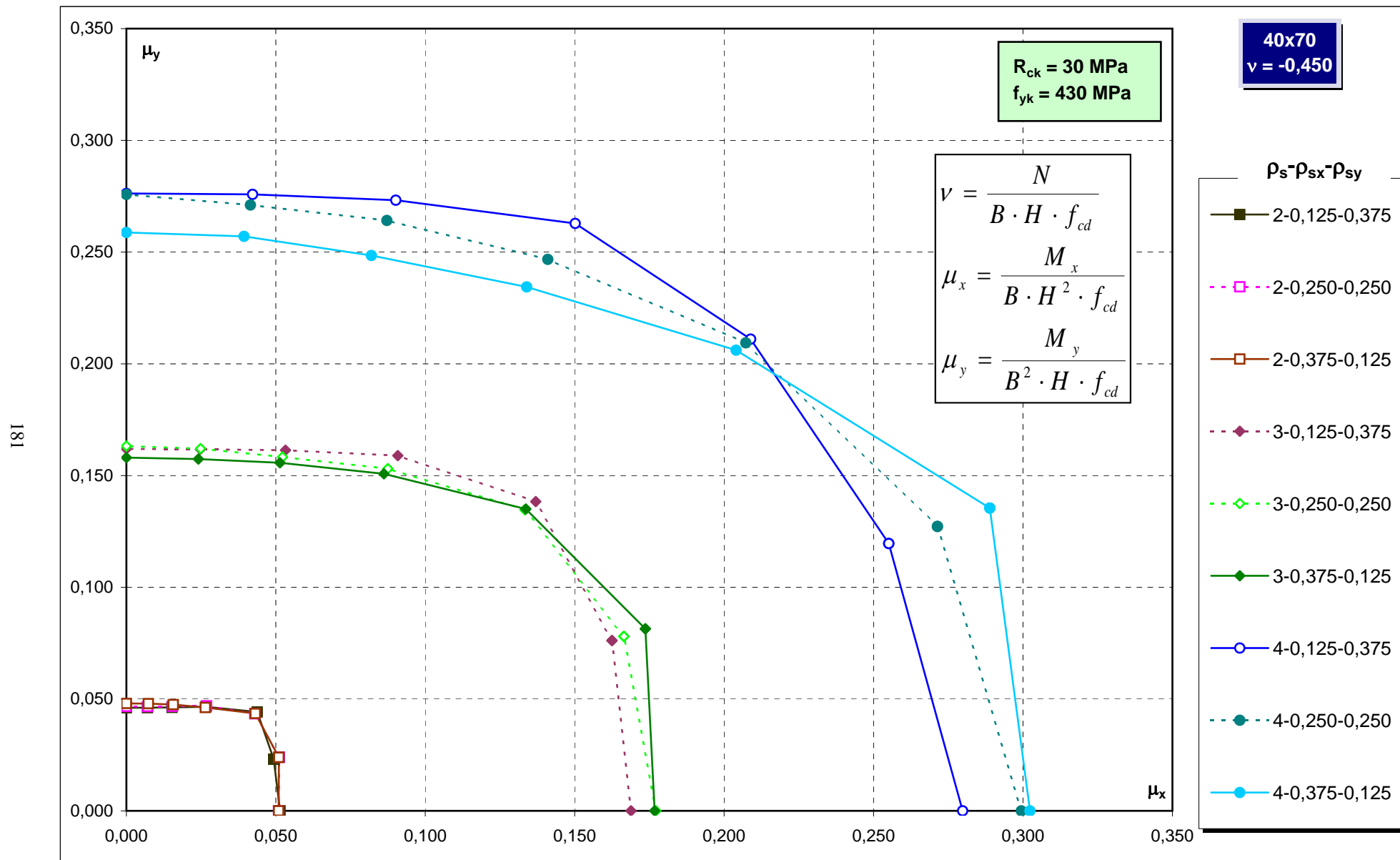
Abachi di progetto



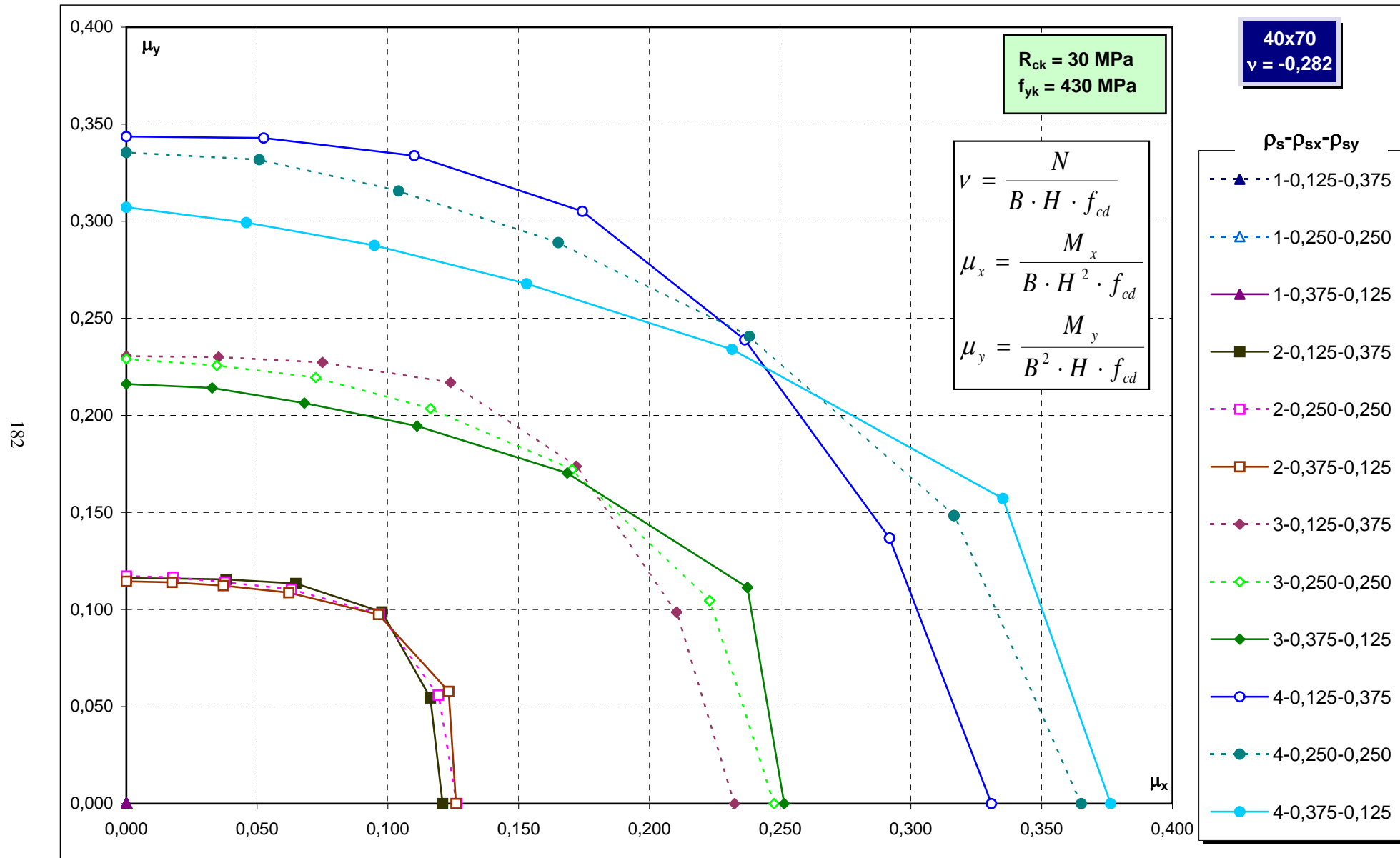
Abachi di progetto



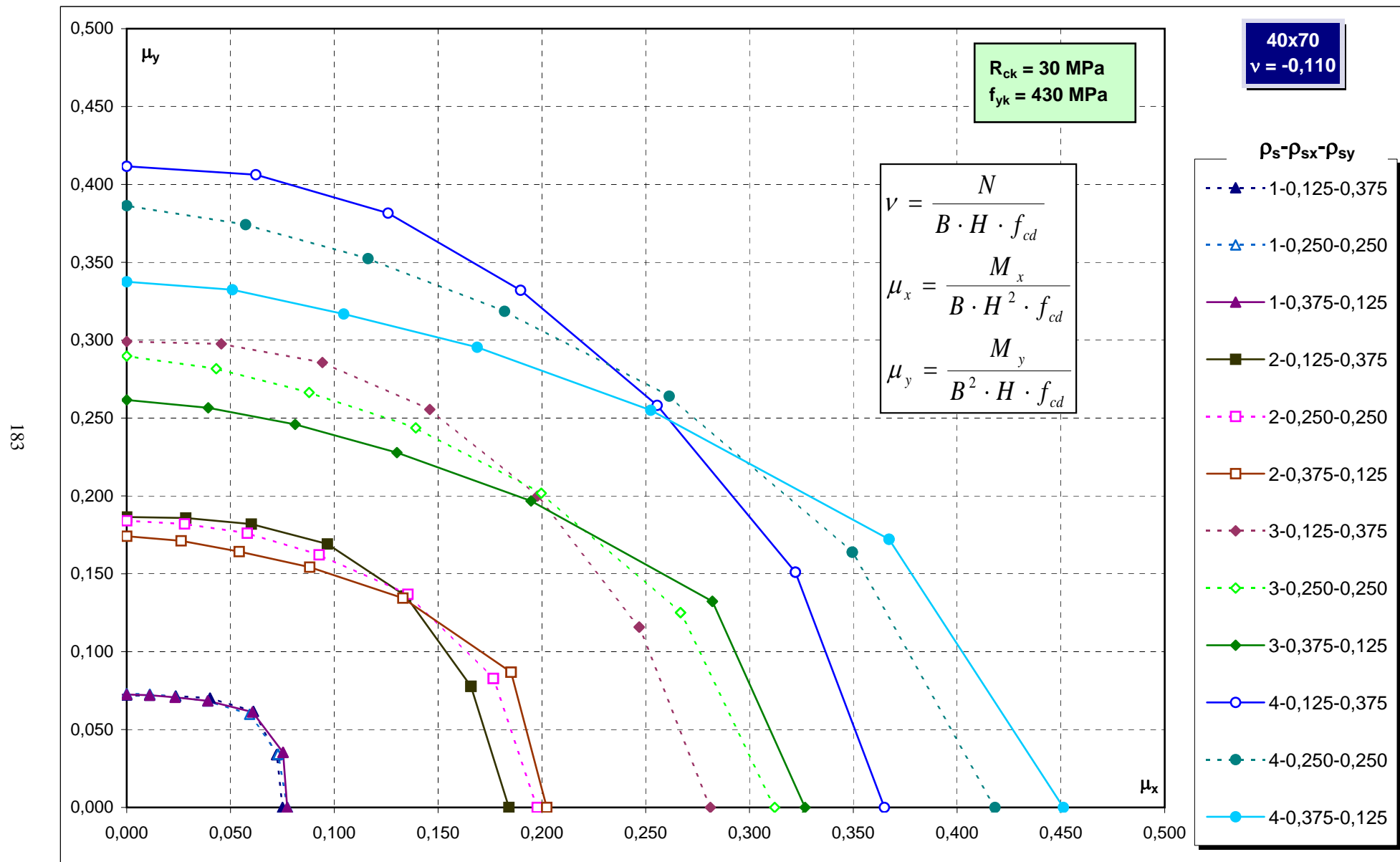
Abachi di progetto



Abachi di progetto

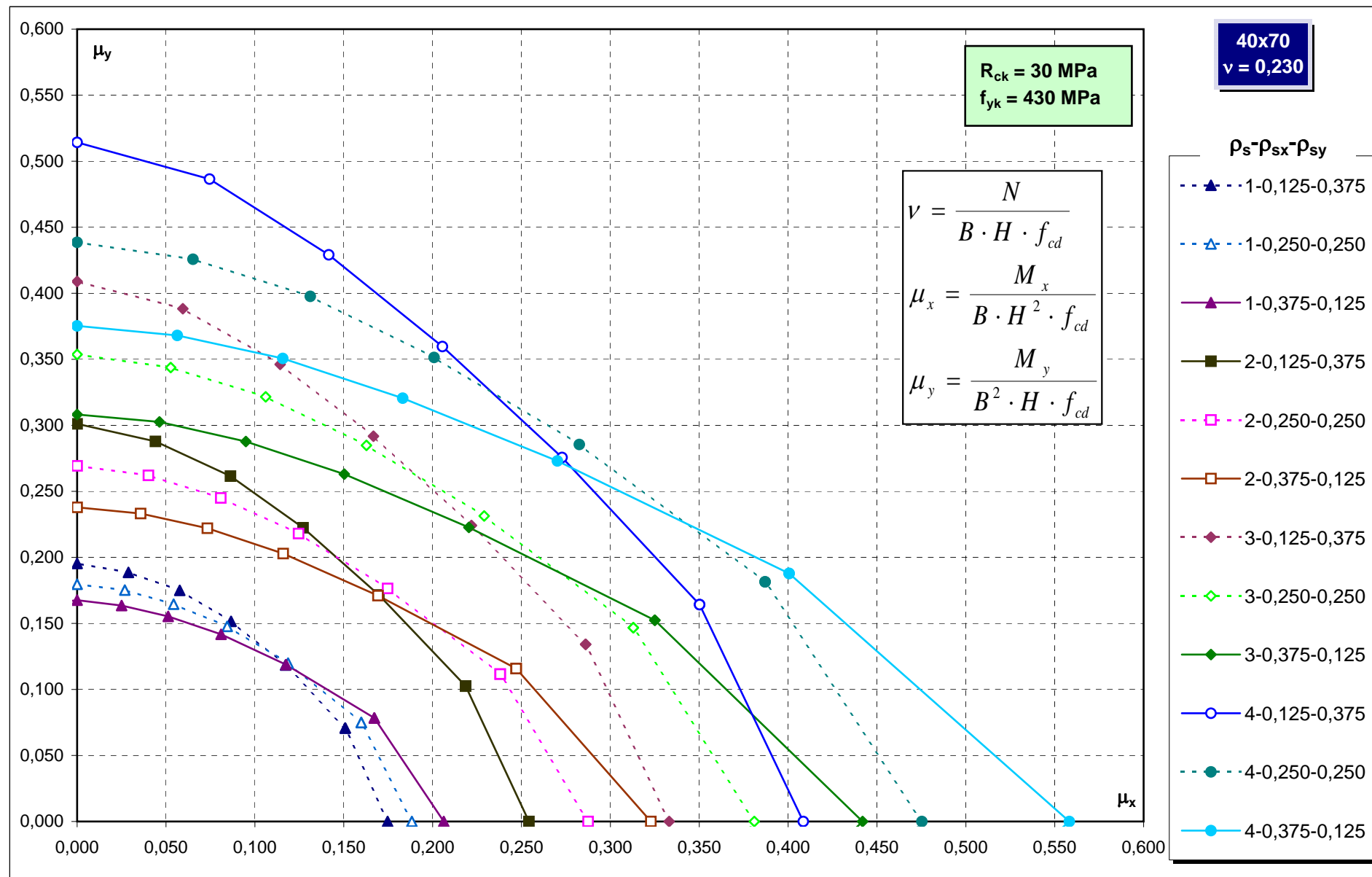


Abachi di progetto

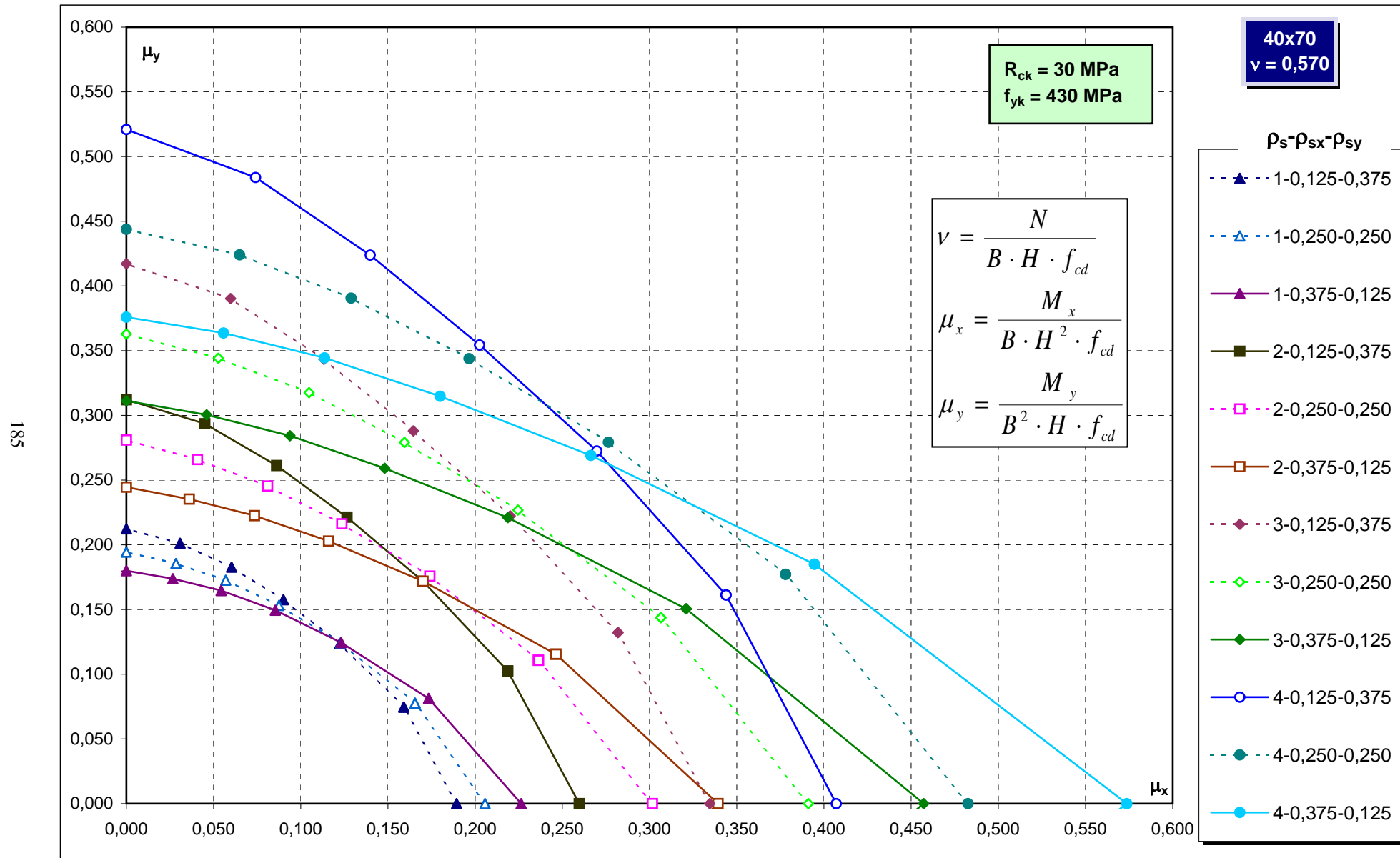


Abachi di progetto

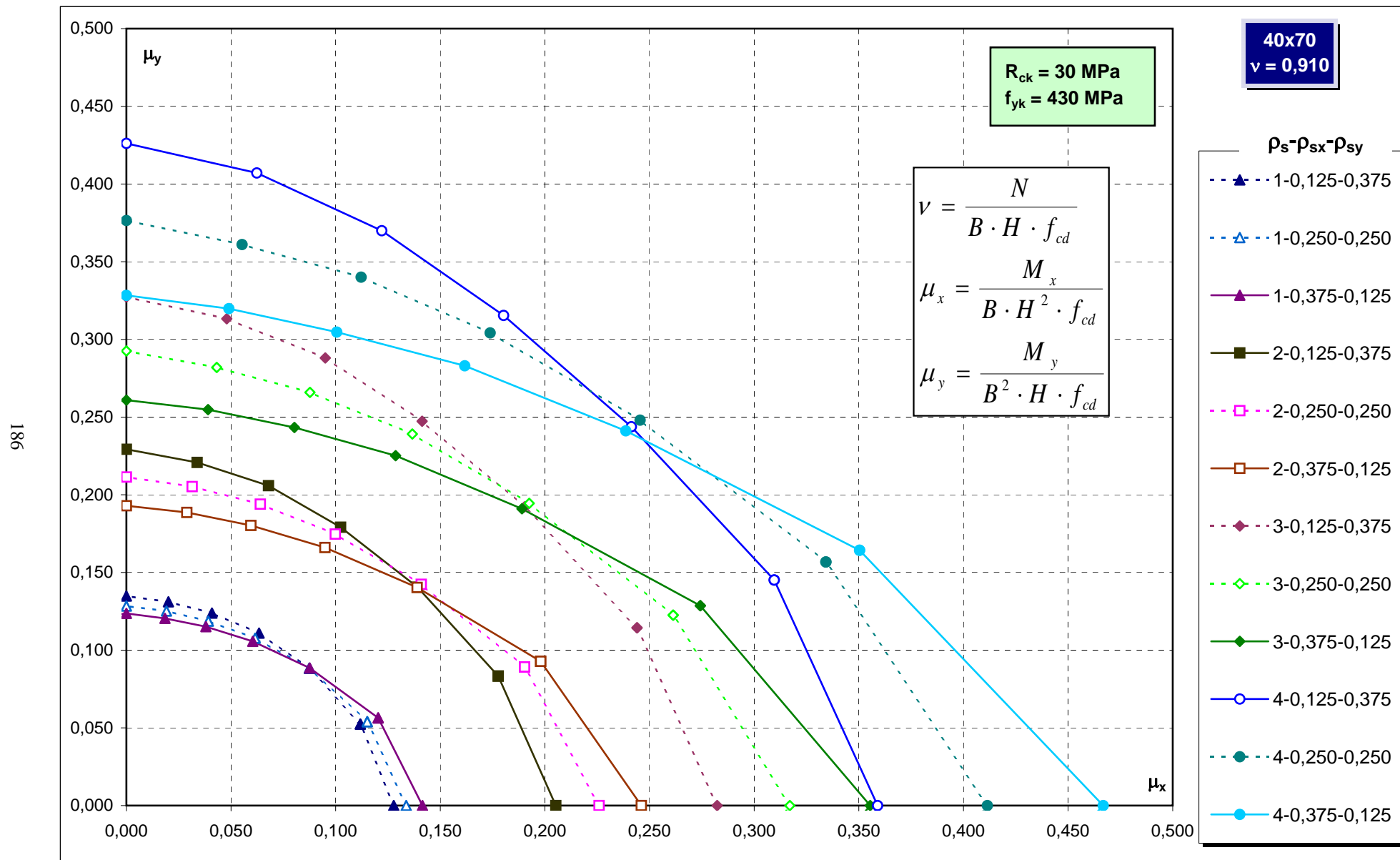
184



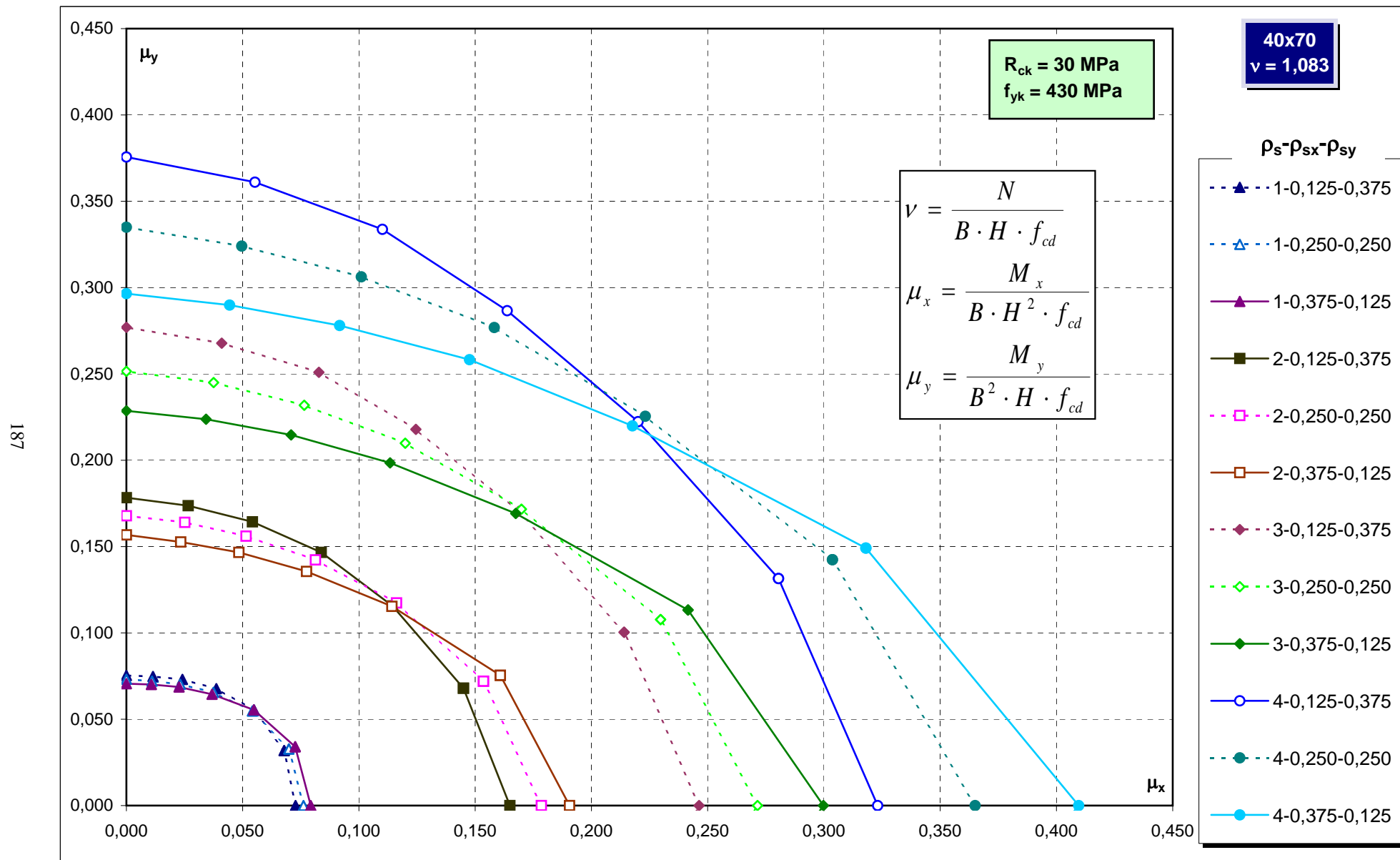
Abachi di progetto



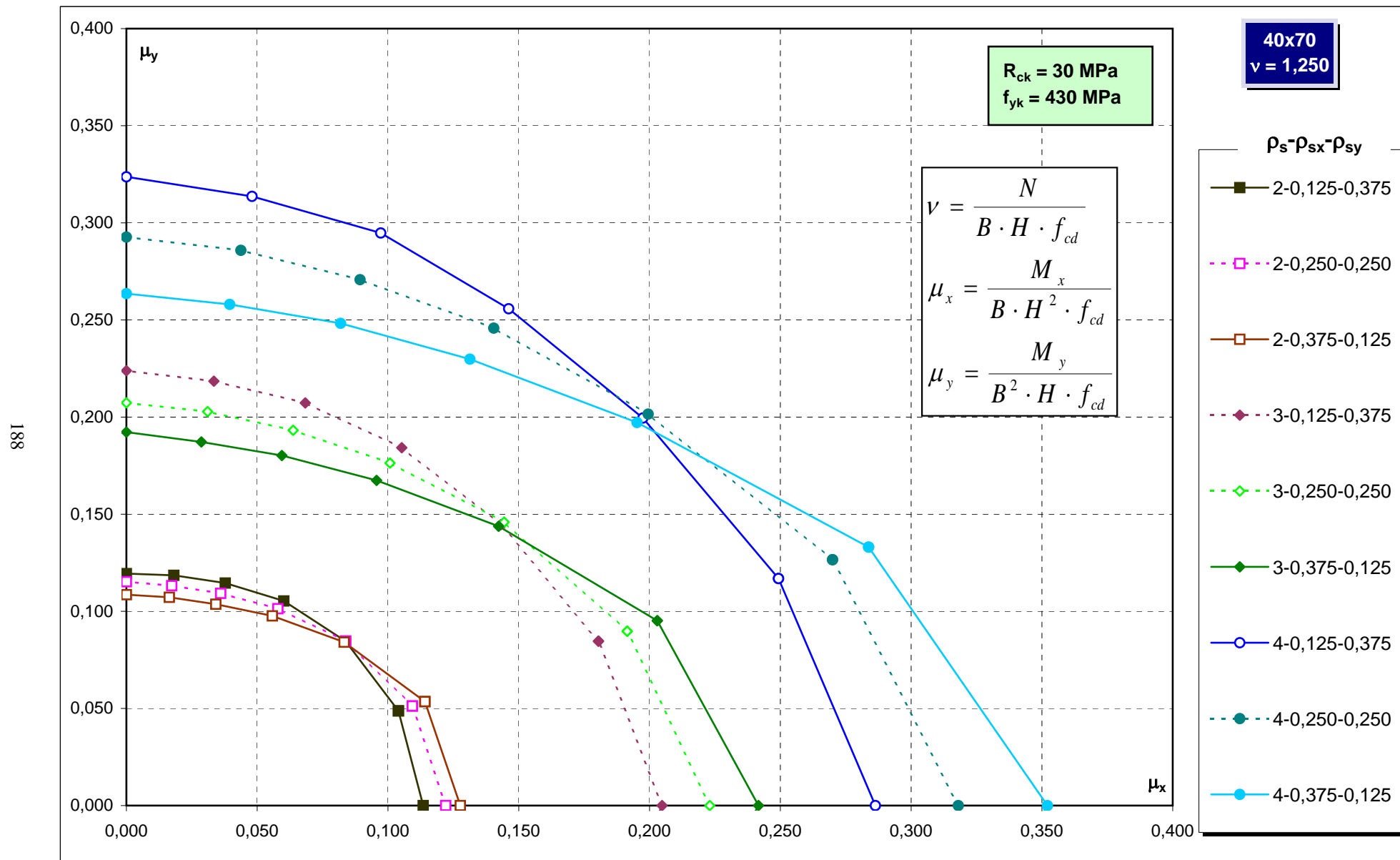
Abachi di progetto



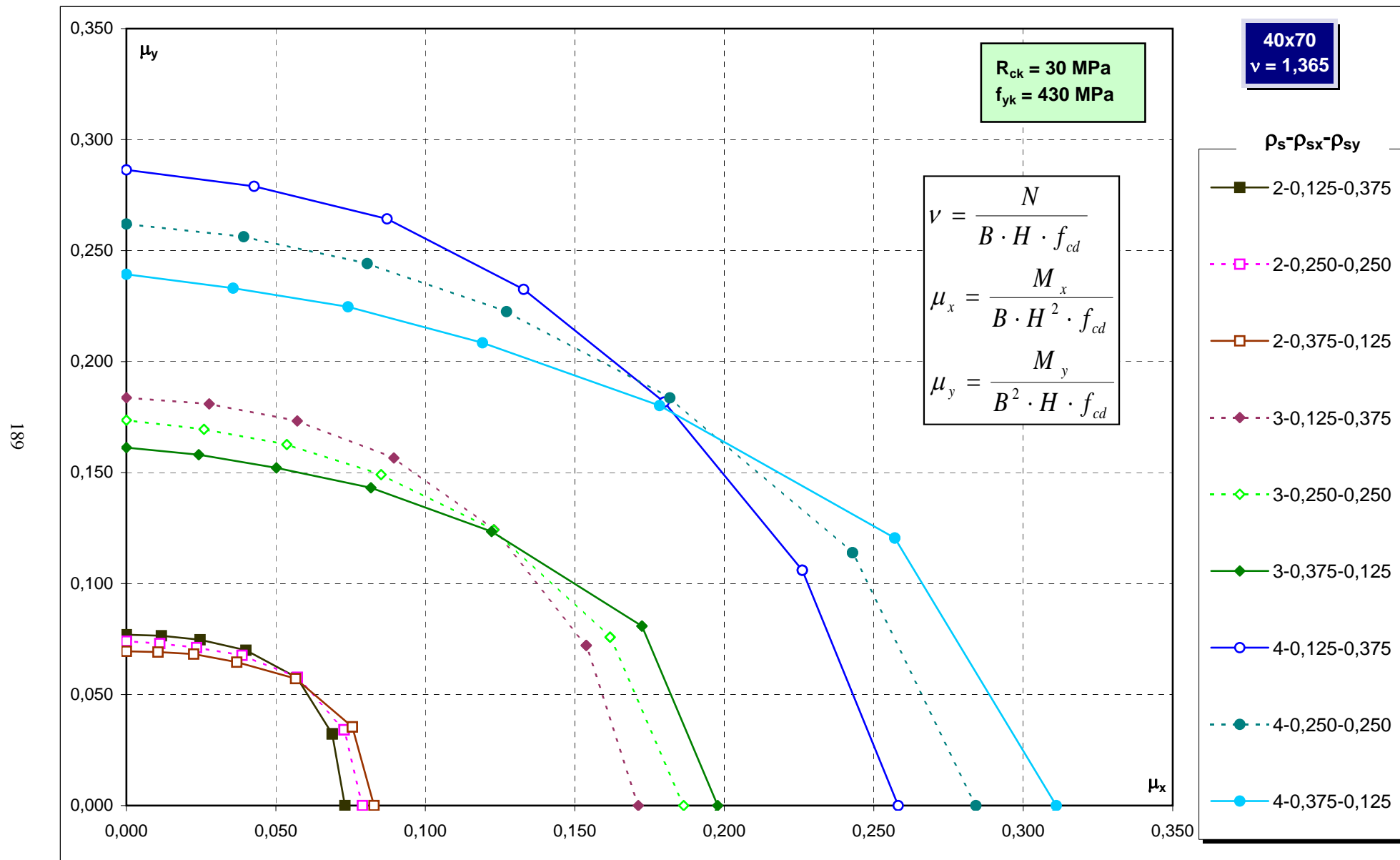
Abachi di progetto



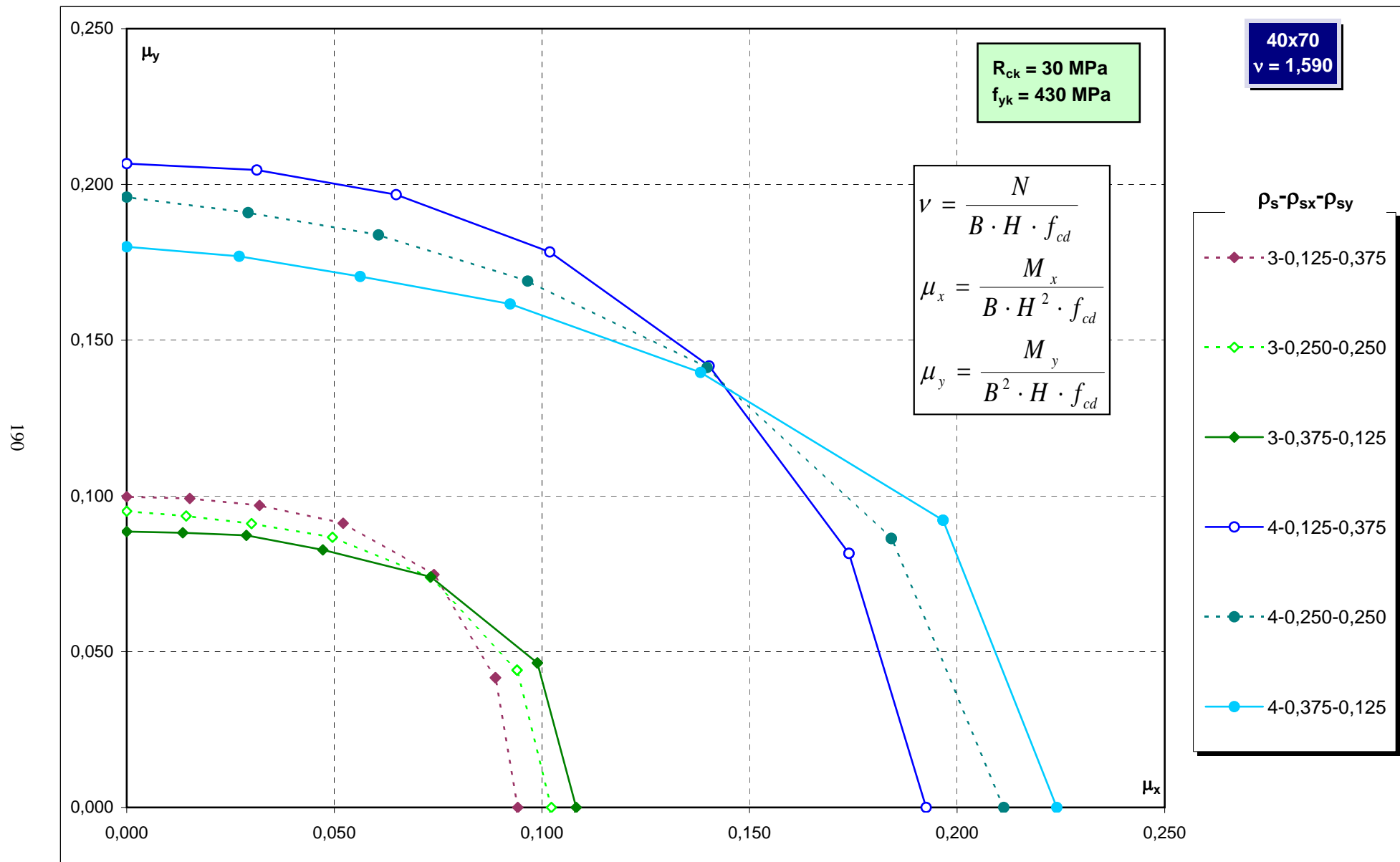
Abachi di progetto



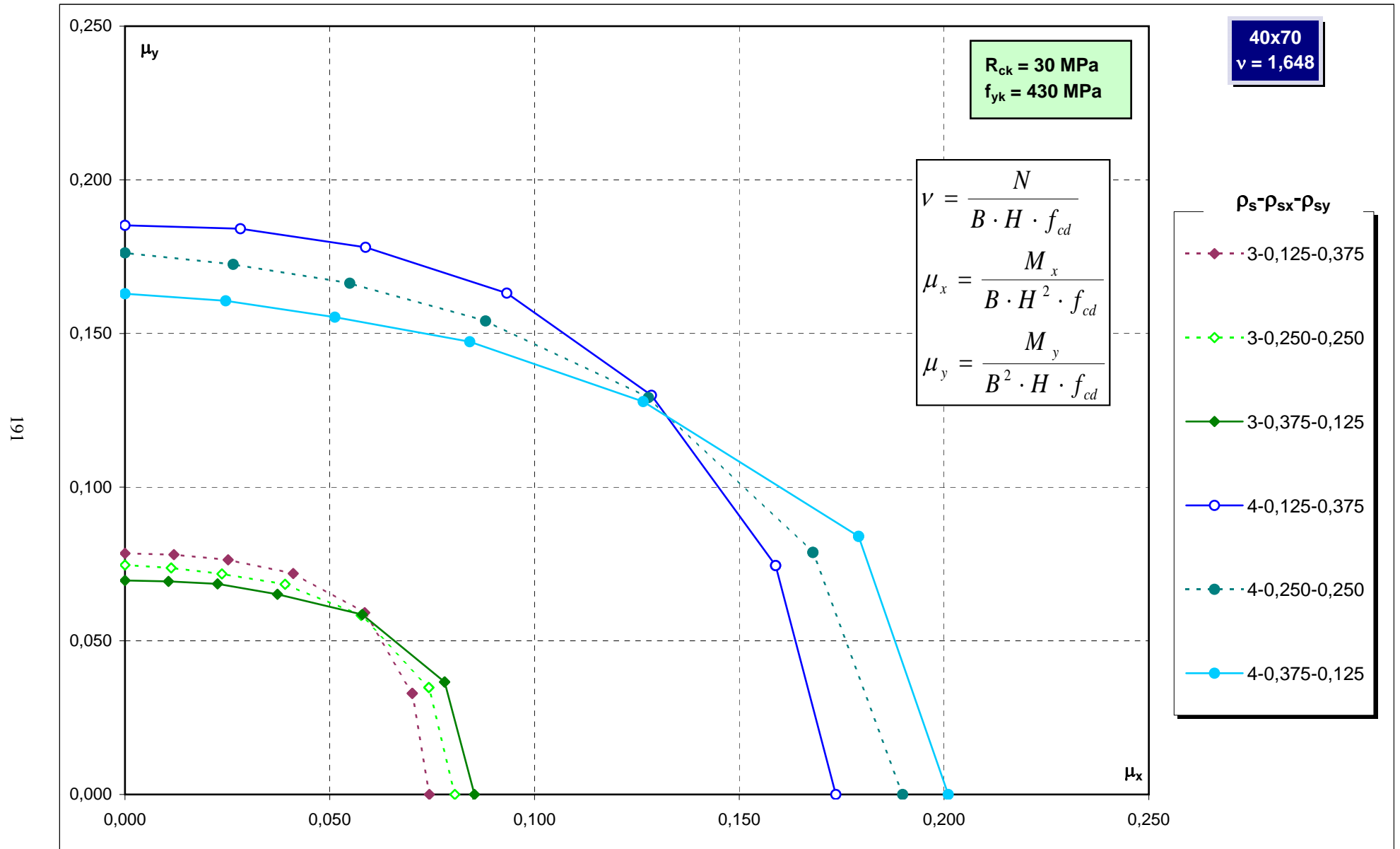
Abachi di progetto



Abachi di progetto

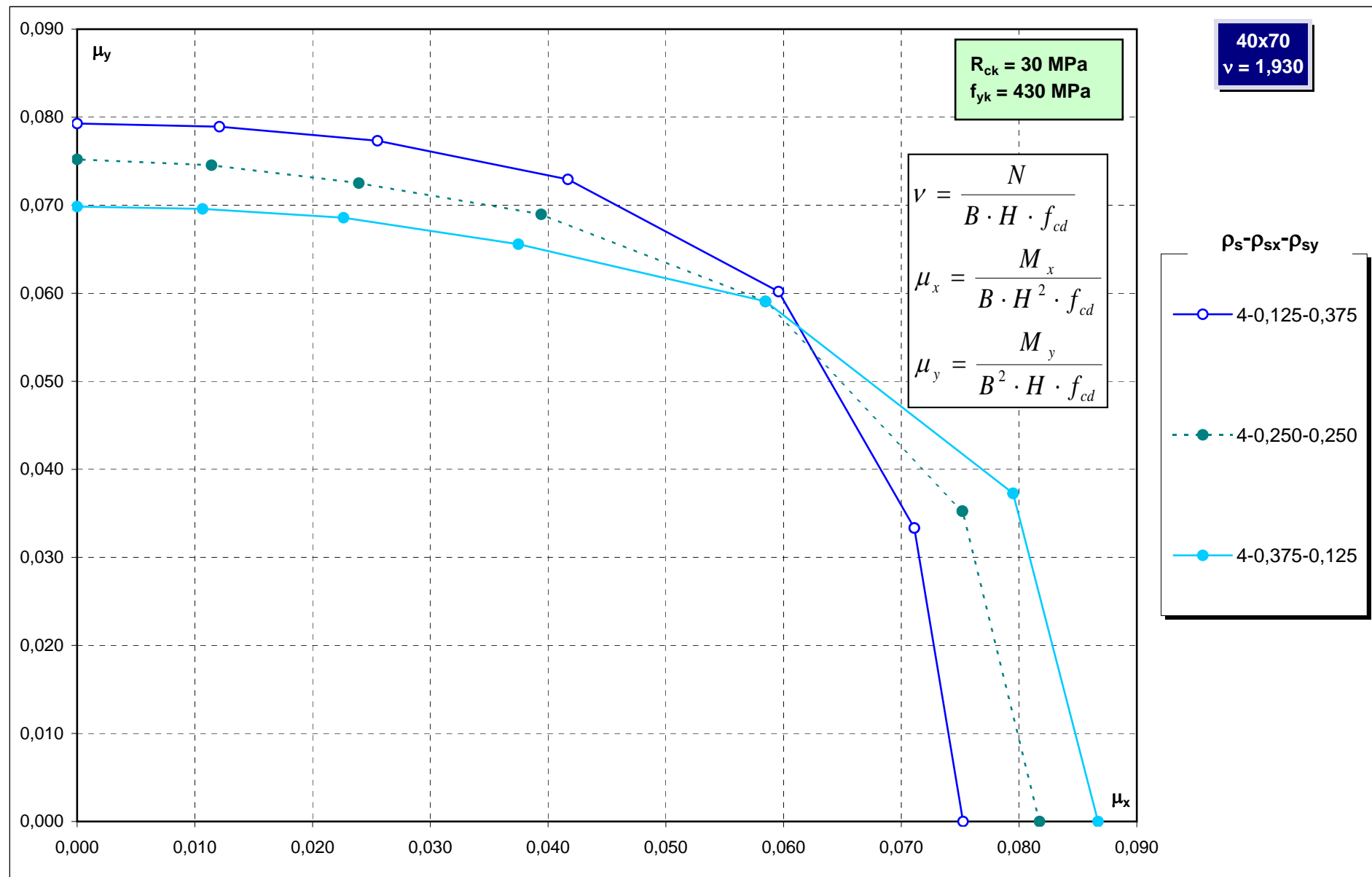


Abachi di progetto



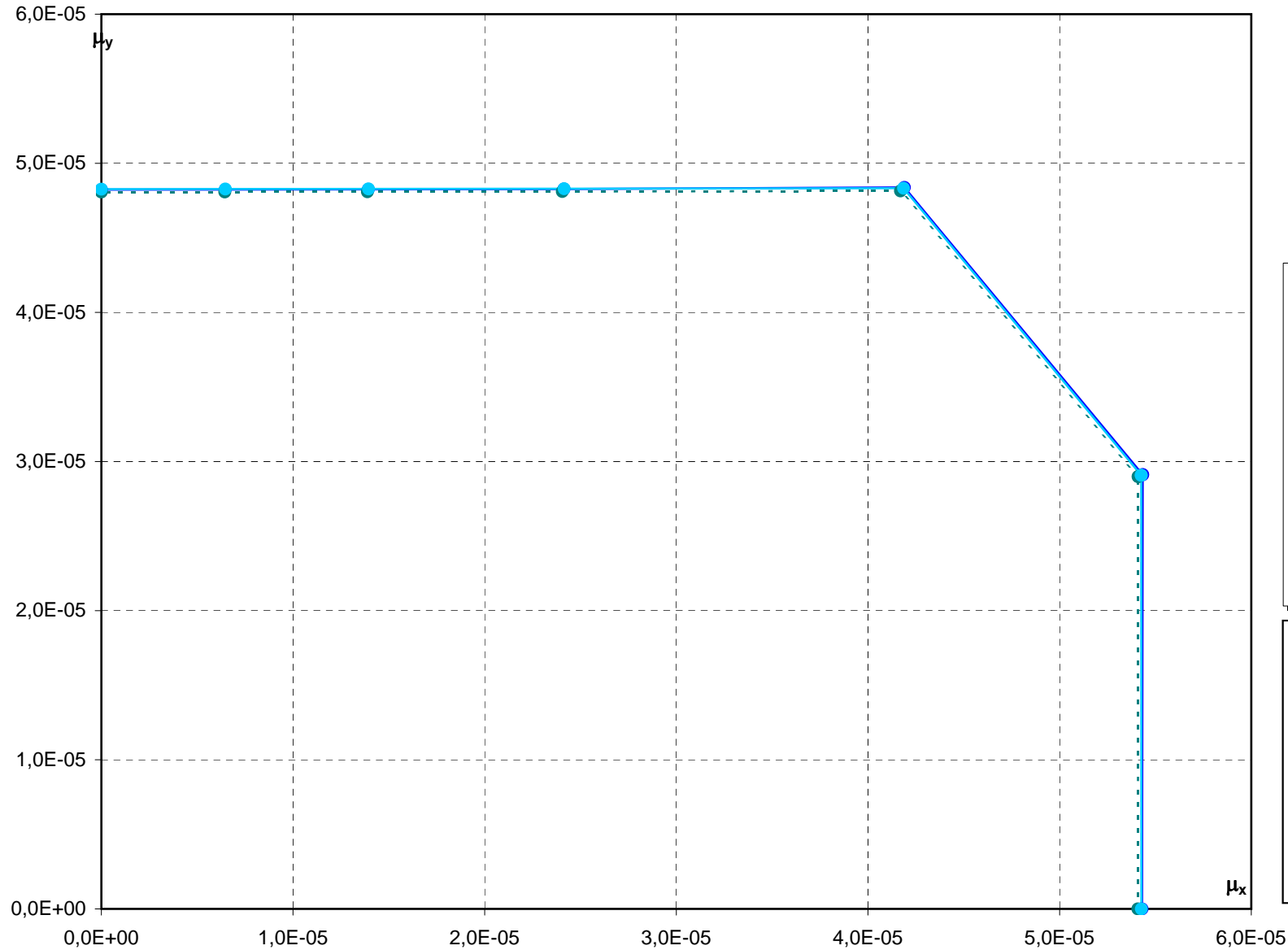
Abachi di progetto

192



Abachi di progetto

193



40x80
 $\nu = -1,131$

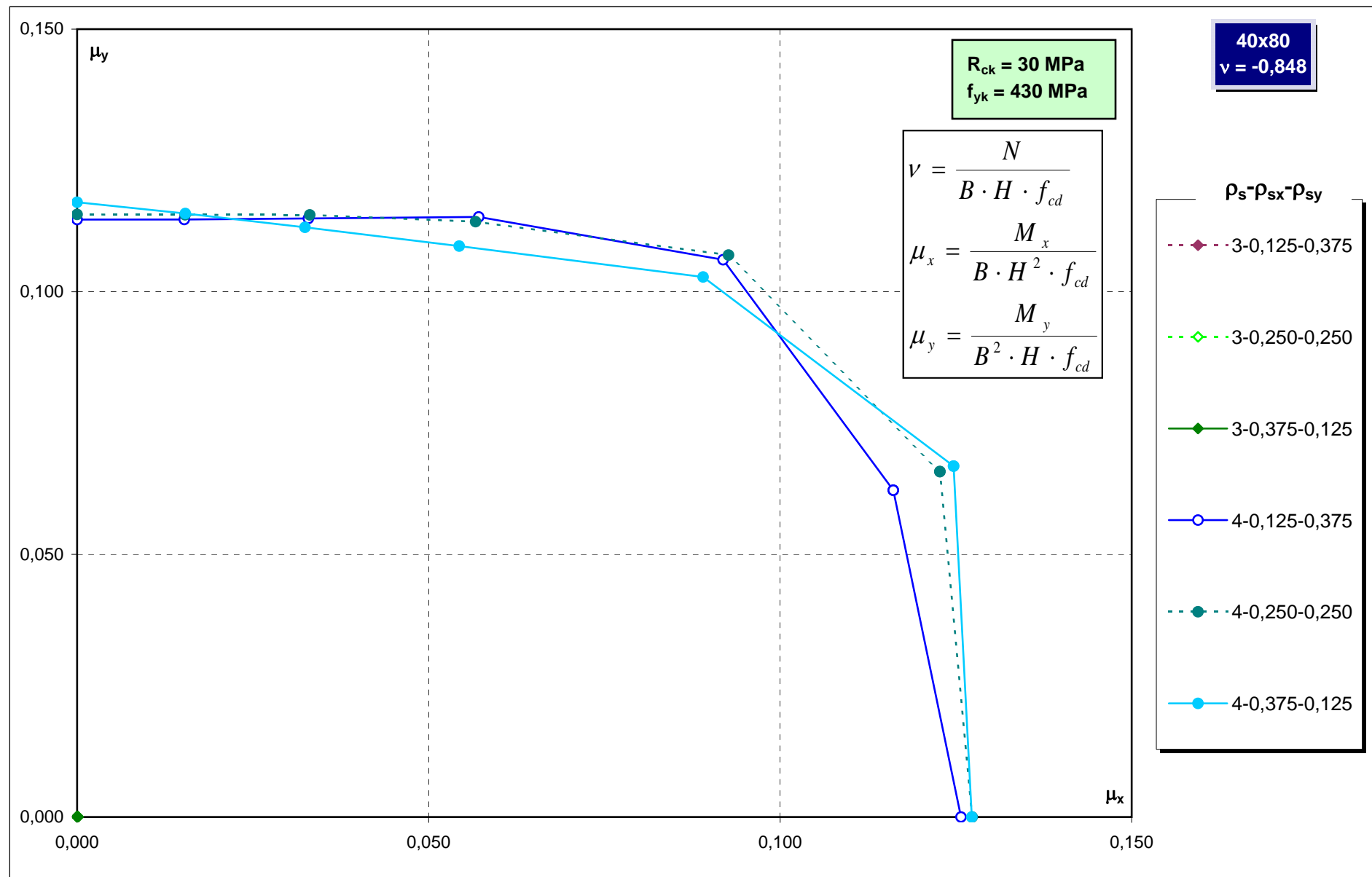
$R_{ck} = 30 \text{ MPa}$
 $f_{yk} = 430 \text{ MPa}$

$\rho_s - \rho_{sx} - \rho_{sy}$

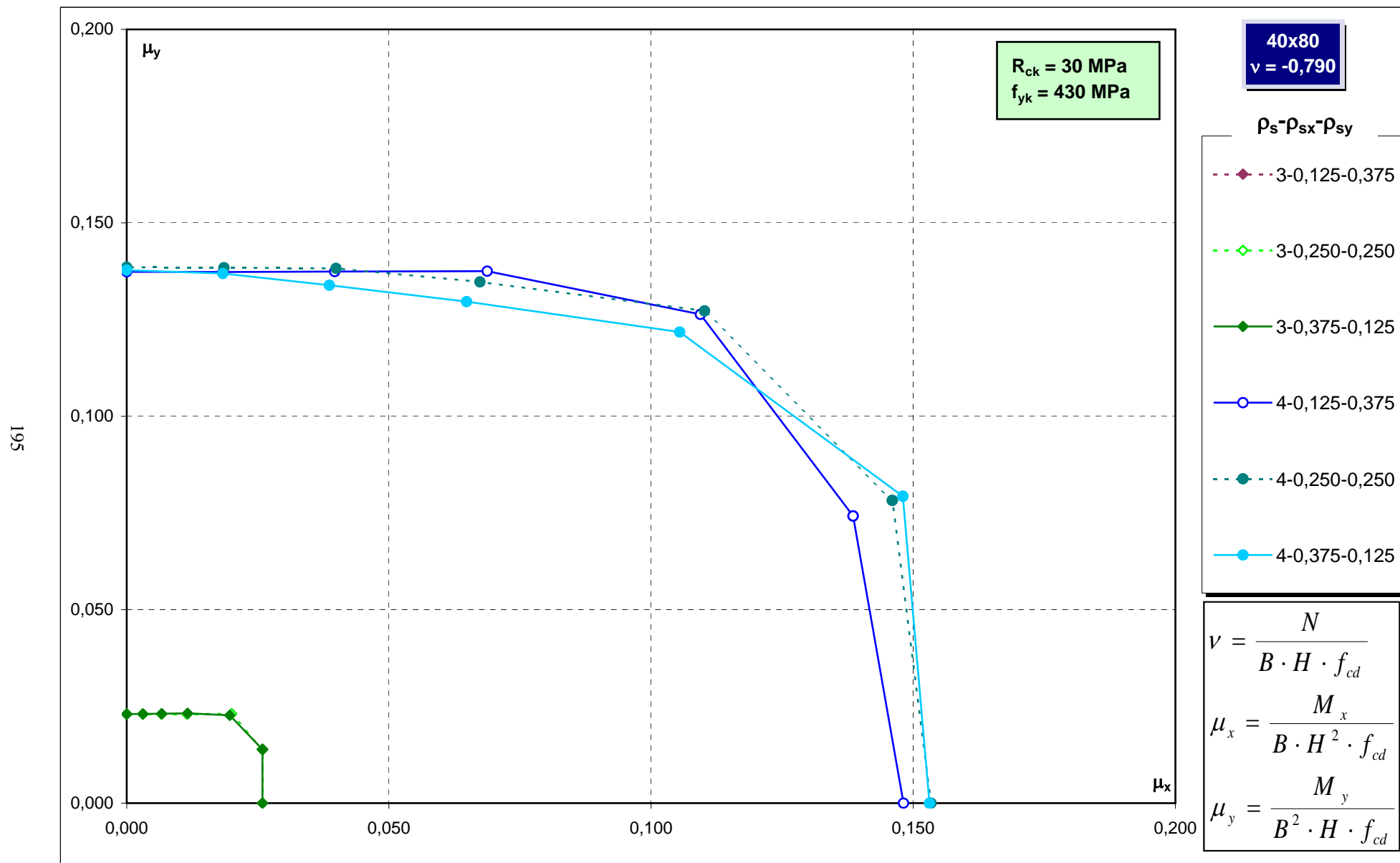
- 4-0,125-0,375
- 4-0,250-0,250
- 4-0,375-0,125

$$\nu = \frac{N}{B \cdot H \cdot f_{cd}}$$
$$\mu_x = \frac{M_x}{B \cdot H^2 \cdot f_{cd}}$$
$$\mu_y = \frac{M_y}{B^2 \cdot H \cdot f_{cd}}$$

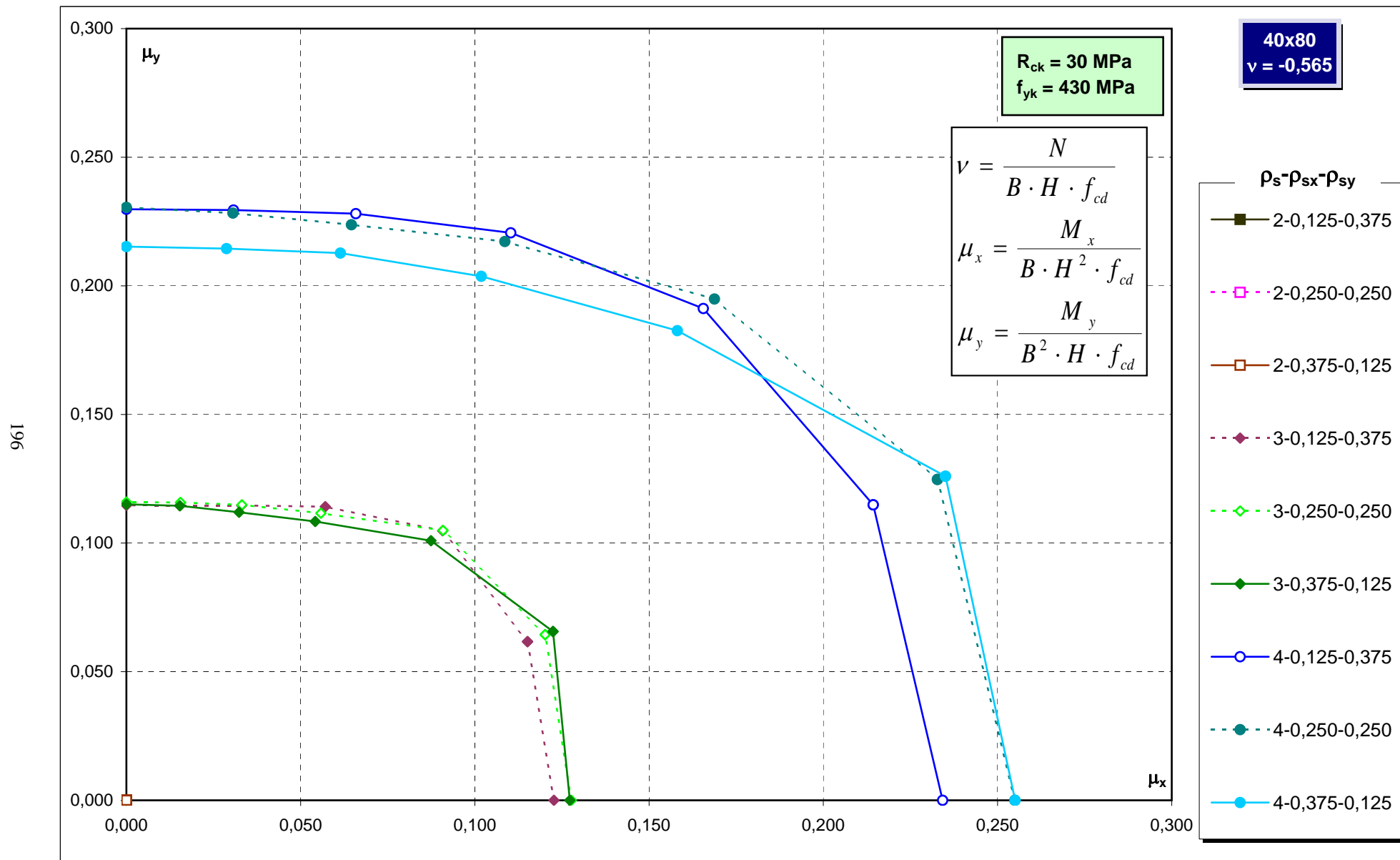
Abachi di progetto



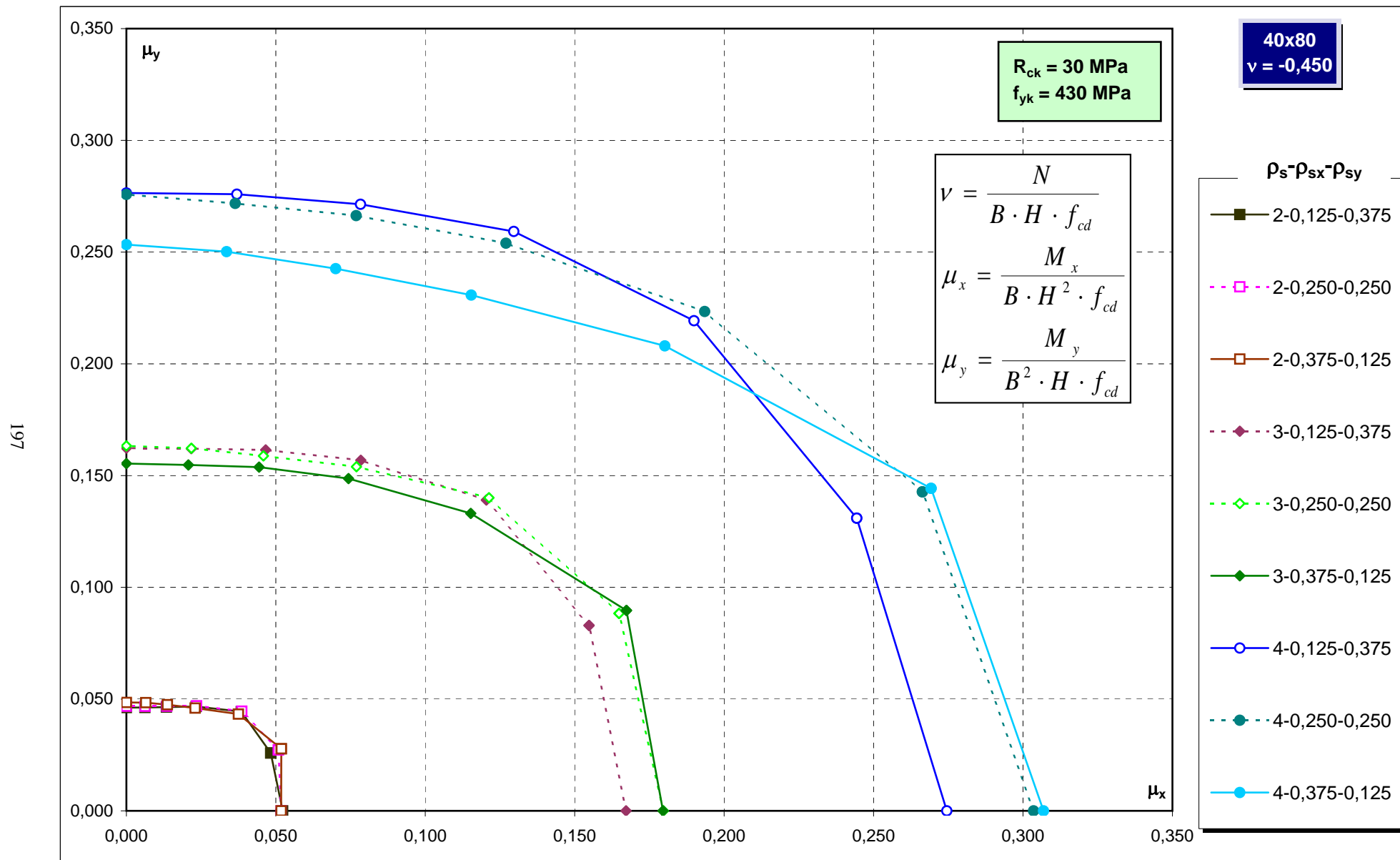
Abachi di progetto



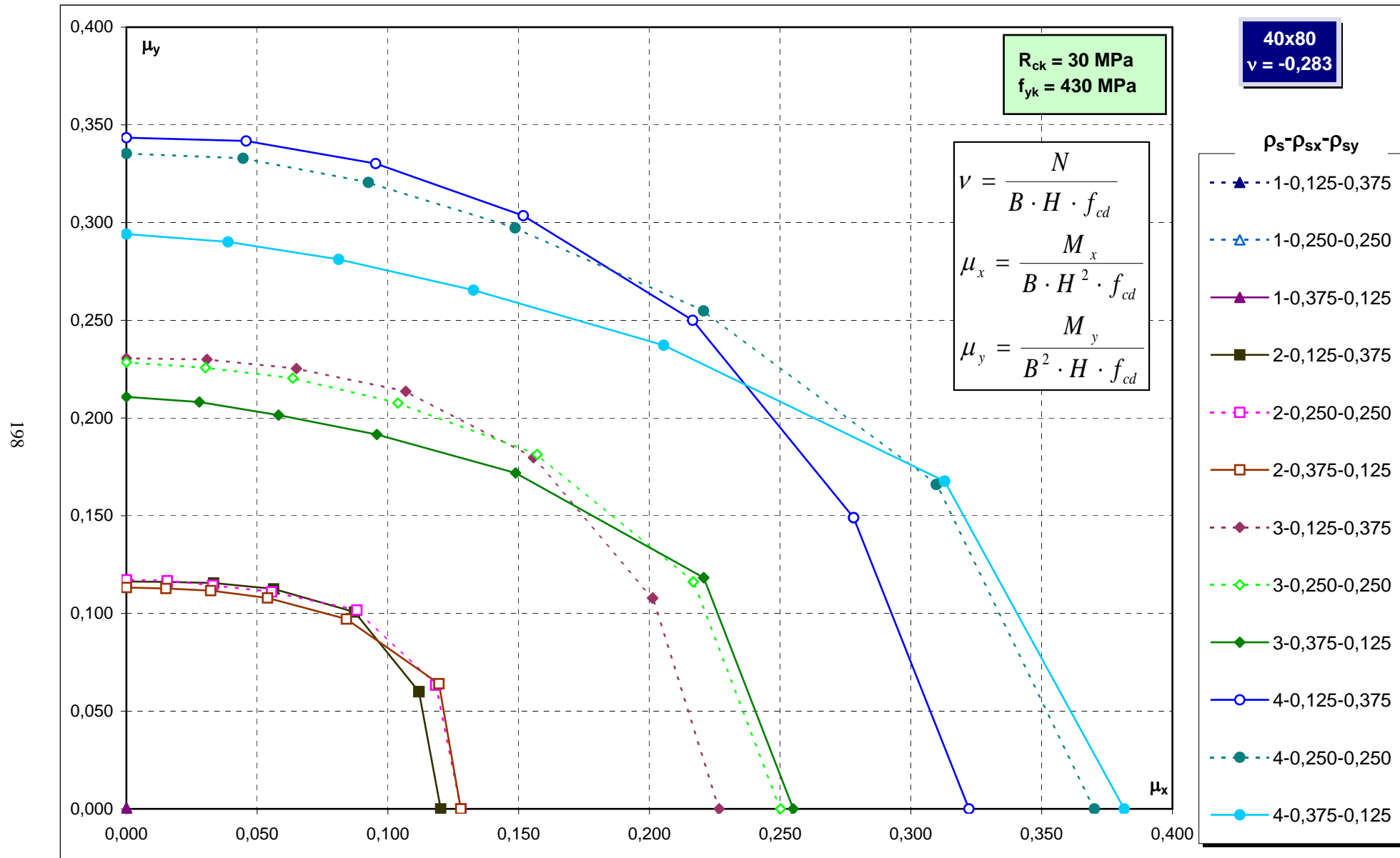
Abachi di progetto



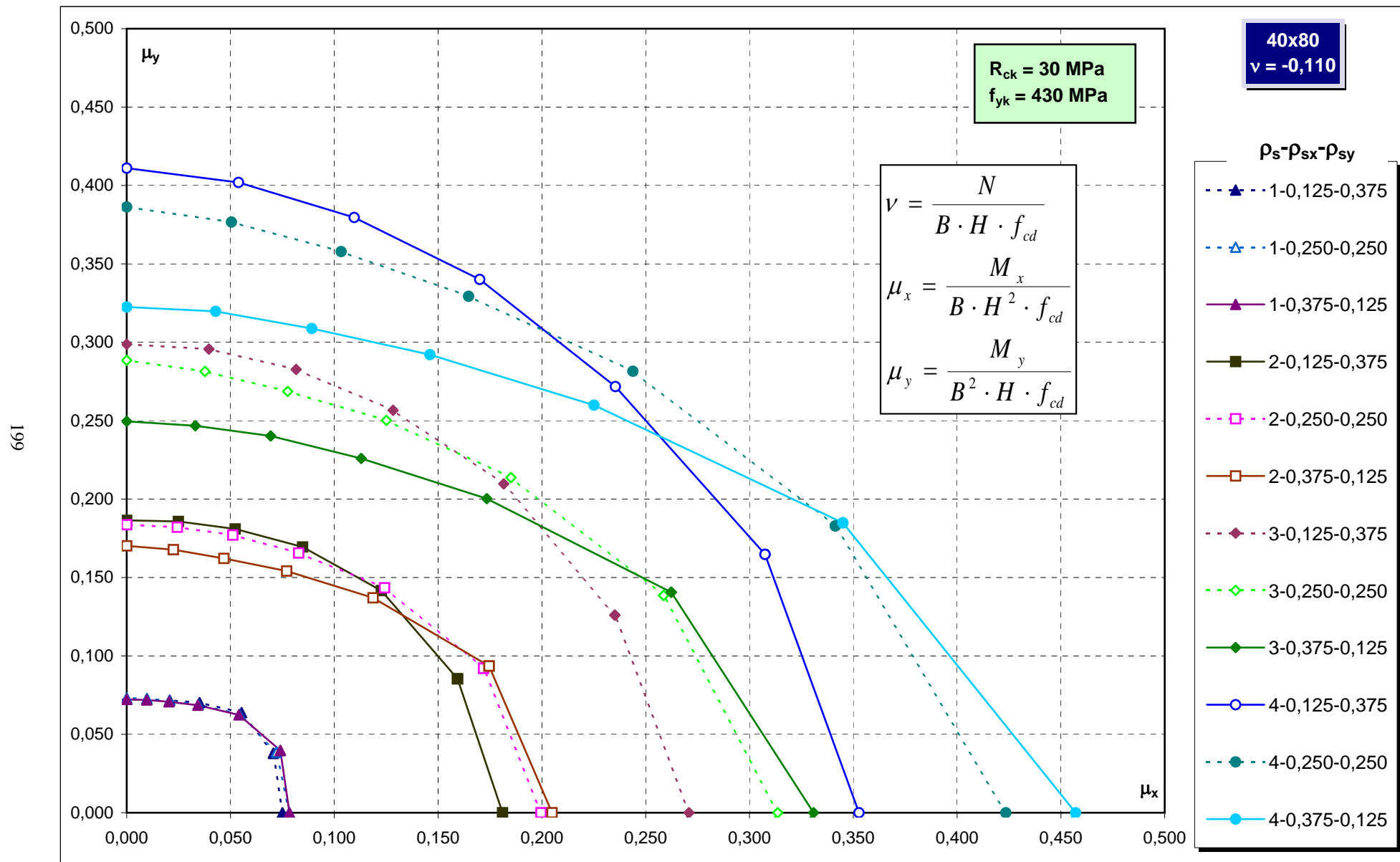
Abachi di progetto



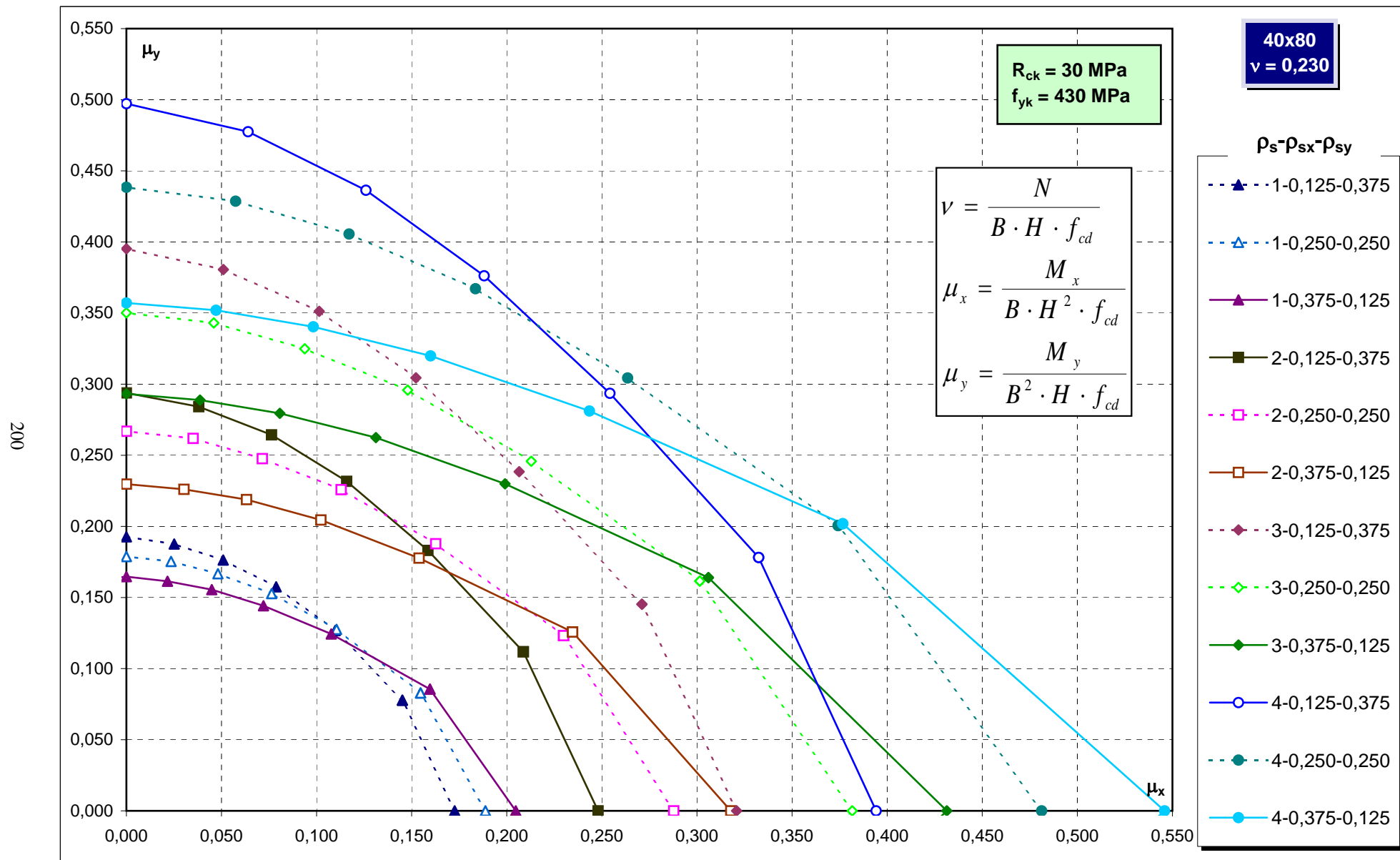
Abachi di progetto



Abachi di progetto

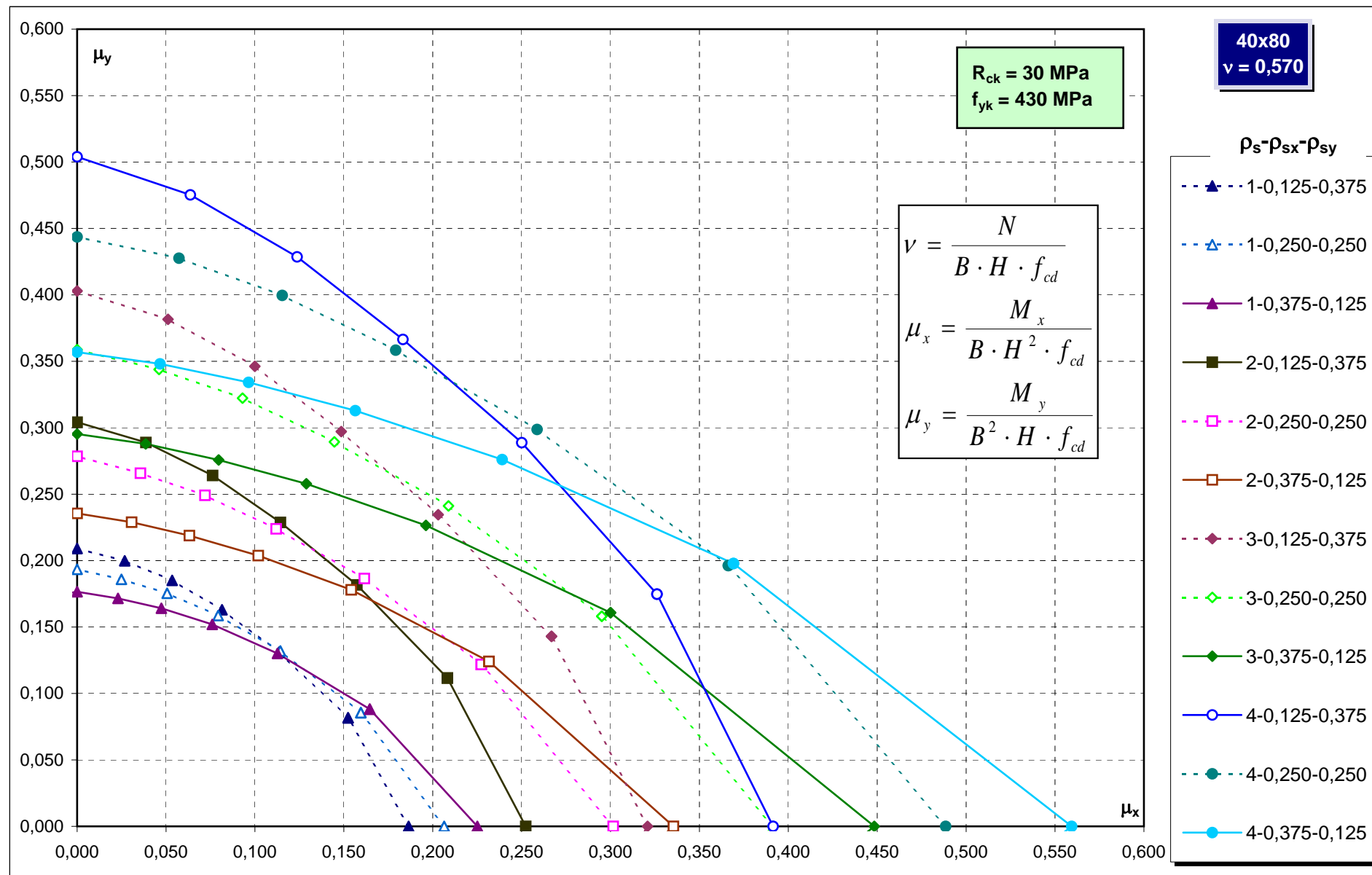


Abachi di progetto



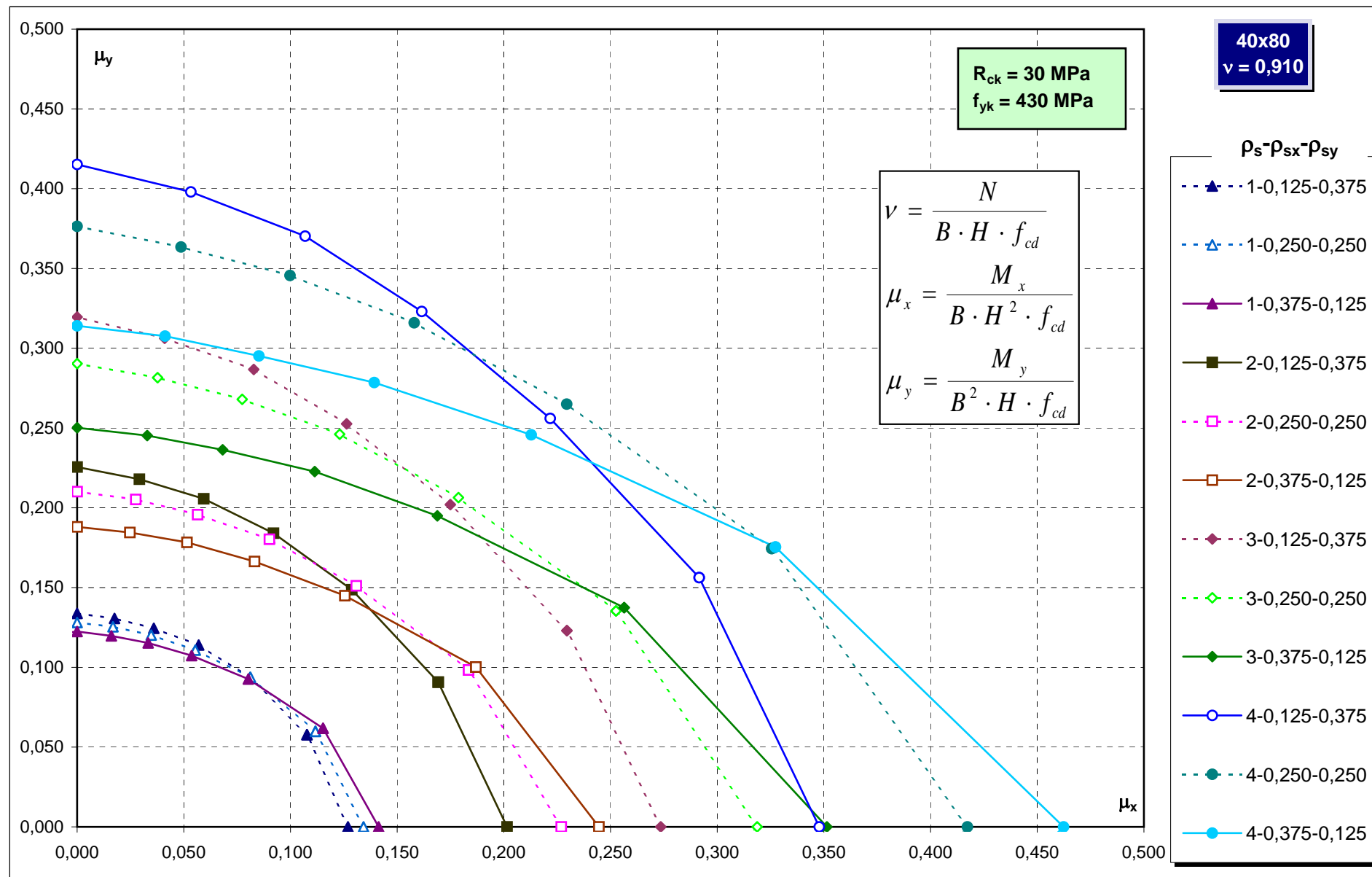
Abachi di progetto

201



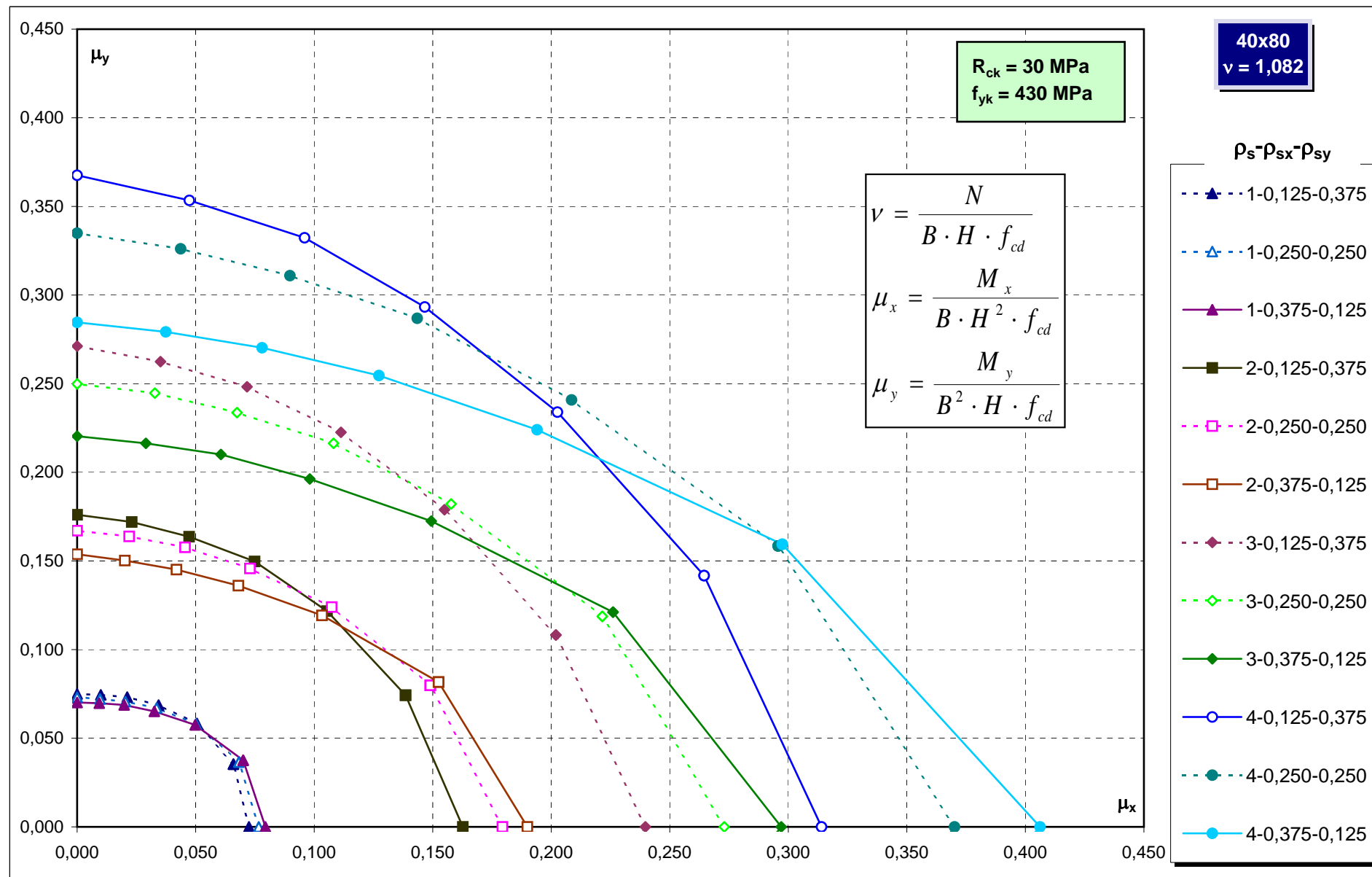
Abachi di progetto

202

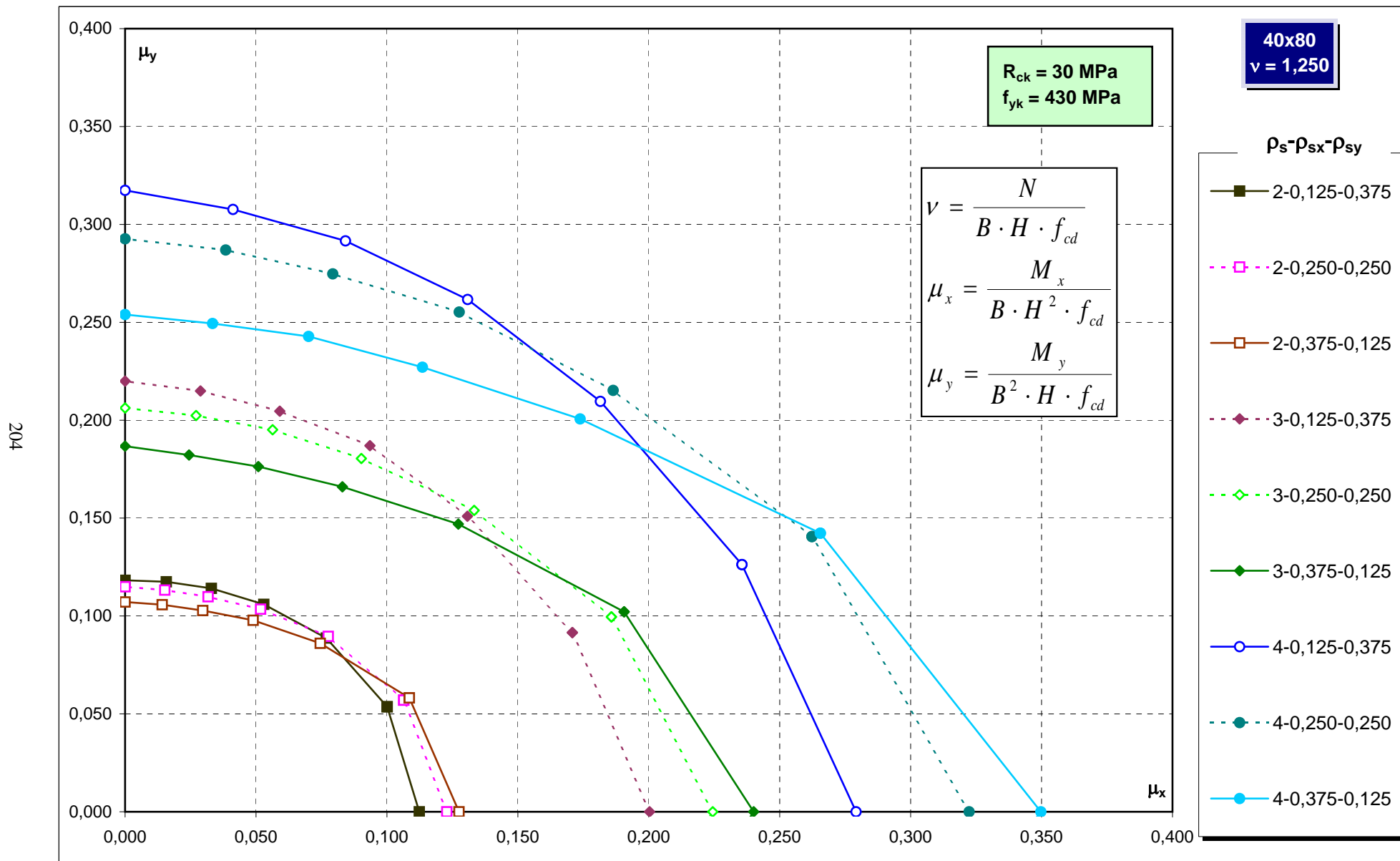


Abachi di progetto

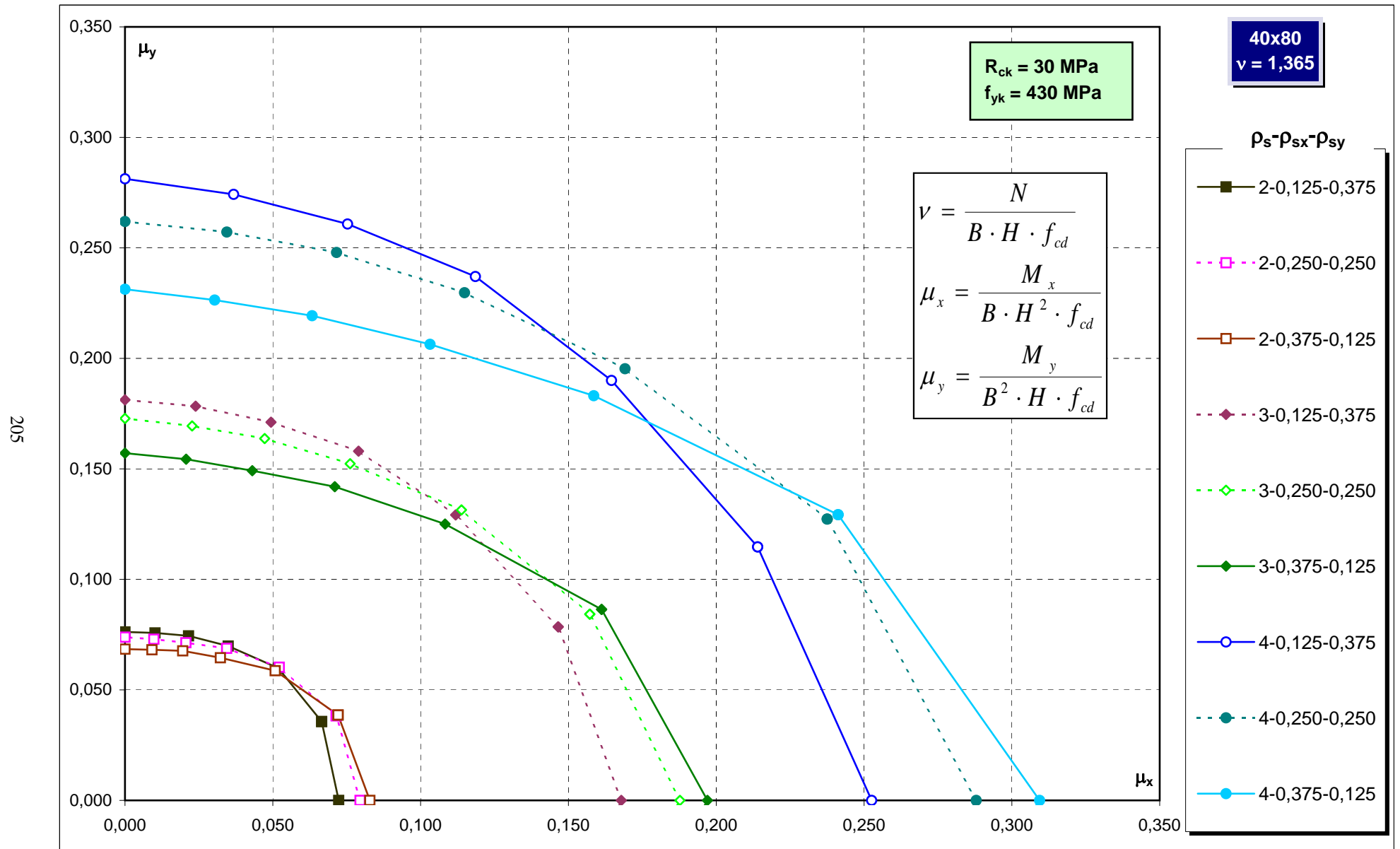
203



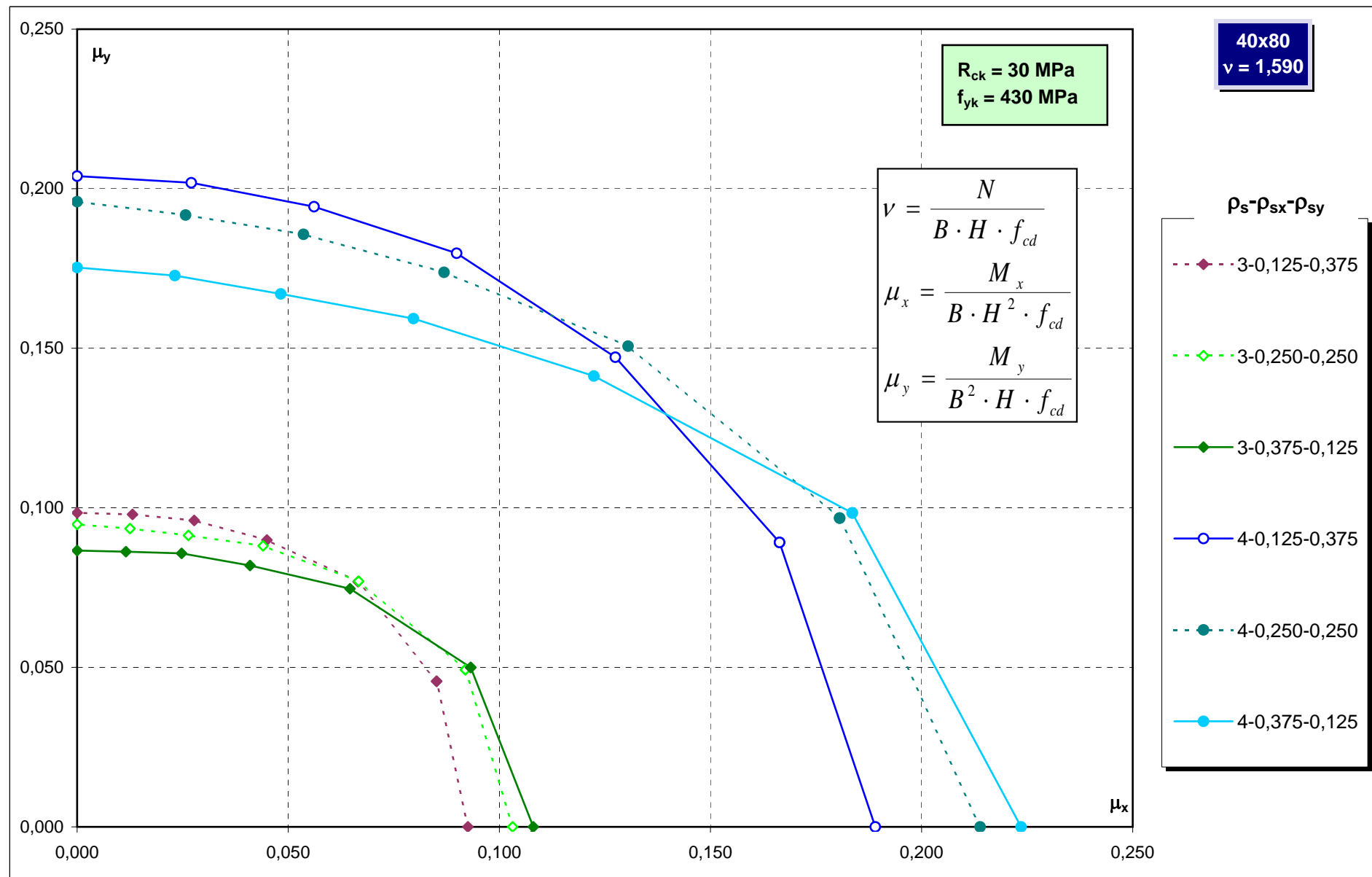
Abachi di progetto



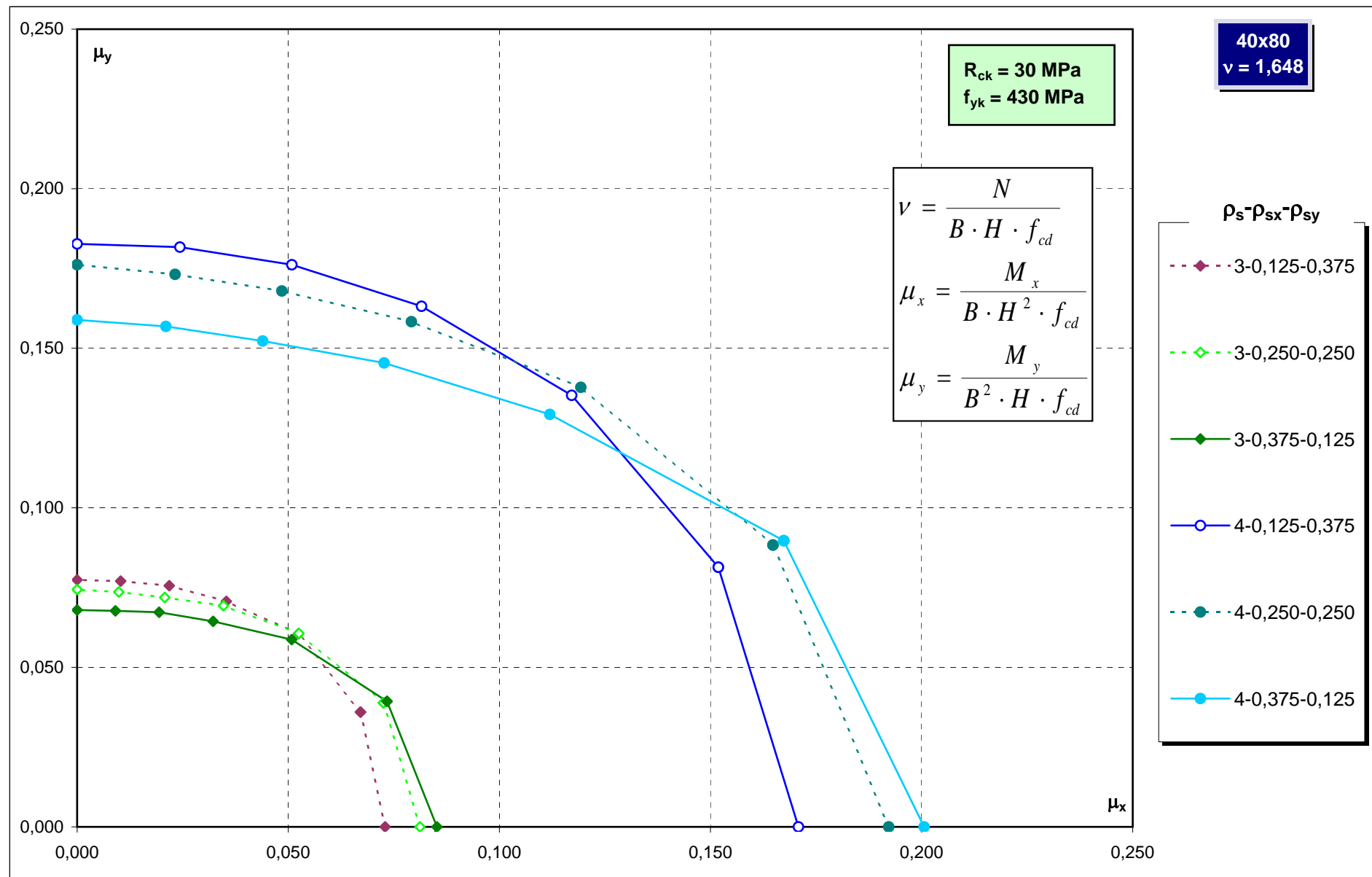
Abachi di progetto



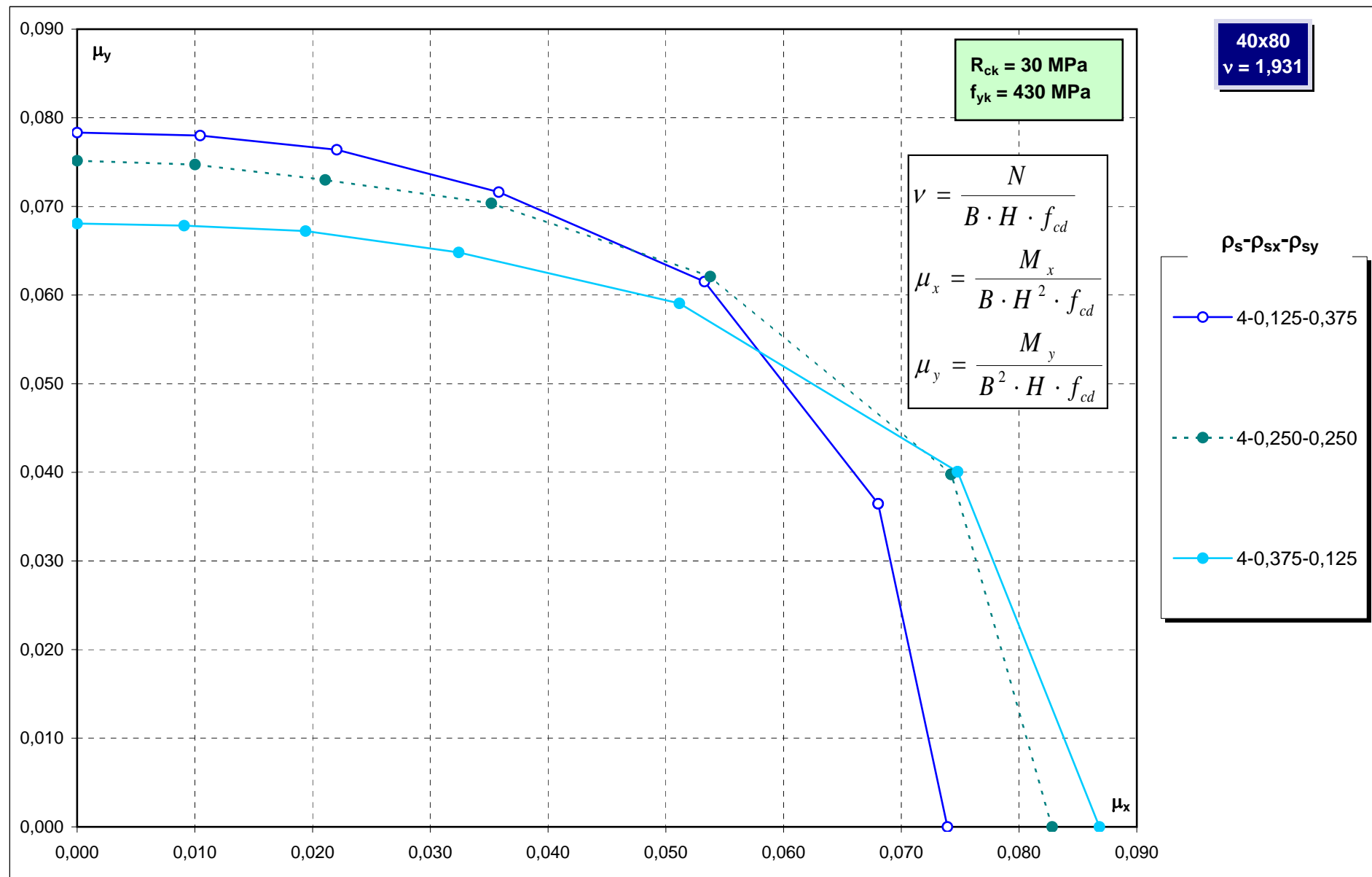
Abachi di progetto



Abachi di progetto



Abachi di progetto



Abachi di progetto

40x90
v = -1,131

R_{ck} = 30 MPa
f_{yk} = 430 MPa

ρ_s-ρ_{sx}-ρ_{sy}

—○— 4-0,125-0,375

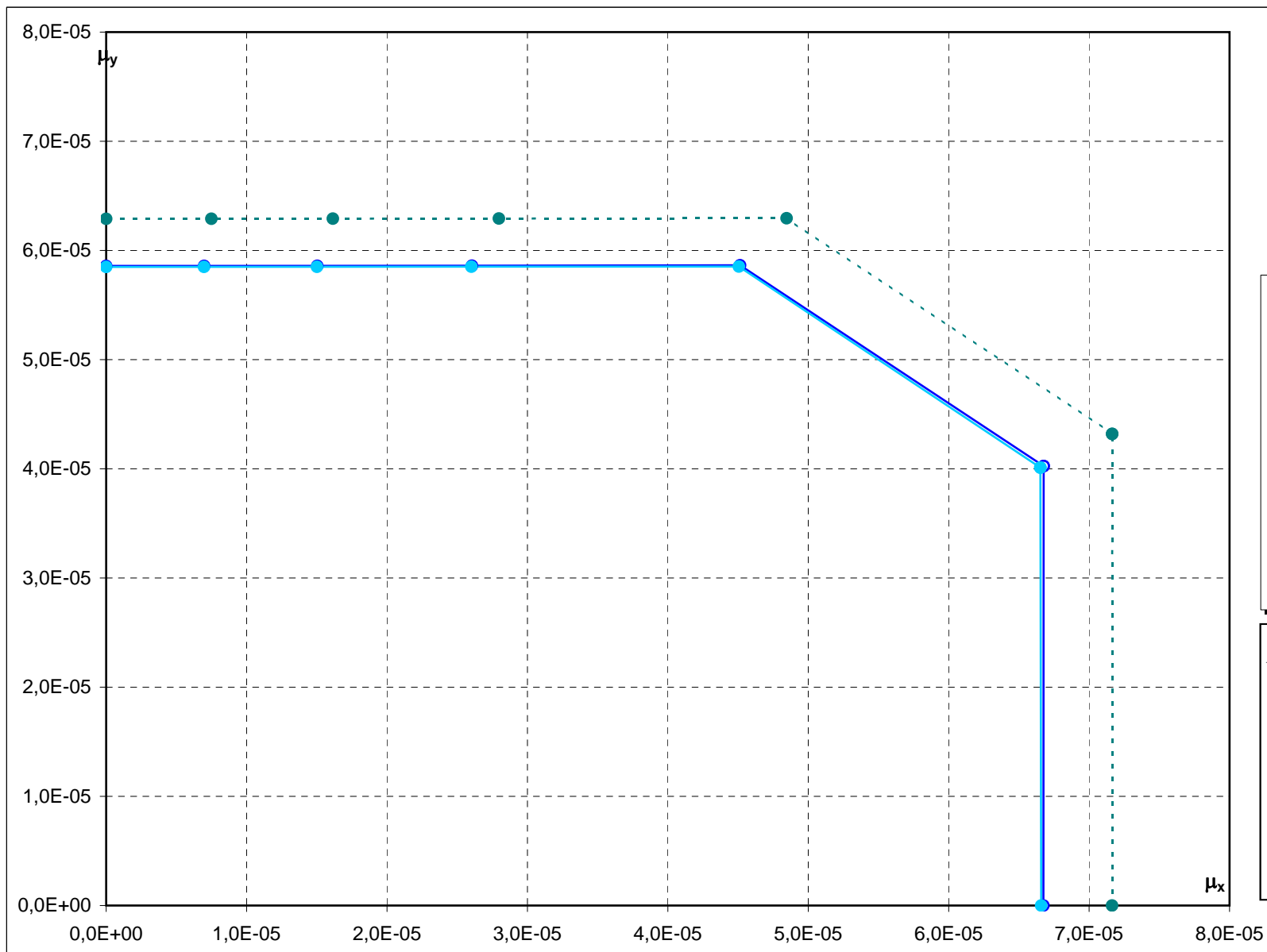
-●- 4-0,250-0,250

—●— 4-0,375-0,125

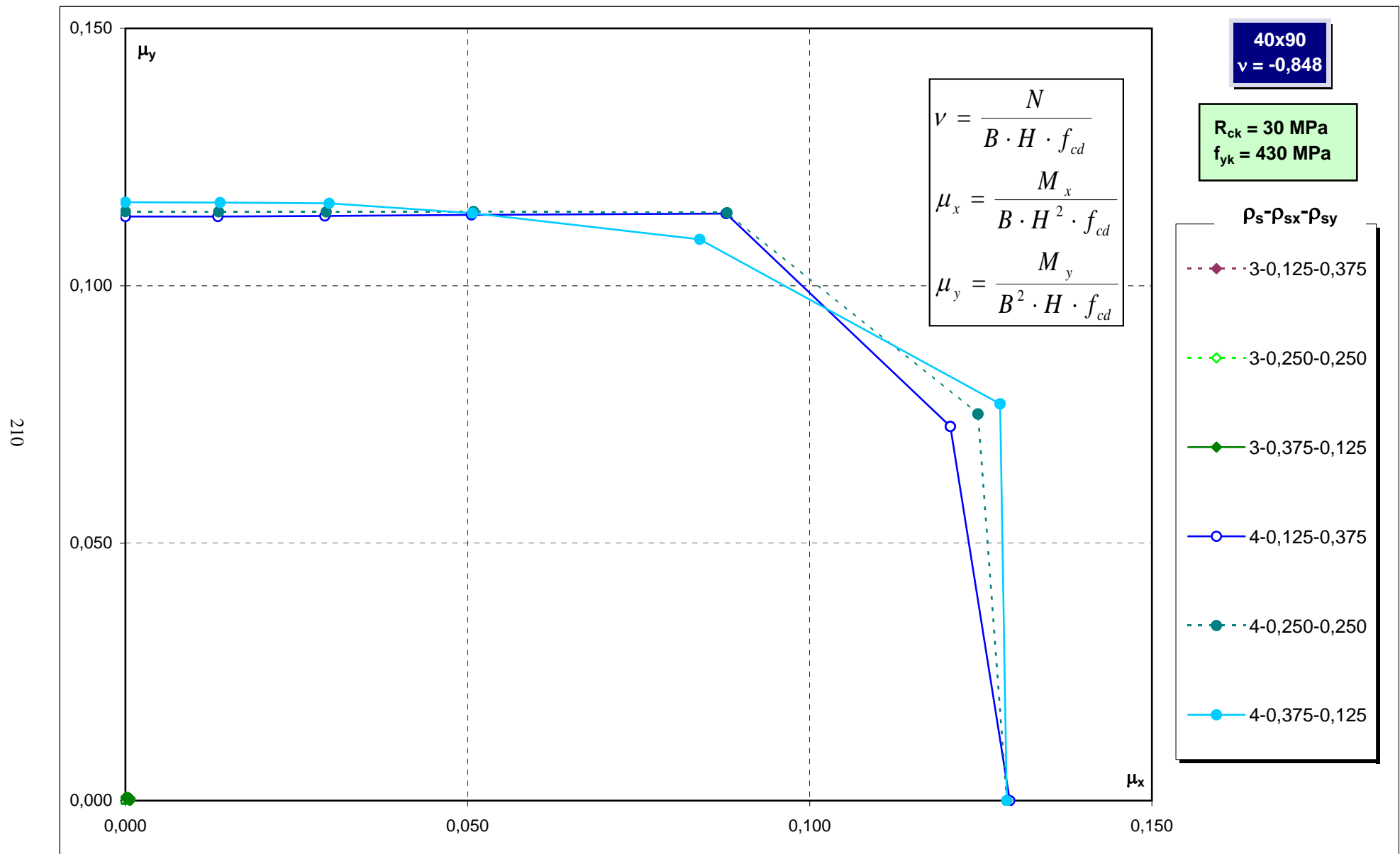
$$\nu = \frac{N}{B \cdot H \cdot f_{cd}}$$

$$\mu_x = \frac{M_x}{B \cdot H^2 \cdot f_{cd}}$$

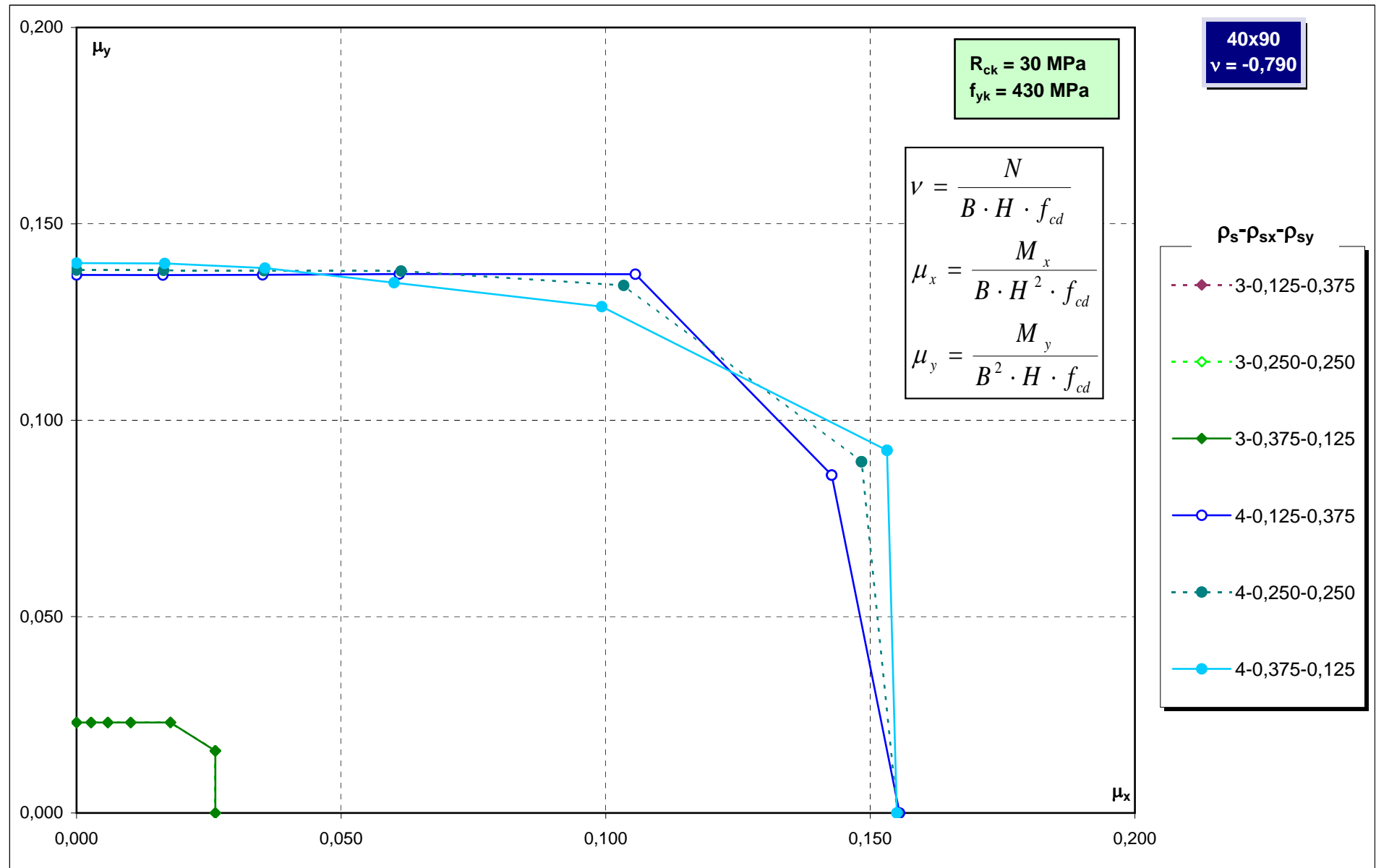
$$\mu_y = \frac{M_y}{B^2 \cdot H \cdot f_{cd}}$$



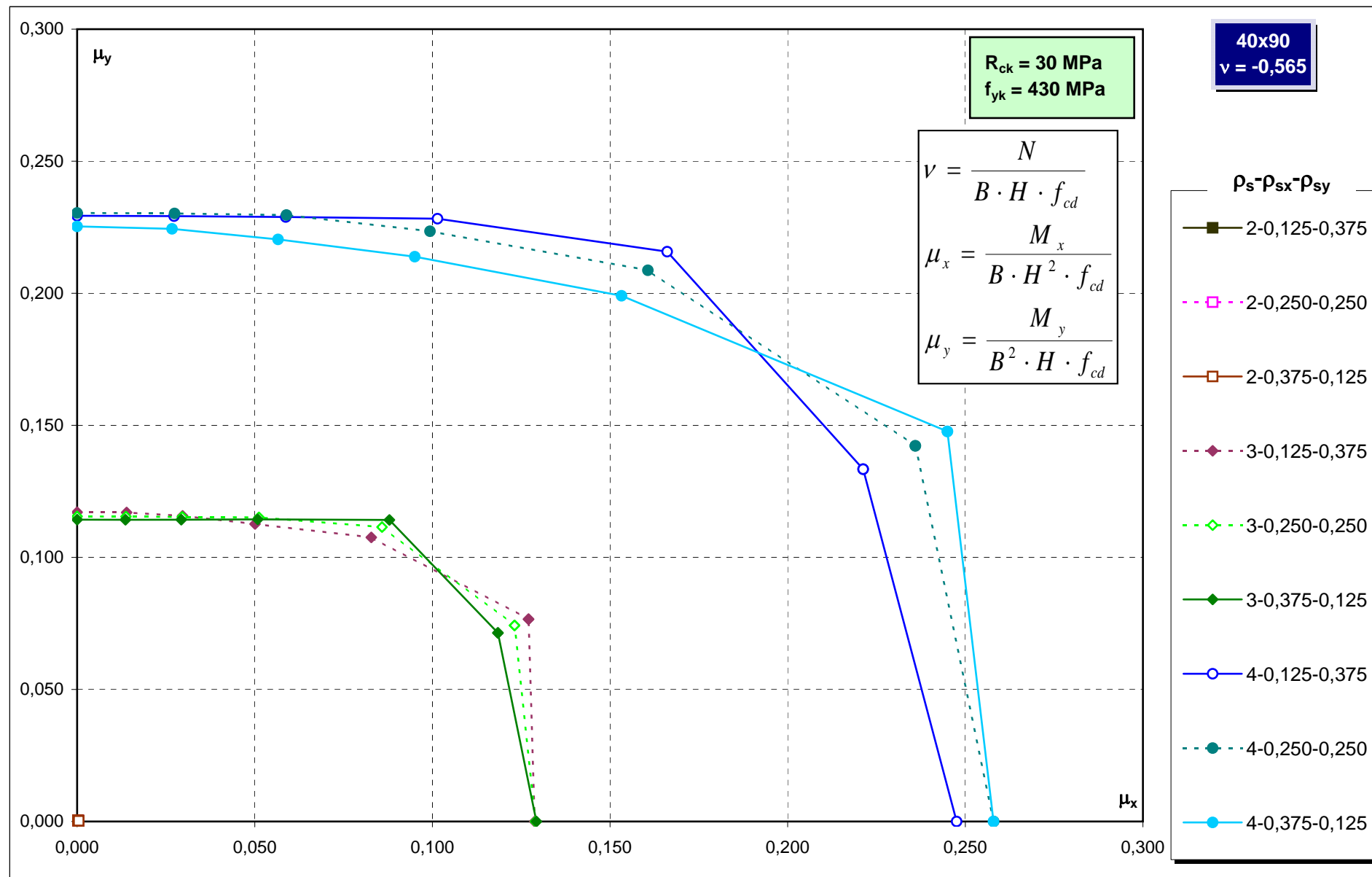
Abachi di progetto



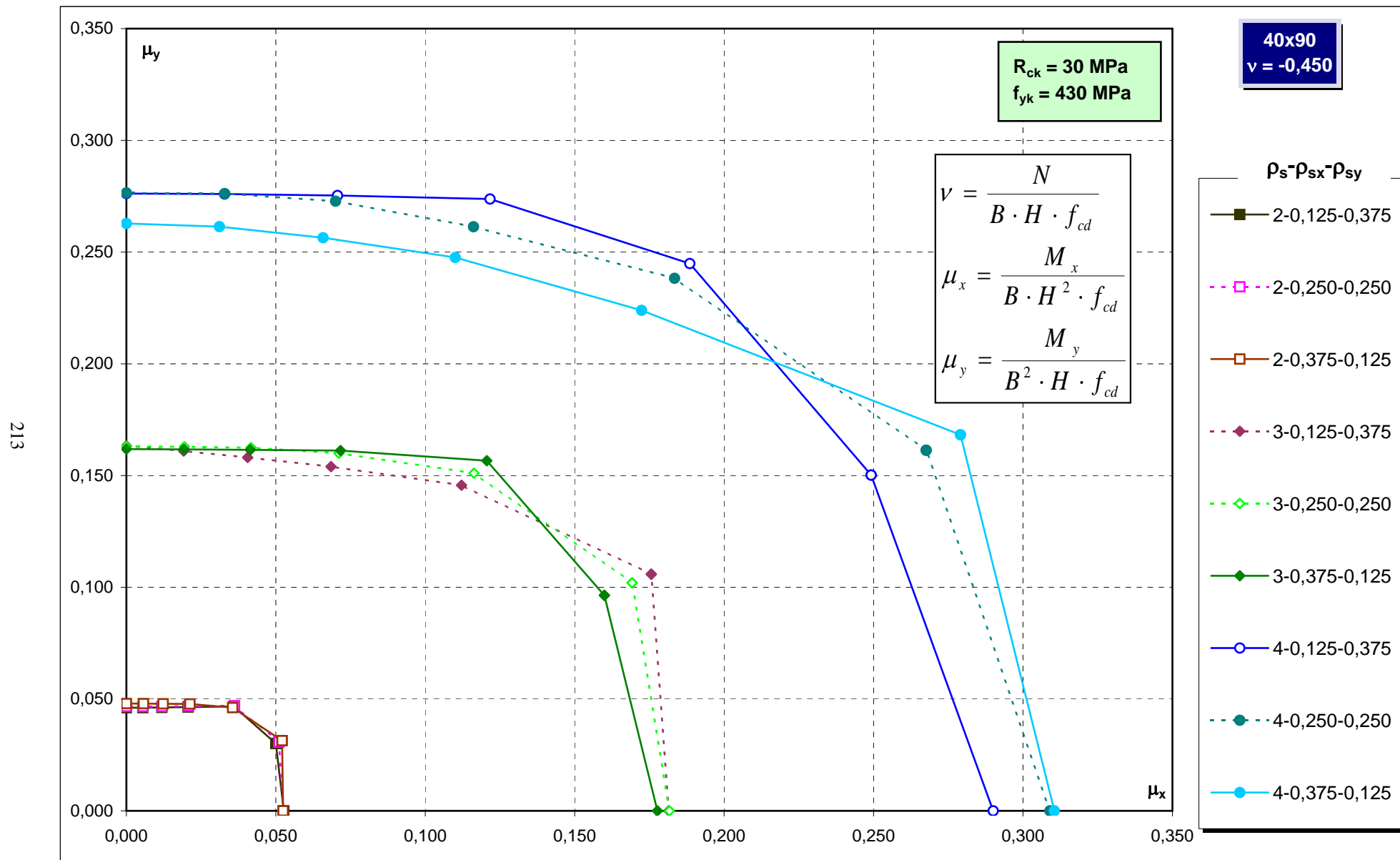
Abachi di progetto



Abachi di progetto

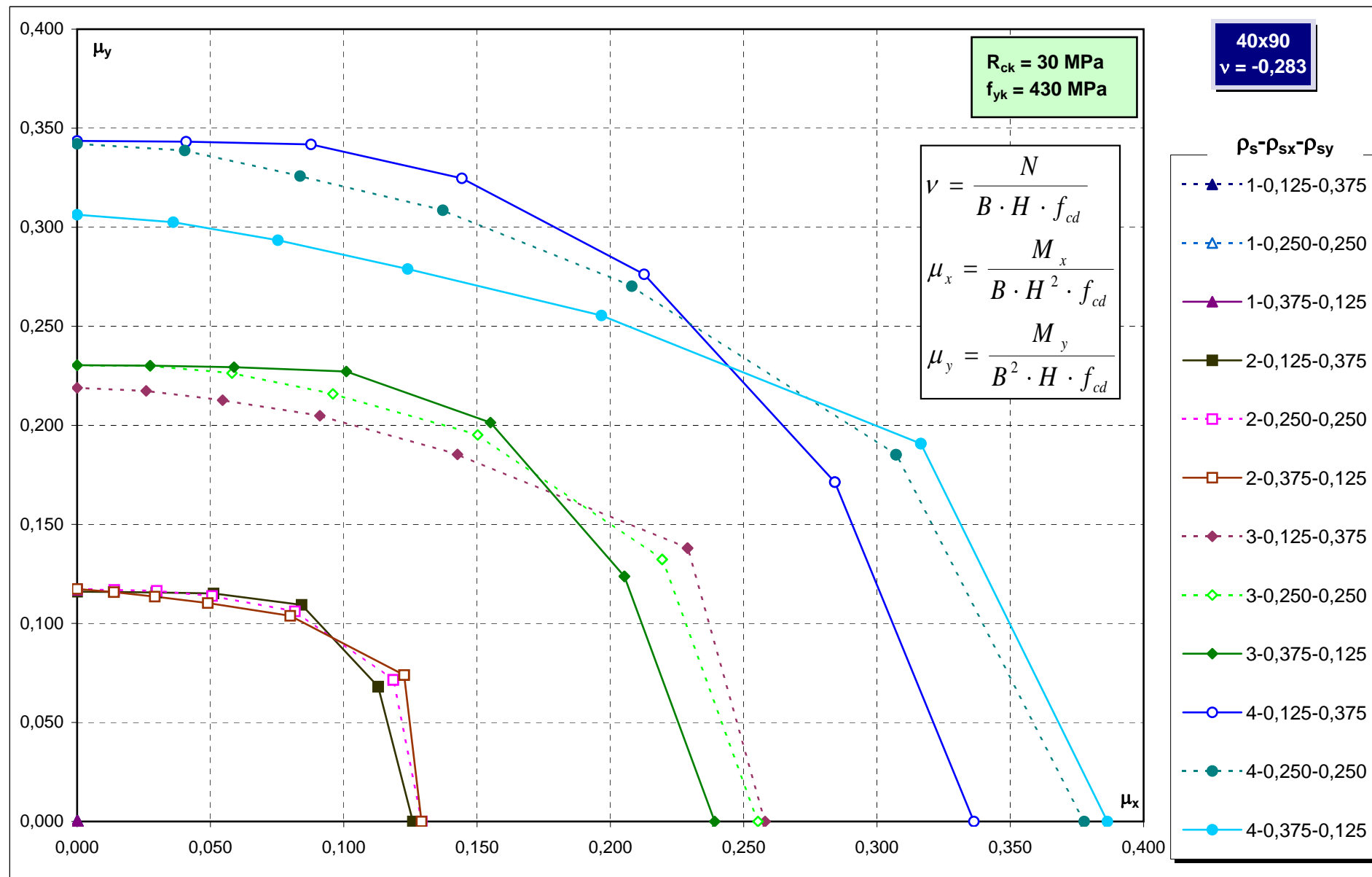


Abachi di progetto

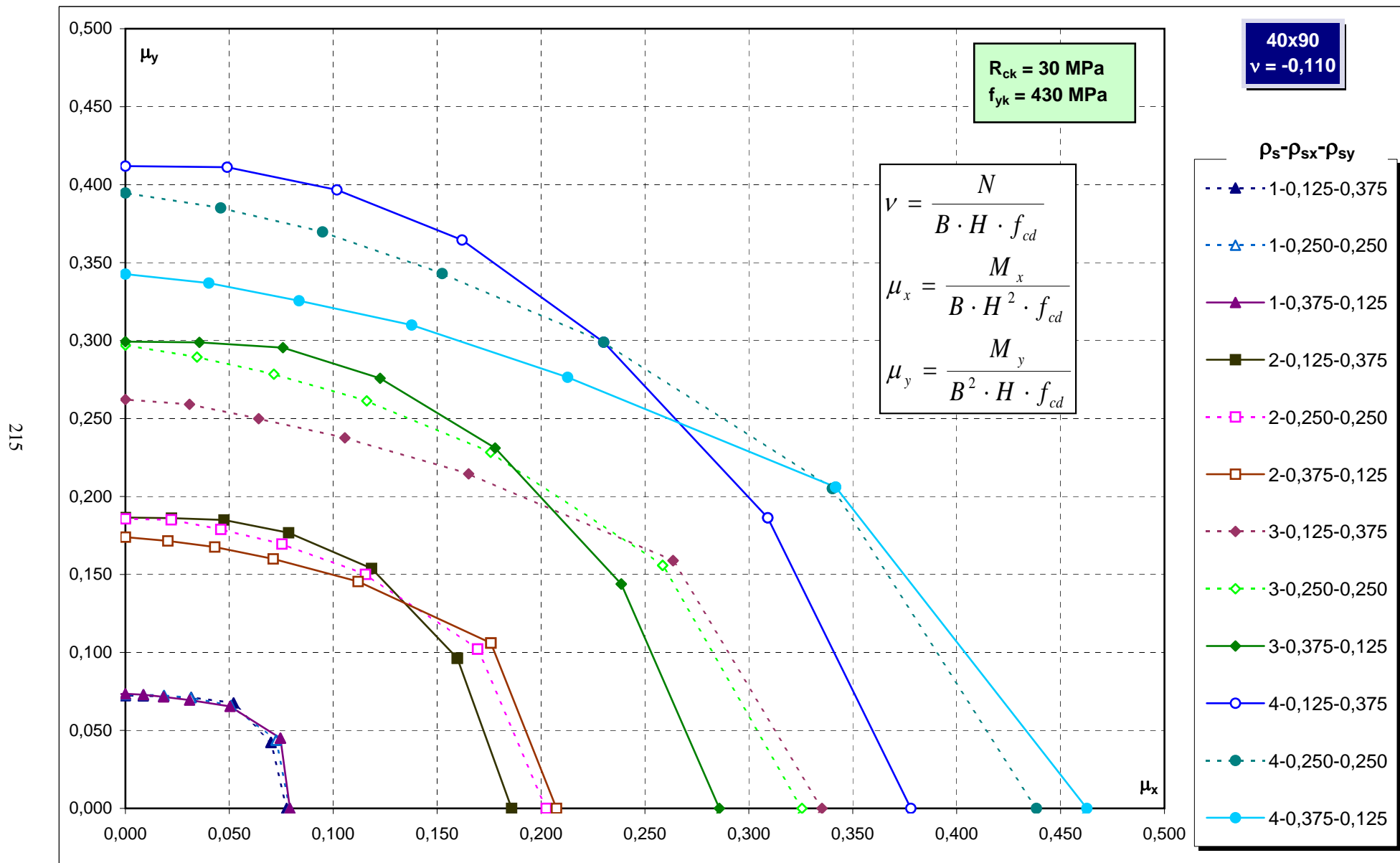


Abachi di progetto

214

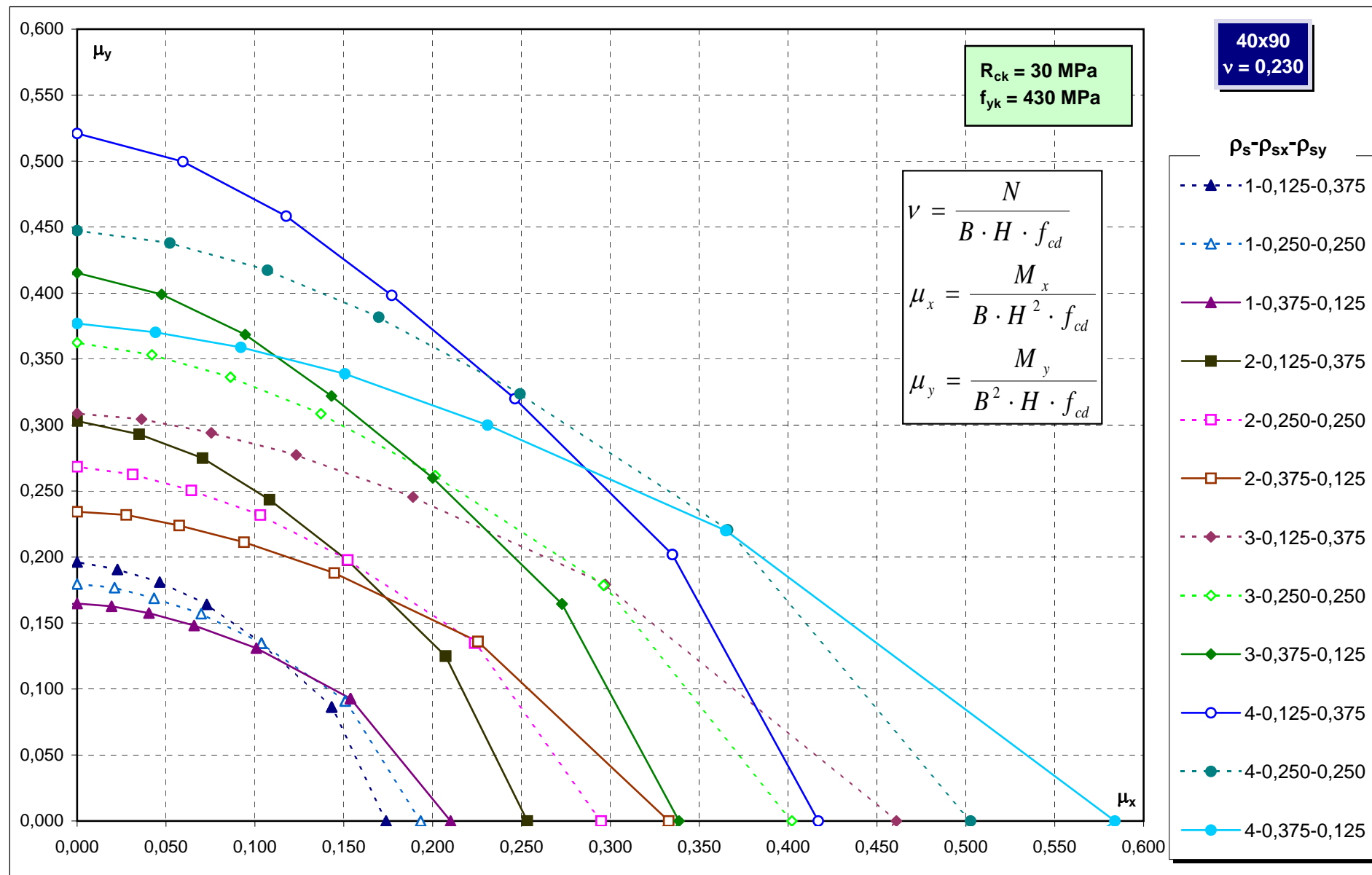


Abachi di progetto



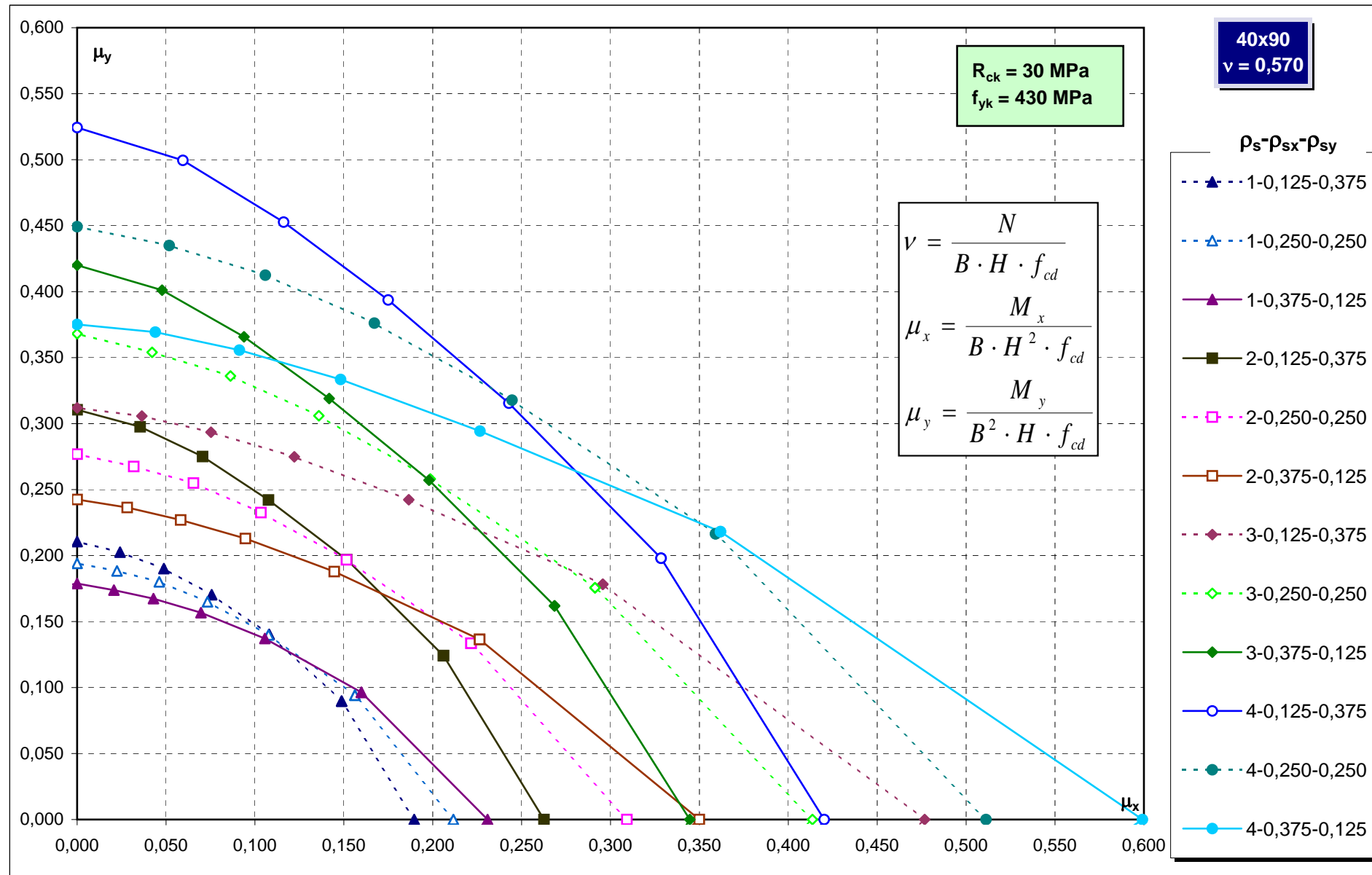
Abachi di progetto

216



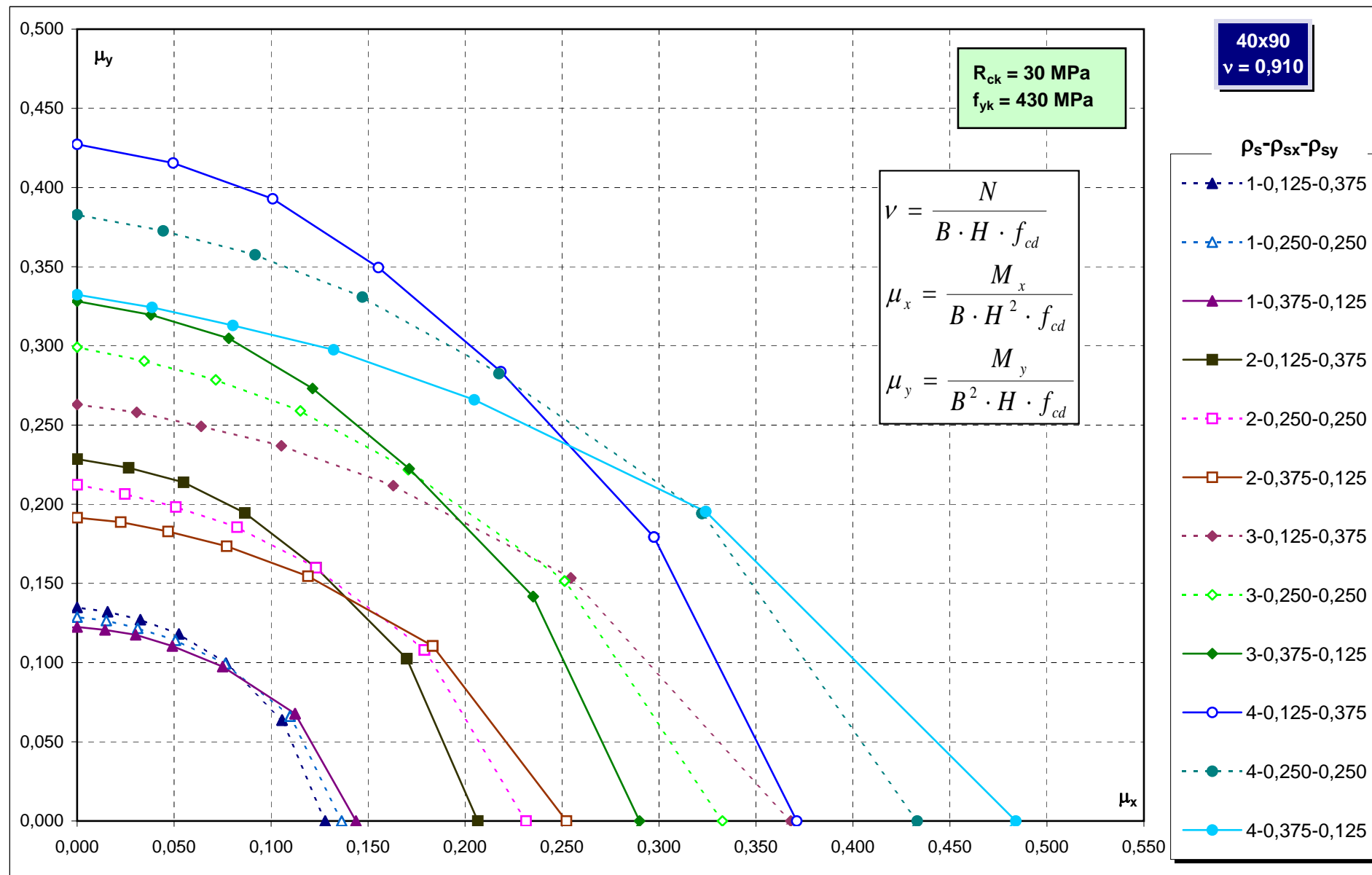
Abachi di progetto

217



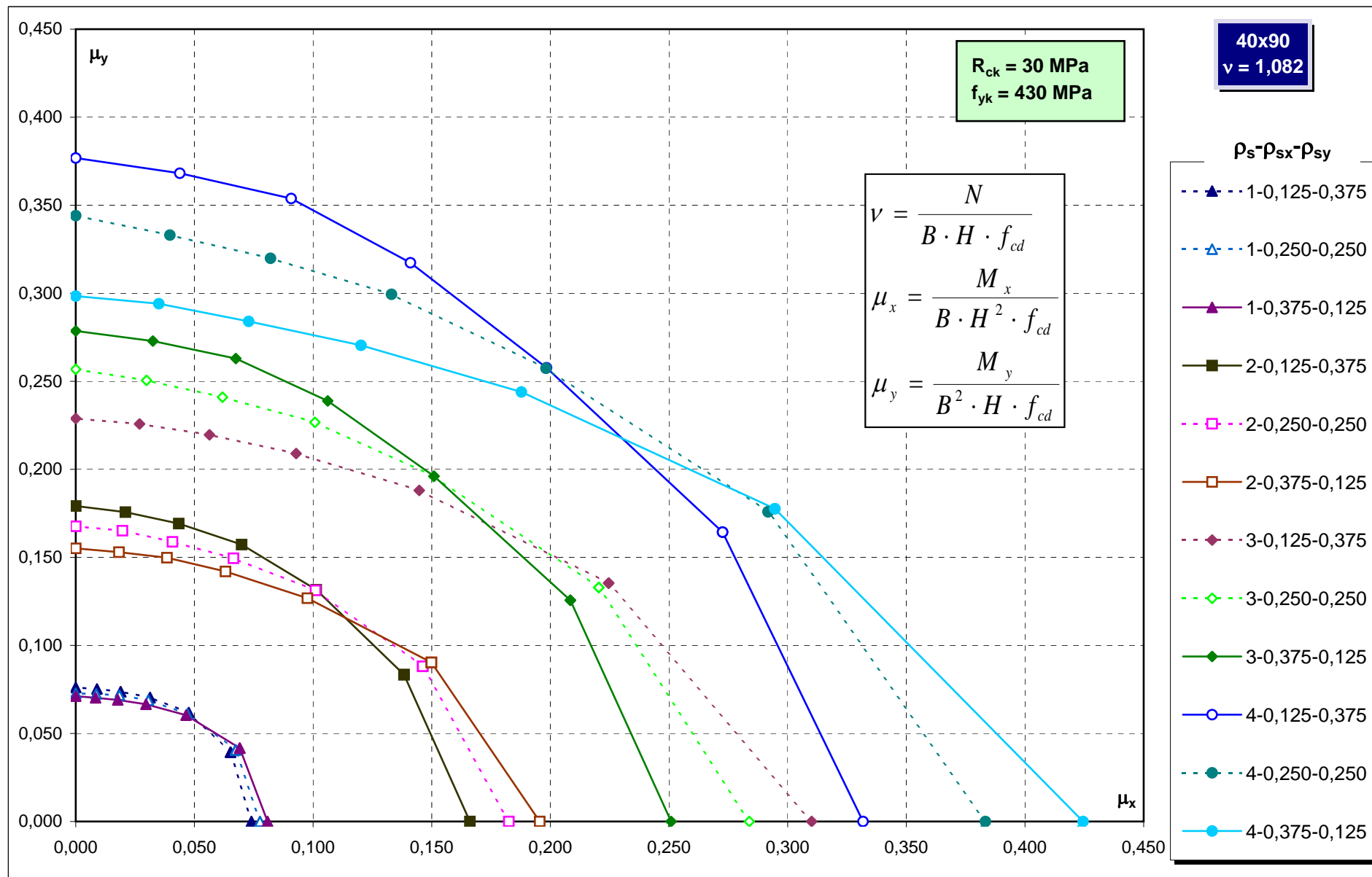
Abachi di progetto

218

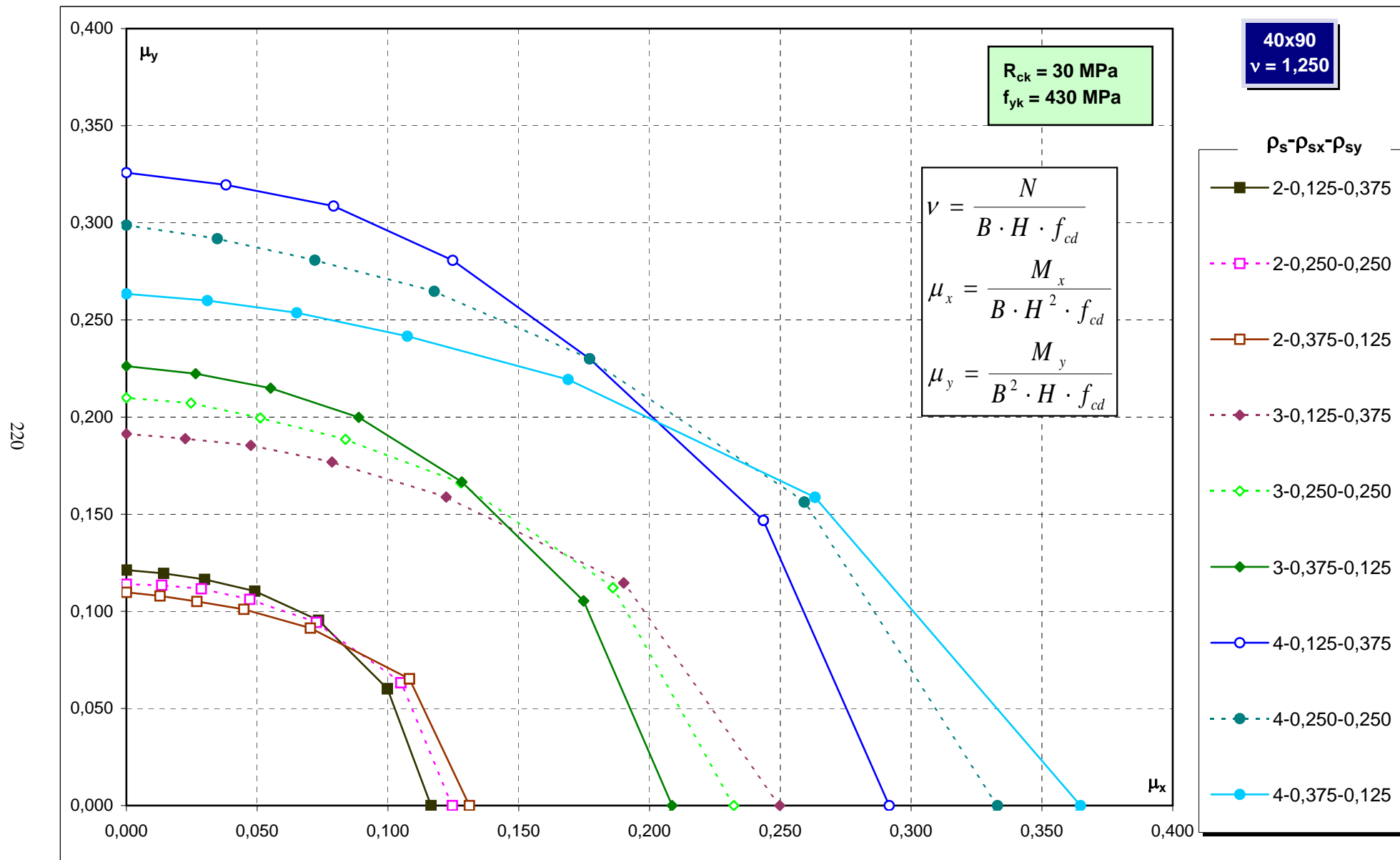


Abachi di progetto

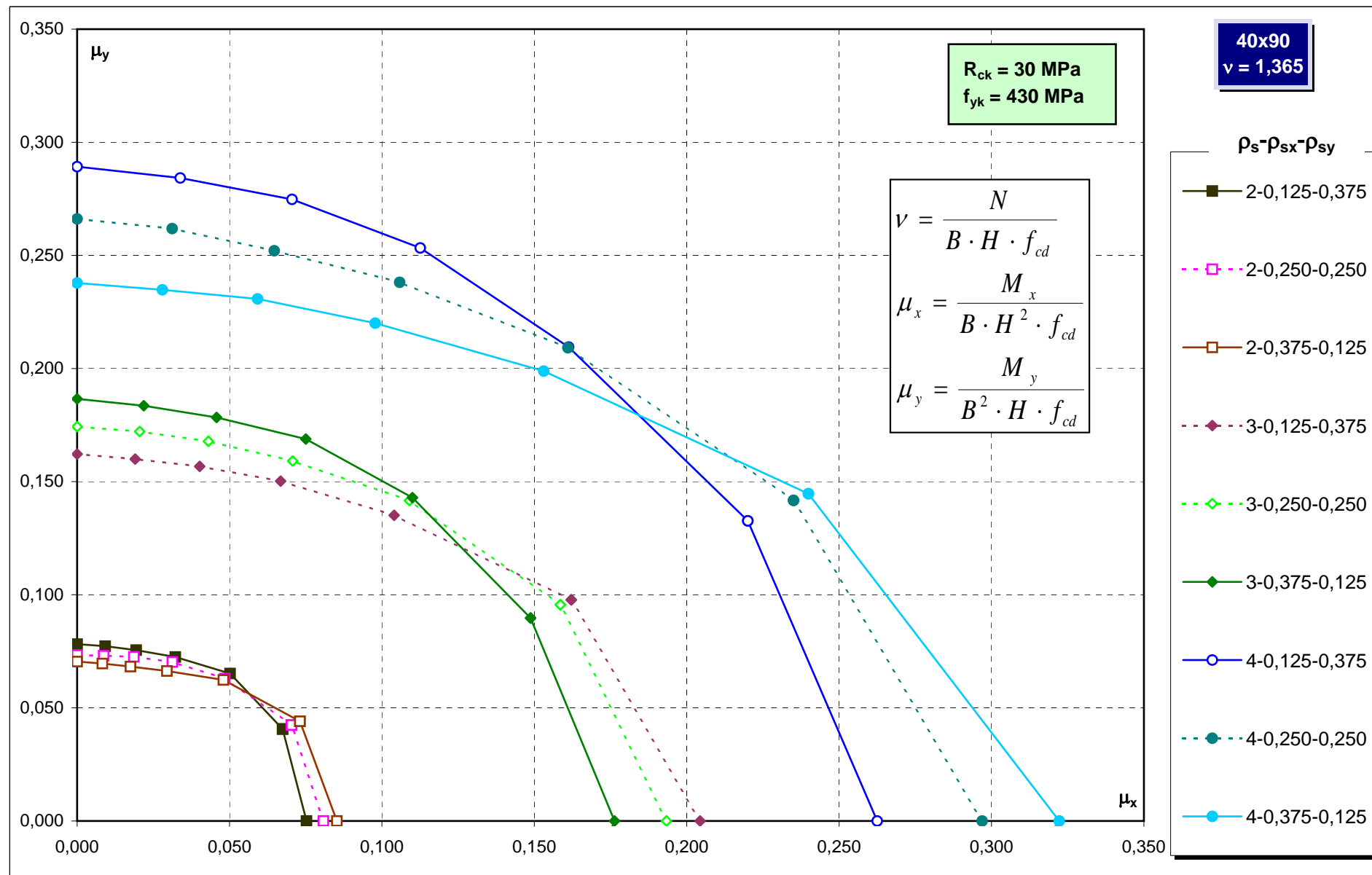
219



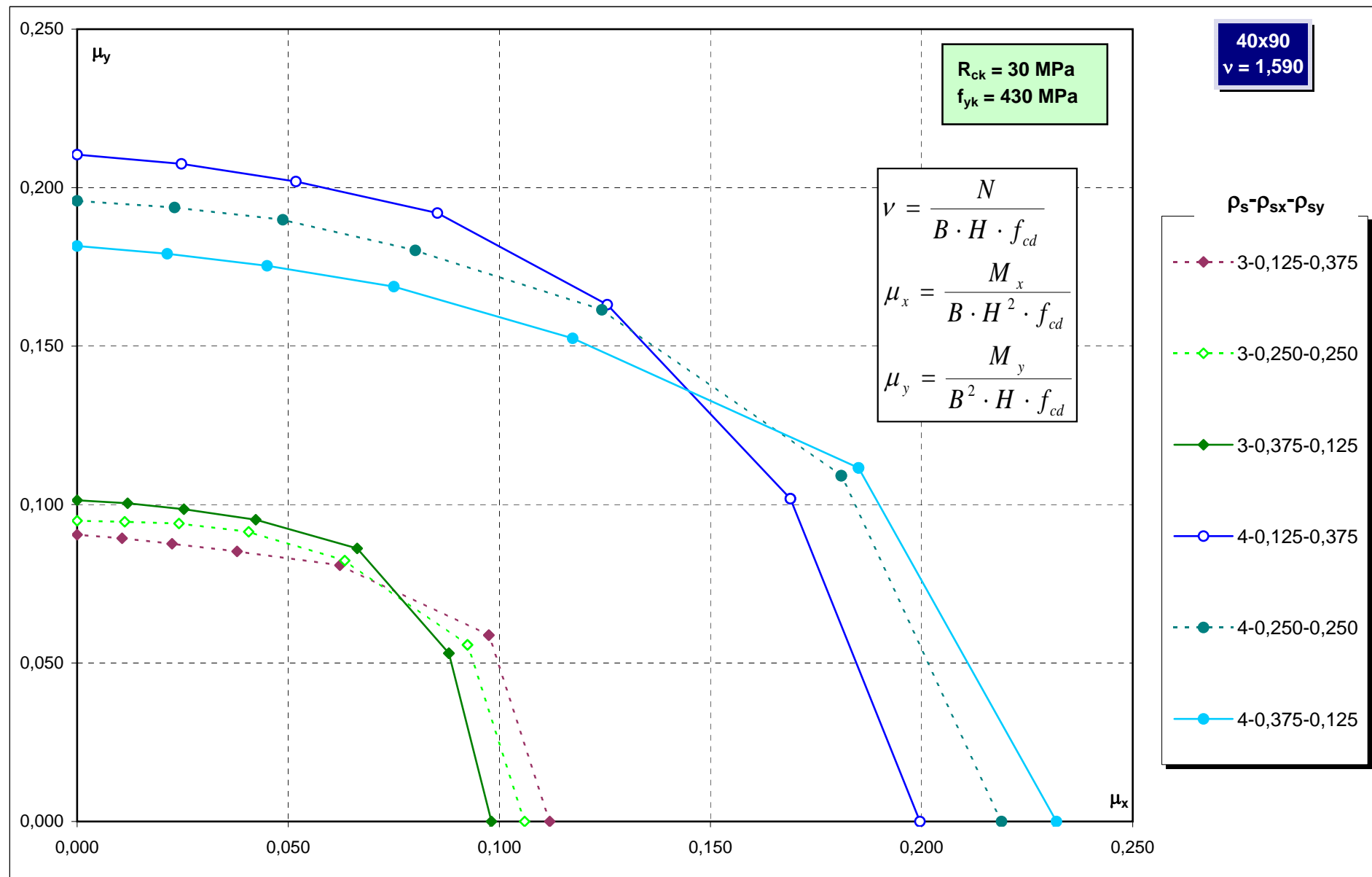
Abachi di progetto



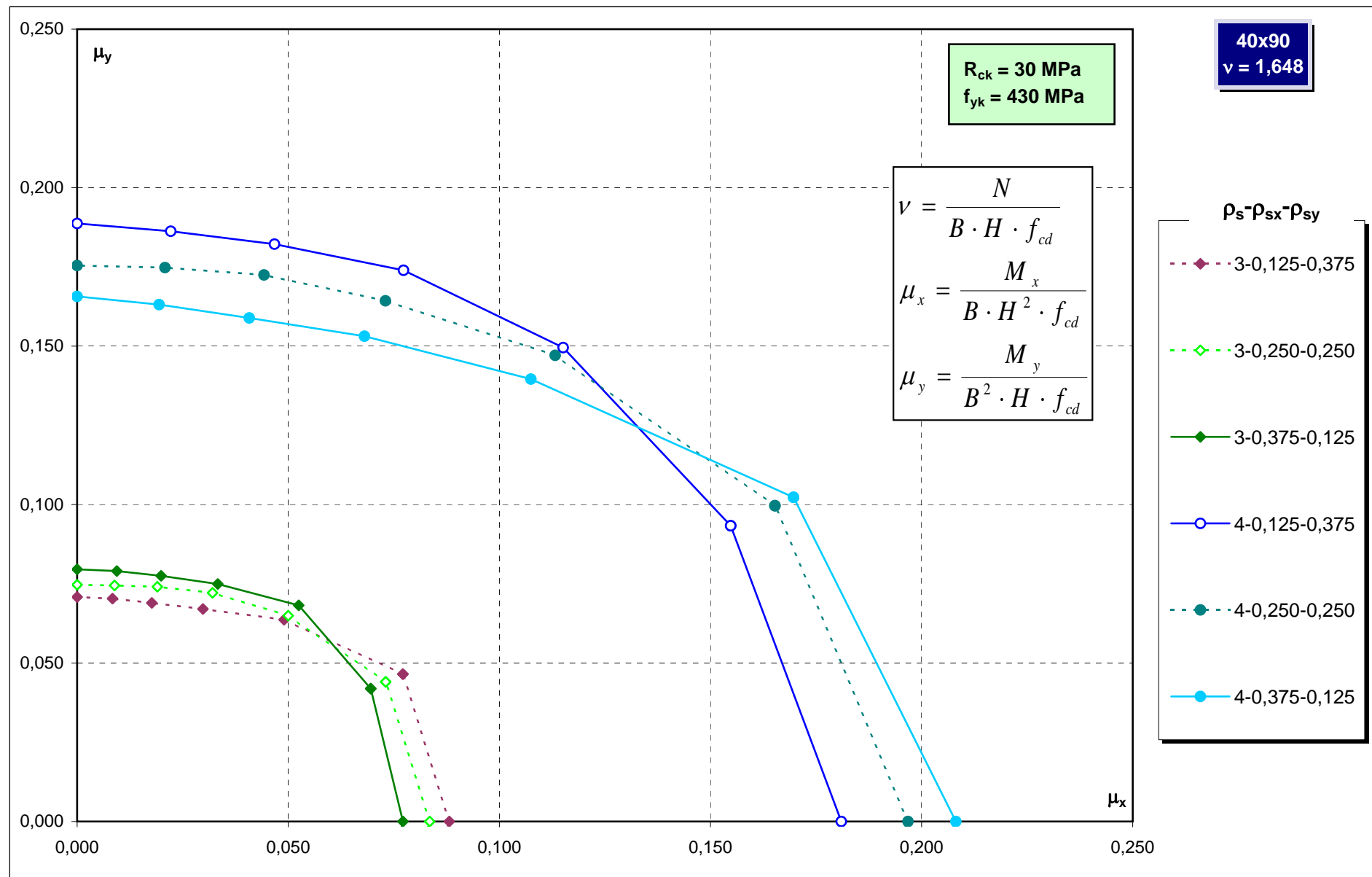
Abachi di progetto



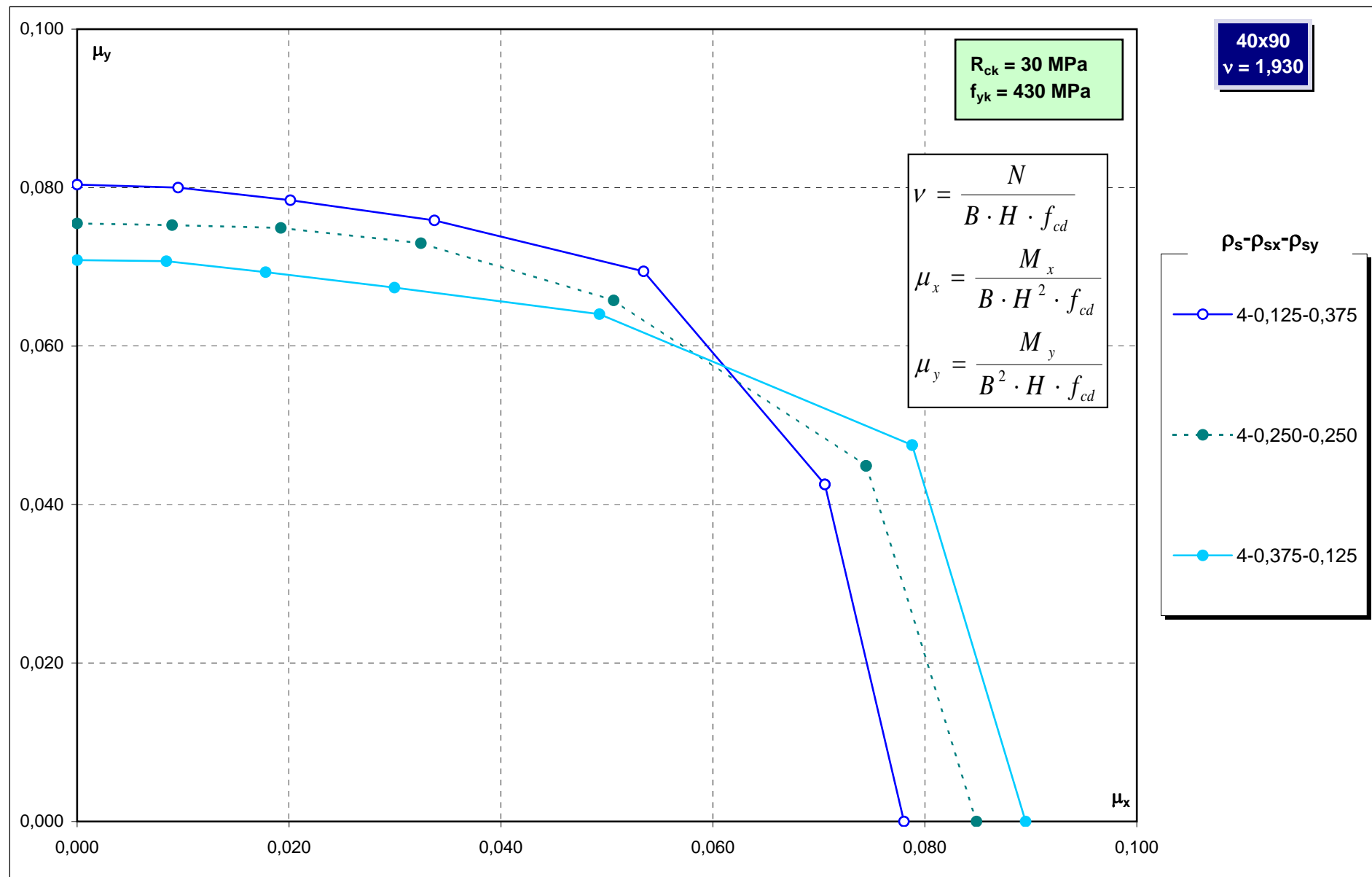
Abachi di progetto



Abachi di progetto

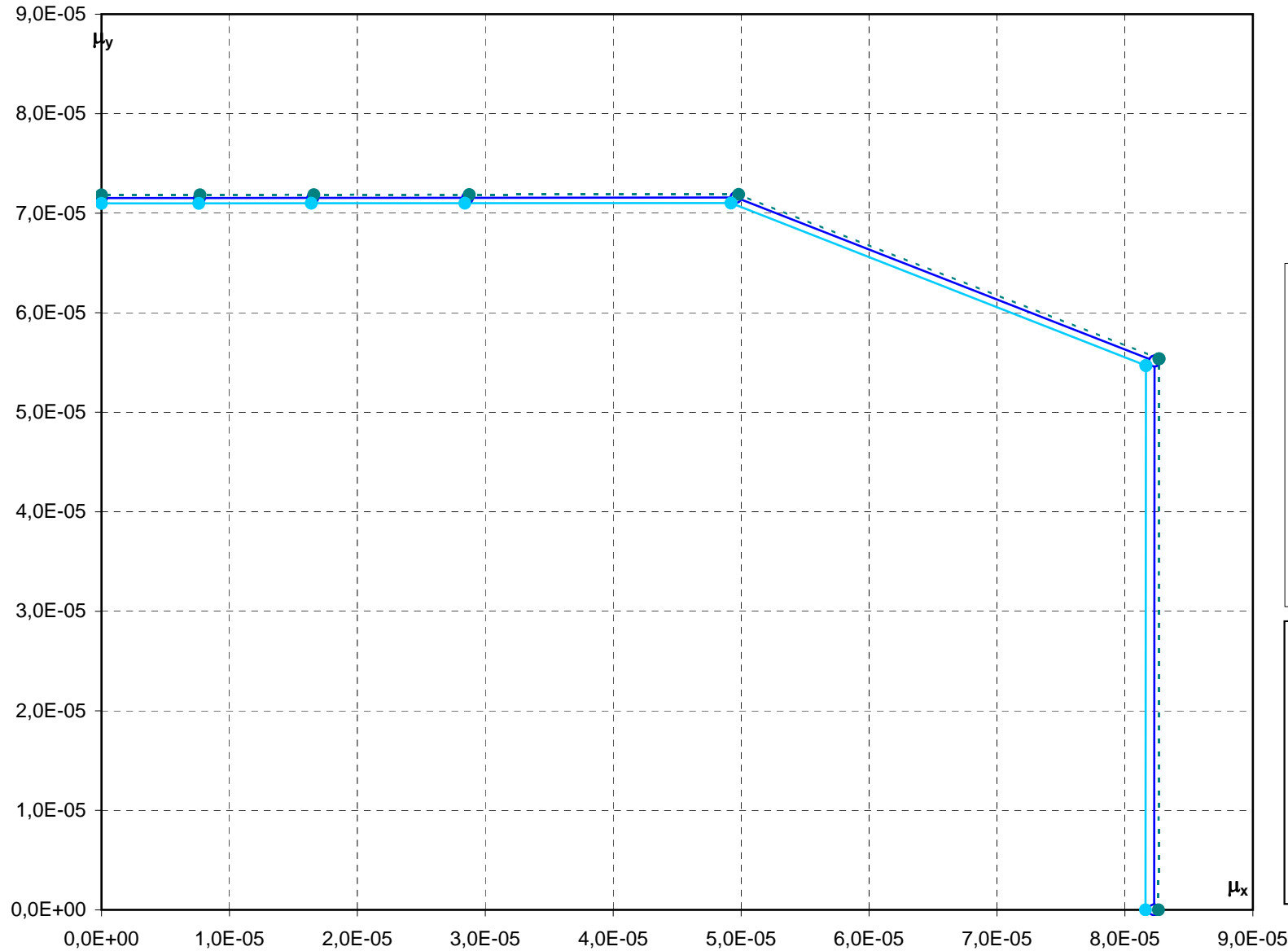


Abachi di progetto



Abachi di progetto

225



40x100
 $\nu = -1,131$

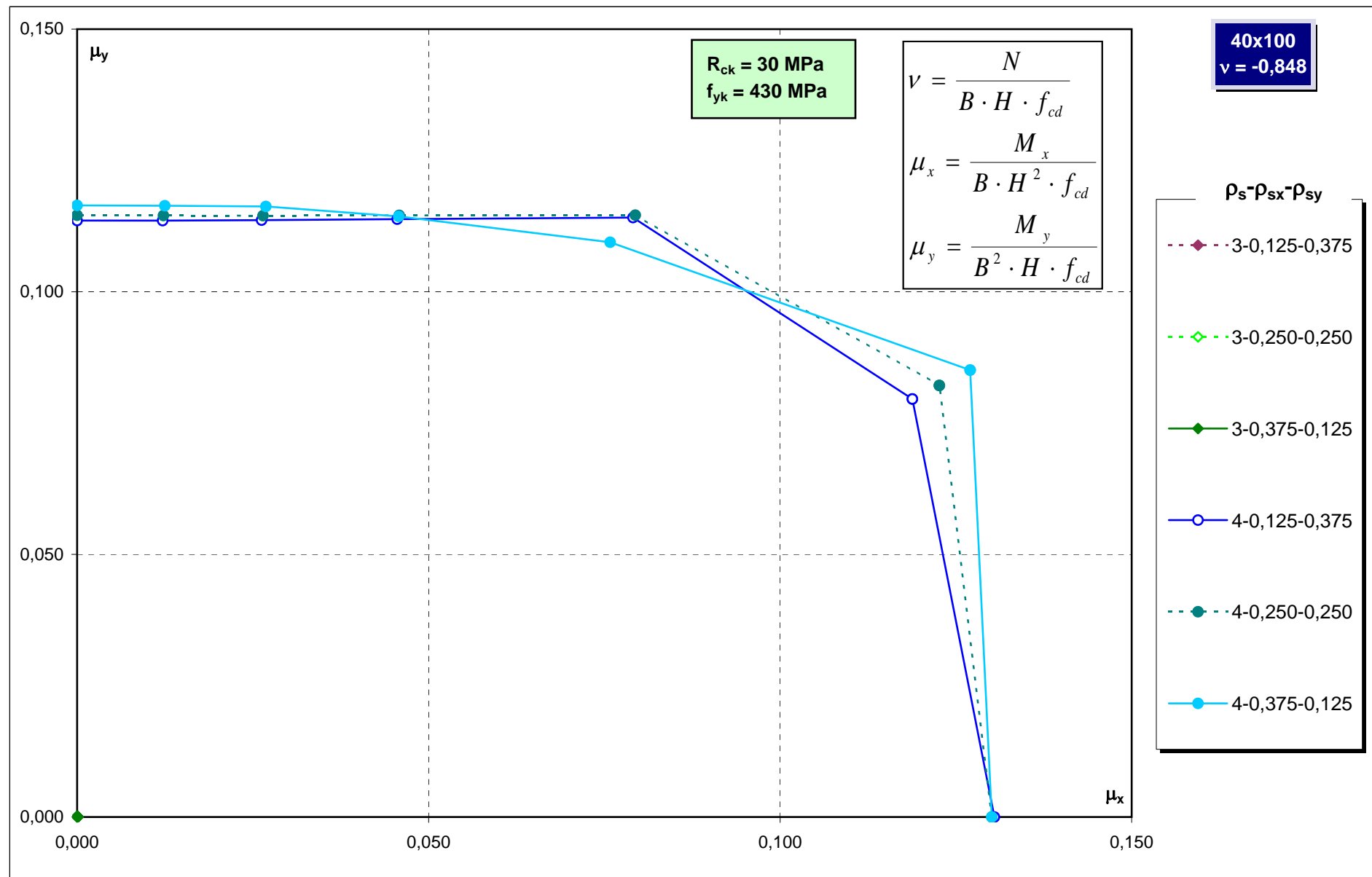
$R_{ck} = 30 \text{ MPa}$
 $f_{yk} = 430 \text{ MPa}$

$\rho_s - \rho_{sx} - \rho_{sy}$

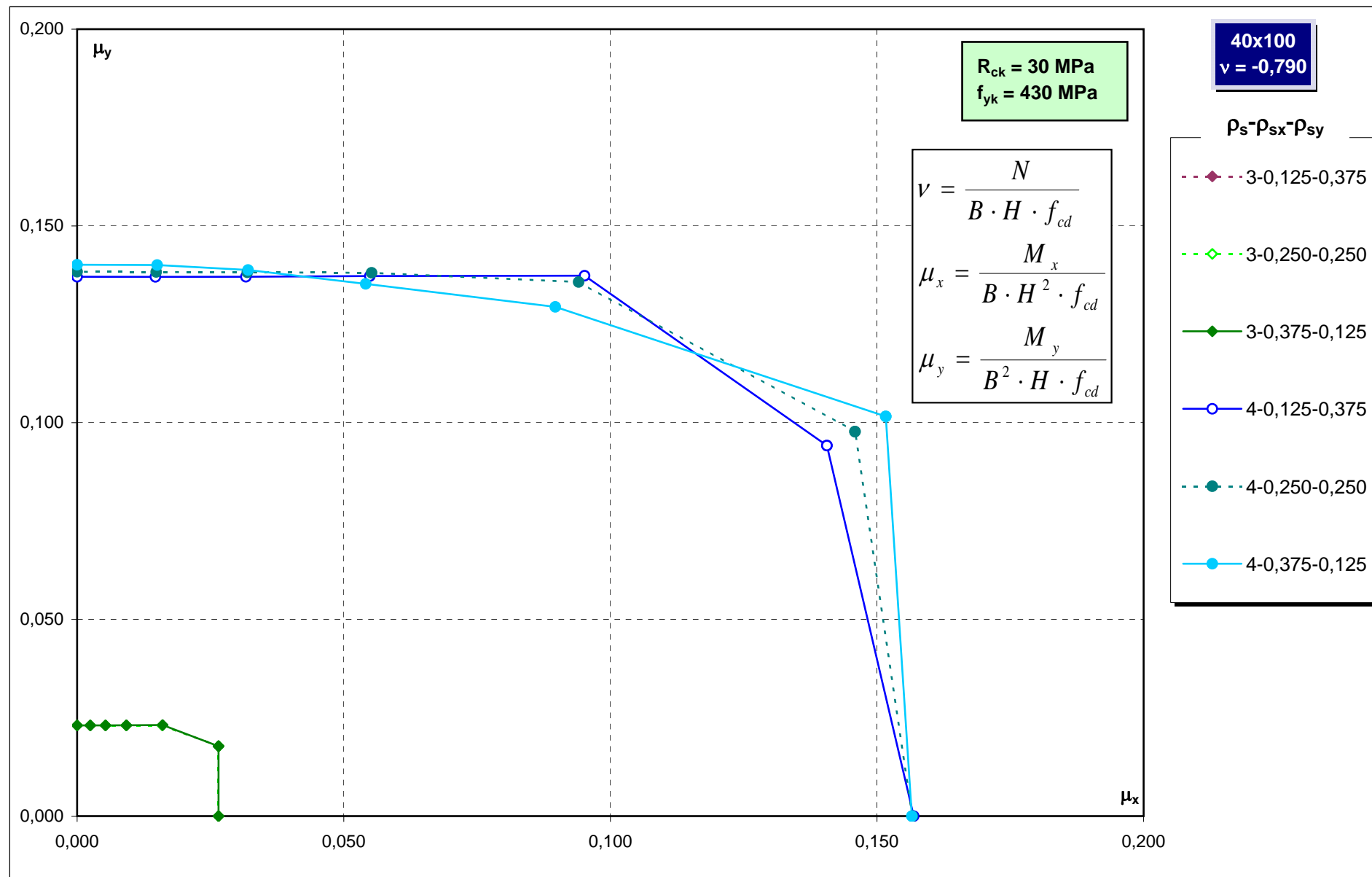
- 4-0,125-0,375
- 4-0,250-0,250
- 4-0,375-0,125

$$\nu = \frac{N}{B \cdot H \cdot f_{cd}}$$
$$\mu_x = \frac{M_x}{B \cdot H^2 \cdot f_{cd}}$$
$$\mu_y = \frac{M_y}{B^2 \cdot H \cdot f_{cd}}$$

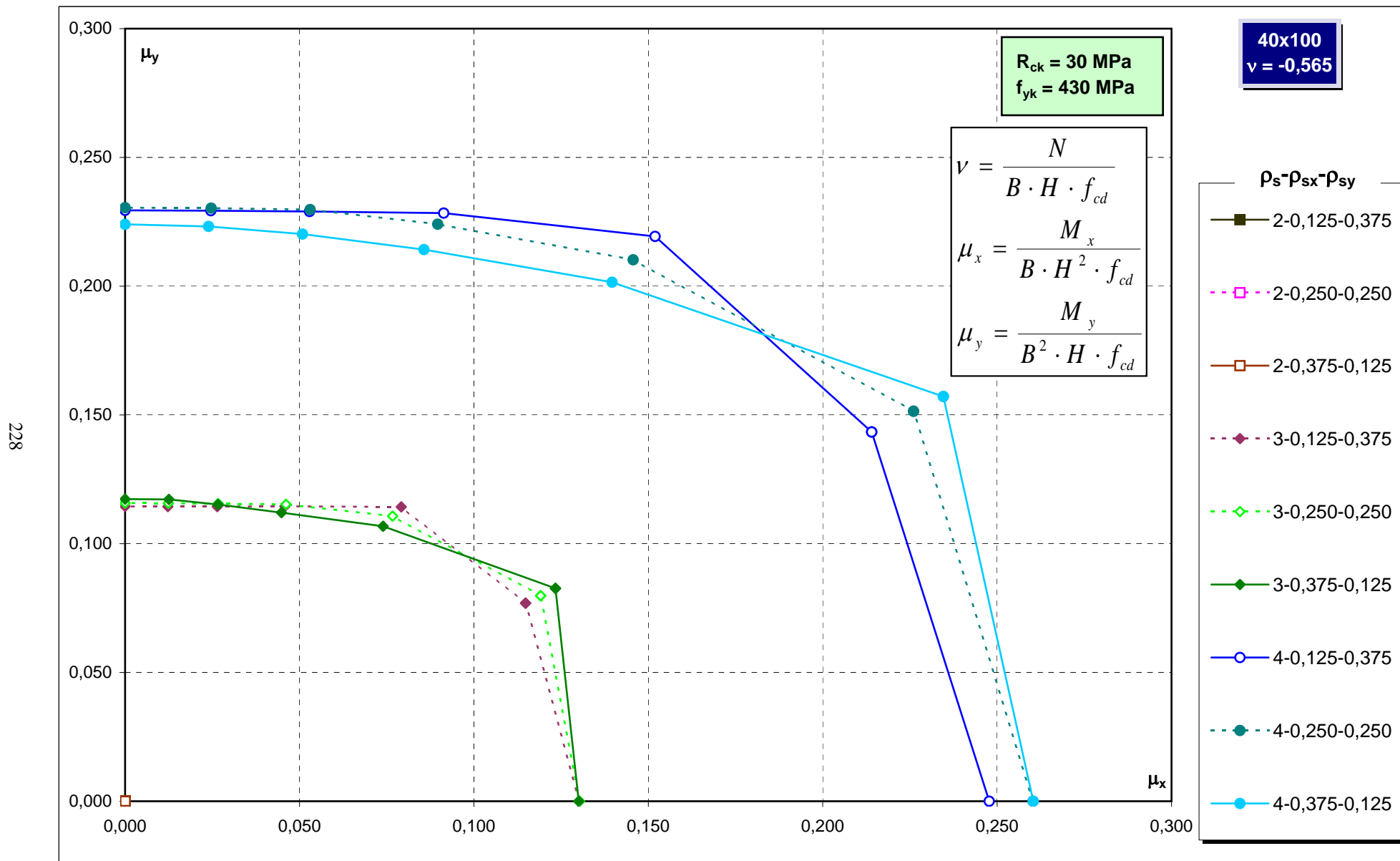
Abachi di progetto



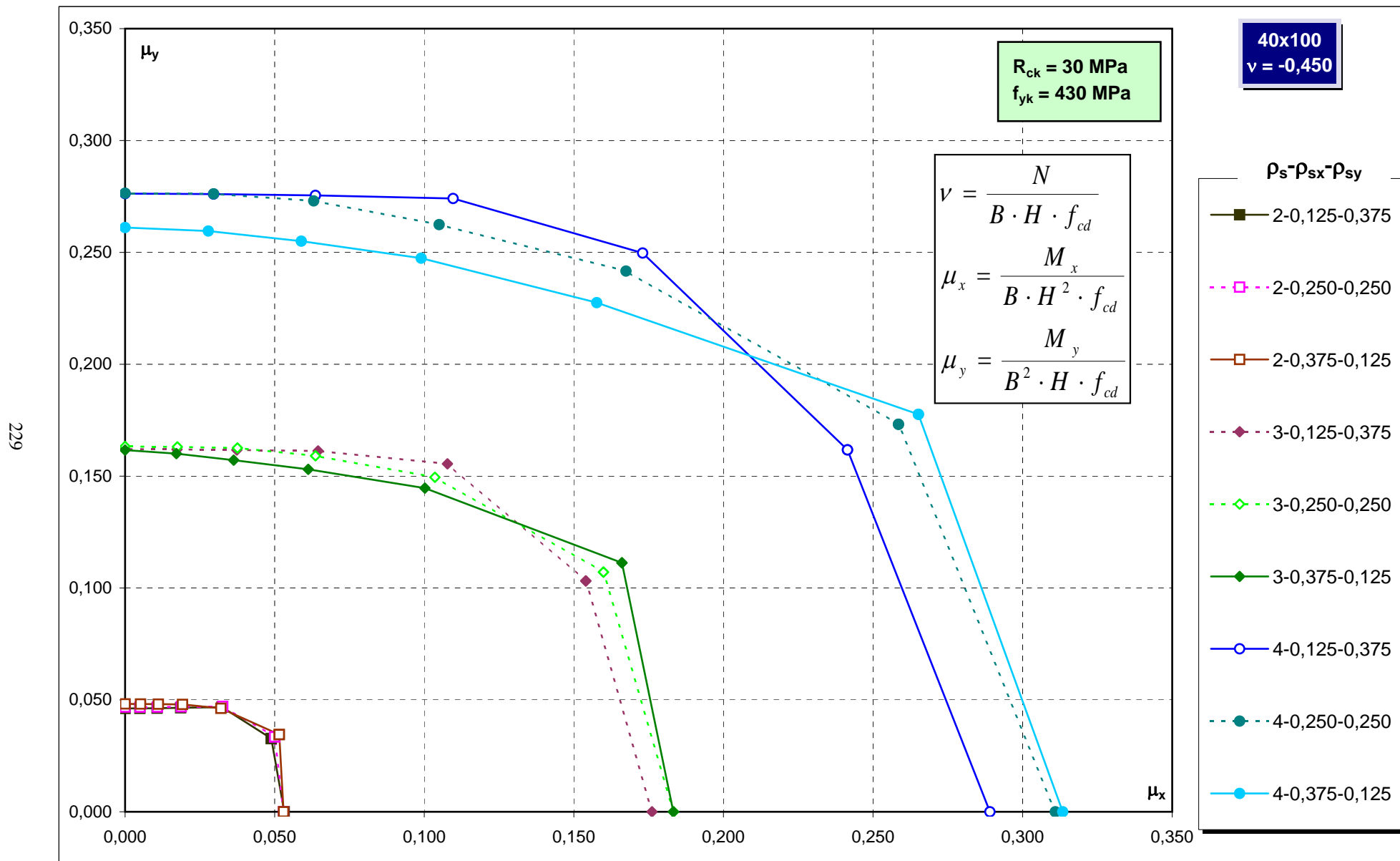
Abachi di progetto



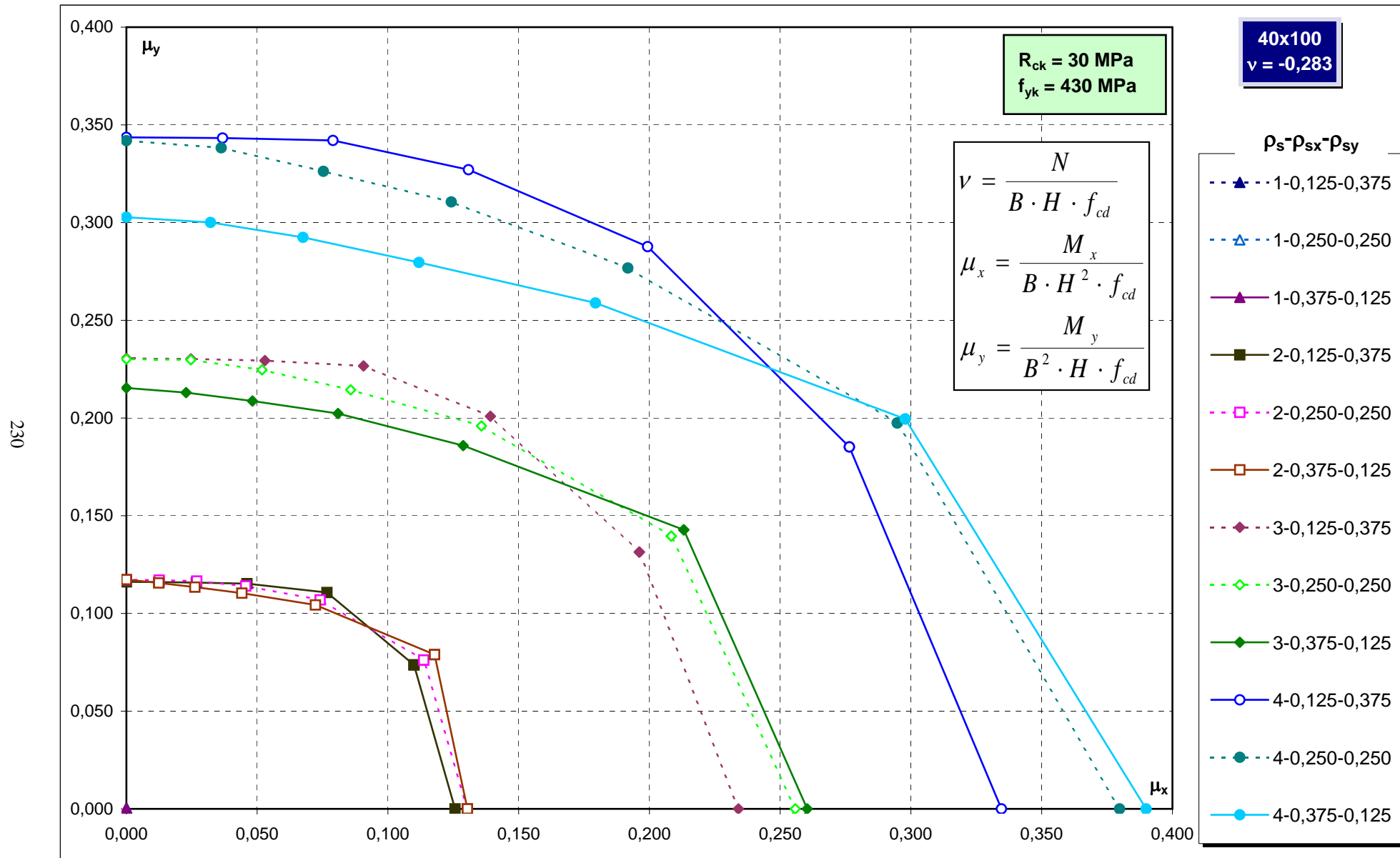
Abachi di progetto



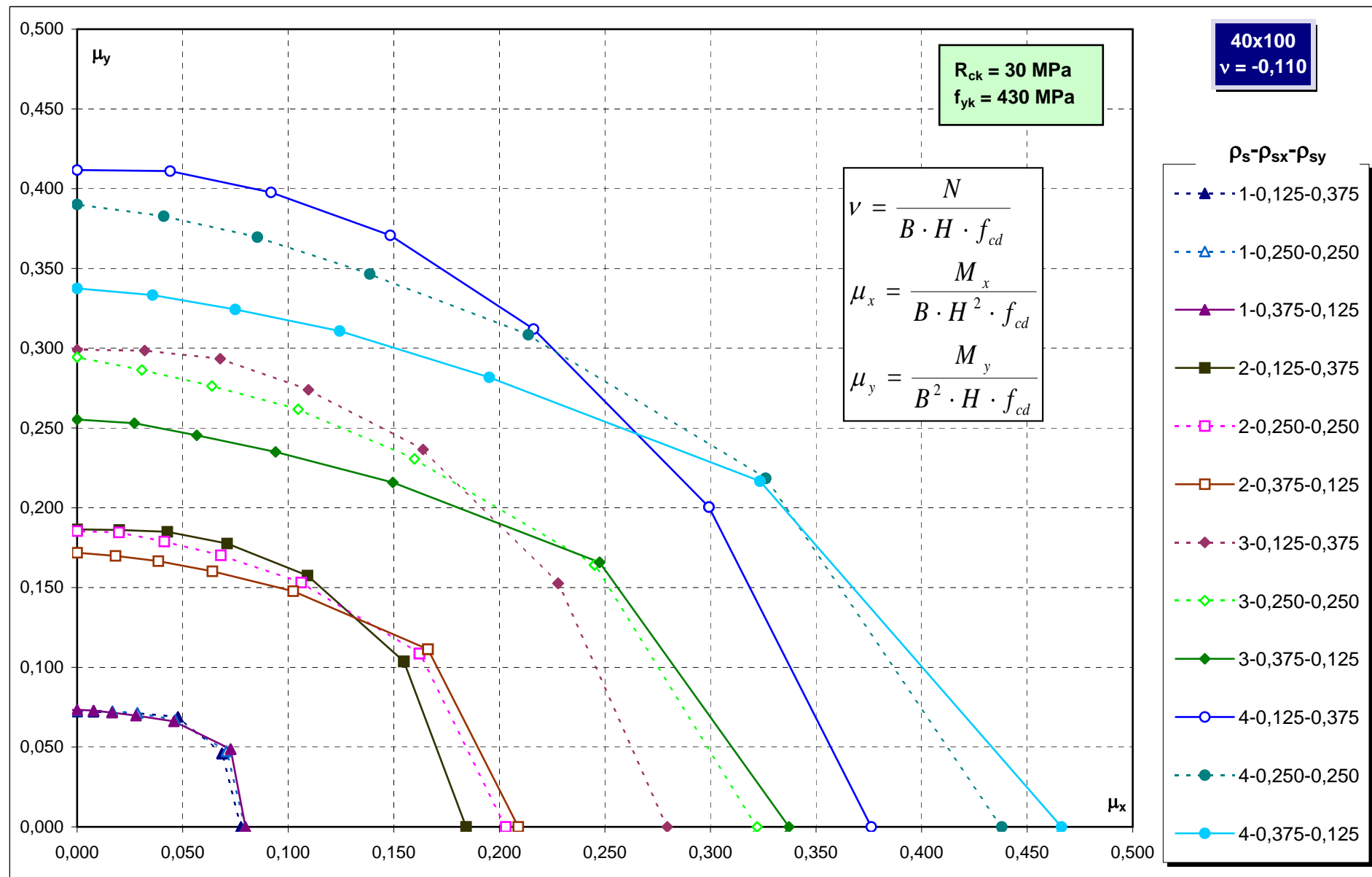
Abachi di progetto



Abachi di progetto

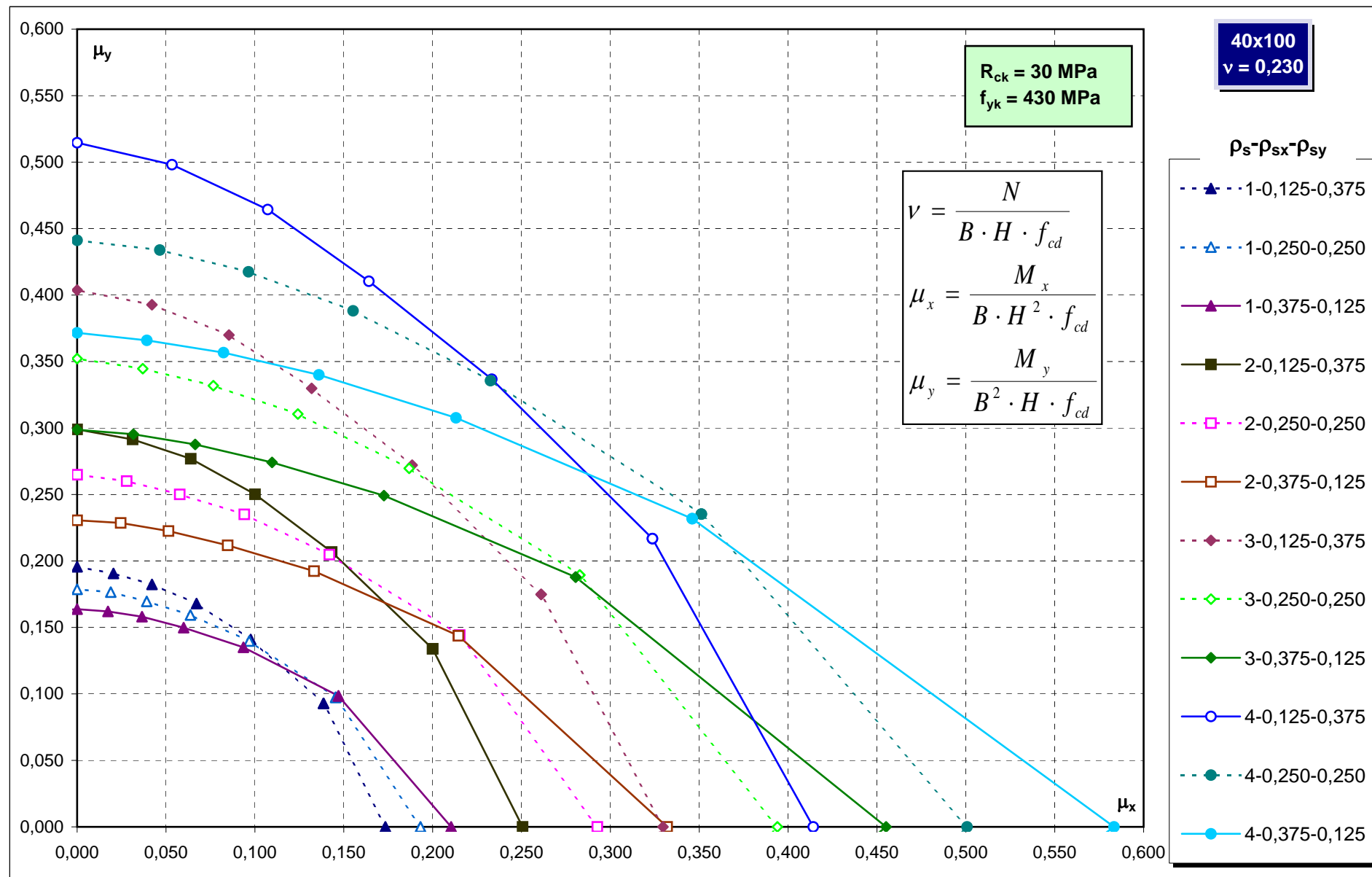


Abachi di progetto



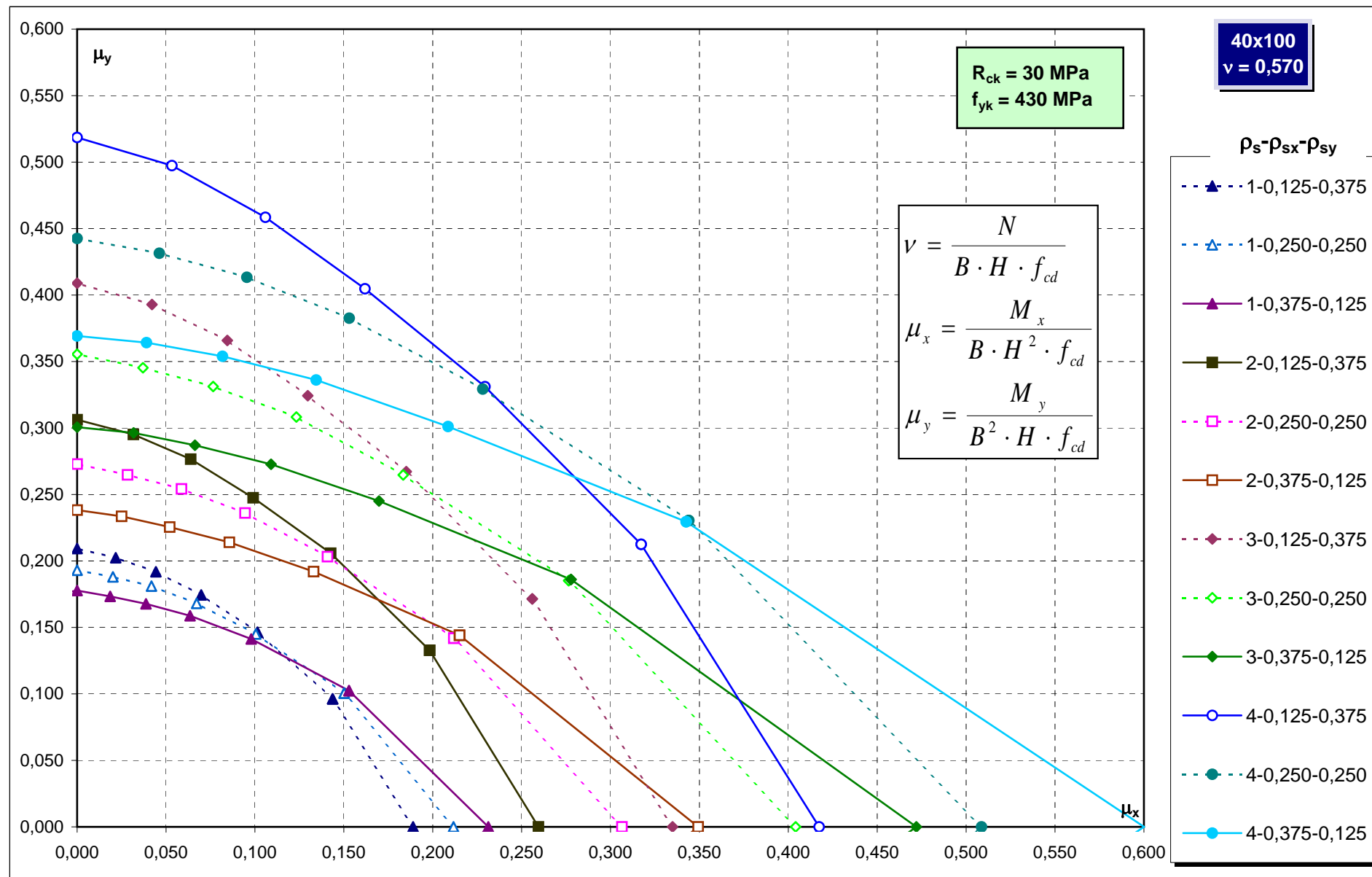
Abachi di progetto

232



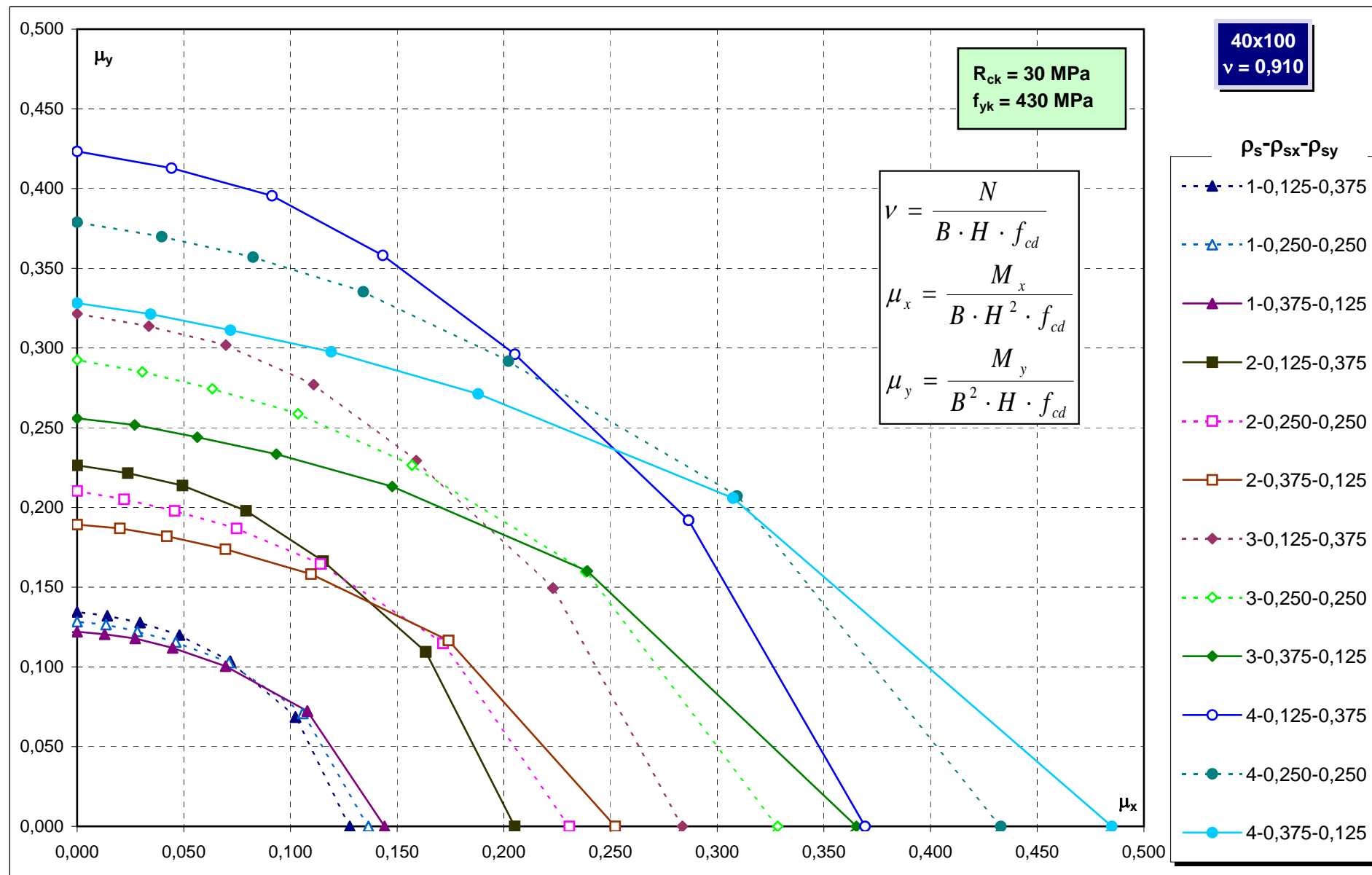
Abachi di progetto

233

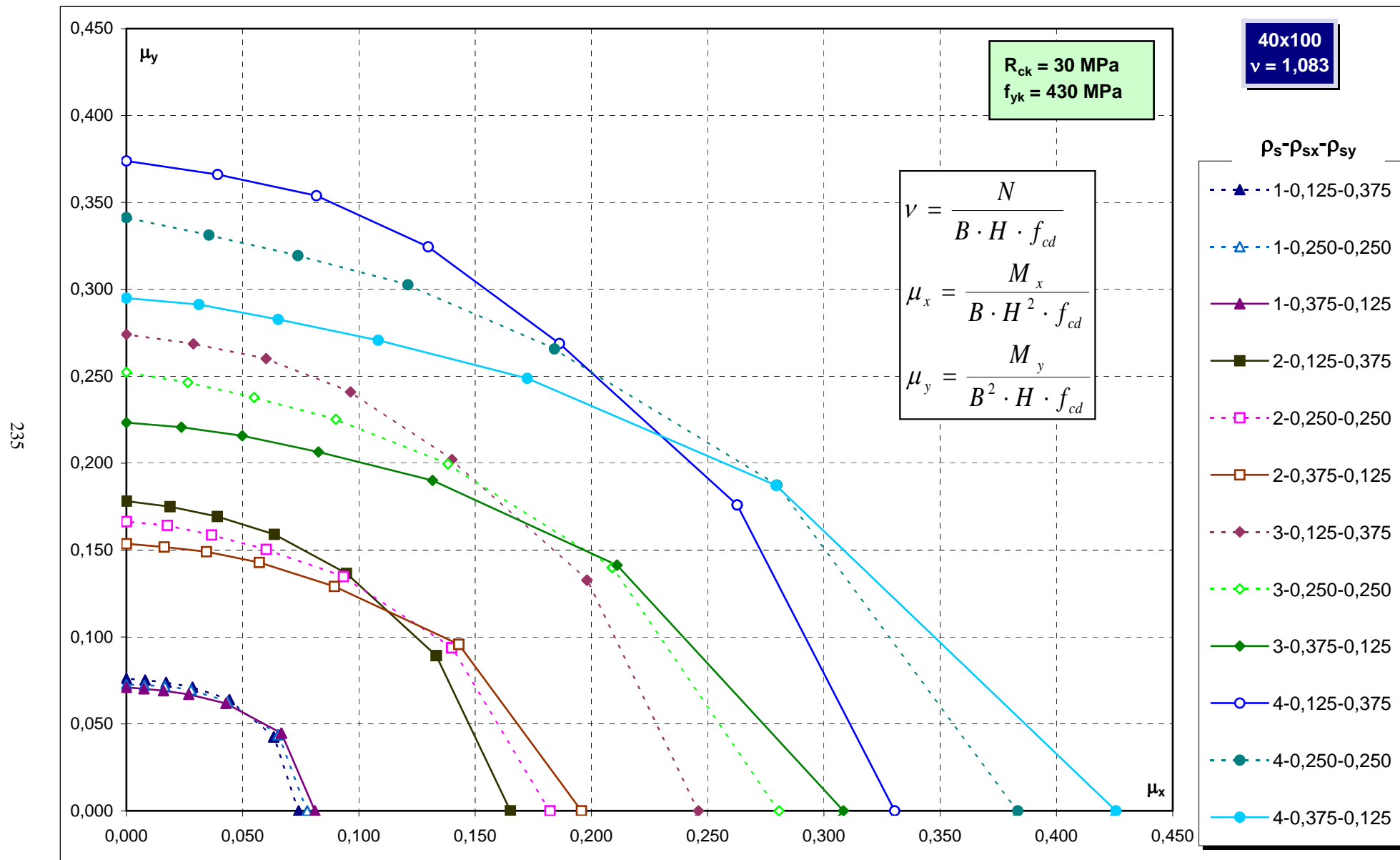


Abachi di progetto

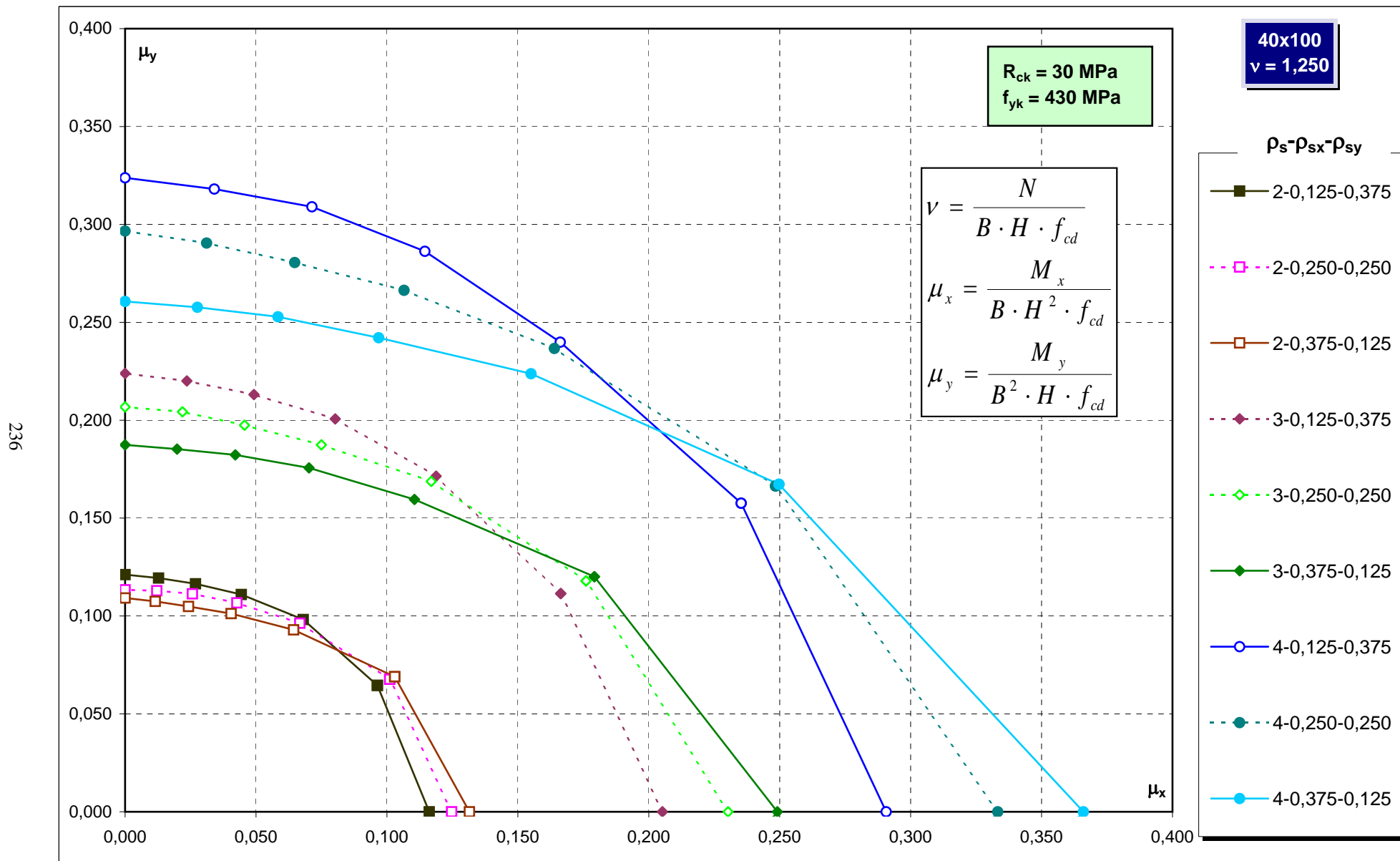
234



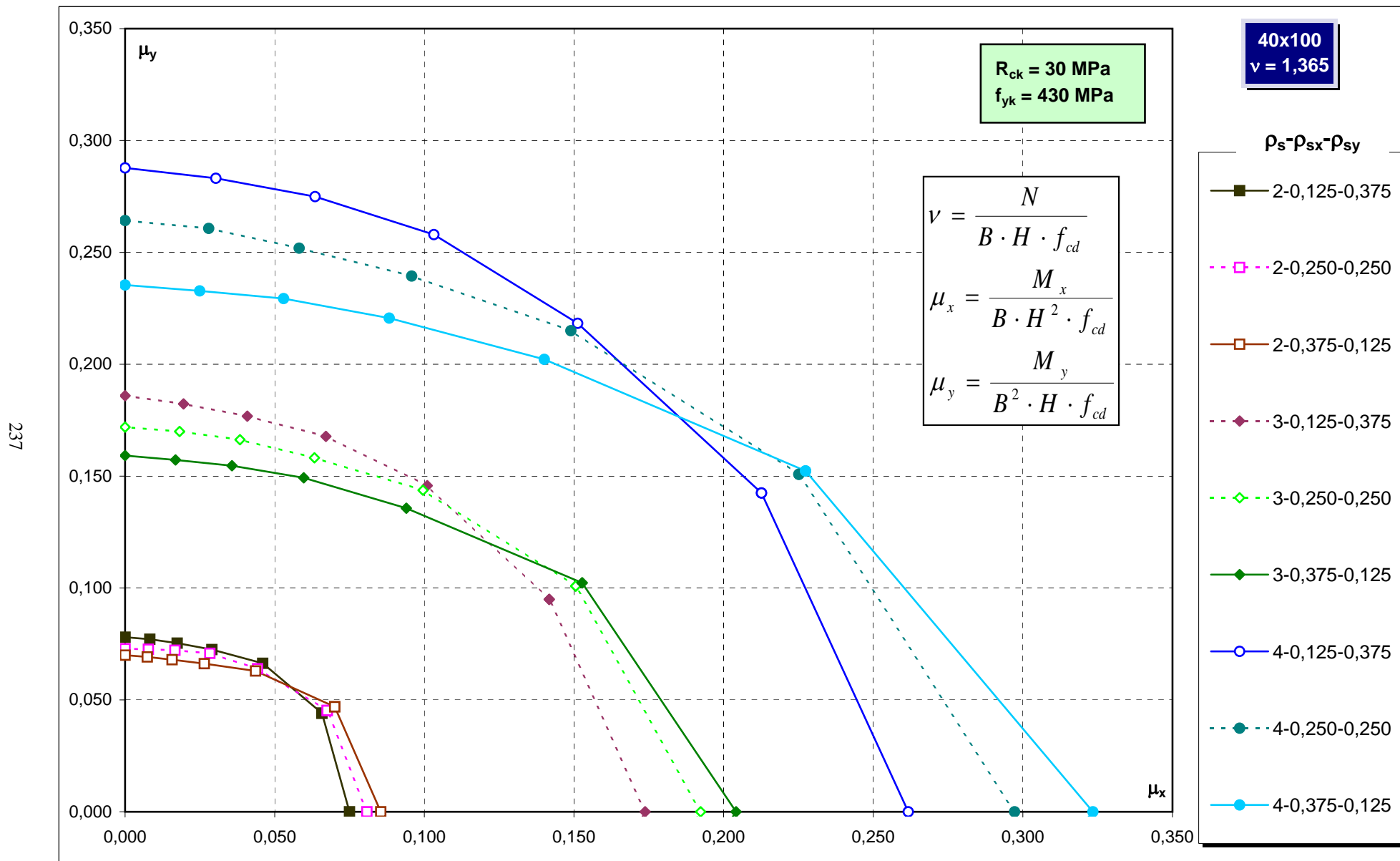
Abachi di progetto



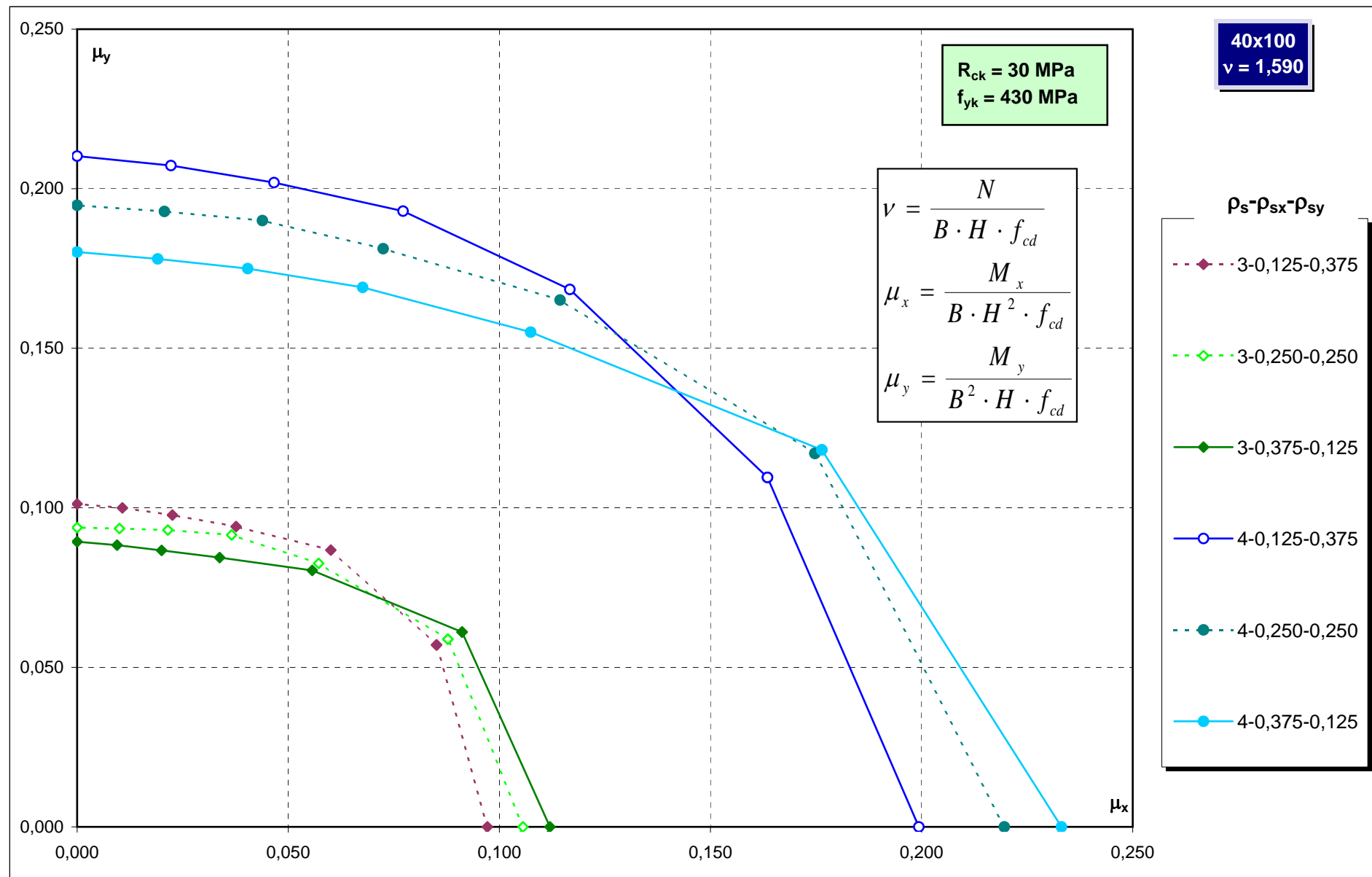
Abachi di progetto



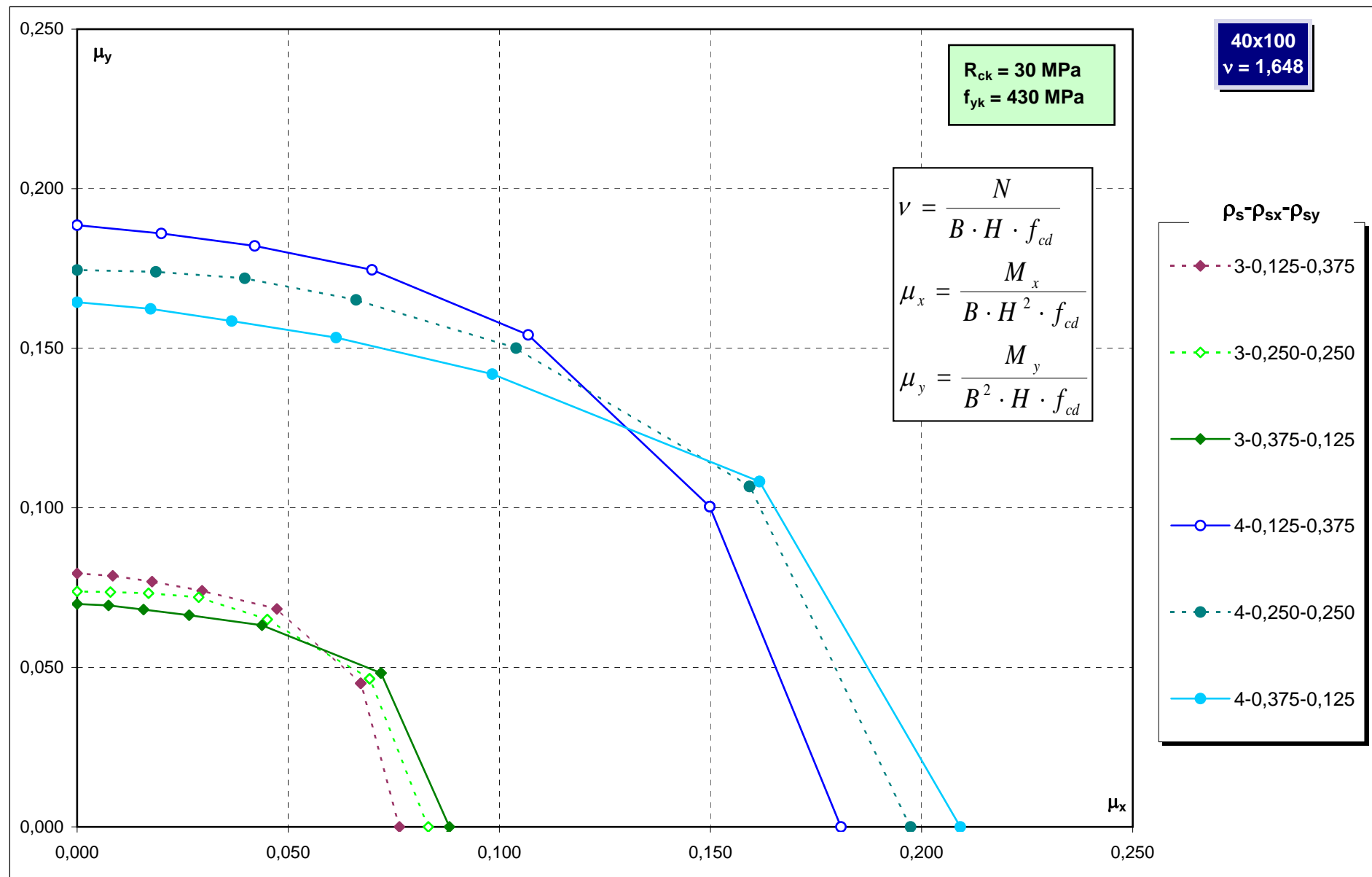
Abachi di progetto



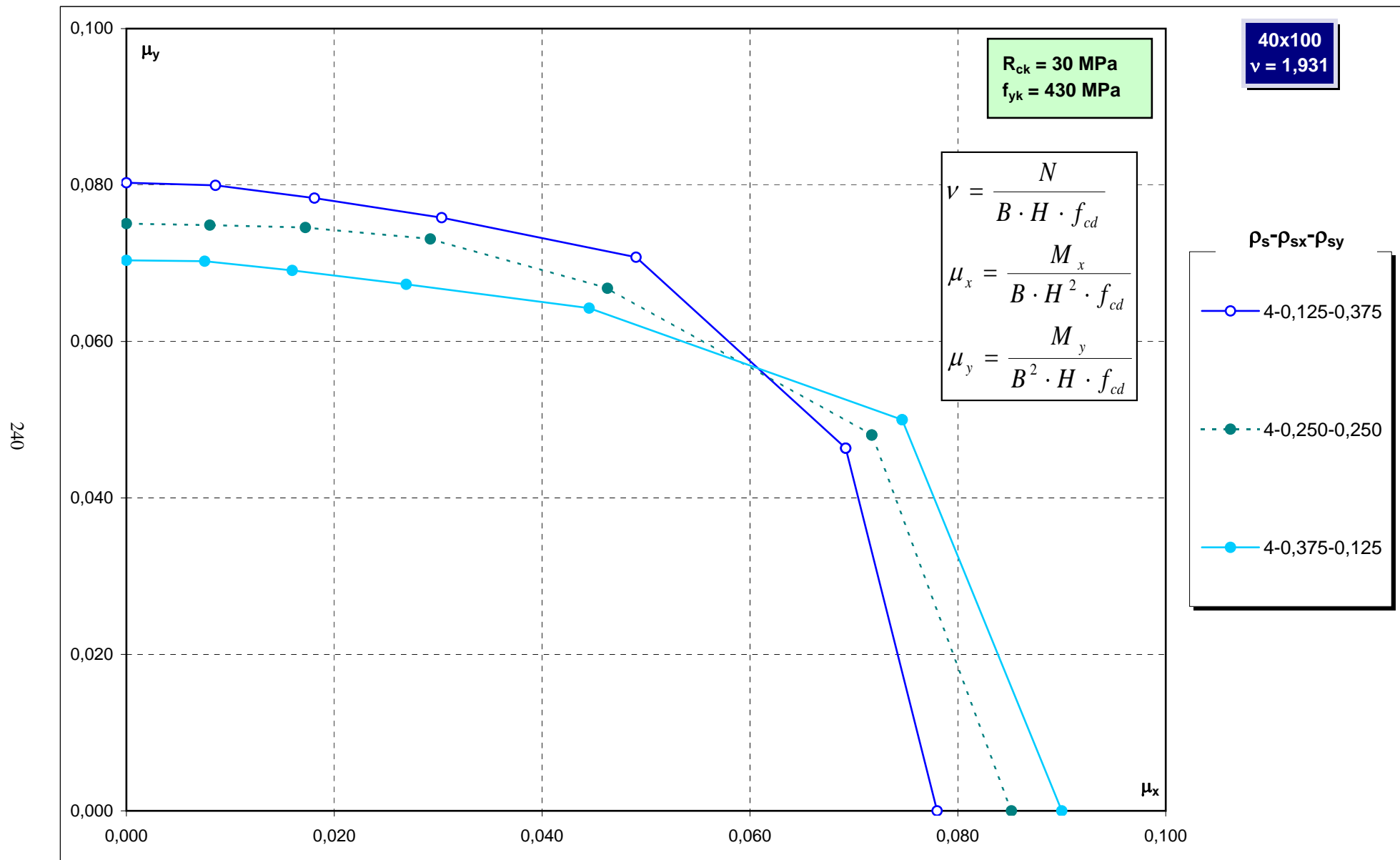
Abachi di progetto



Abachi di progetto



Abachi di progetto



Abachi di progetto

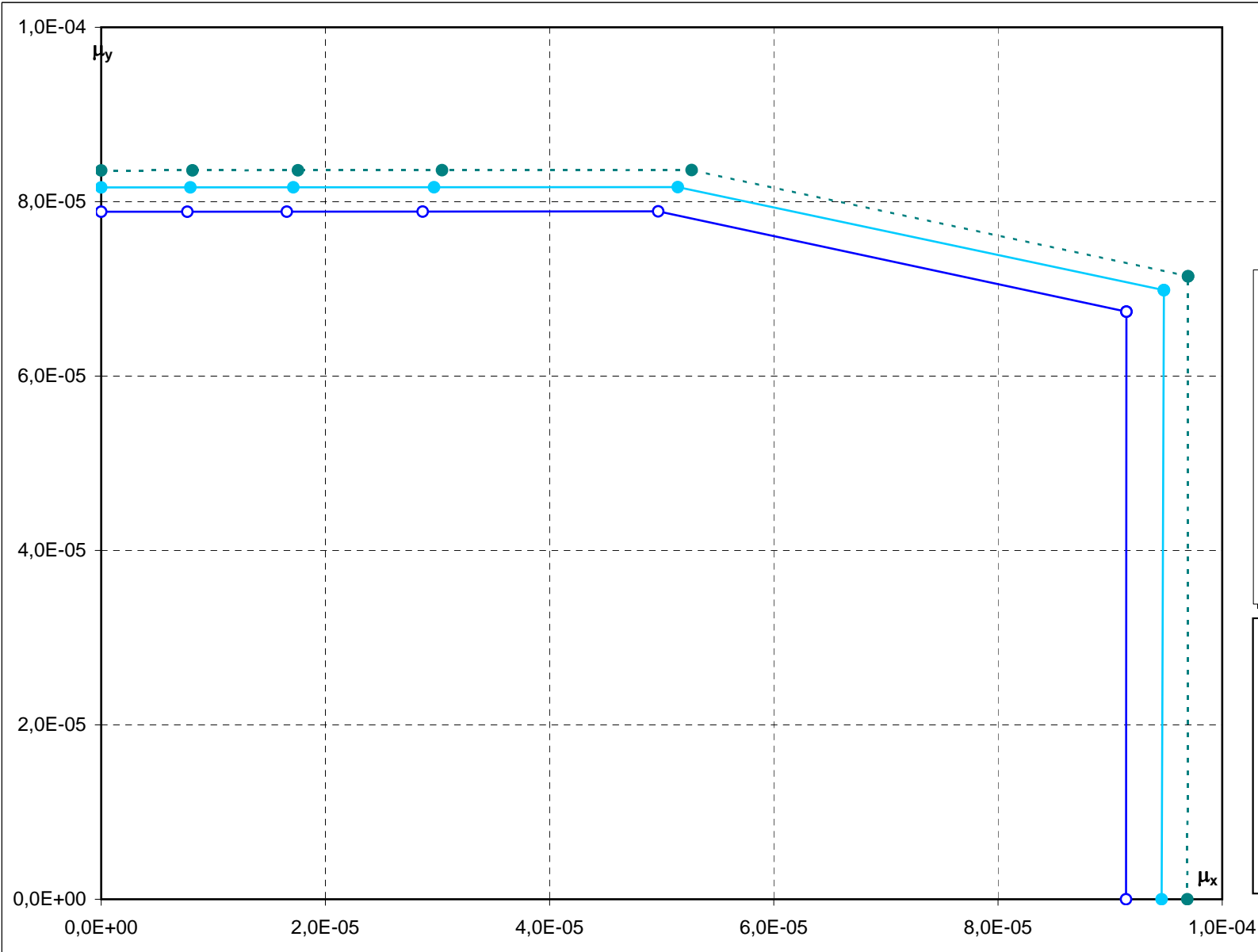
40x110
v = -1,131

R_{ck} = 30 MPa
f_{yk} = 430 MPa

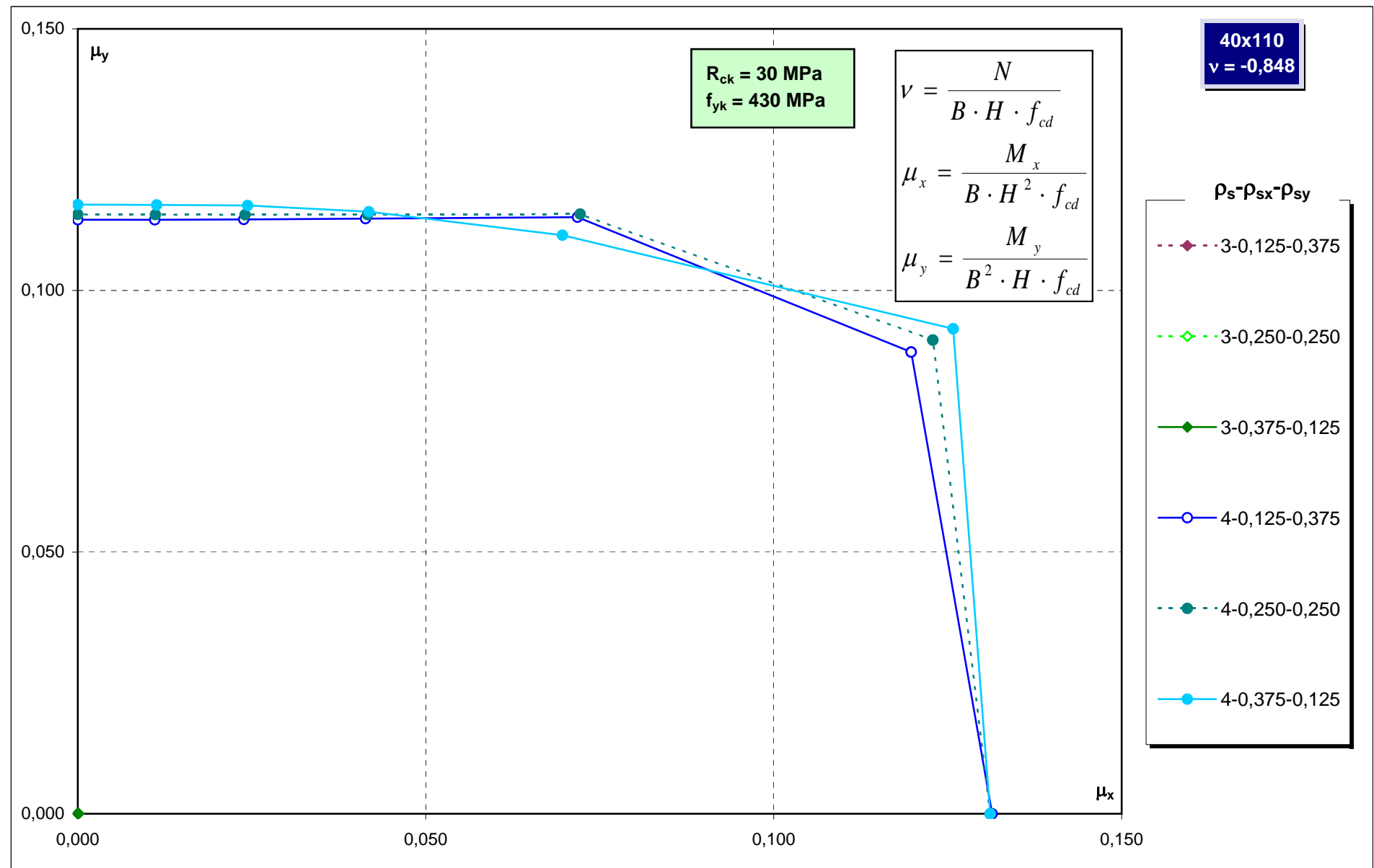
ρ_s-ρ_{sx}-ρ_{sy}

- 4-0,125-0,375
- 4-0,250-0,250
- 4-0,375-0,125

$$\nu = \frac{N}{B \cdot H \cdot f_{cd}}$$
$$\mu_x = \frac{M_x}{B \cdot H^2 \cdot f_{cd}}$$
$$\mu_y = \frac{M_y}{B^2 \cdot H \cdot f_{cd}}$$

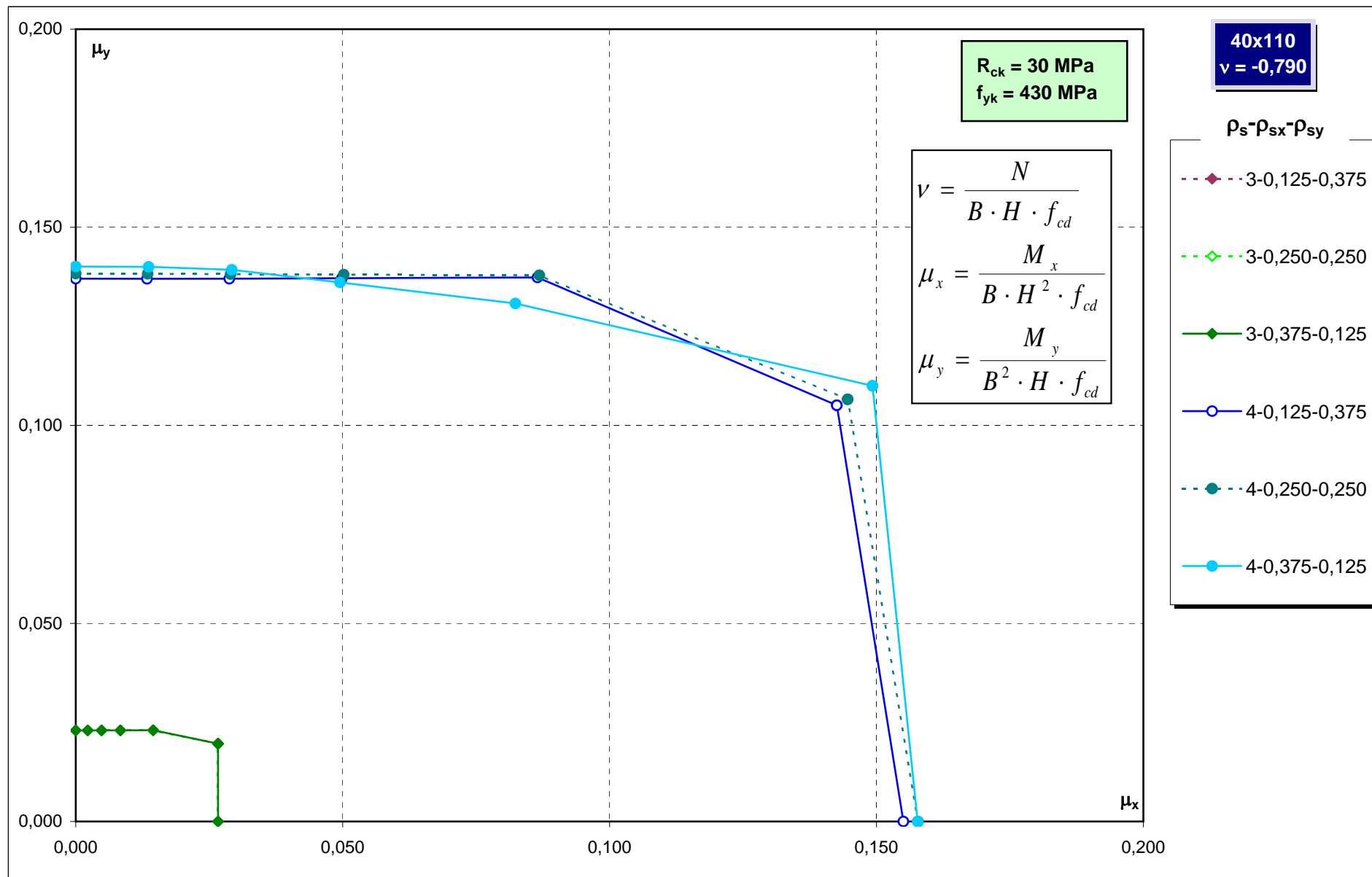


Abachi di progetto



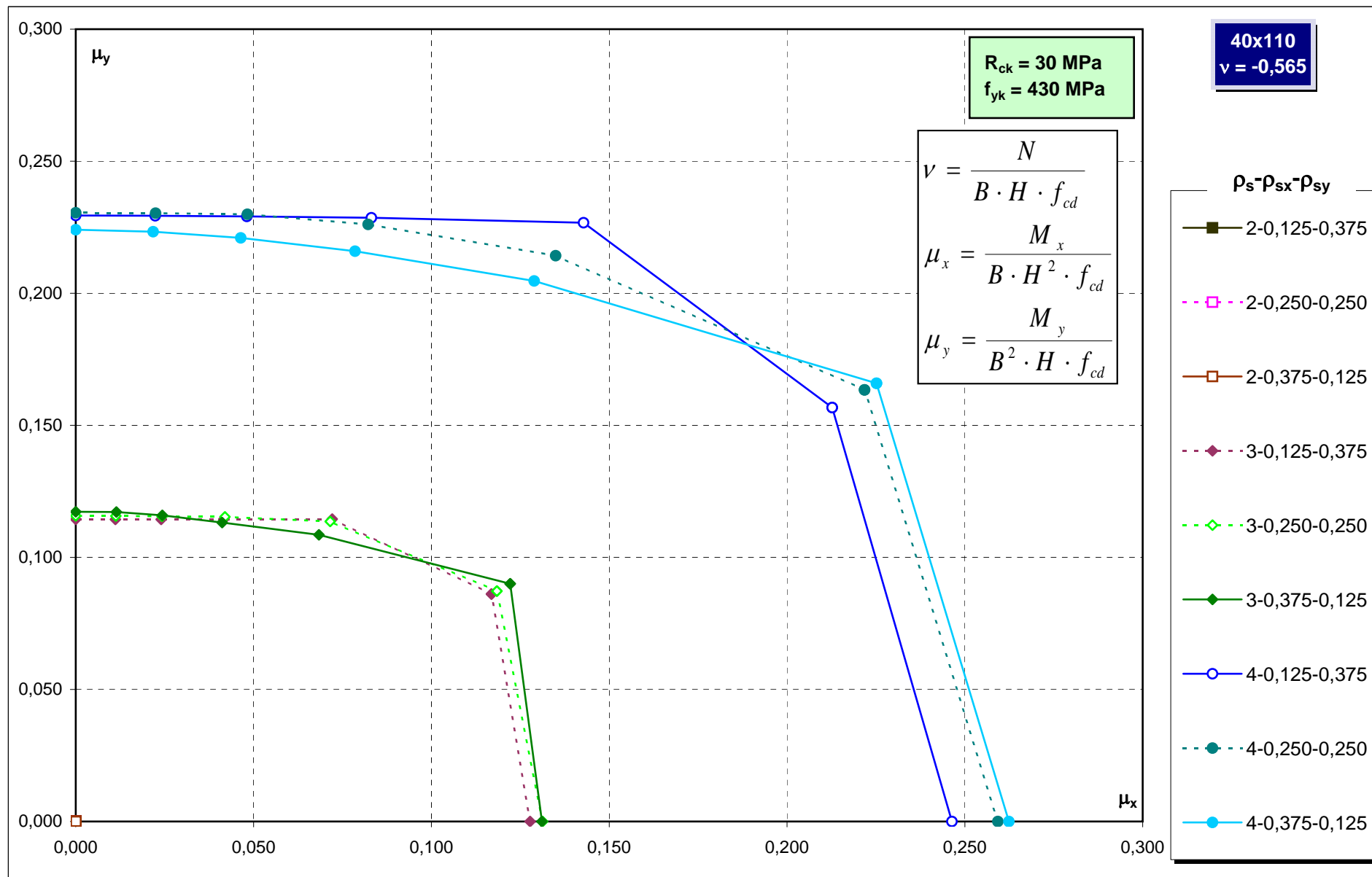
Abachi di progetto

243

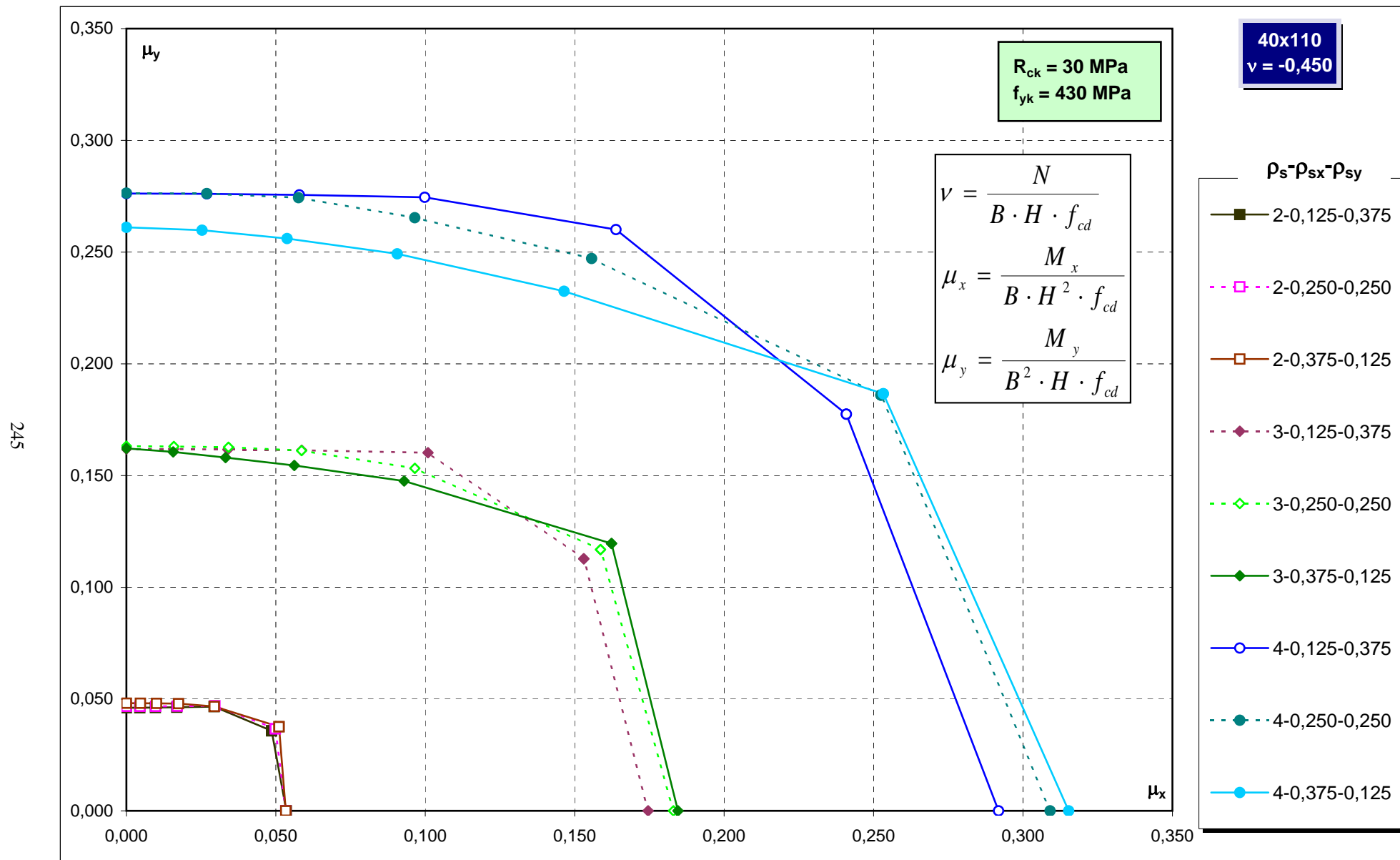


Abachi di progetto

244

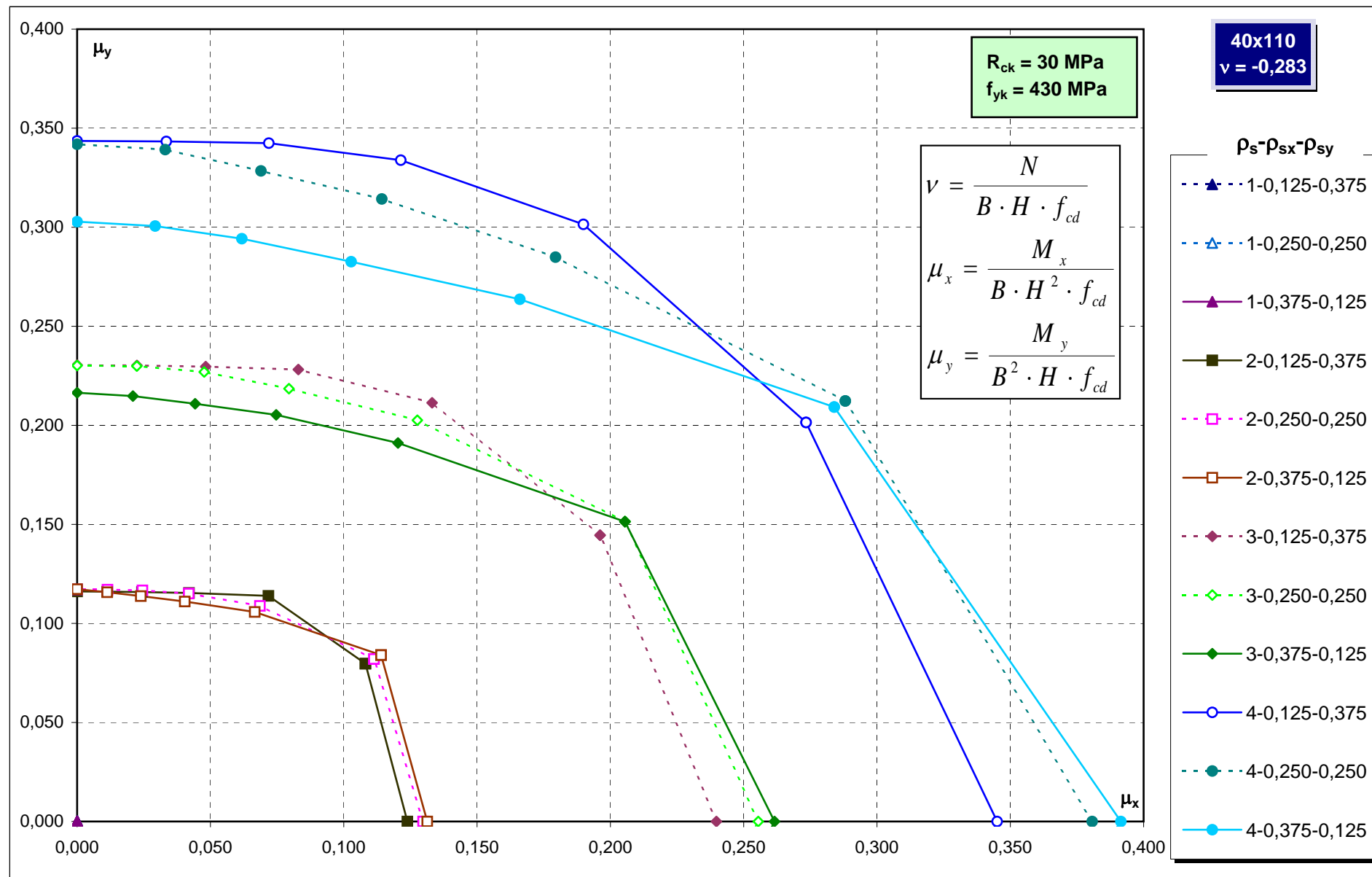


Abachi di progetto



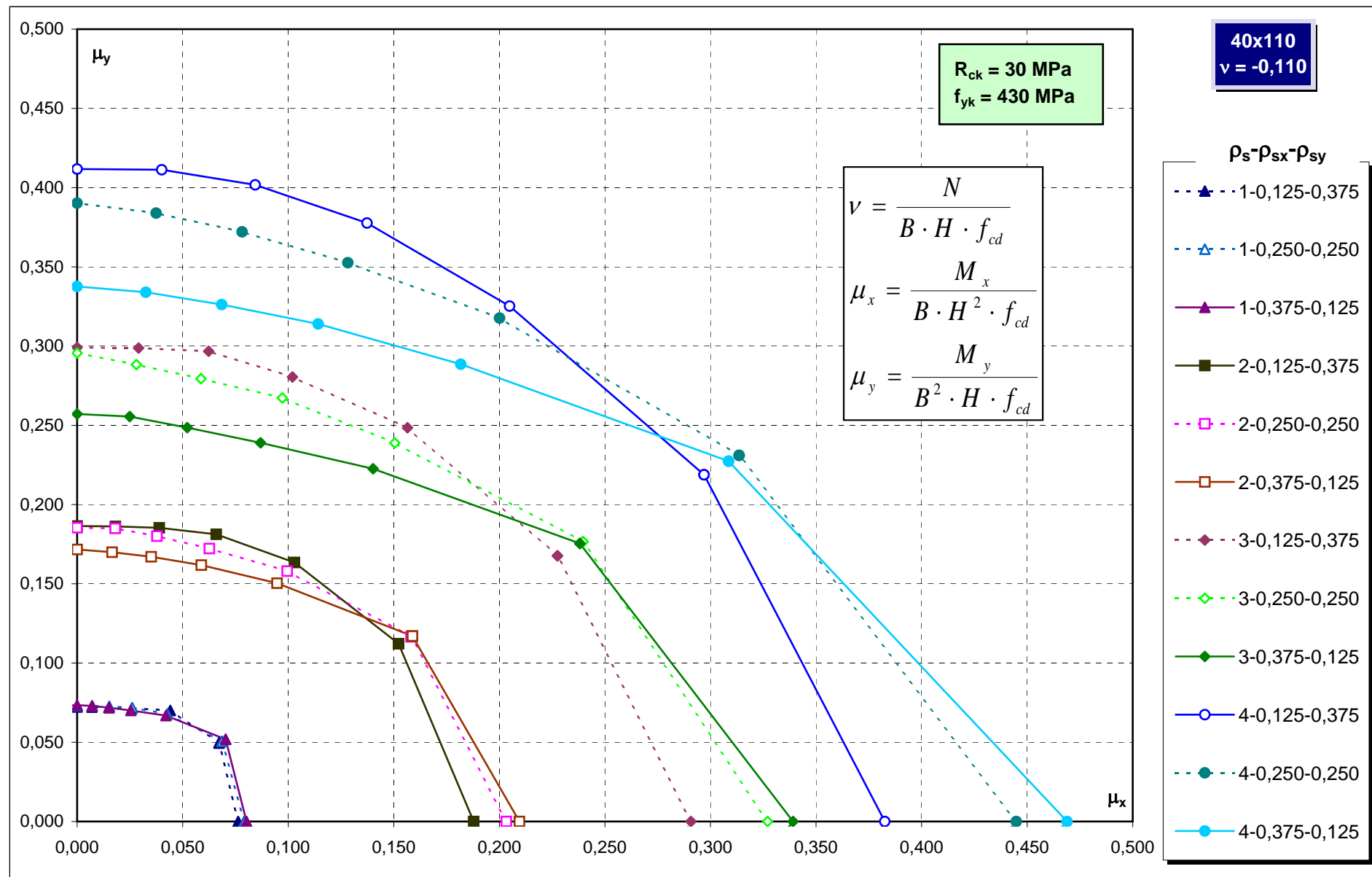
Abachi di progetto

246



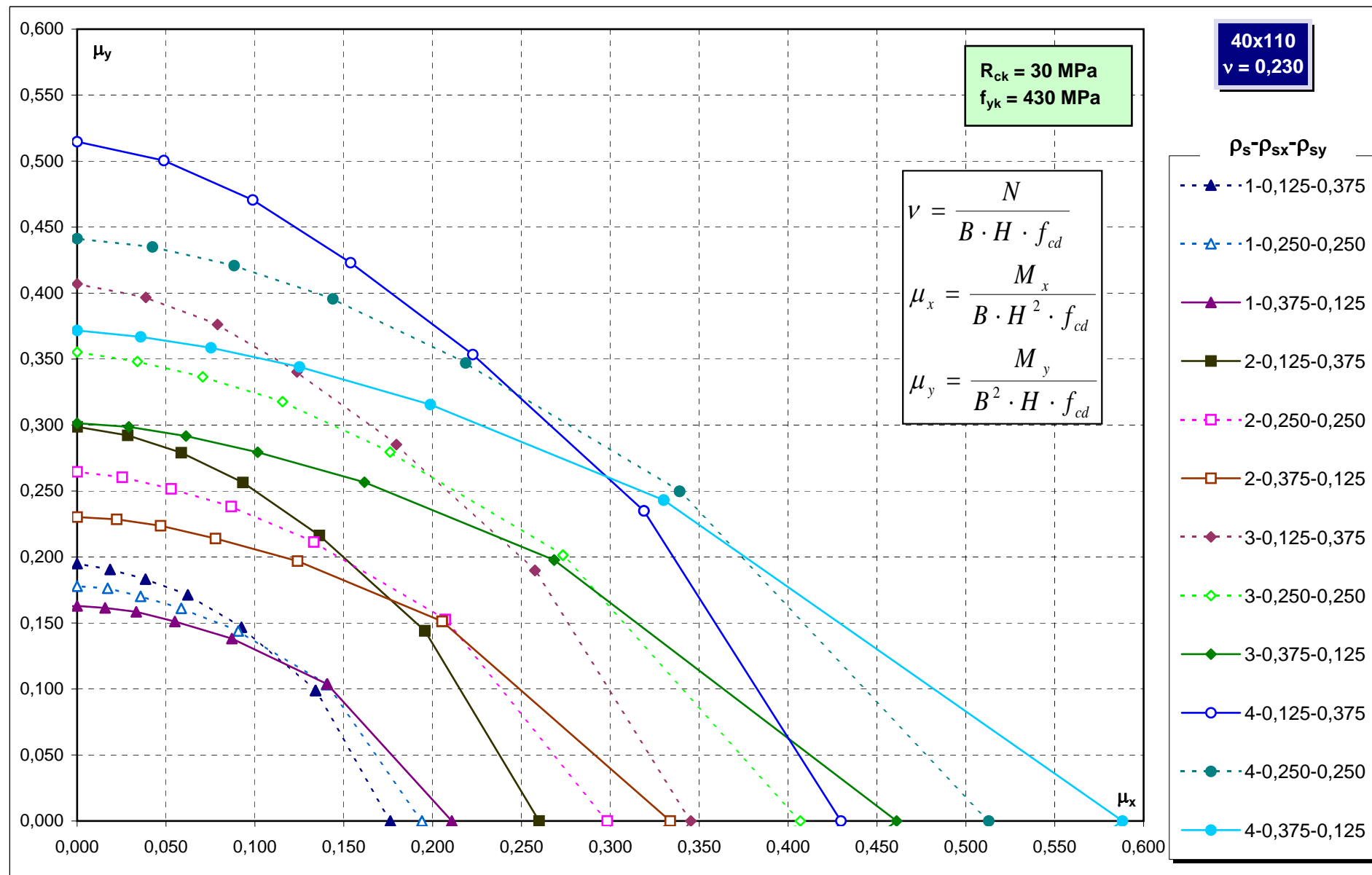
Abachi di progetto

247



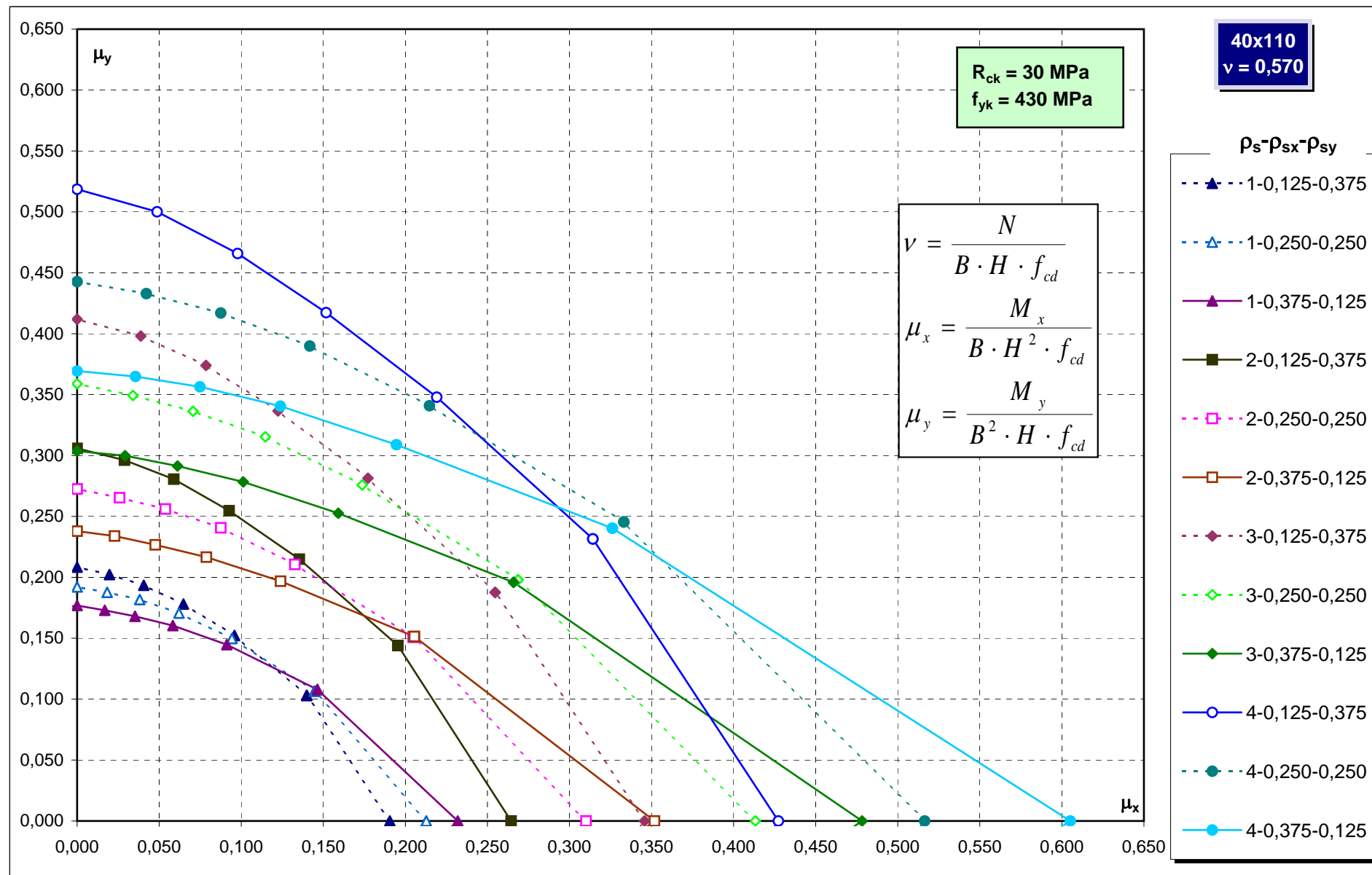
Abachi di progetto

248

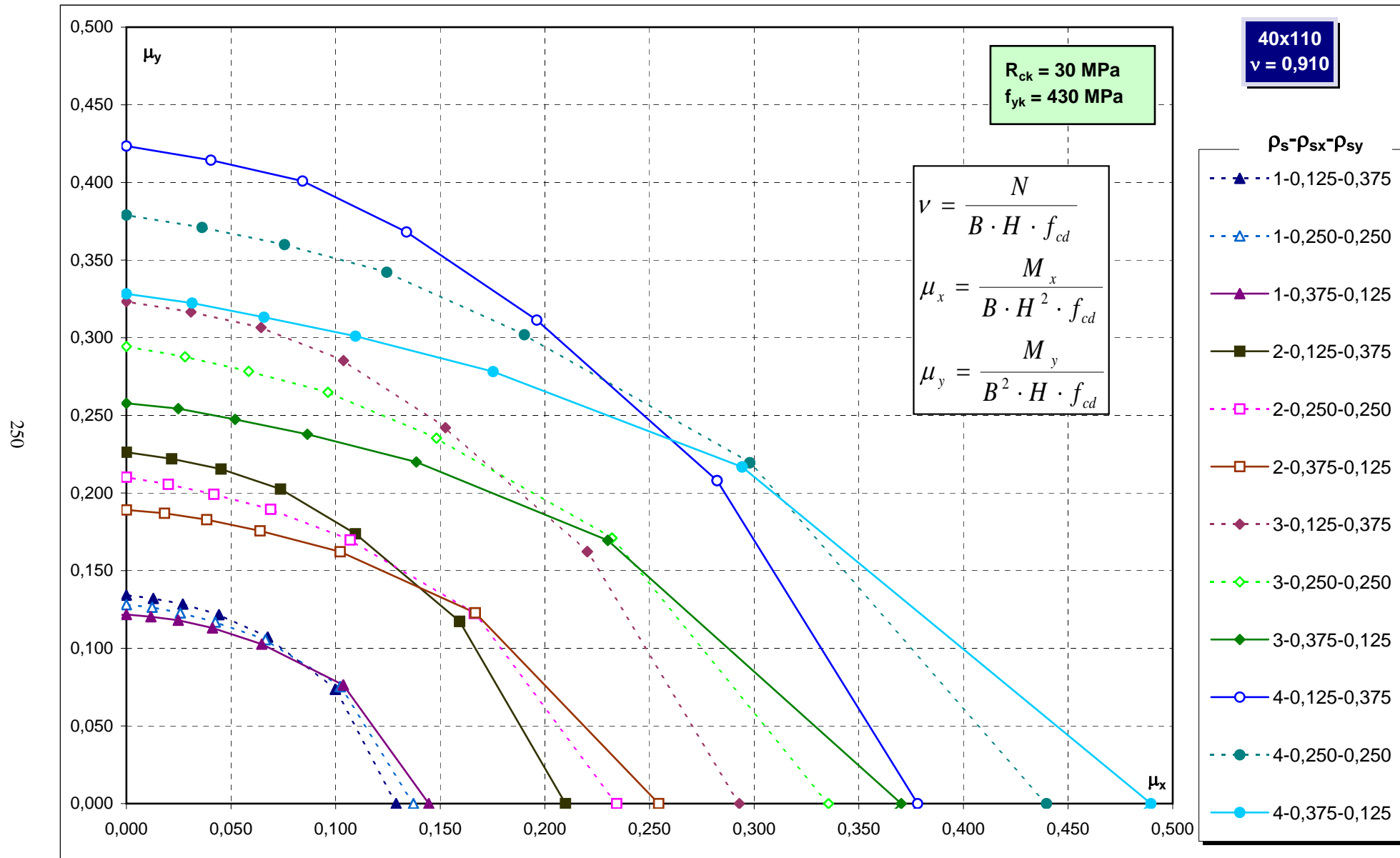


Abachi di progetto

249

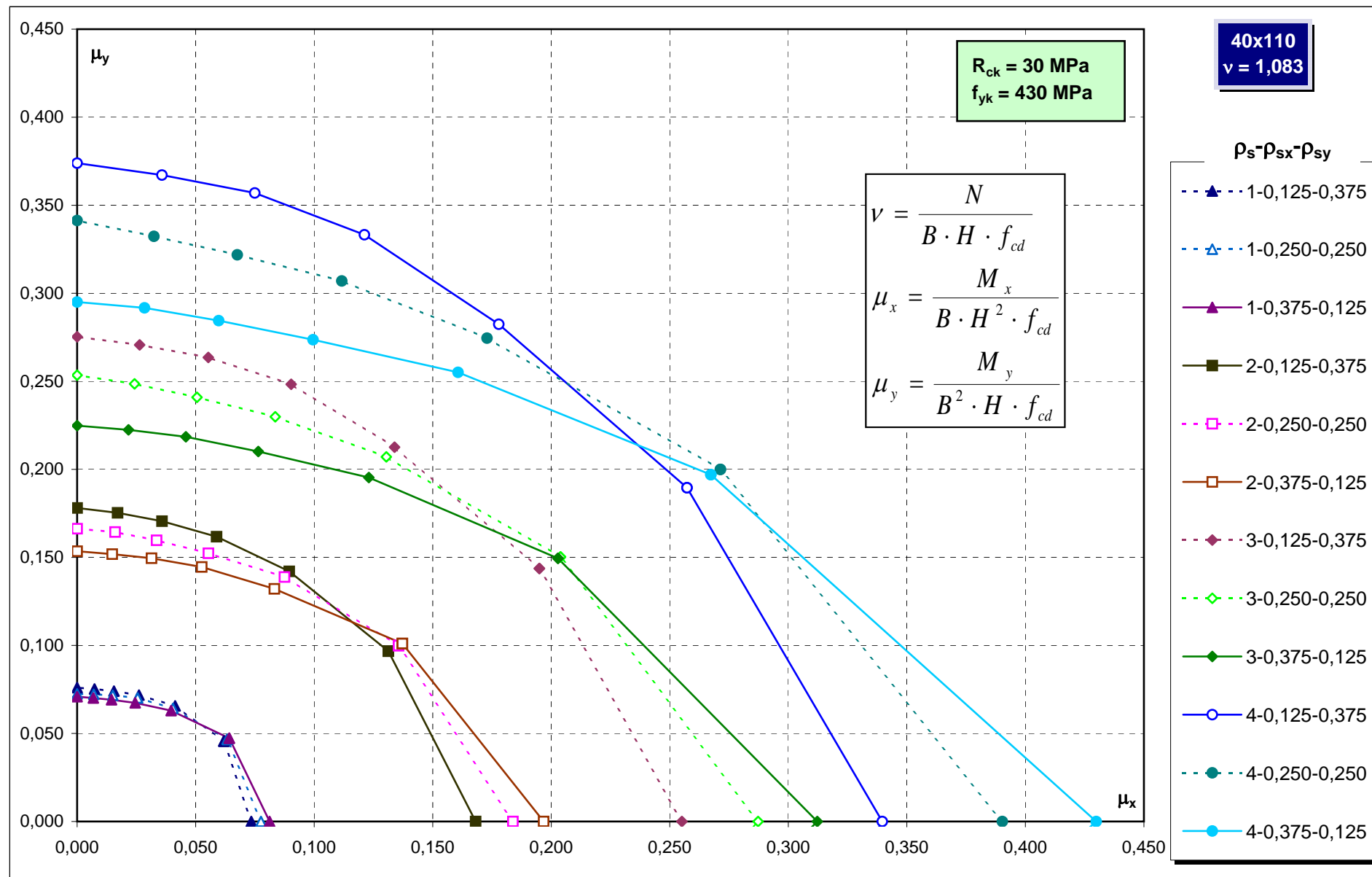


Abachi di progetto

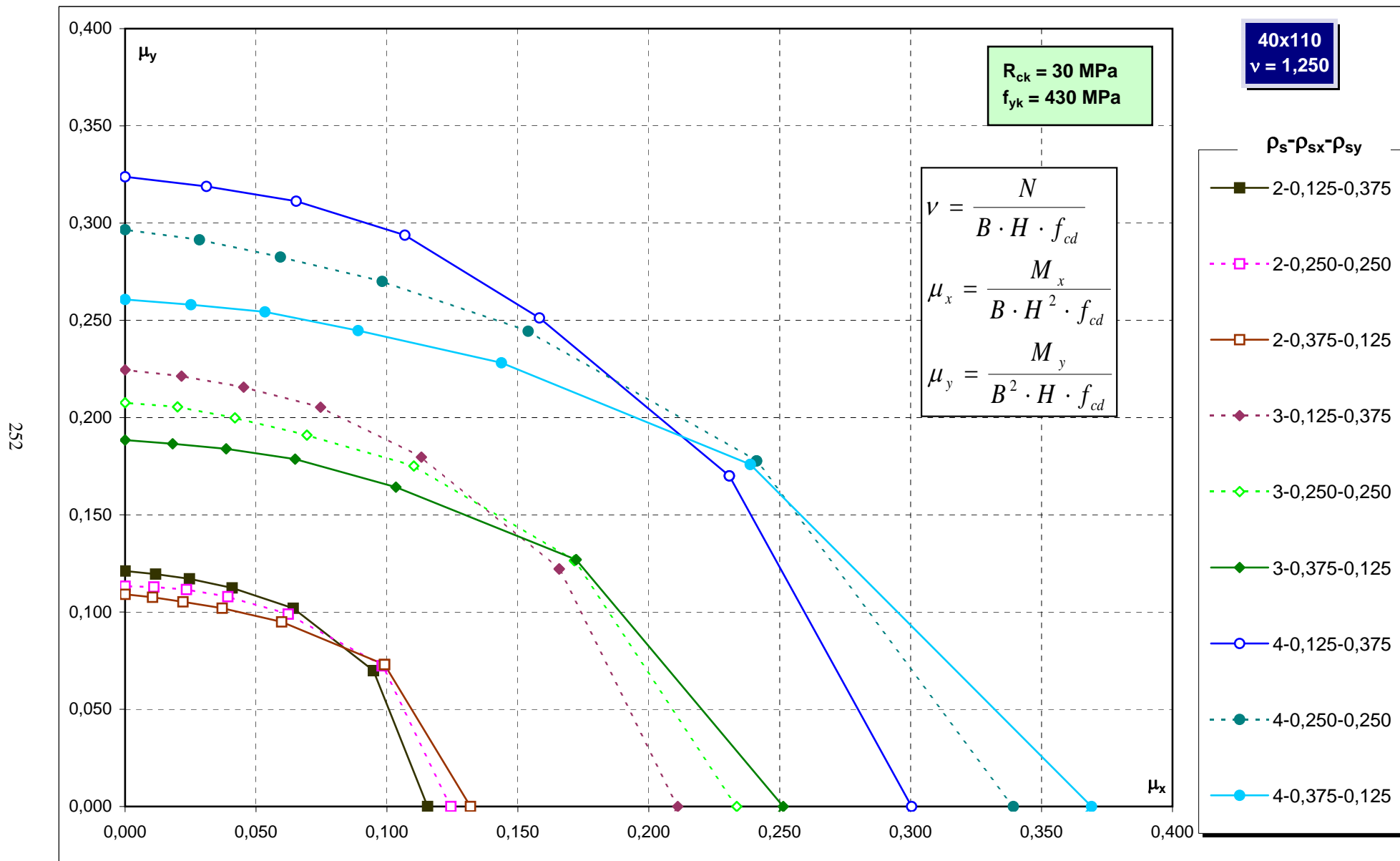


Abachi di progetto

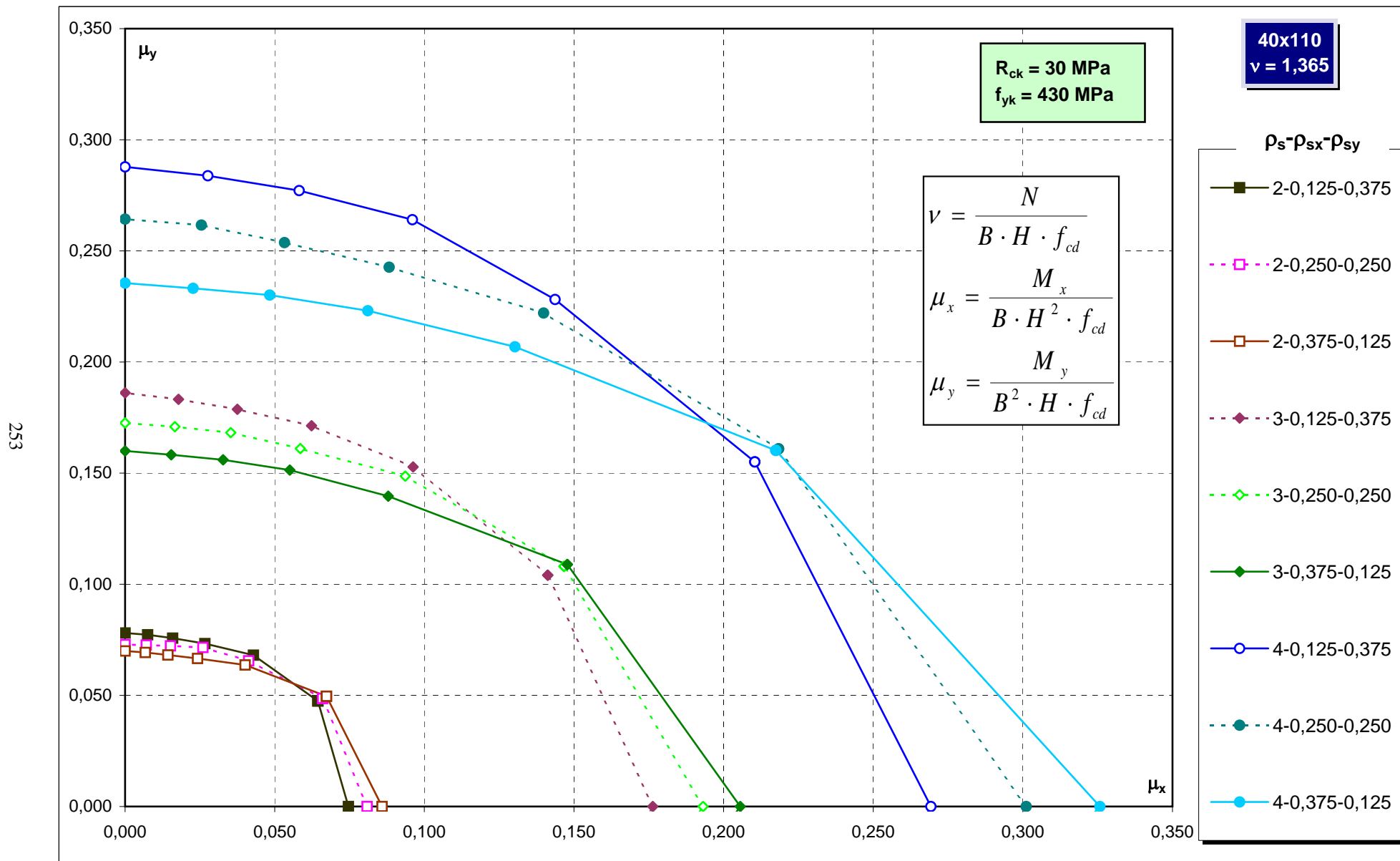
251



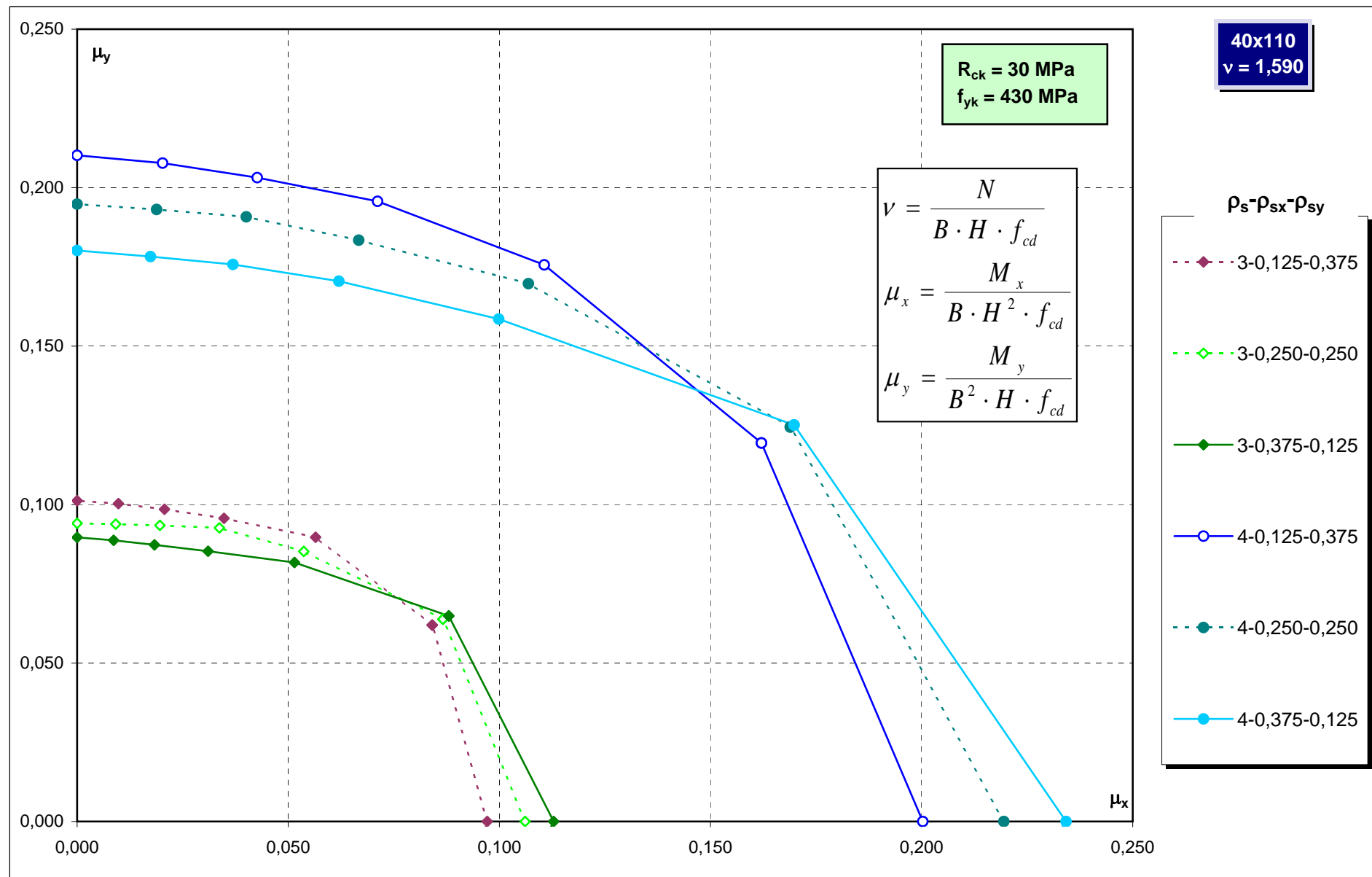
Abachi di progetto



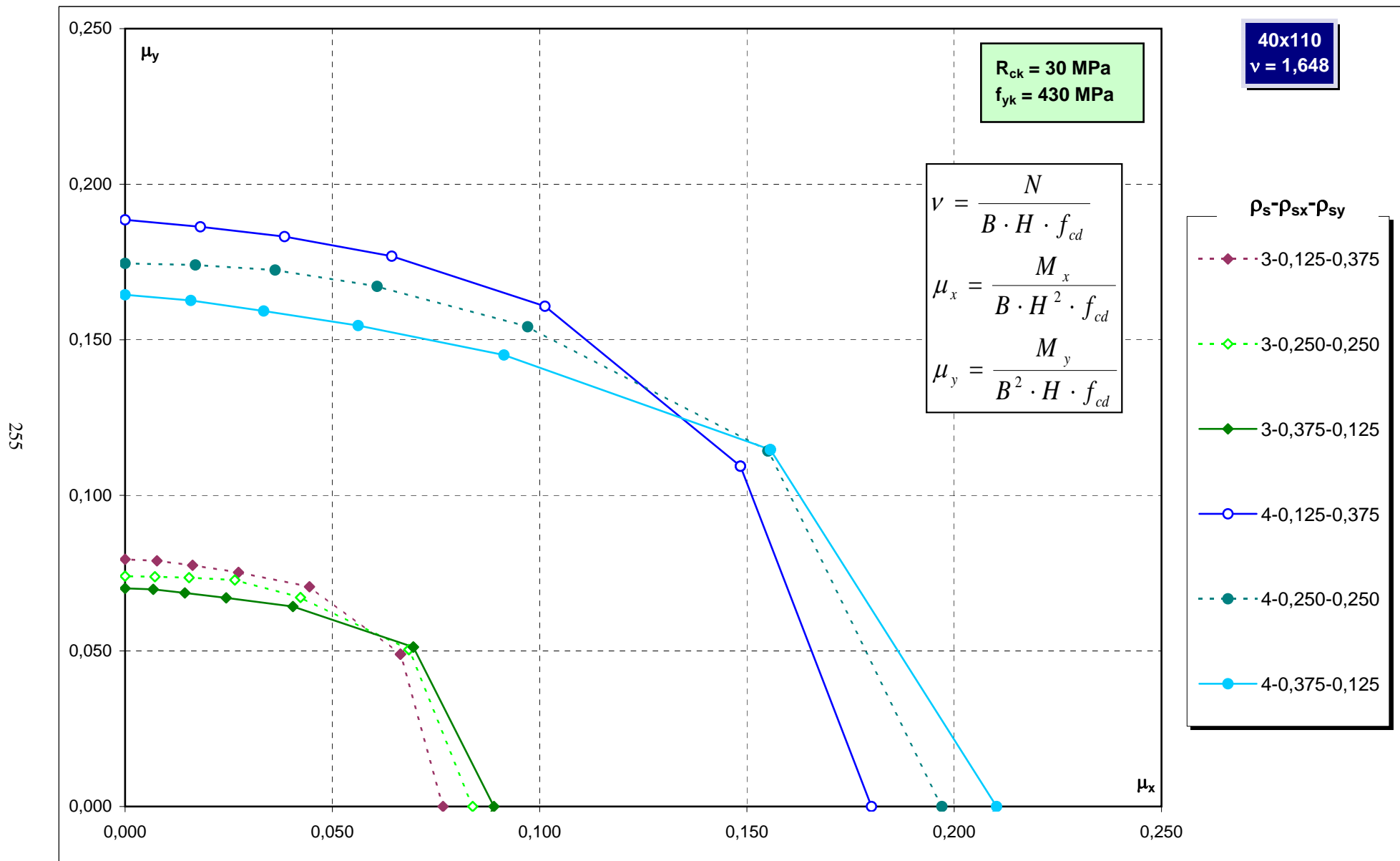
Abachi di progetto



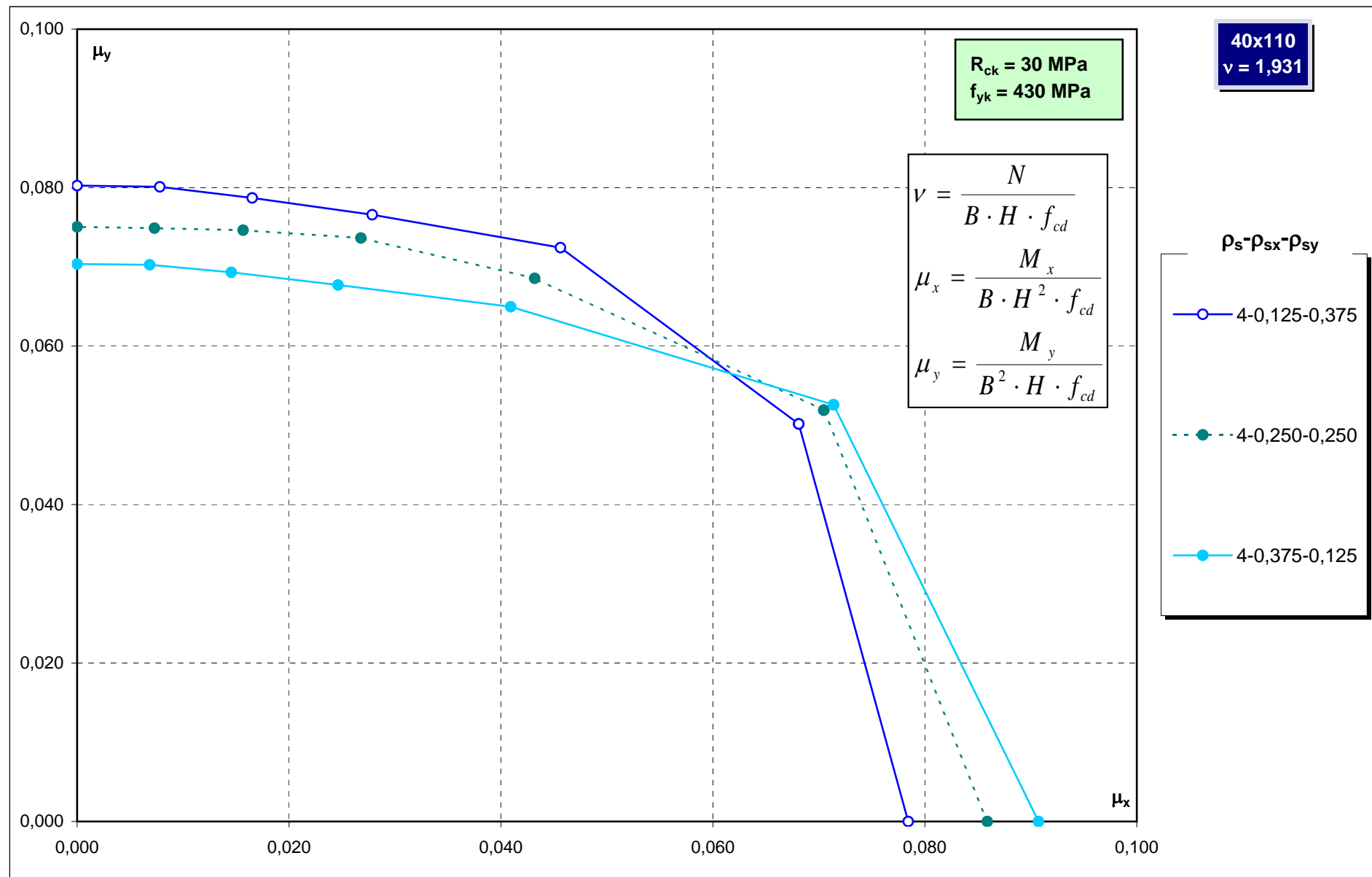
Abachi di progetto



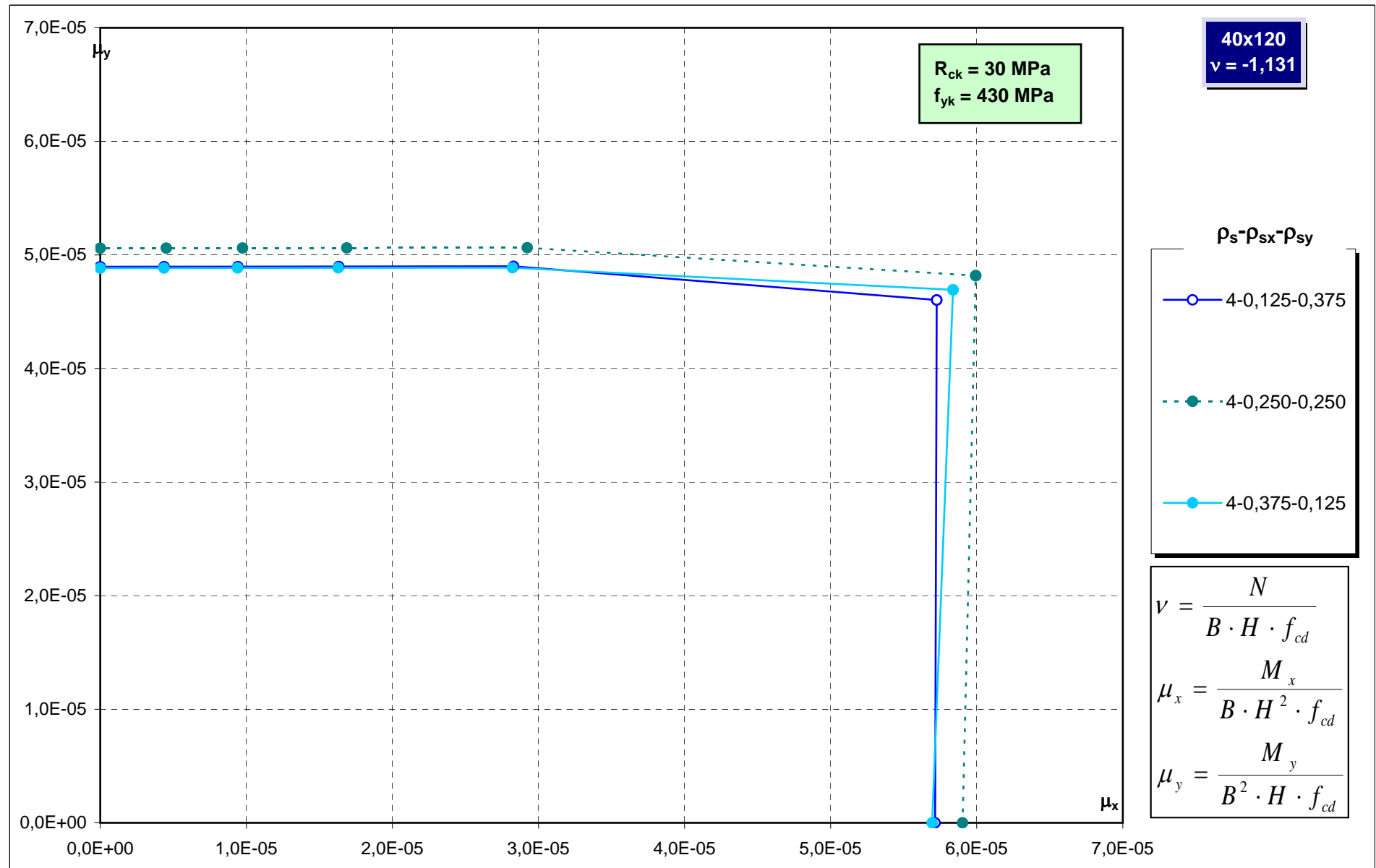
Abachi di progetto



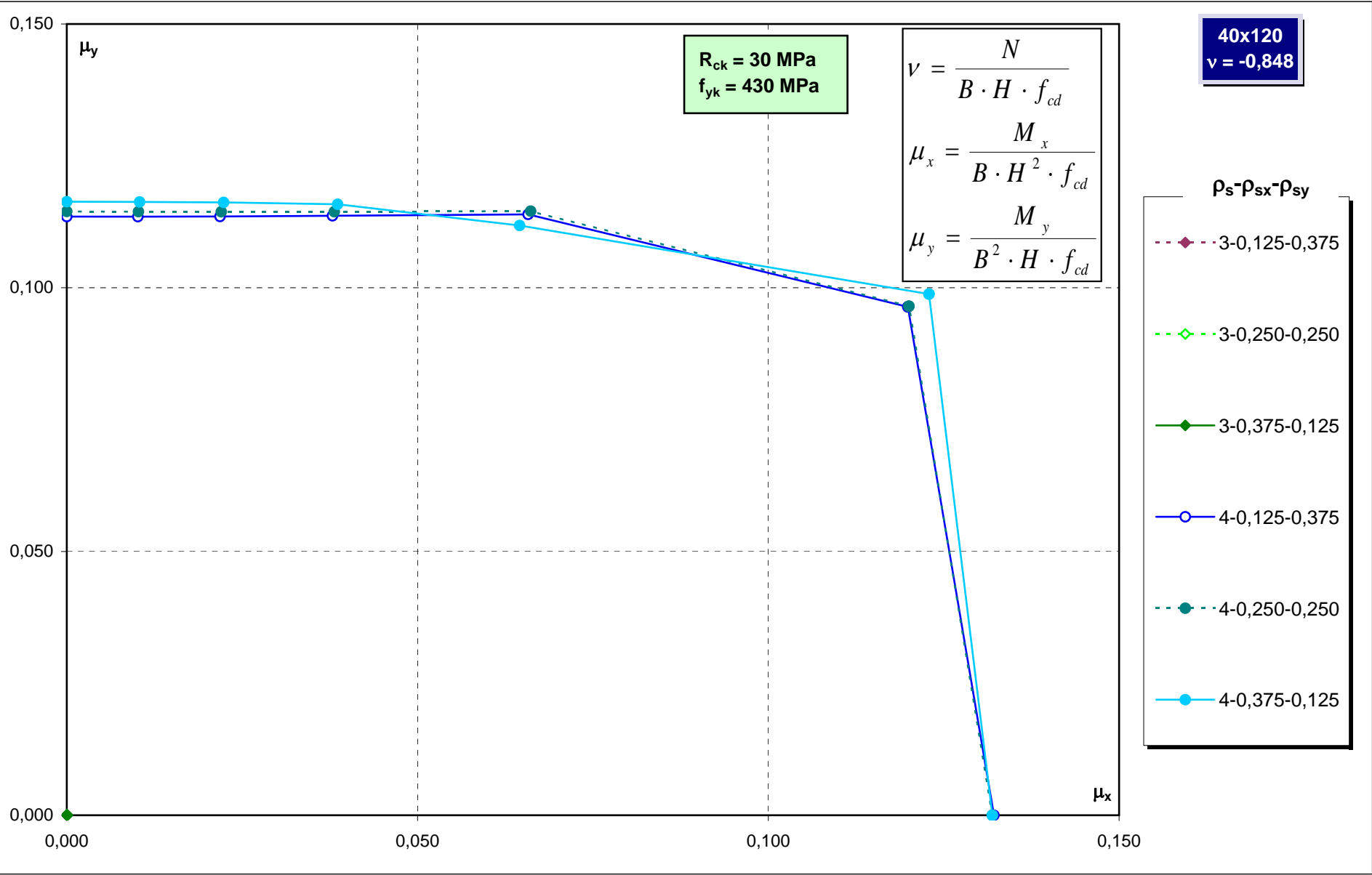
Abachi di progetto



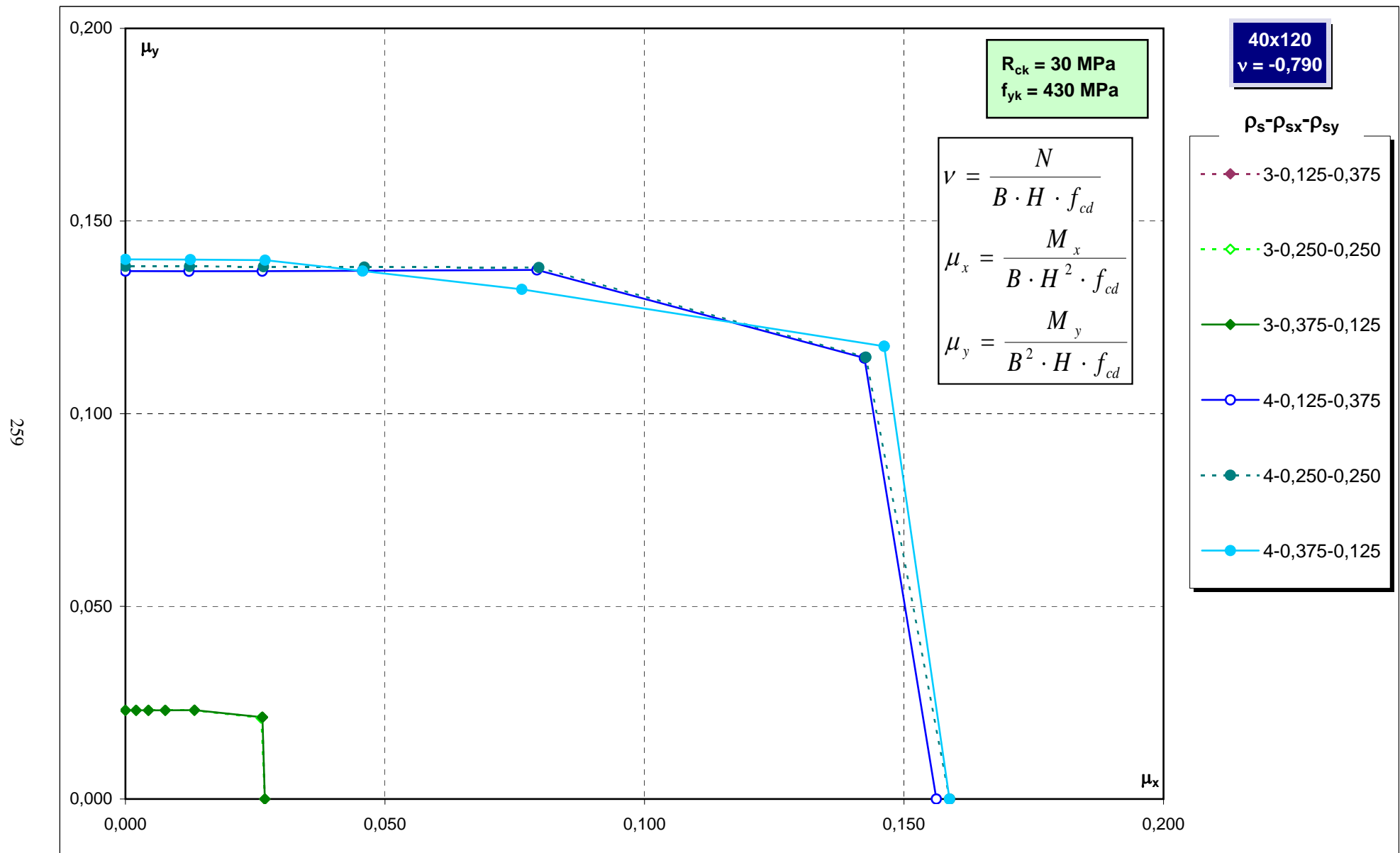
Abachi di progetto



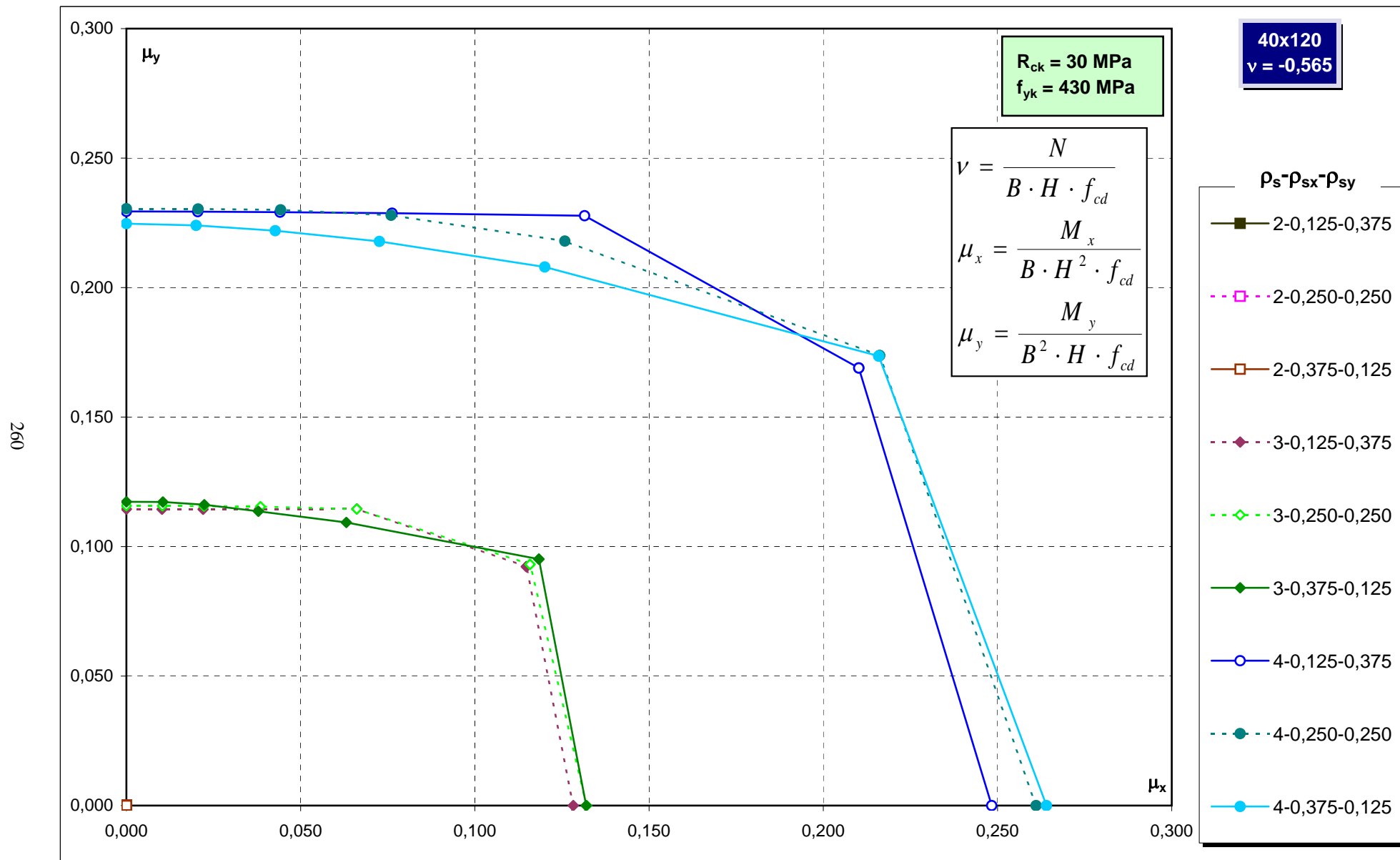
Abachi di progetto



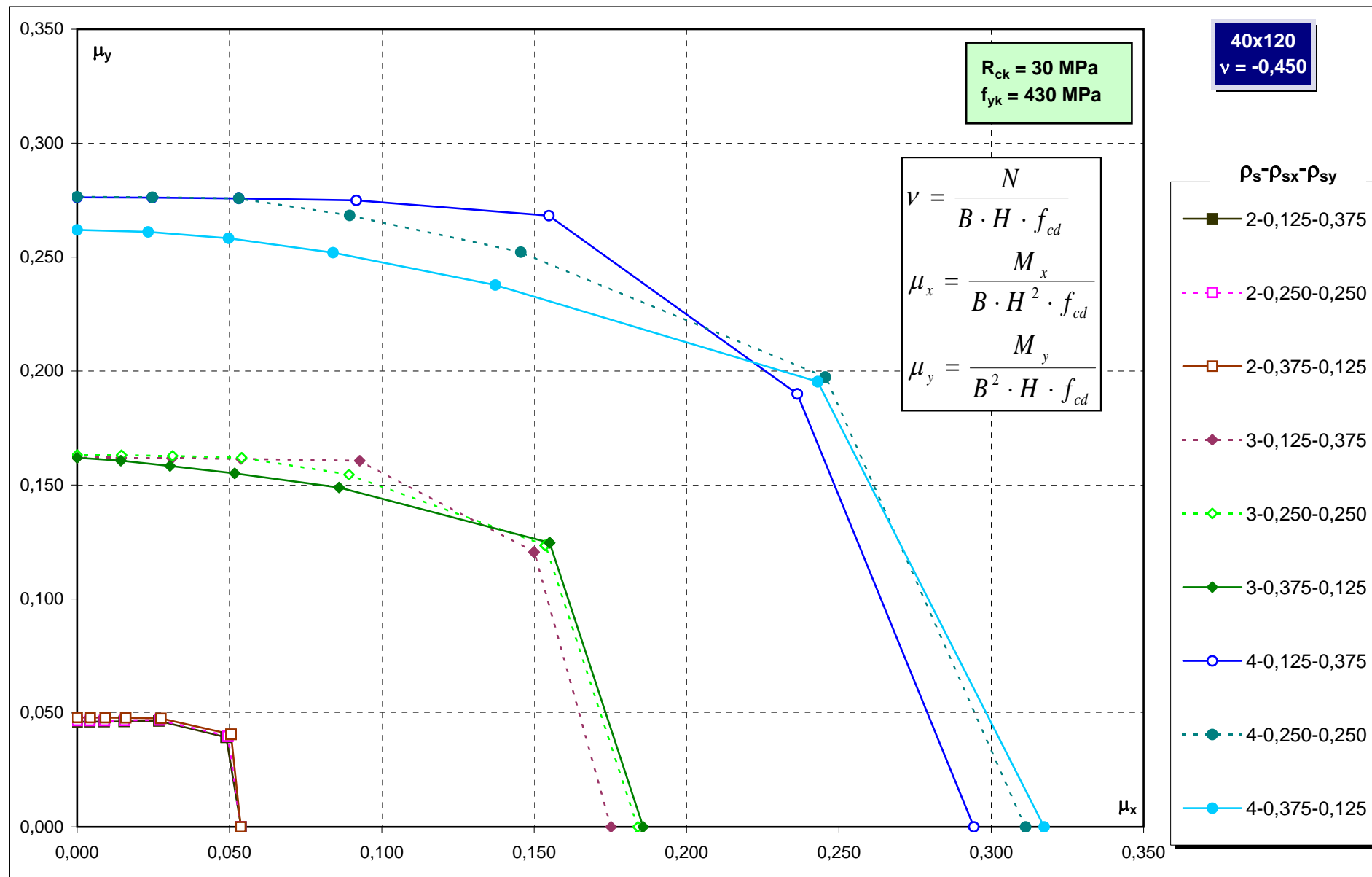
Abachi di progetto



Abachi di progetto

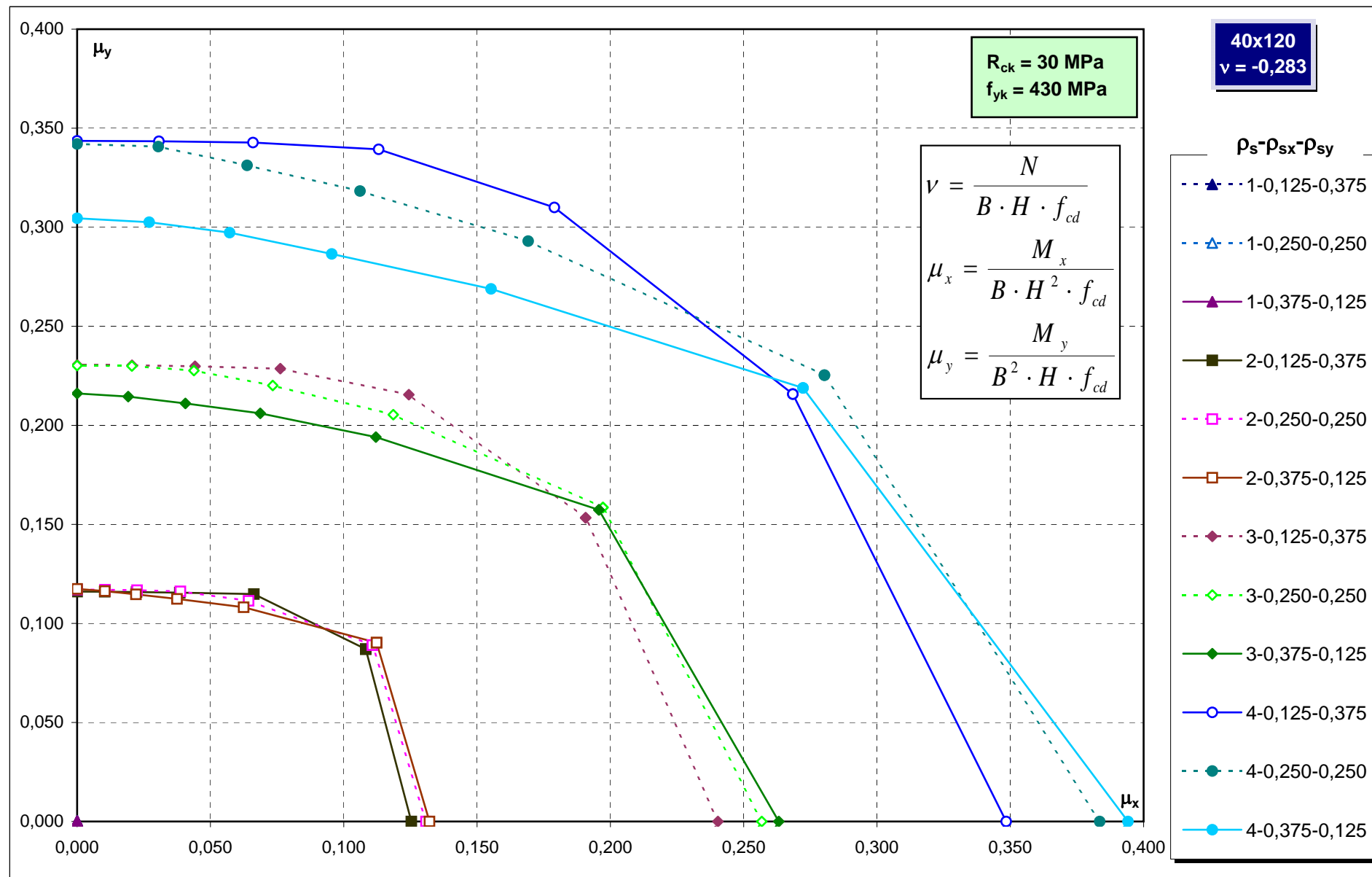


Abachi di progetto



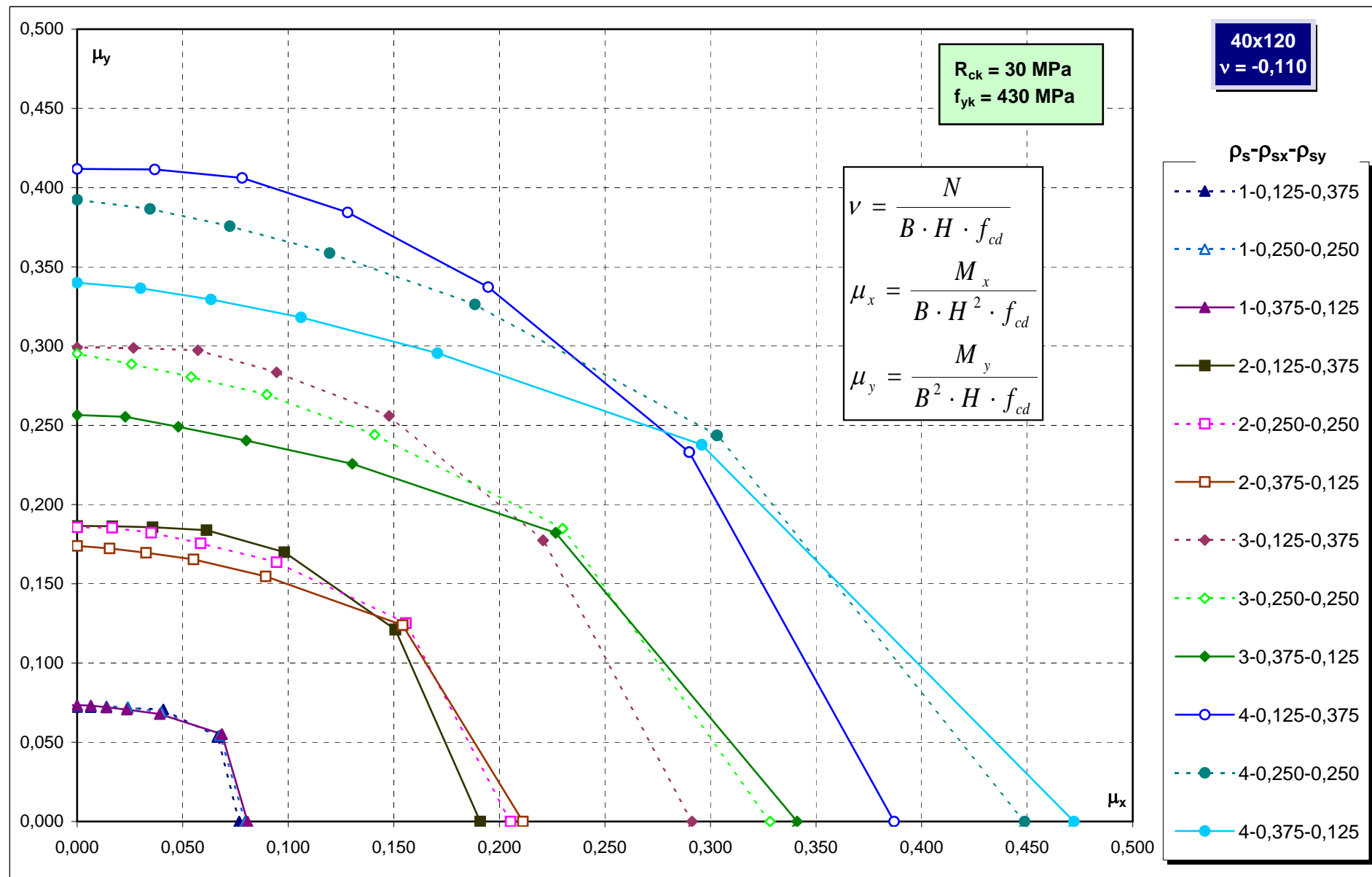
Abachi di progetto

262



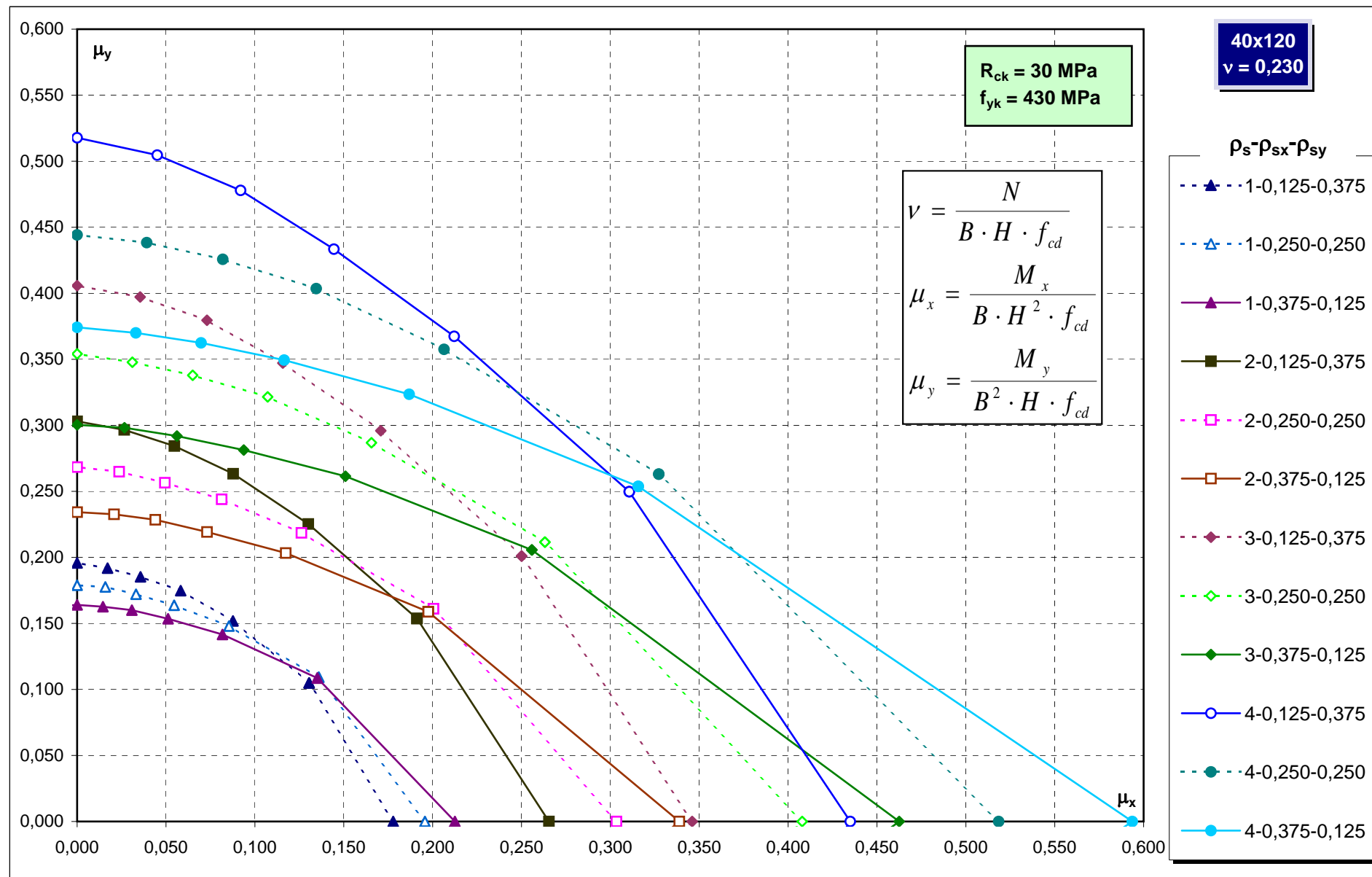
Abachi di progetto

263

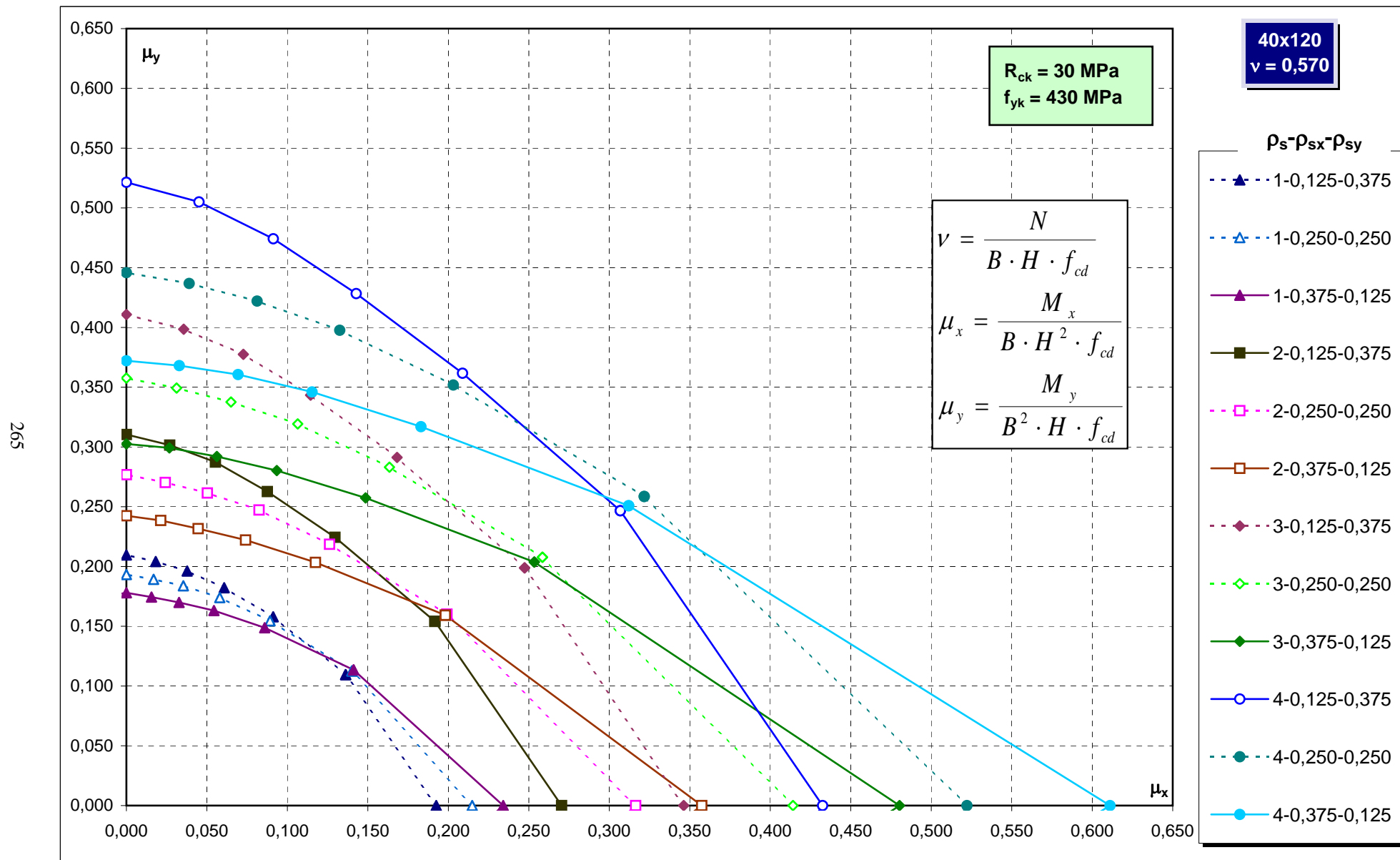


Abachi di progetto

264

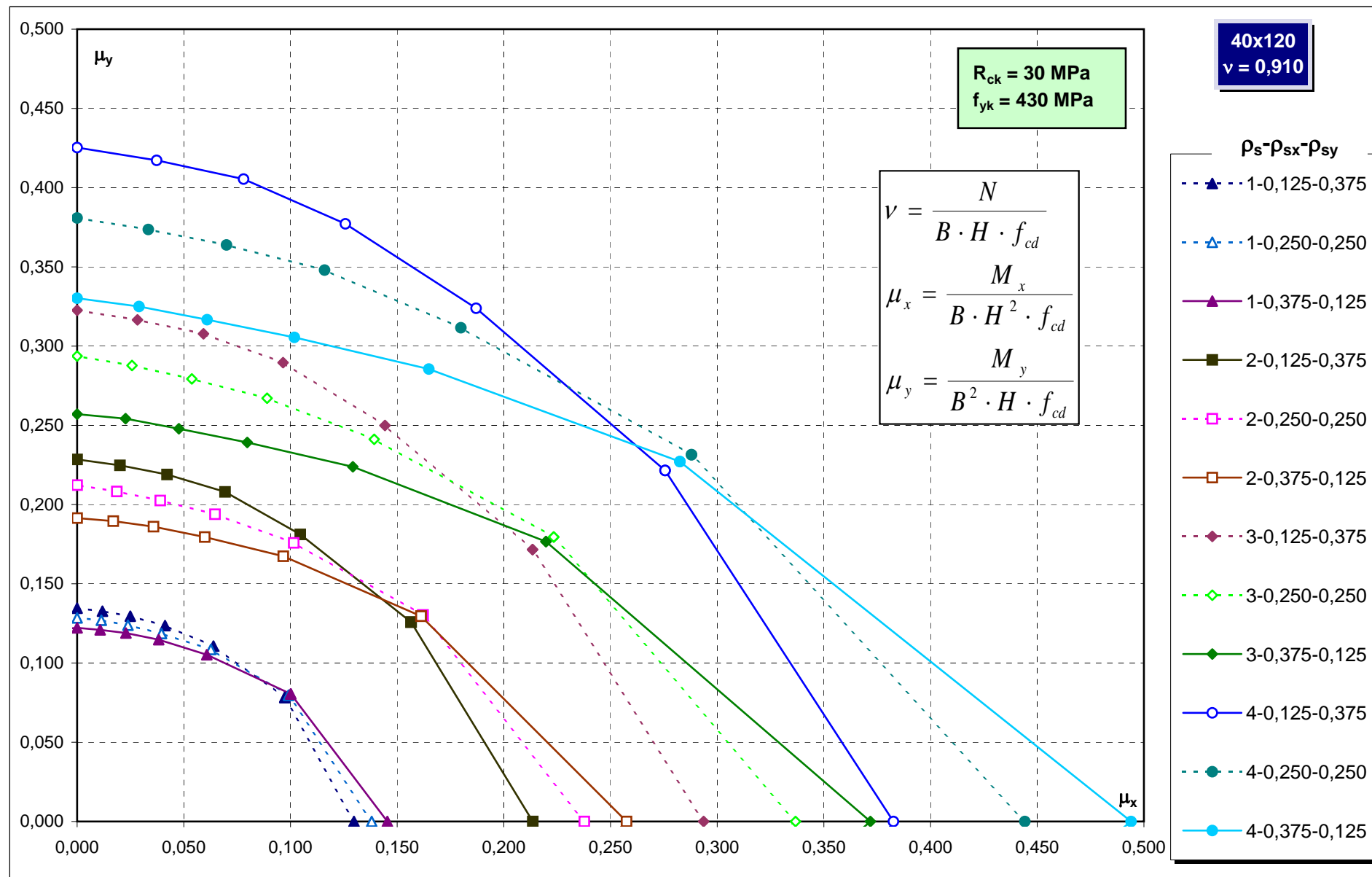


Abachi di progetto

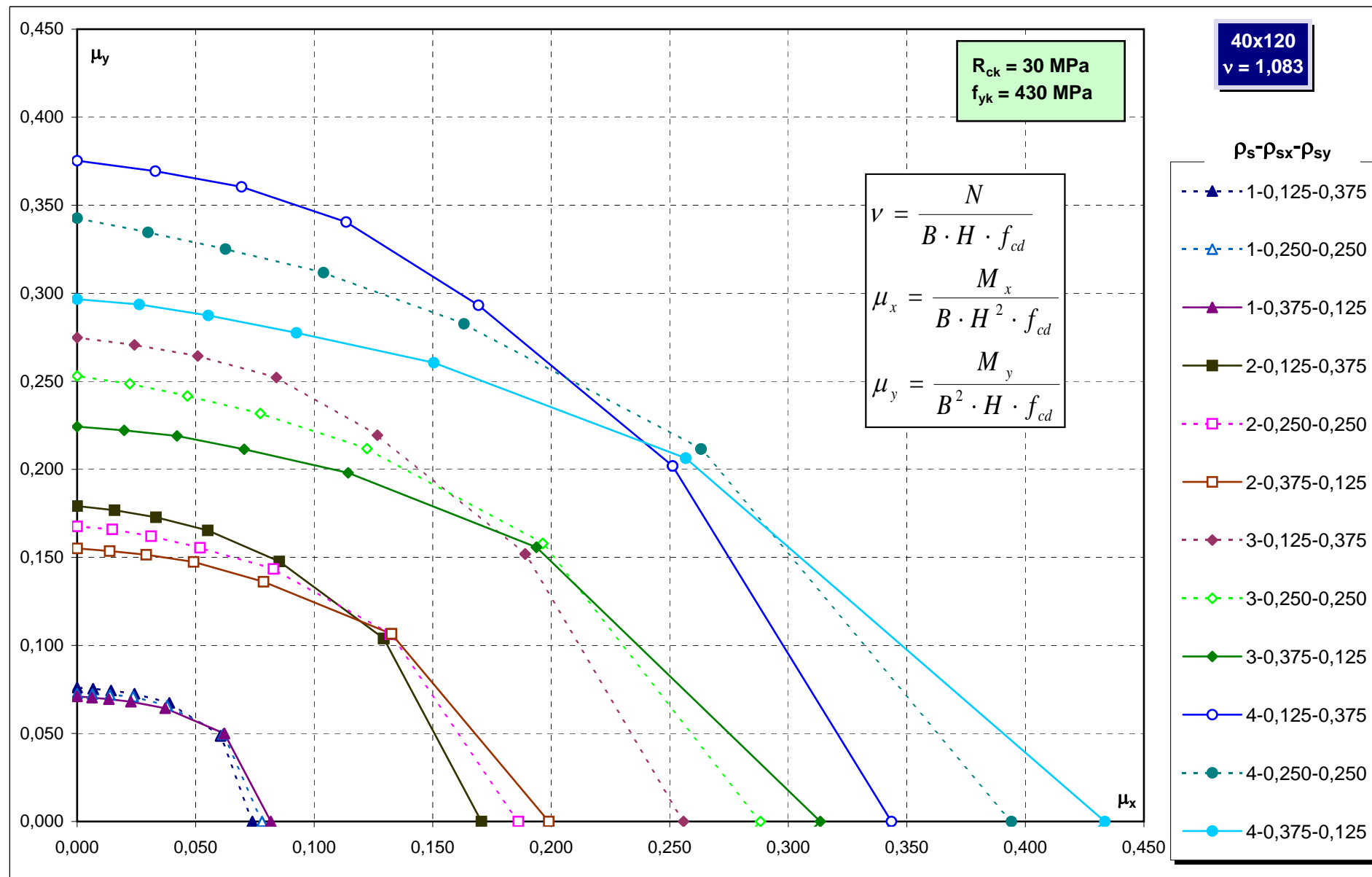


Abachi di progetto

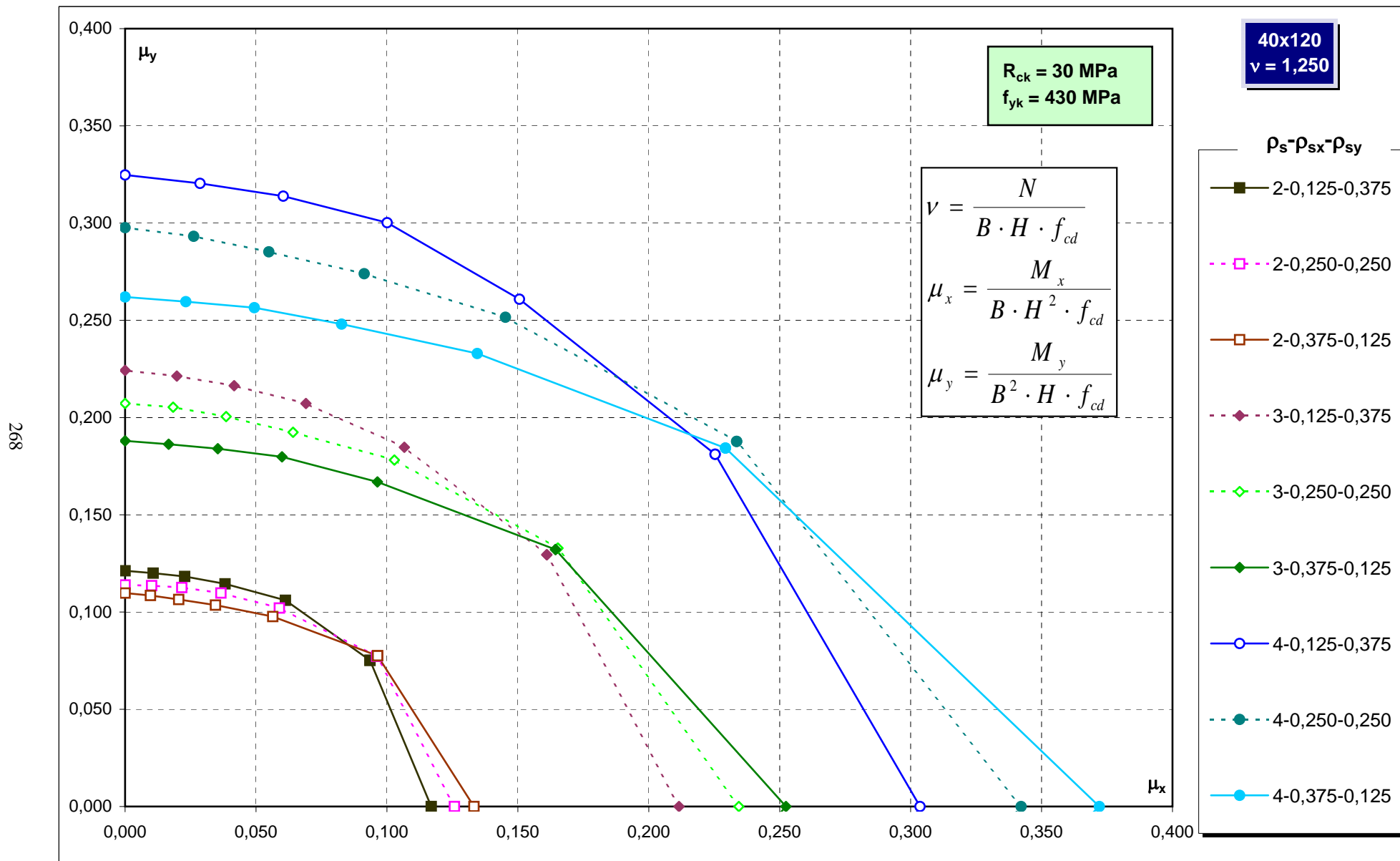
266



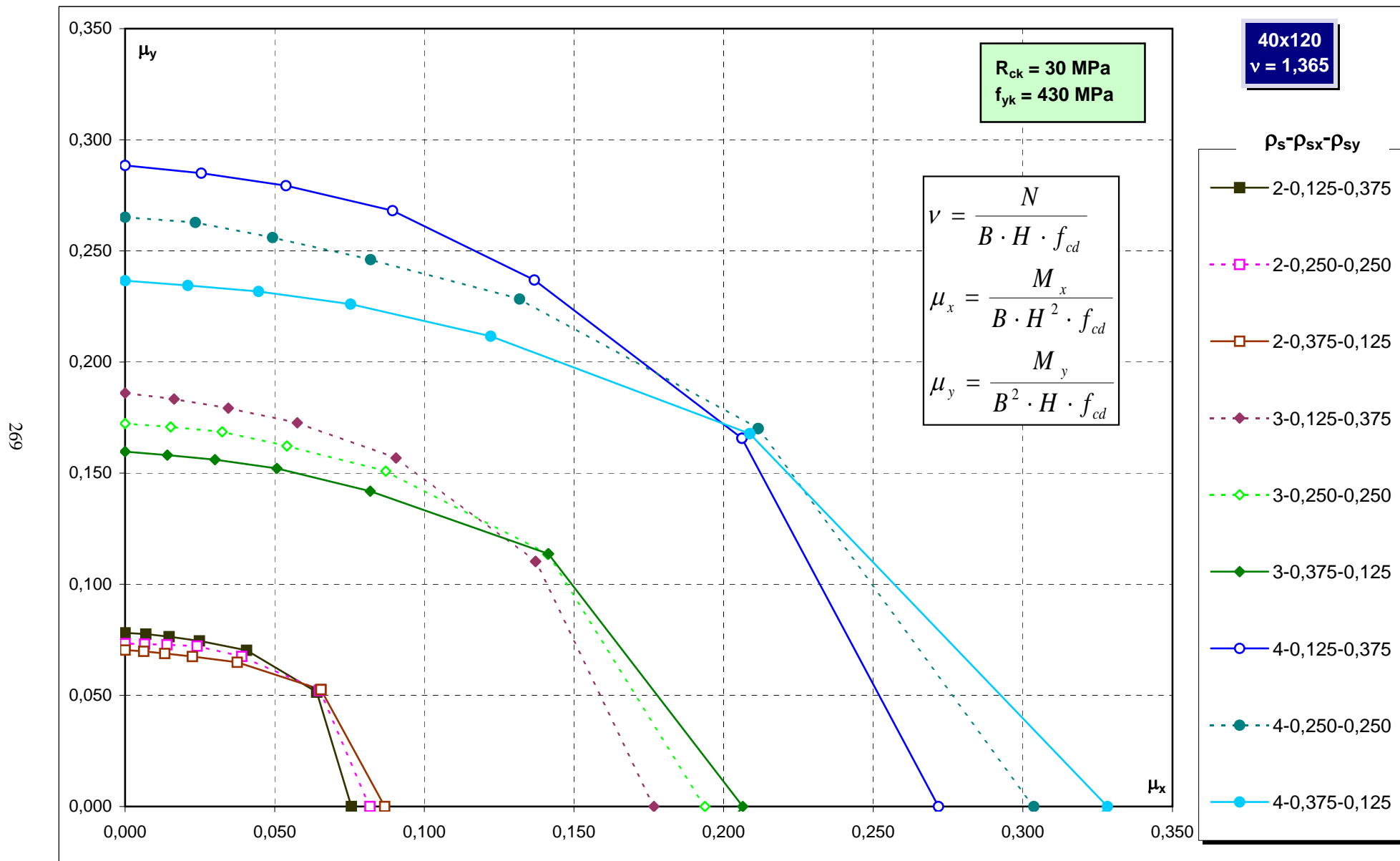
Abachi di progetto



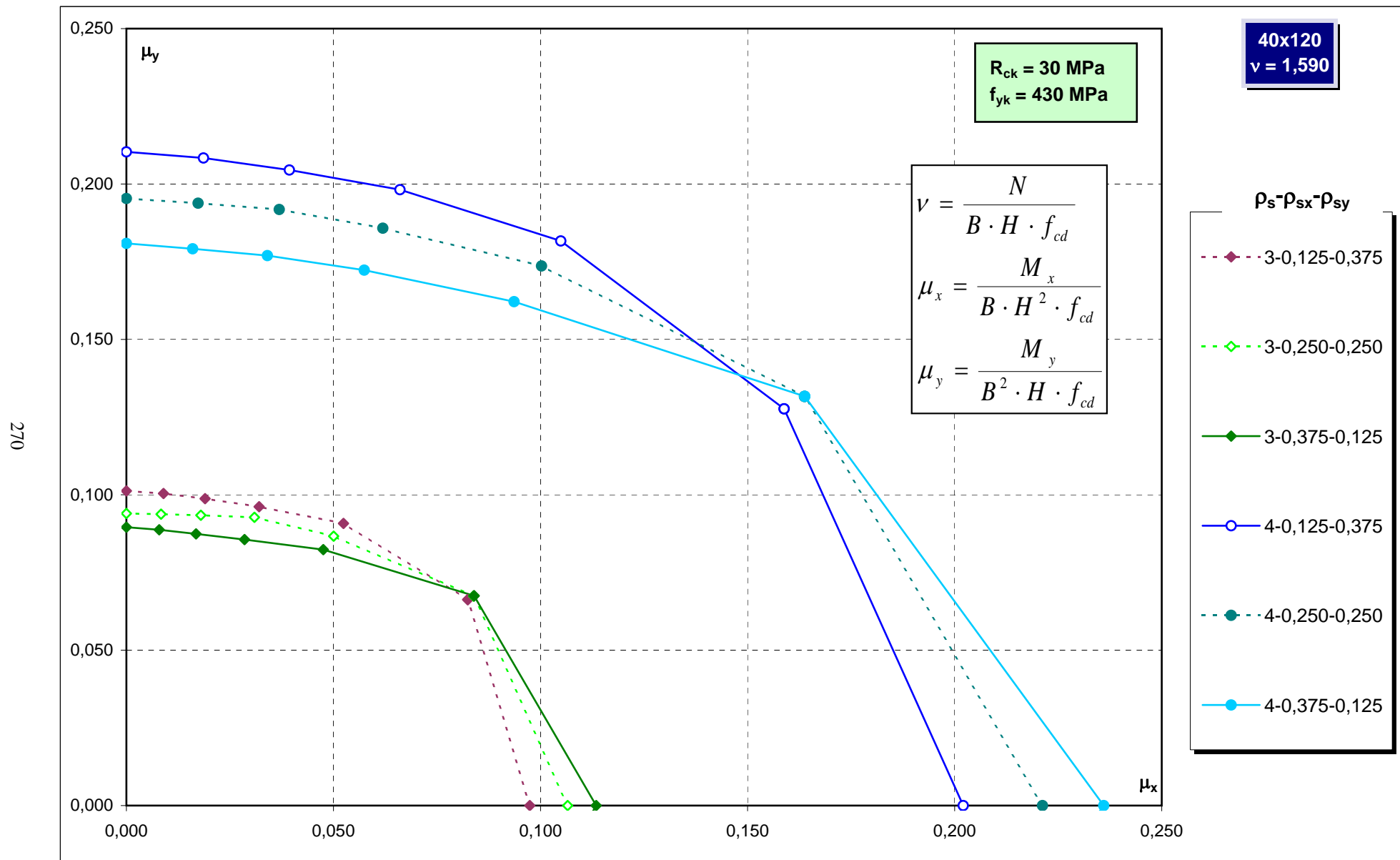
Abachi di progetto



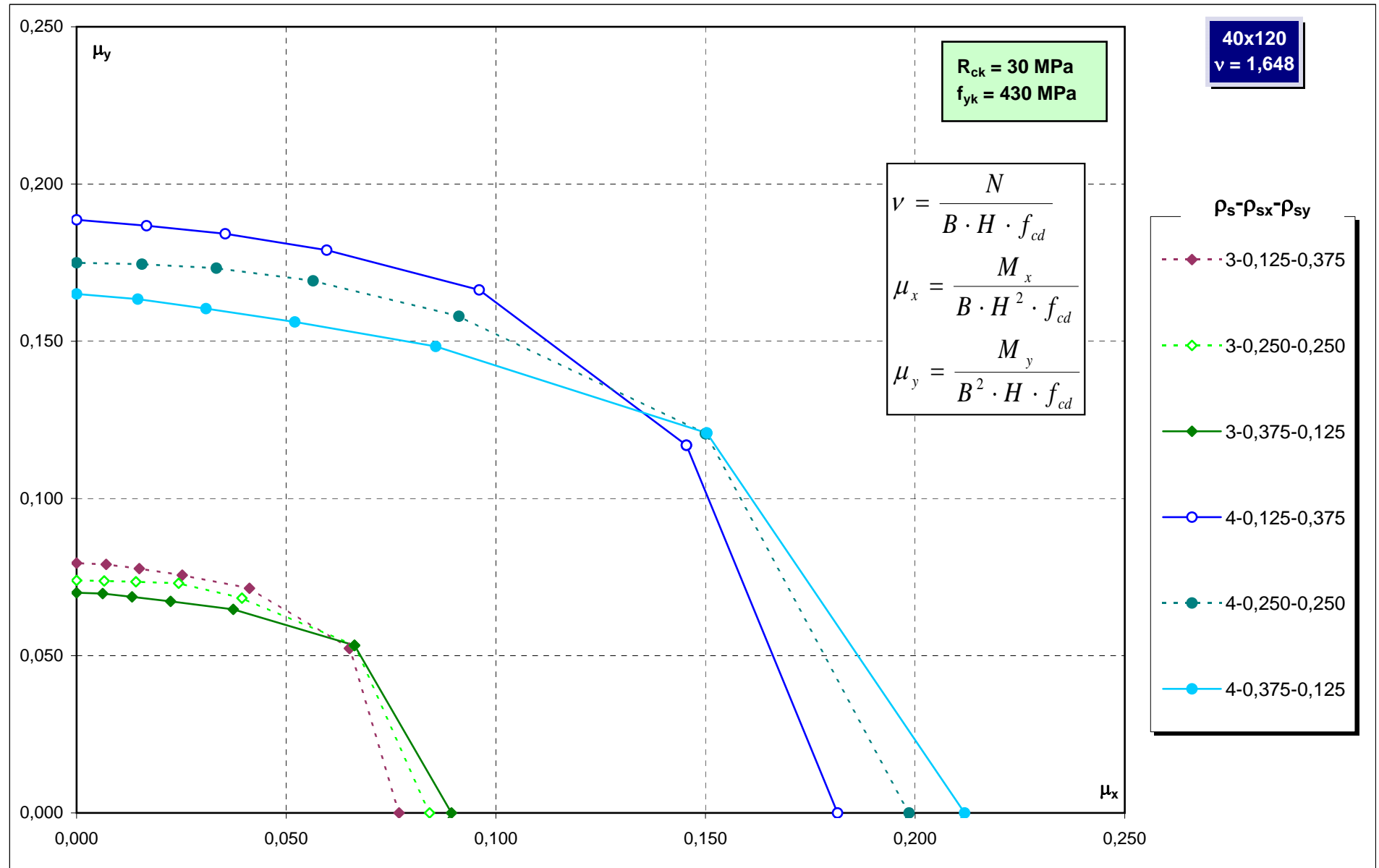
Abachi di progetto



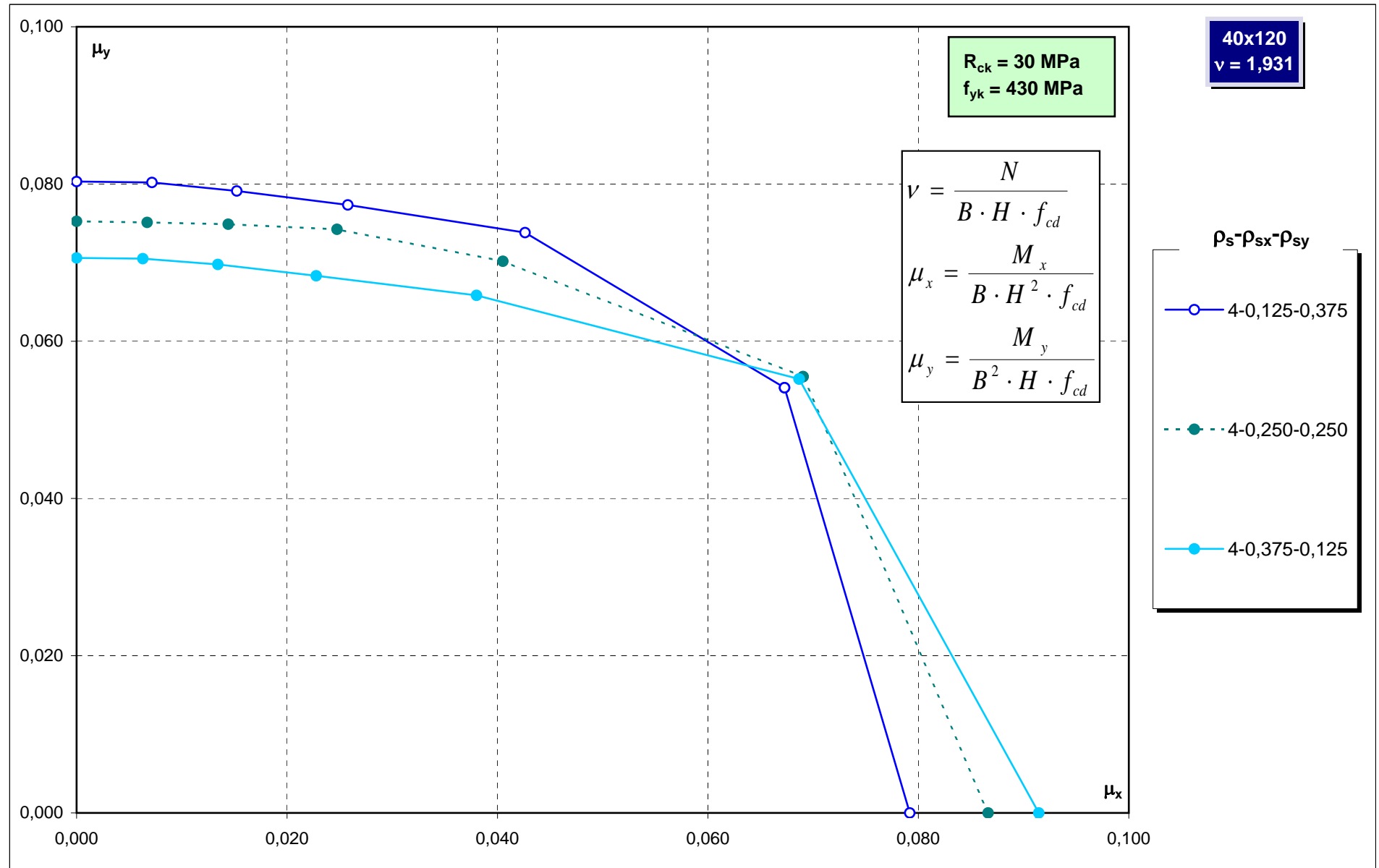
Abachi di progetto



Abachi di progetto



Abachi di progetto



Abachi di progetto

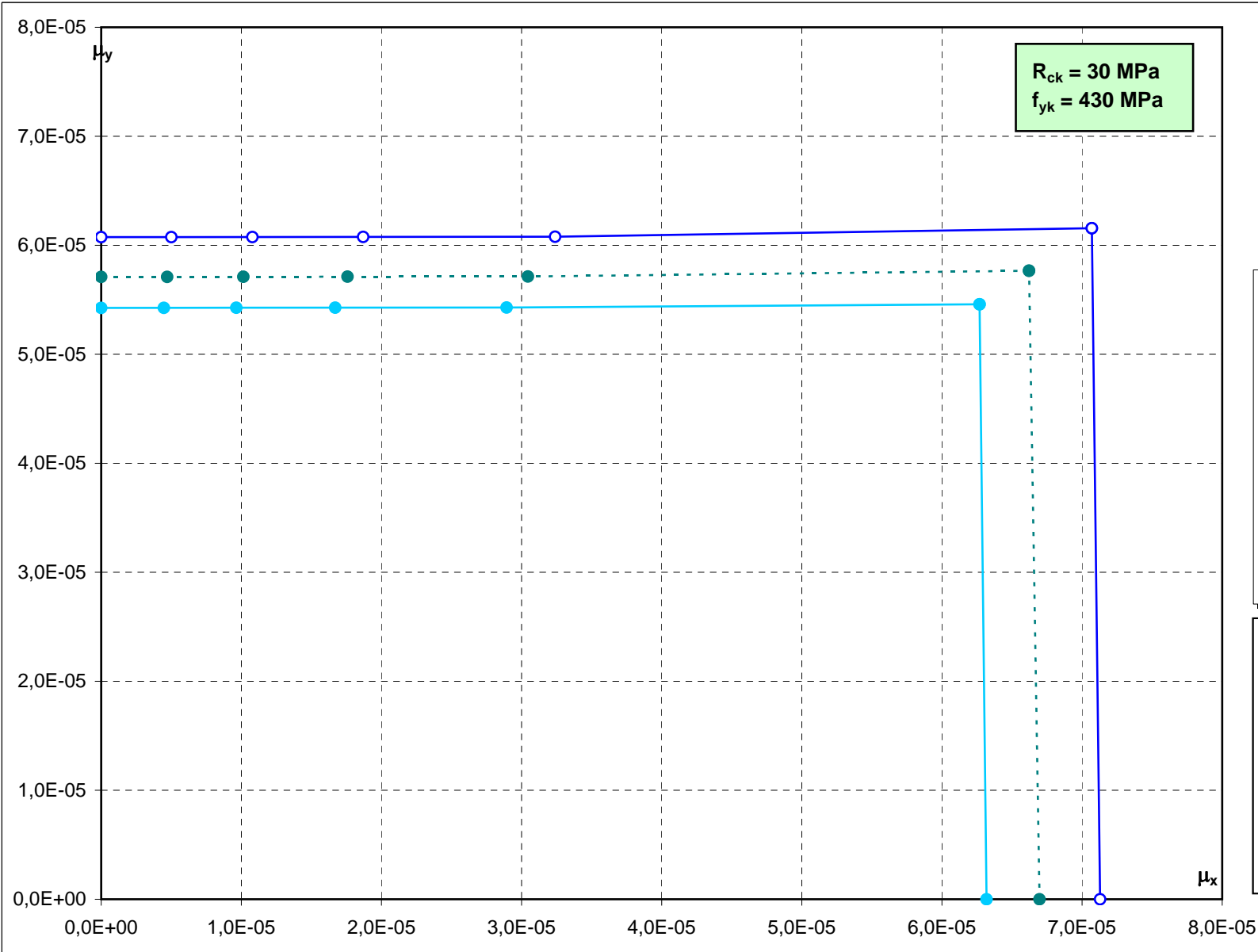
40x130
v = -1,131

R_{ck} = 30 MPa
f_{yk} = 430 MPa

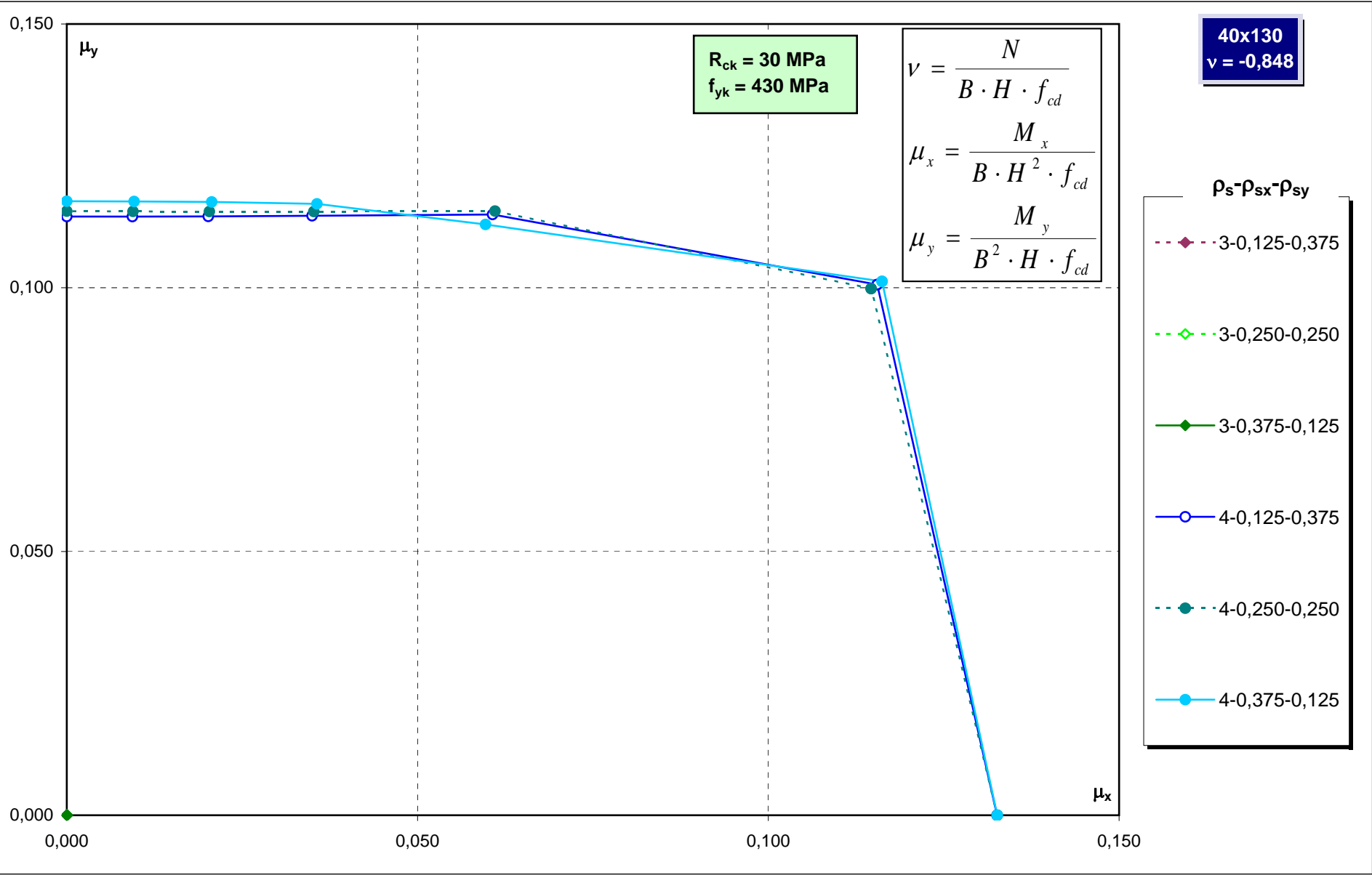
ρ_s-ρ_{sx}-ρ_{sy}

- 4-0,125-0,375
- 4-0,250-0,250
- 4-0,375-0,125

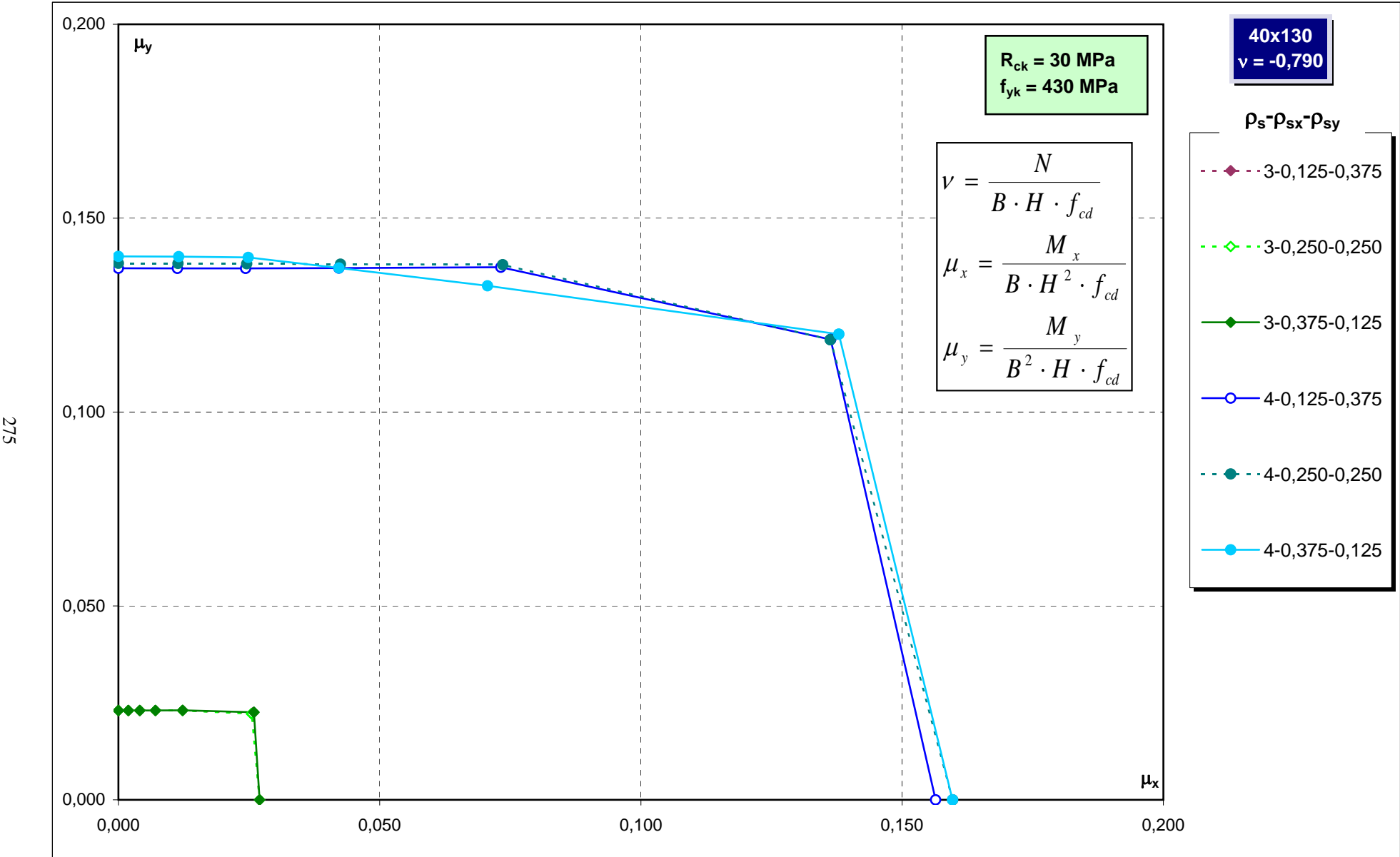
$$\nu = \frac{N}{B \cdot H \cdot f_{cd}}$$
$$\mu_x = \frac{M_x}{B \cdot H^2 \cdot f_{cd}}$$
$$\mu_y = \frac{M_y}{B^2 \cdot H \cdot f_{cd}}$$



Abachi di progetto

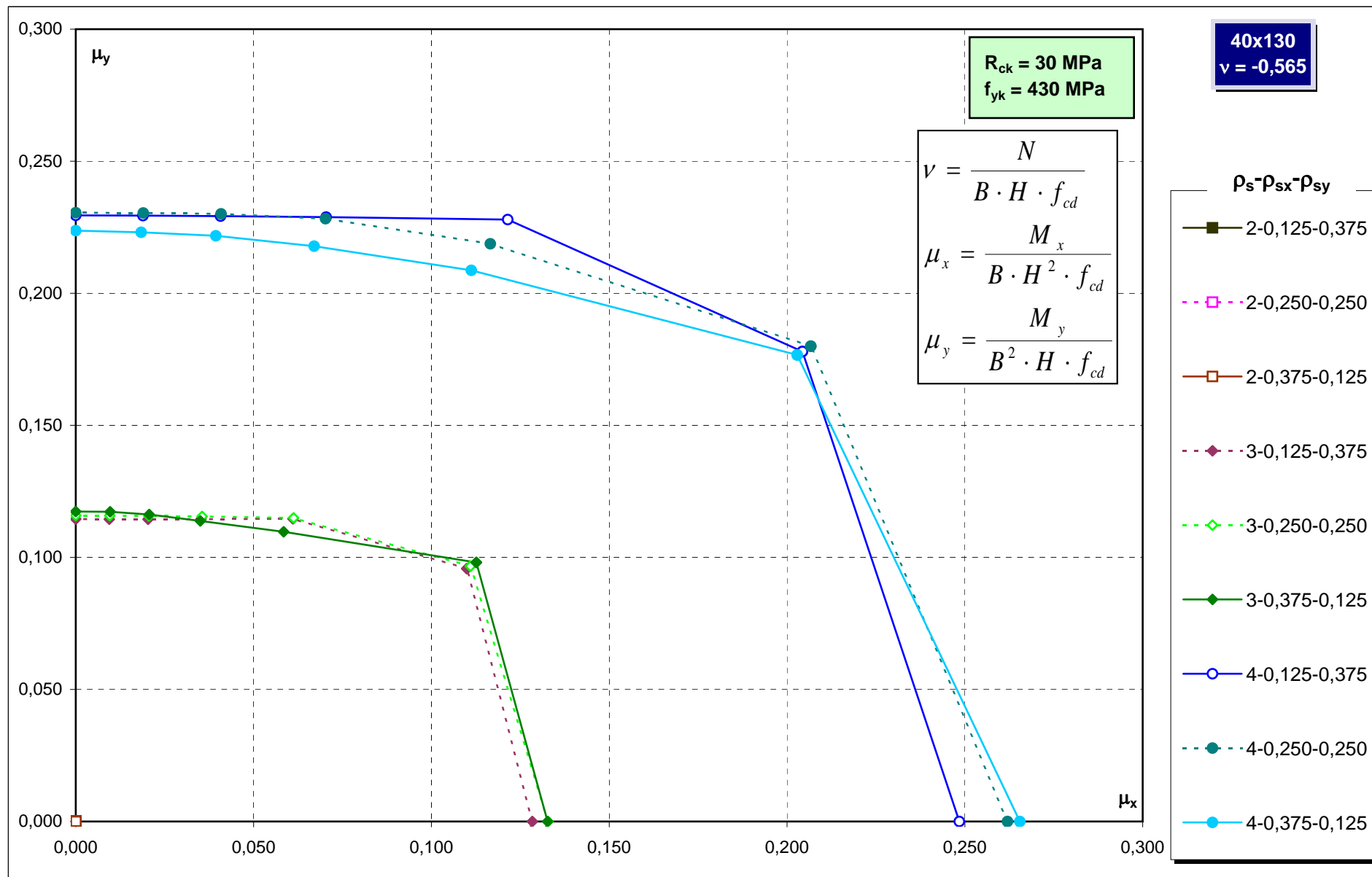


Abachi di progetto

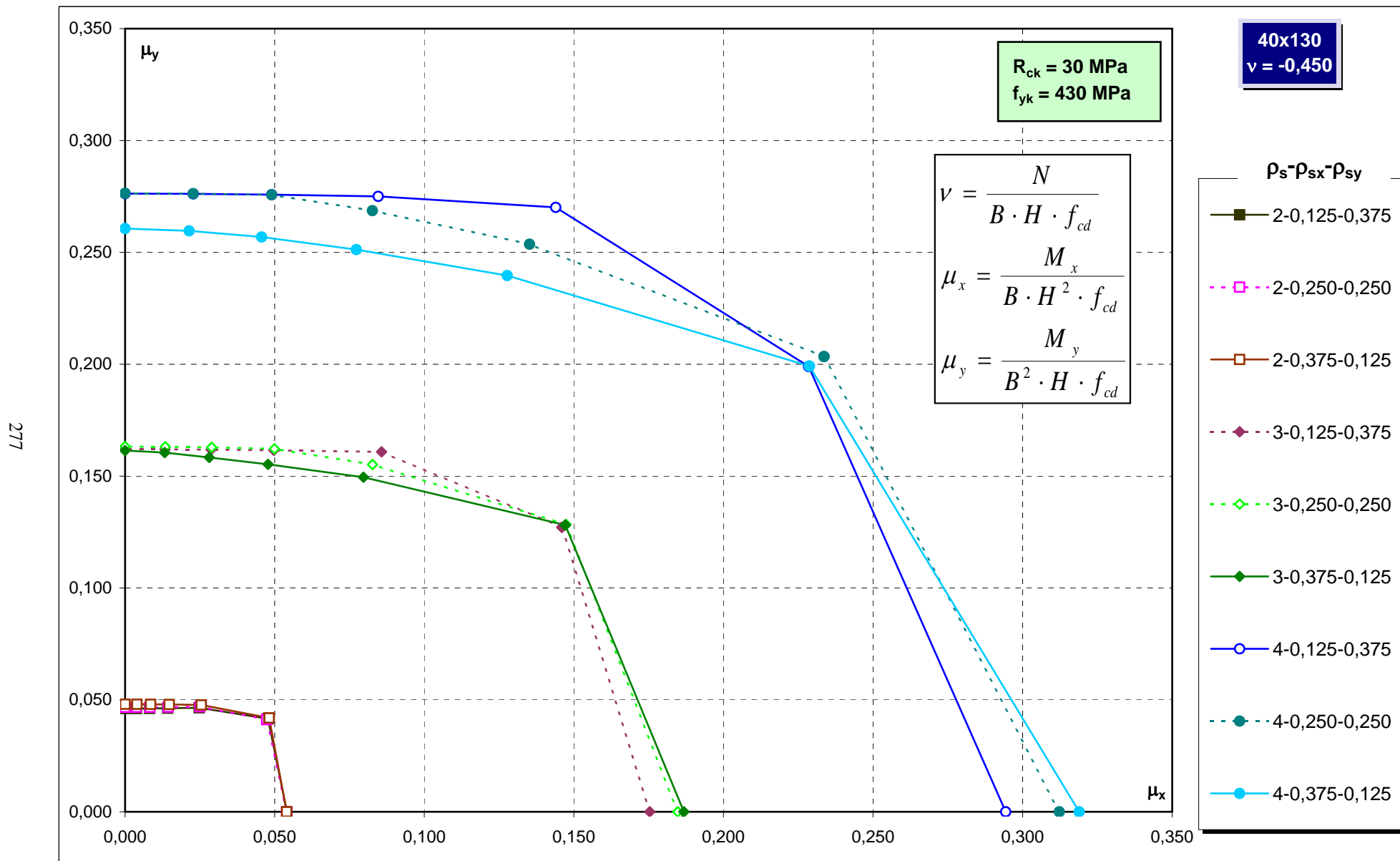


Abachi di progetto

276

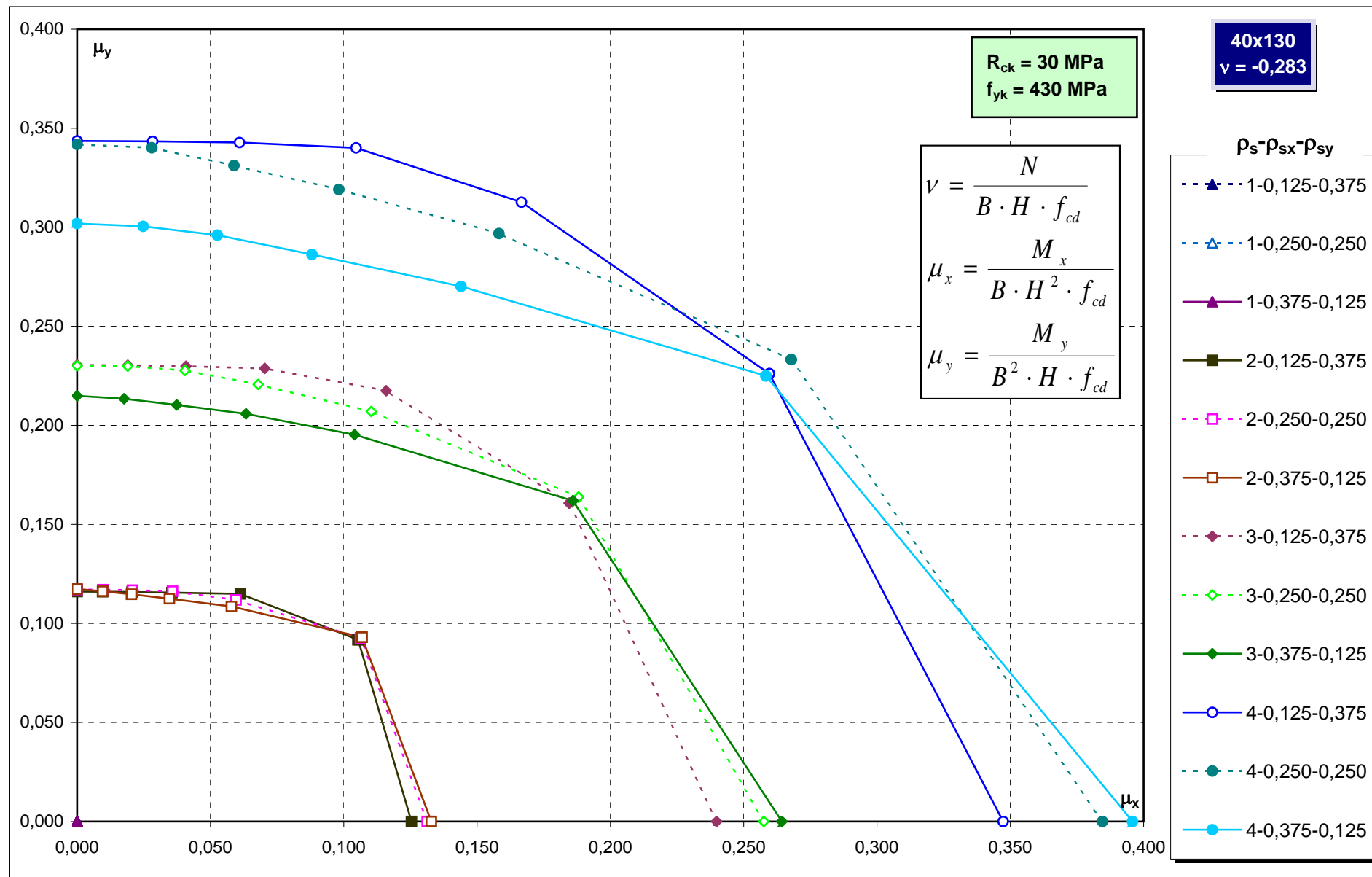


Abachi di progetto



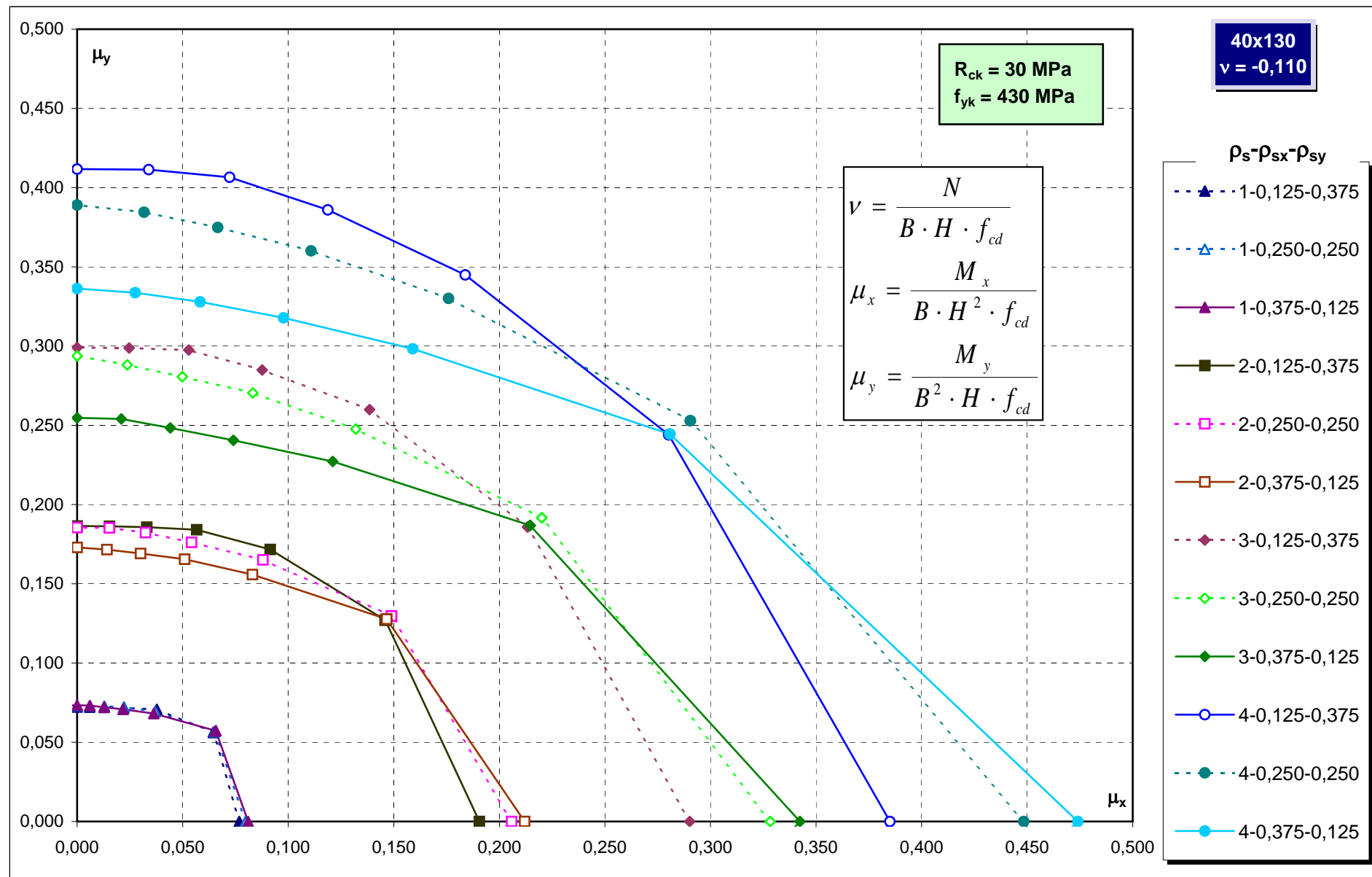
Abachi di progetto

278

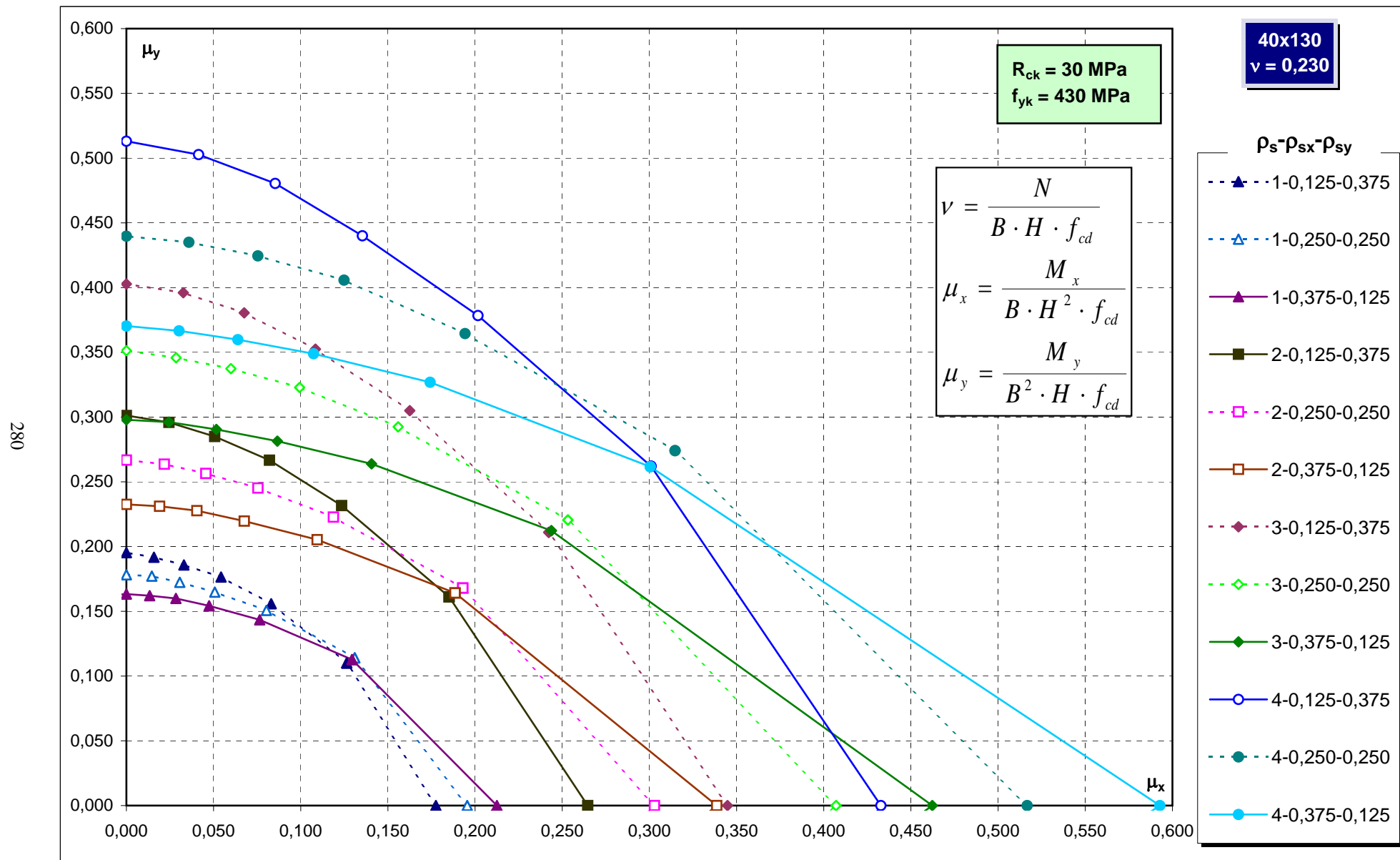


Abachi di progetto

279

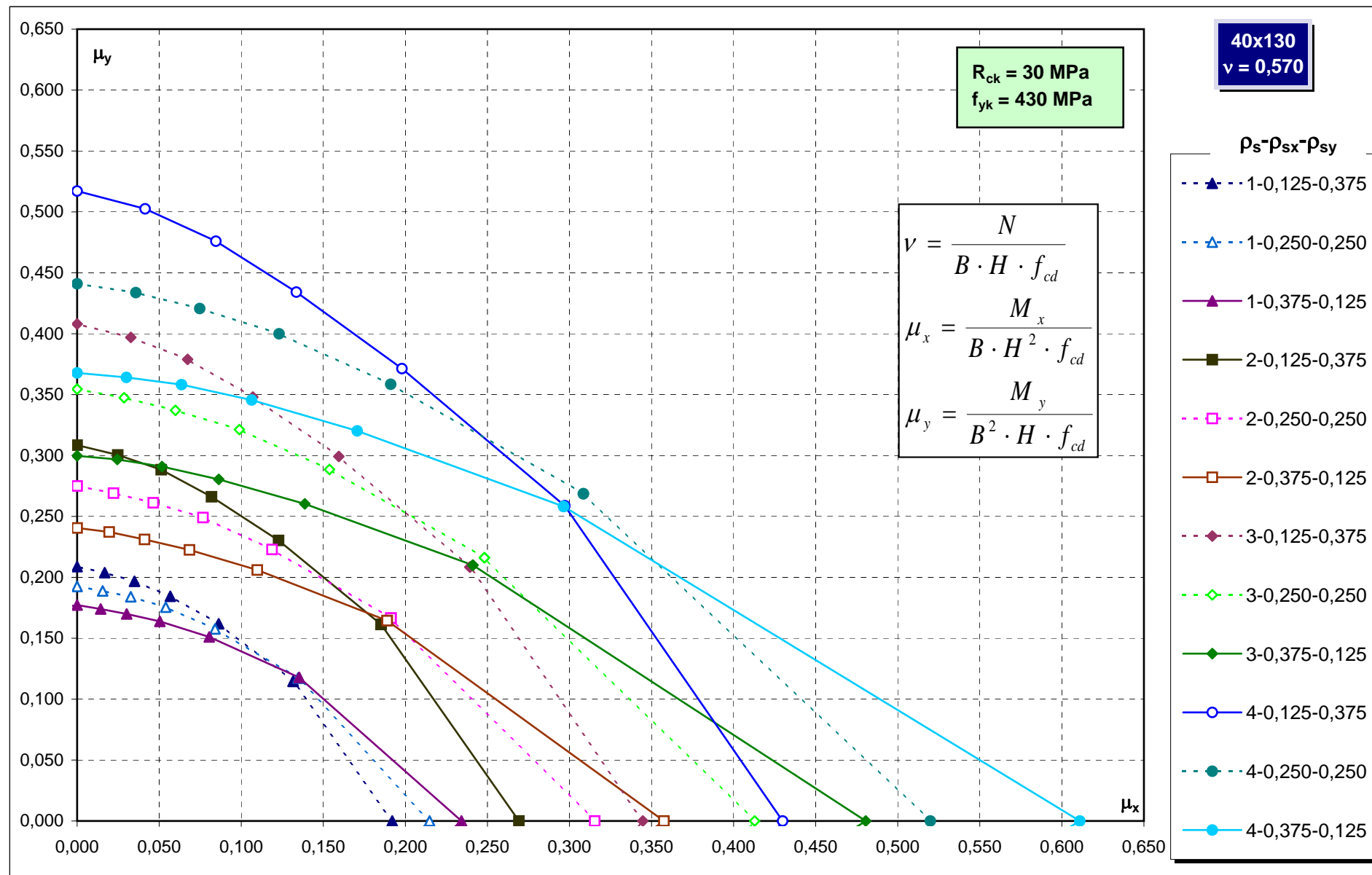


Abachi di progetto

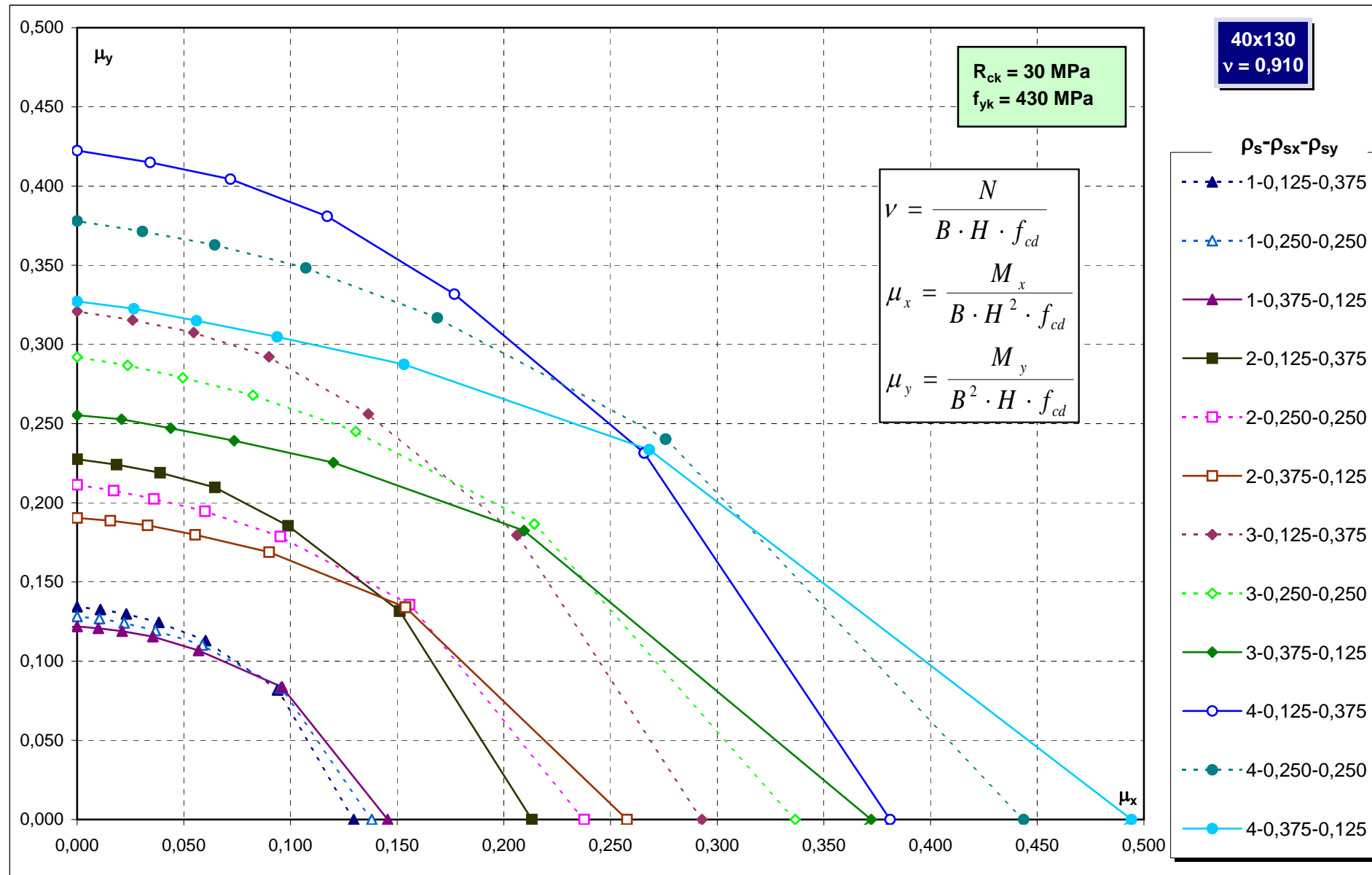


Abachi di progetto

281

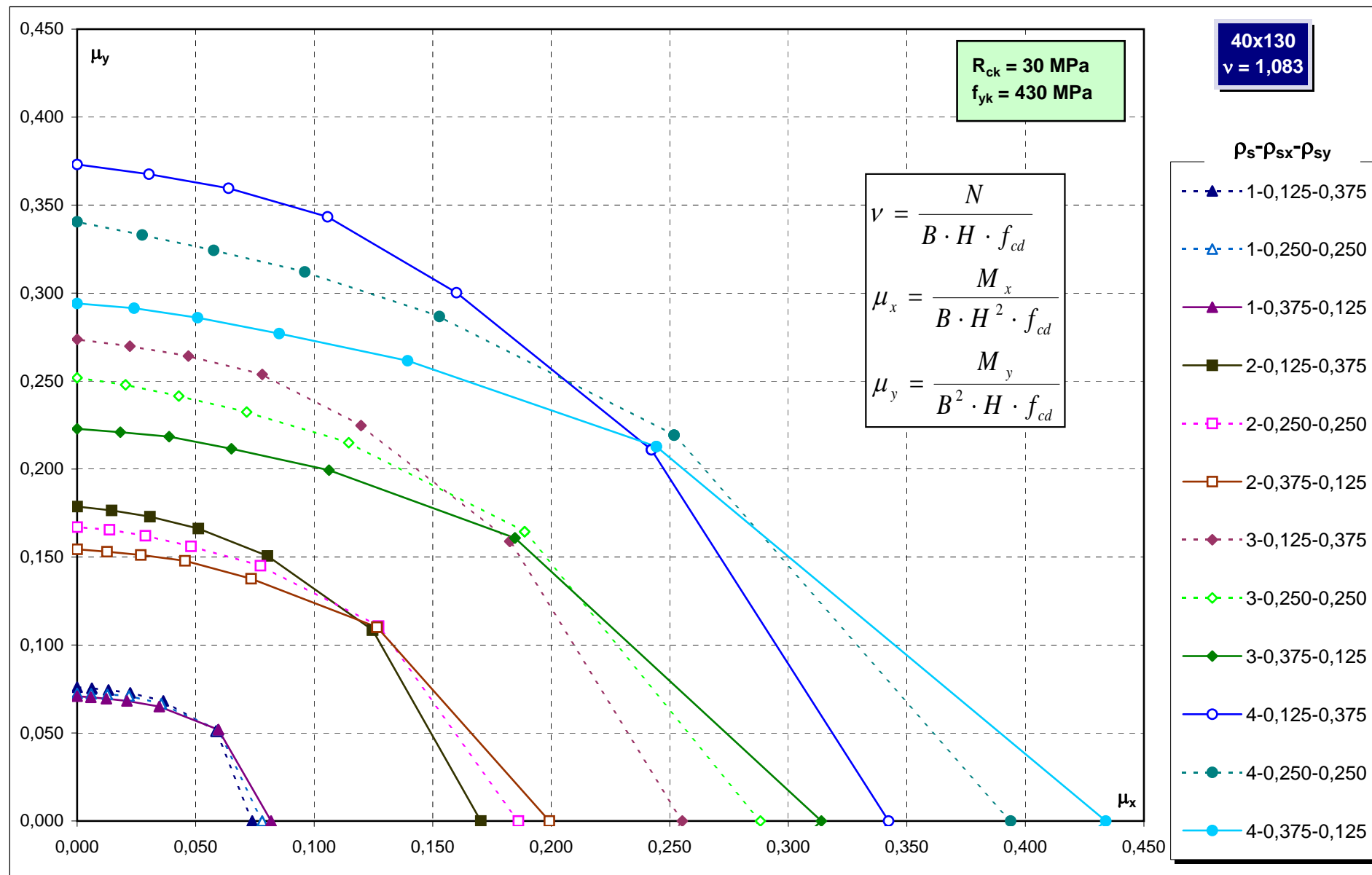


Abachi di progetto



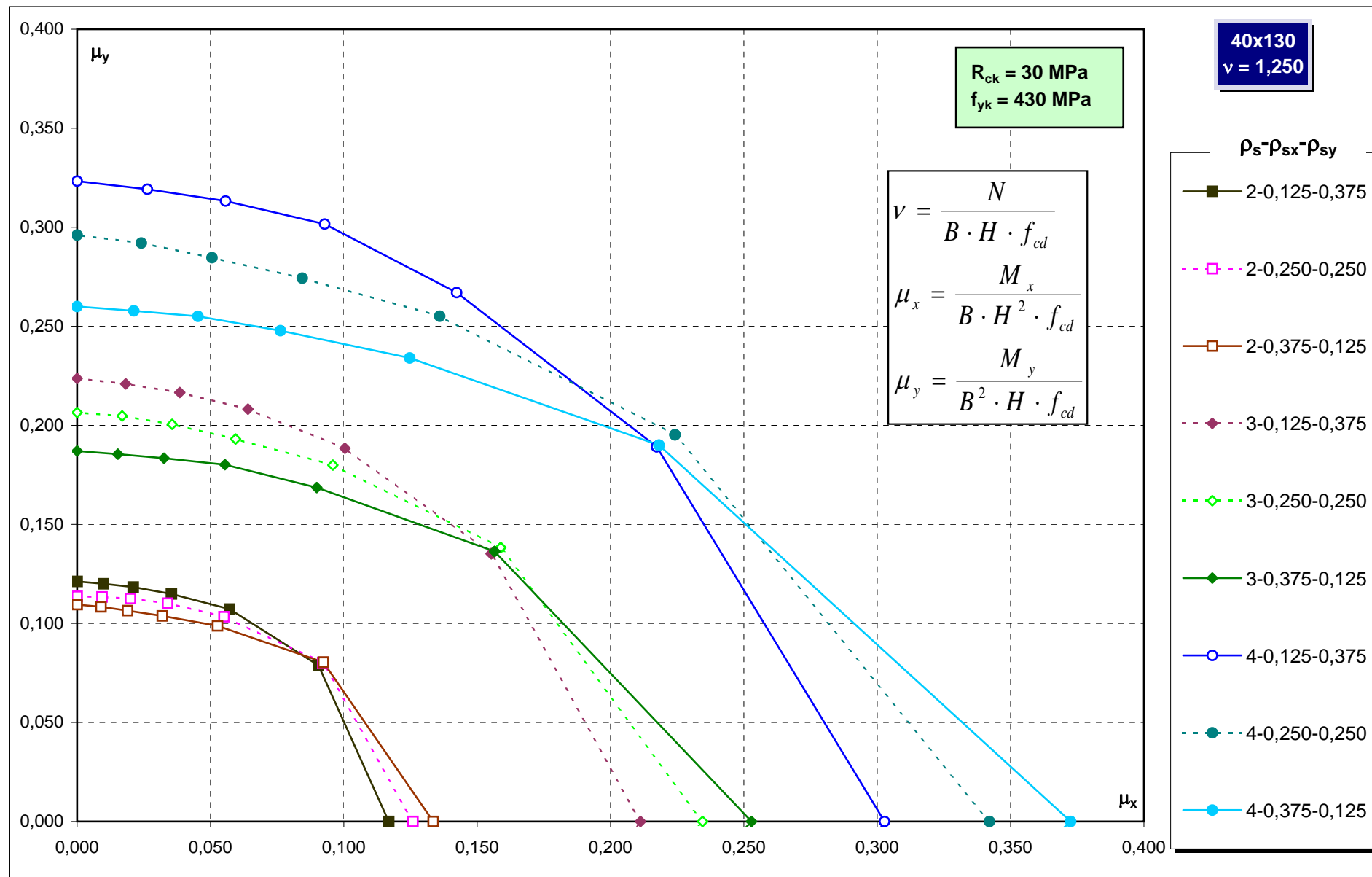
Abachi di progetto

283

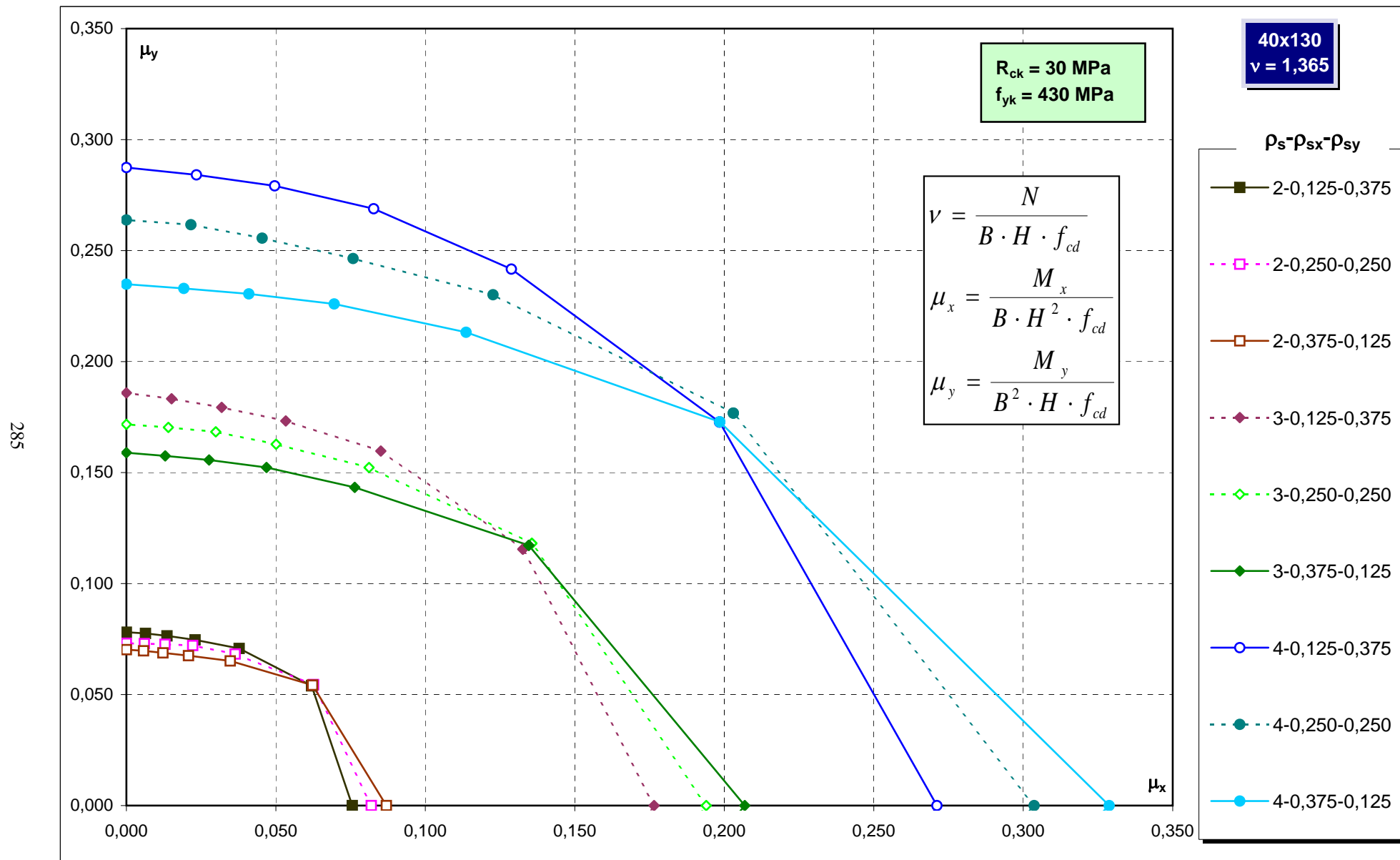


Abachi di progetto

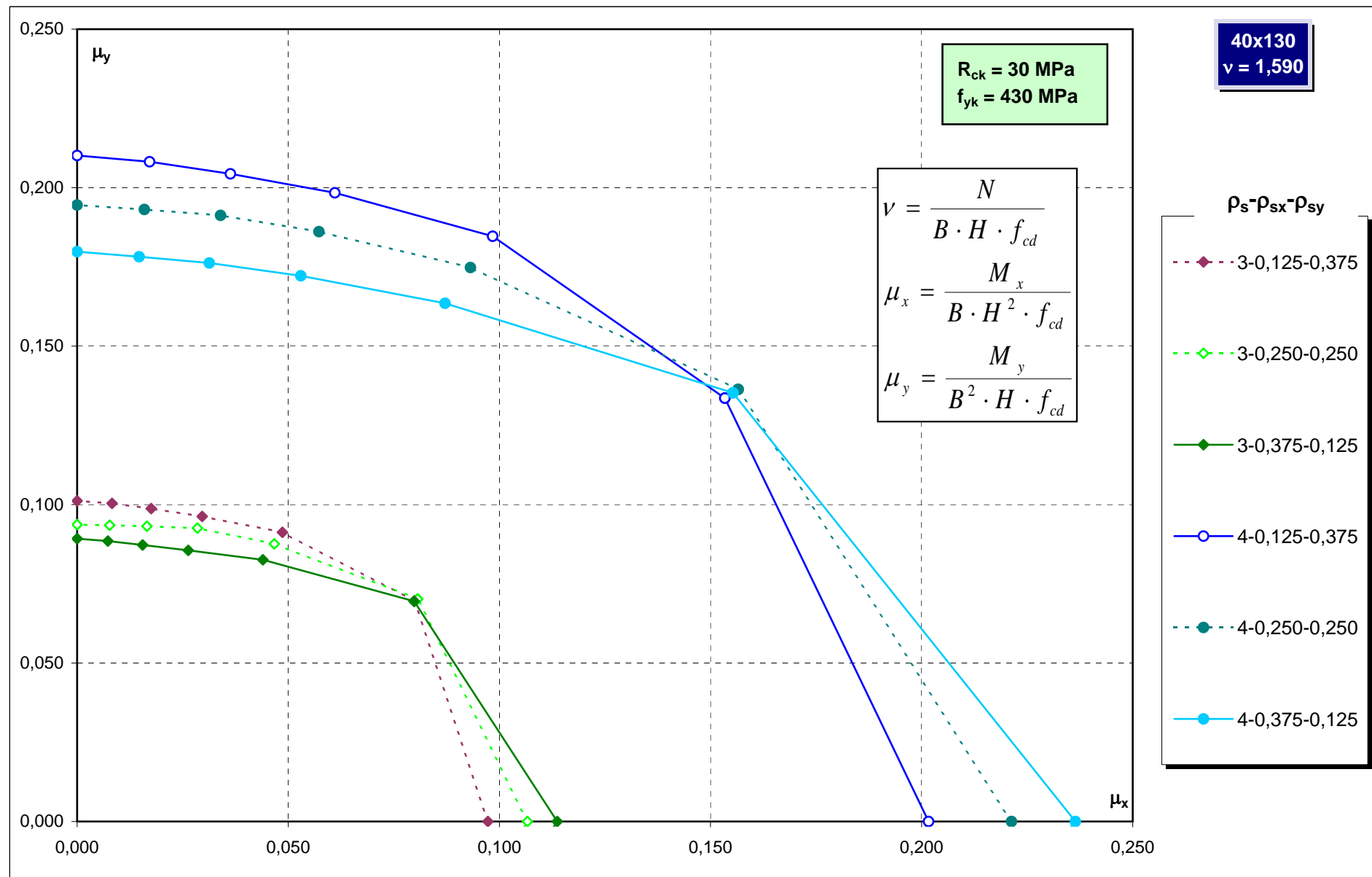
284



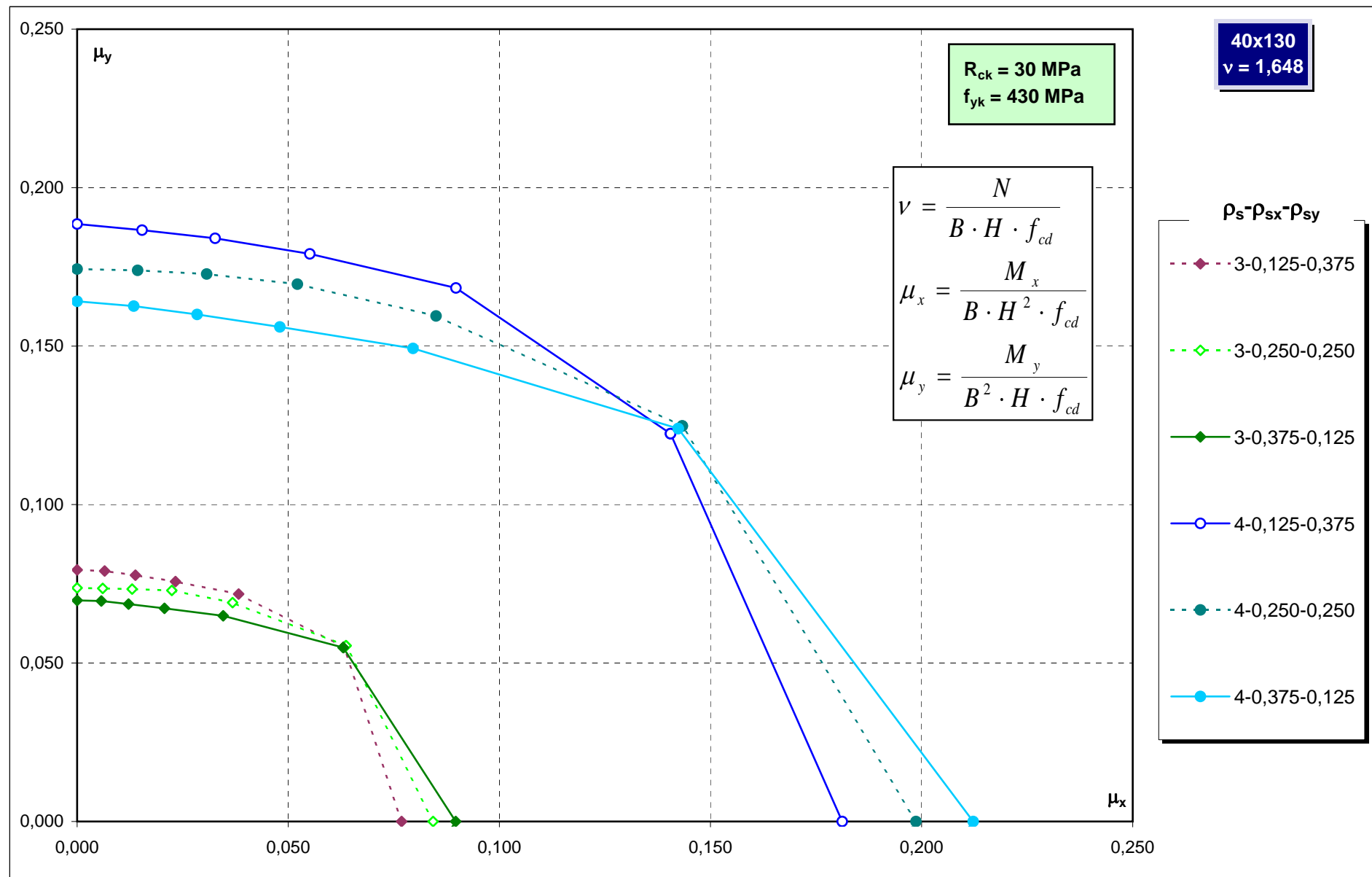
Abachi di progetto



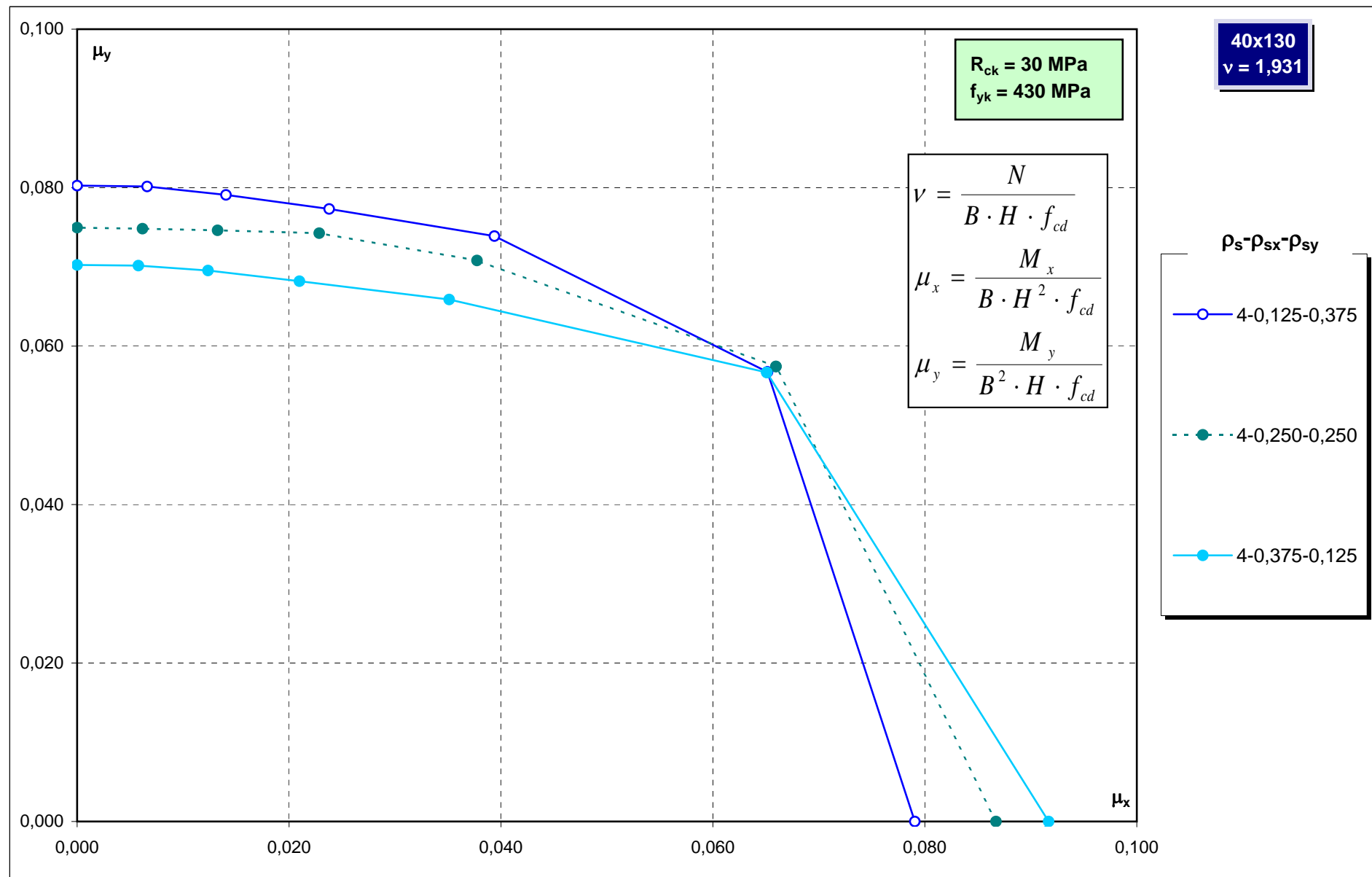
Abachi di progetto



Abachi di progetto



Abachi di progetto



Abachi di progetto

50x50
v = -1,131

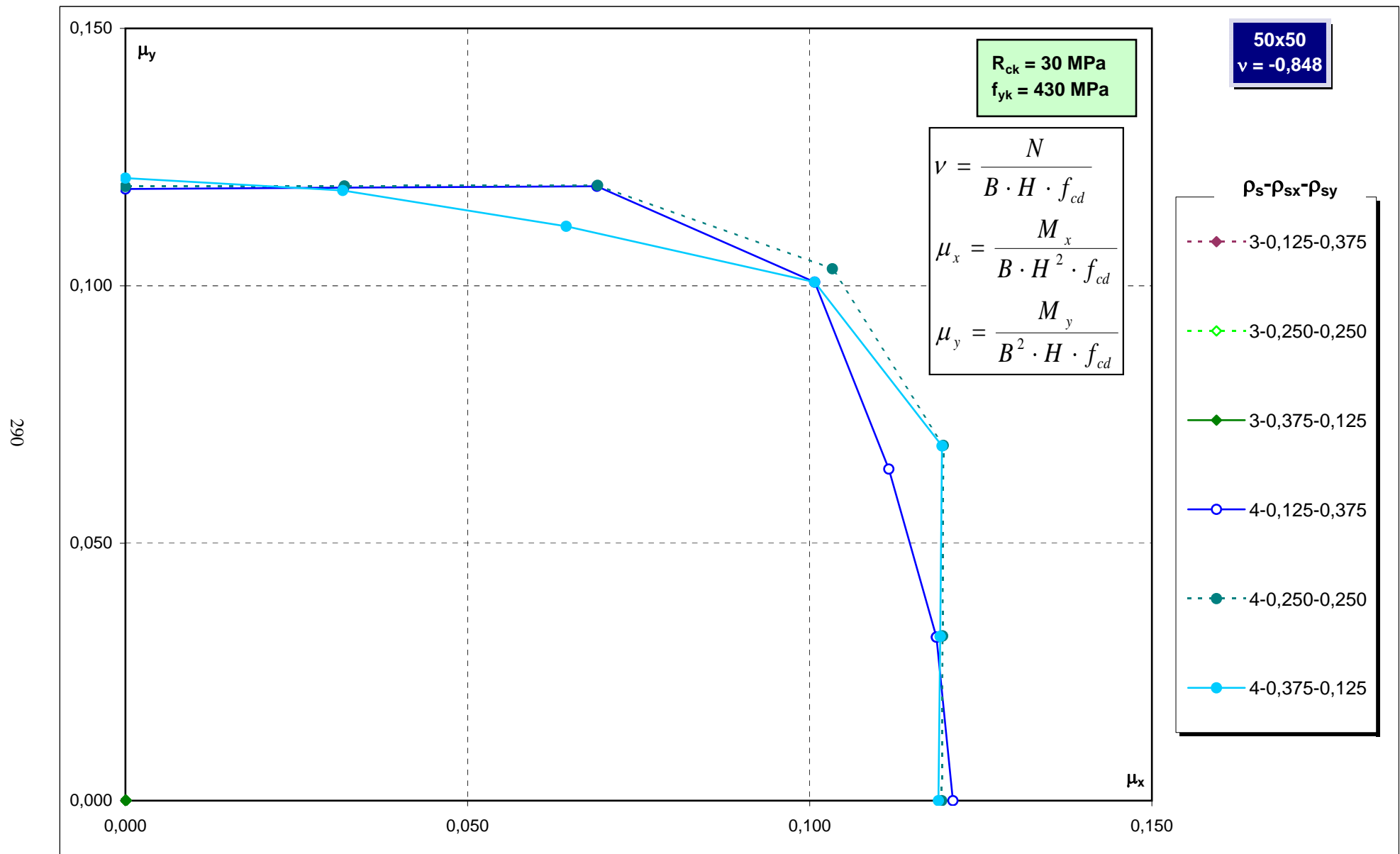
R_{ck} = 30 MPa
f_{yk} = 430 MPa

ρ_s-ρ_{sx}-ρ_{sy}

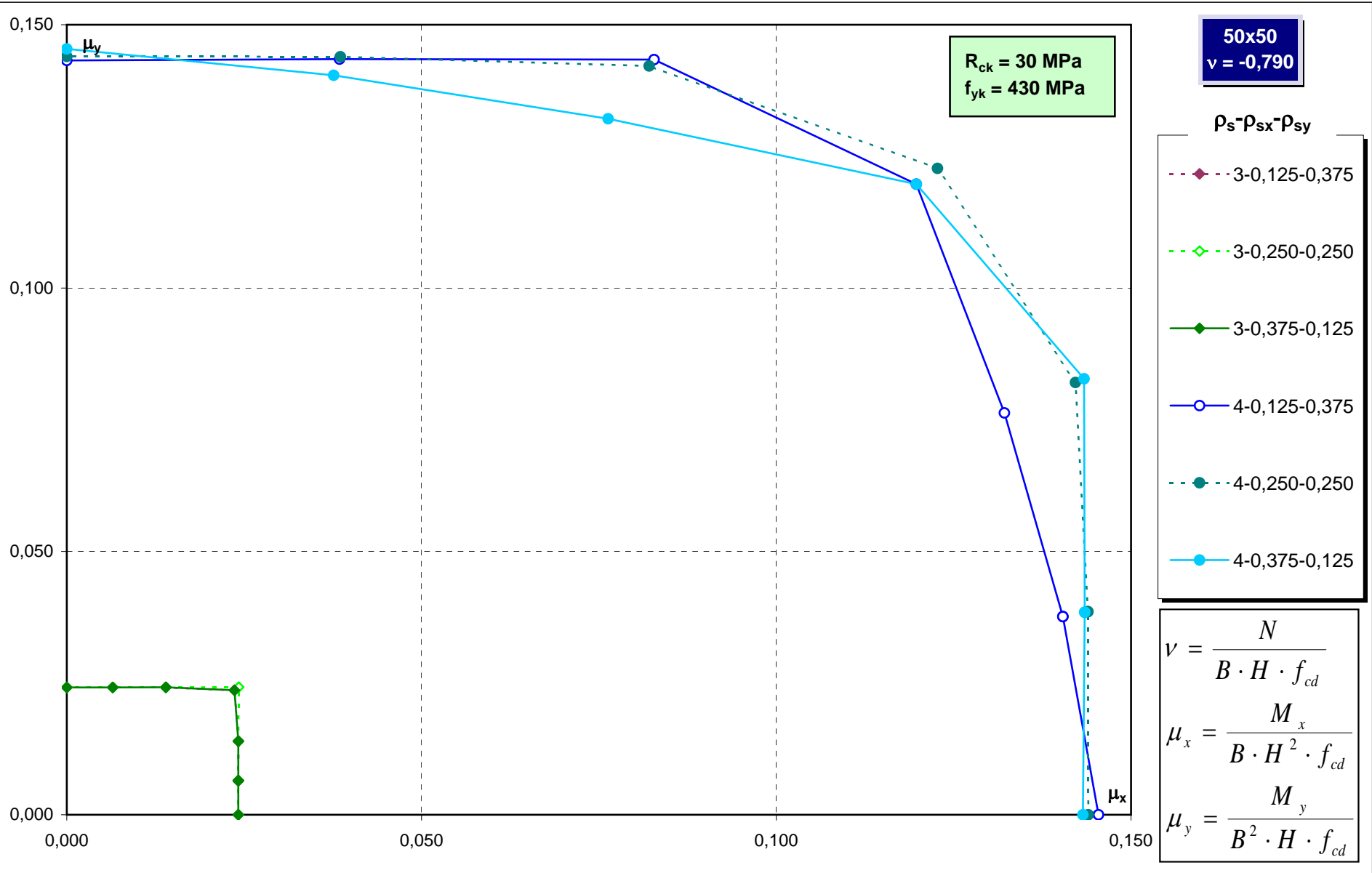
- 4-0,125-0,375
- 4-0,250-0,250
- 4-0,375-0,125

$$\nu = \frac{N}{B \cdot H \cdot f_{cd}}$$
$$\mu_x = \frac{M_x}{B \cdot H^2 \cdot f_{cd}}$$
$$\mu_y = \frac{M_y}{B^2 \cdot H \cdot f_{cd}}$$

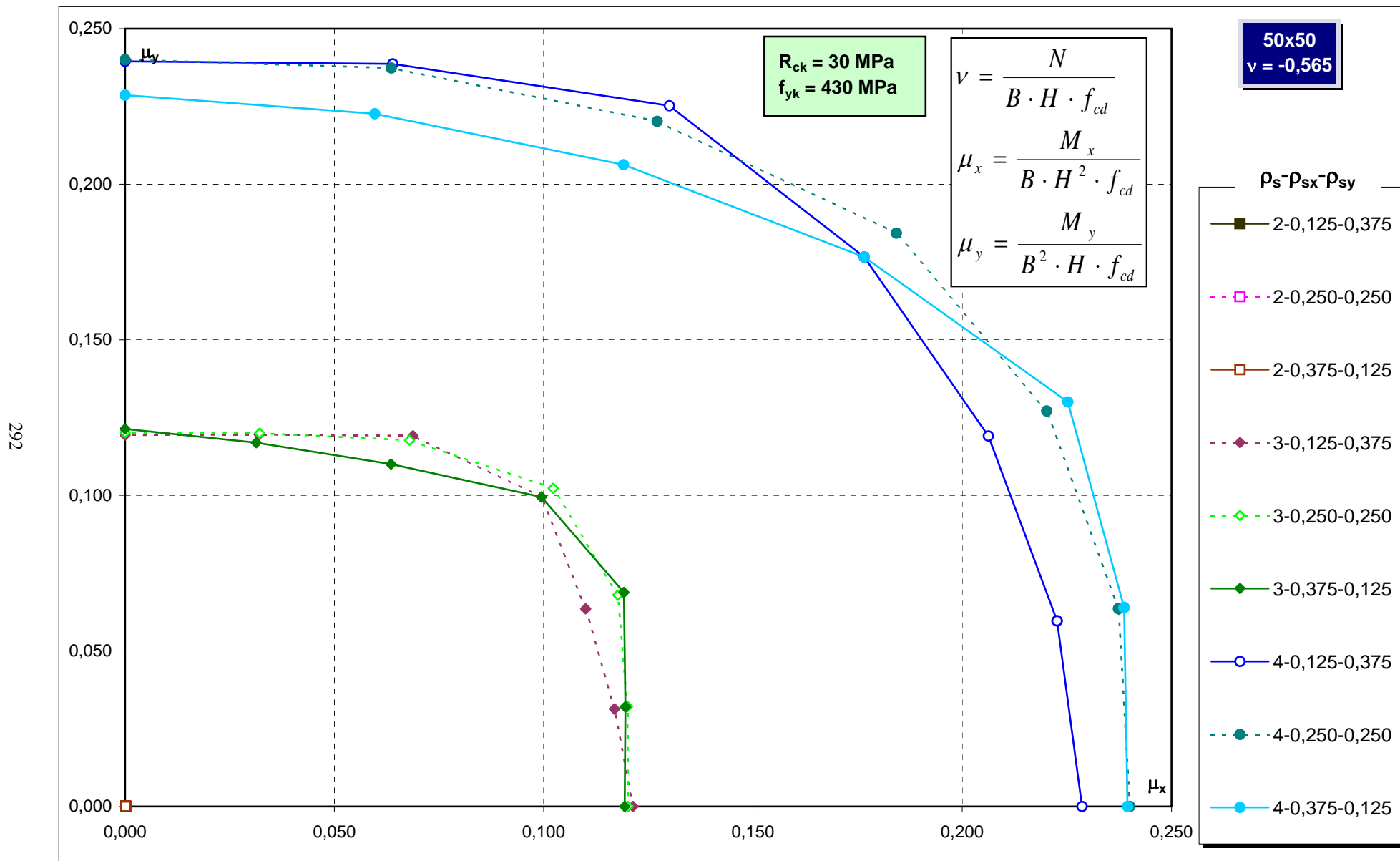
Abachi di progetto



Abachi di progetto

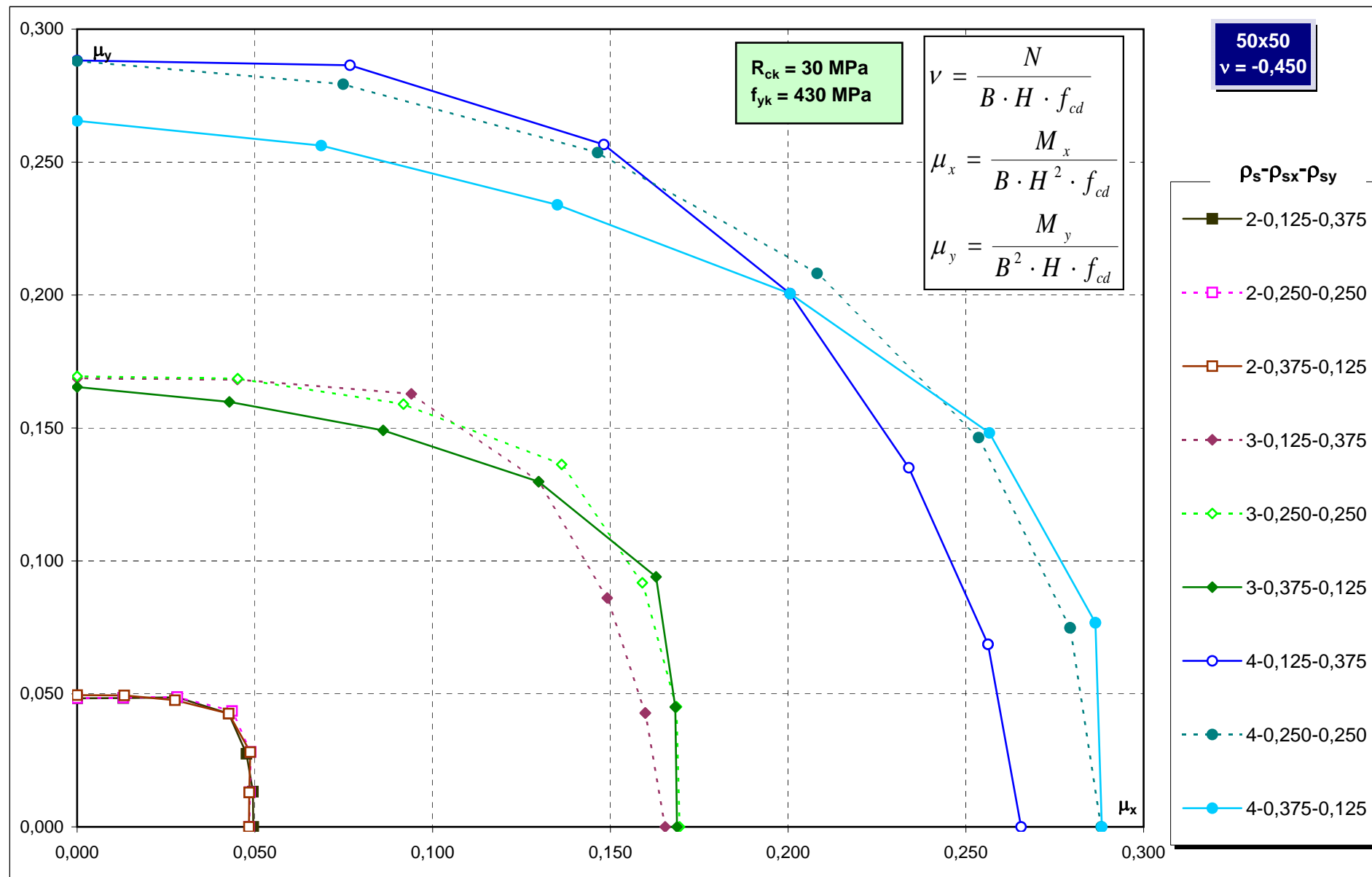


Abachi di progetto

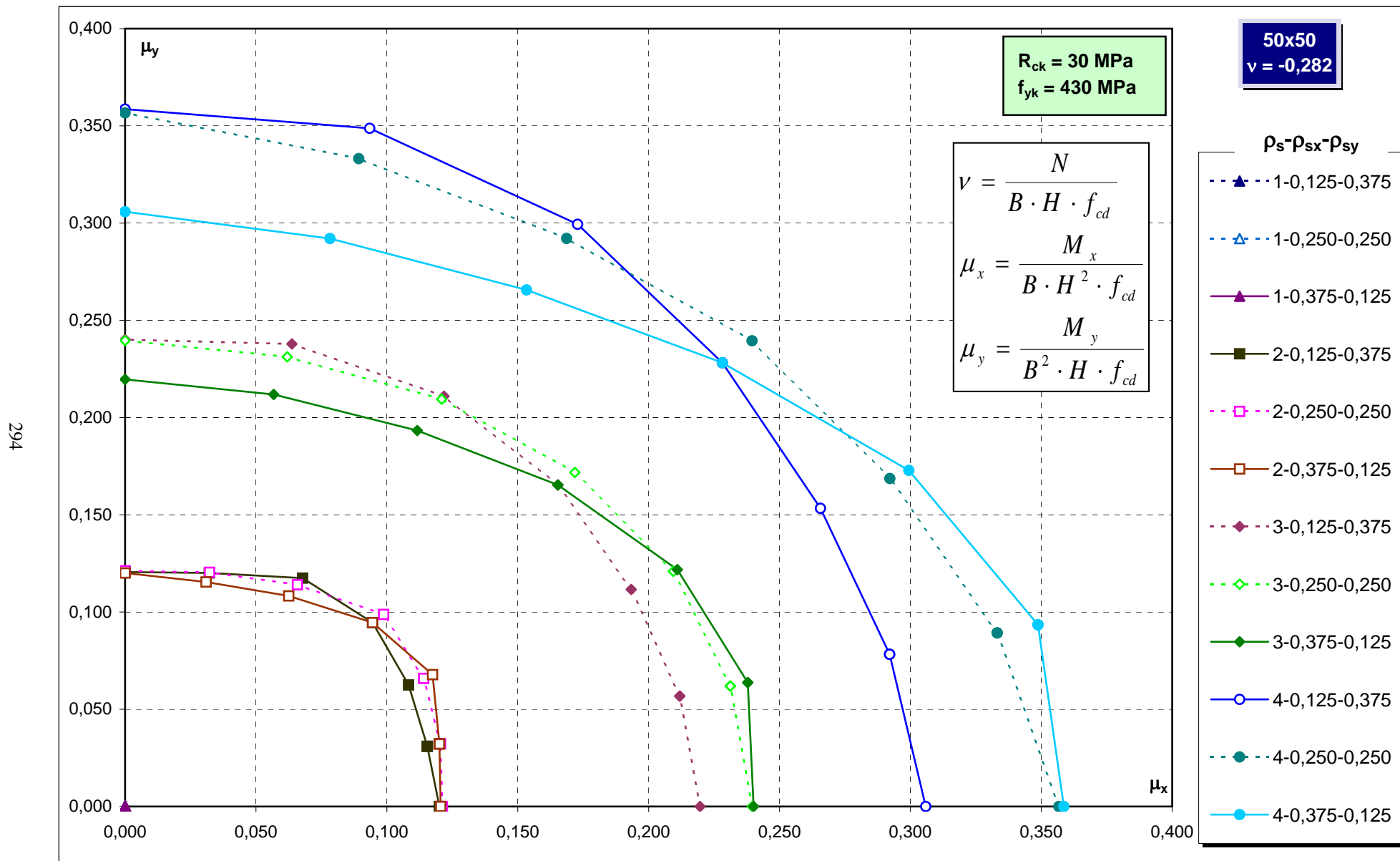


Abachi di progetto

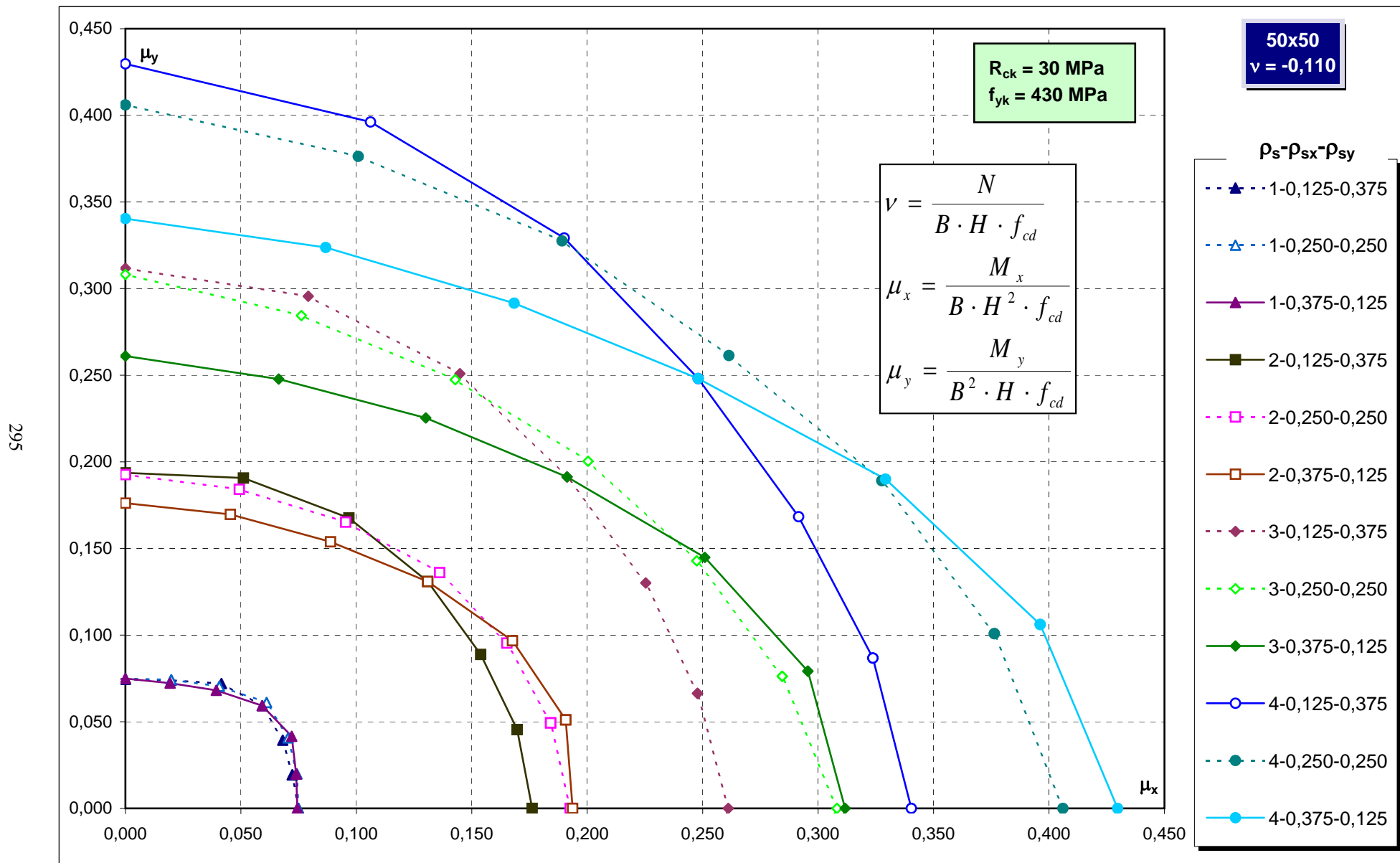
293



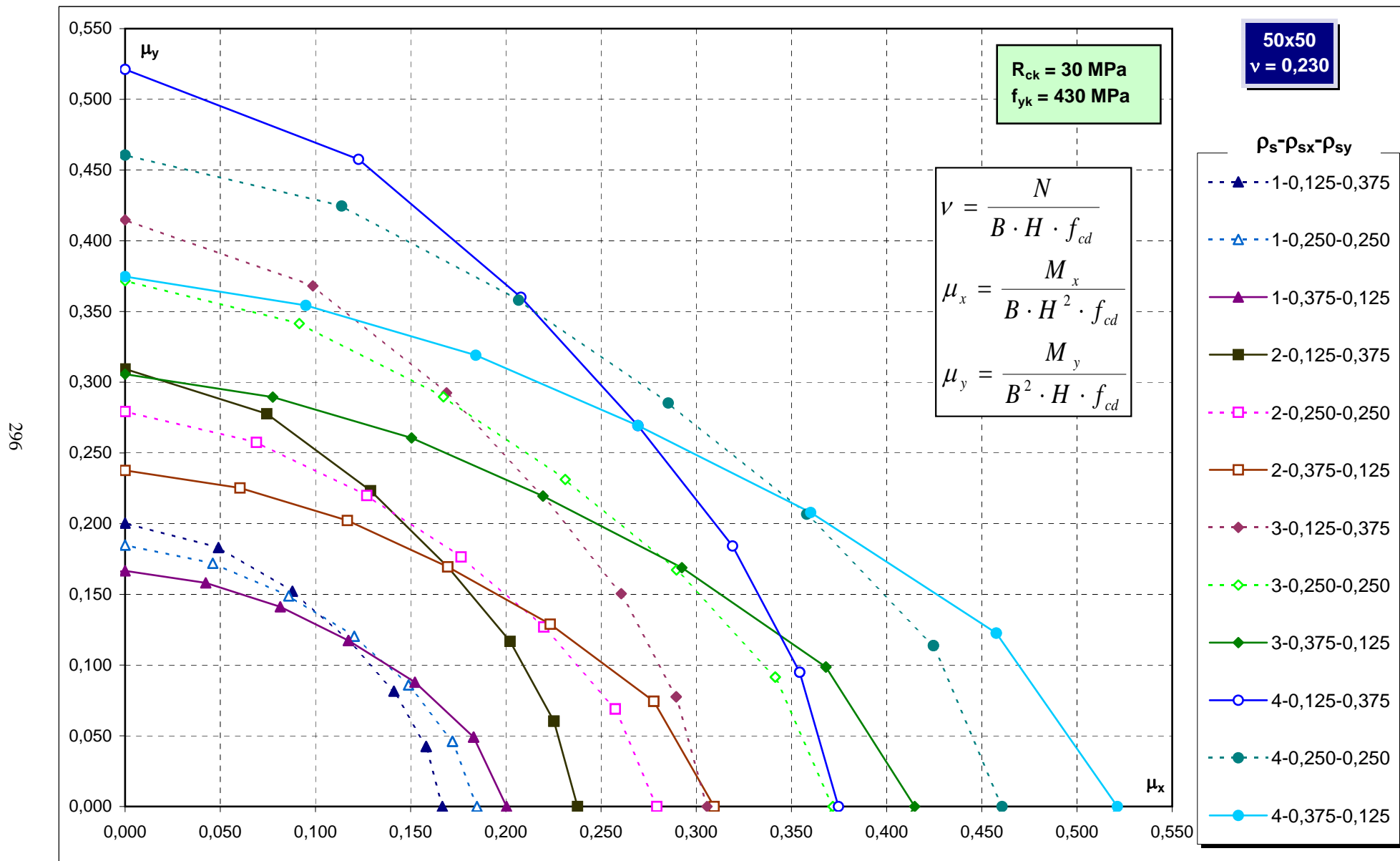
Abachi di progetto



Abachi di progetto

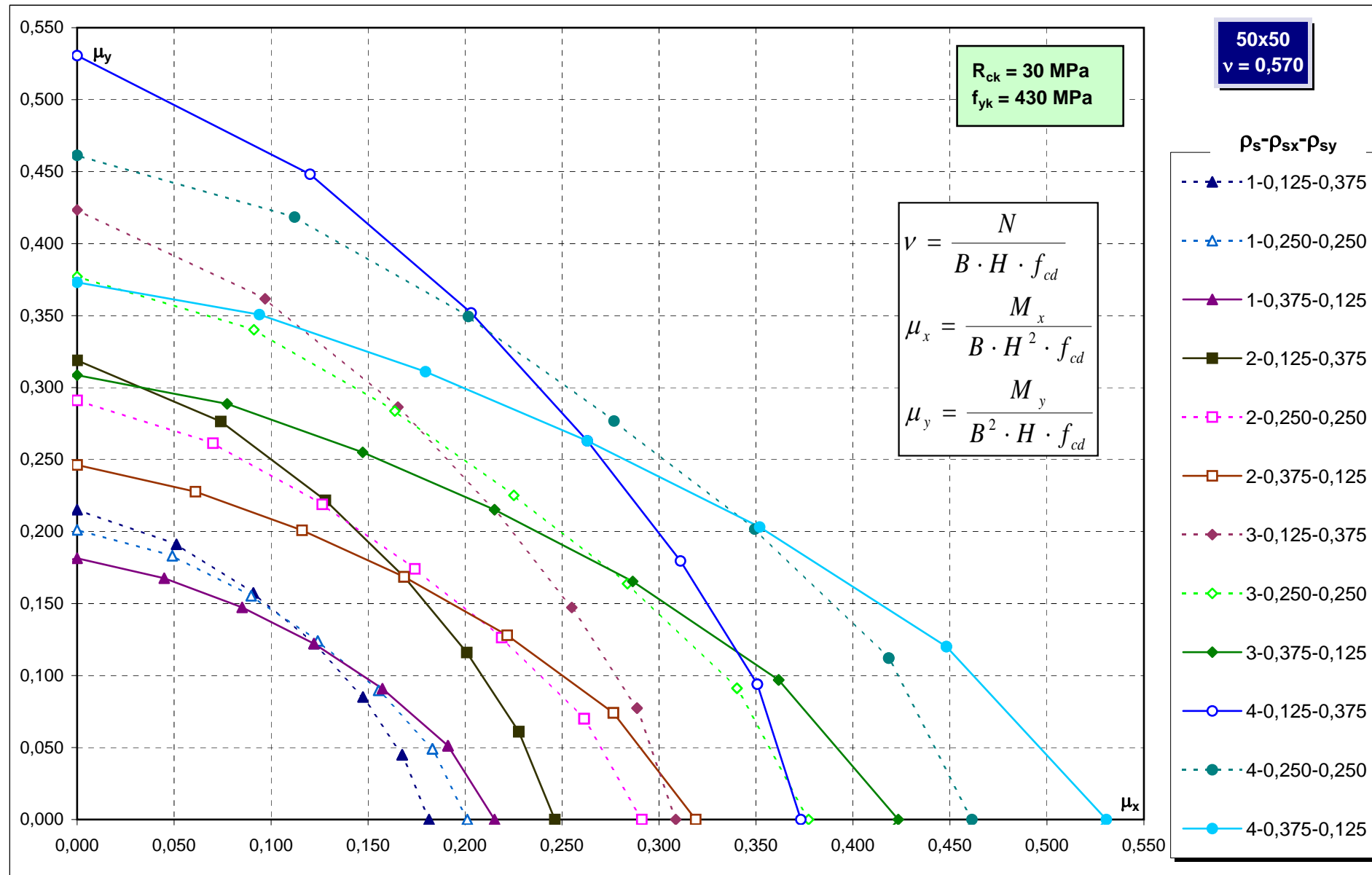


Abachi di progetto

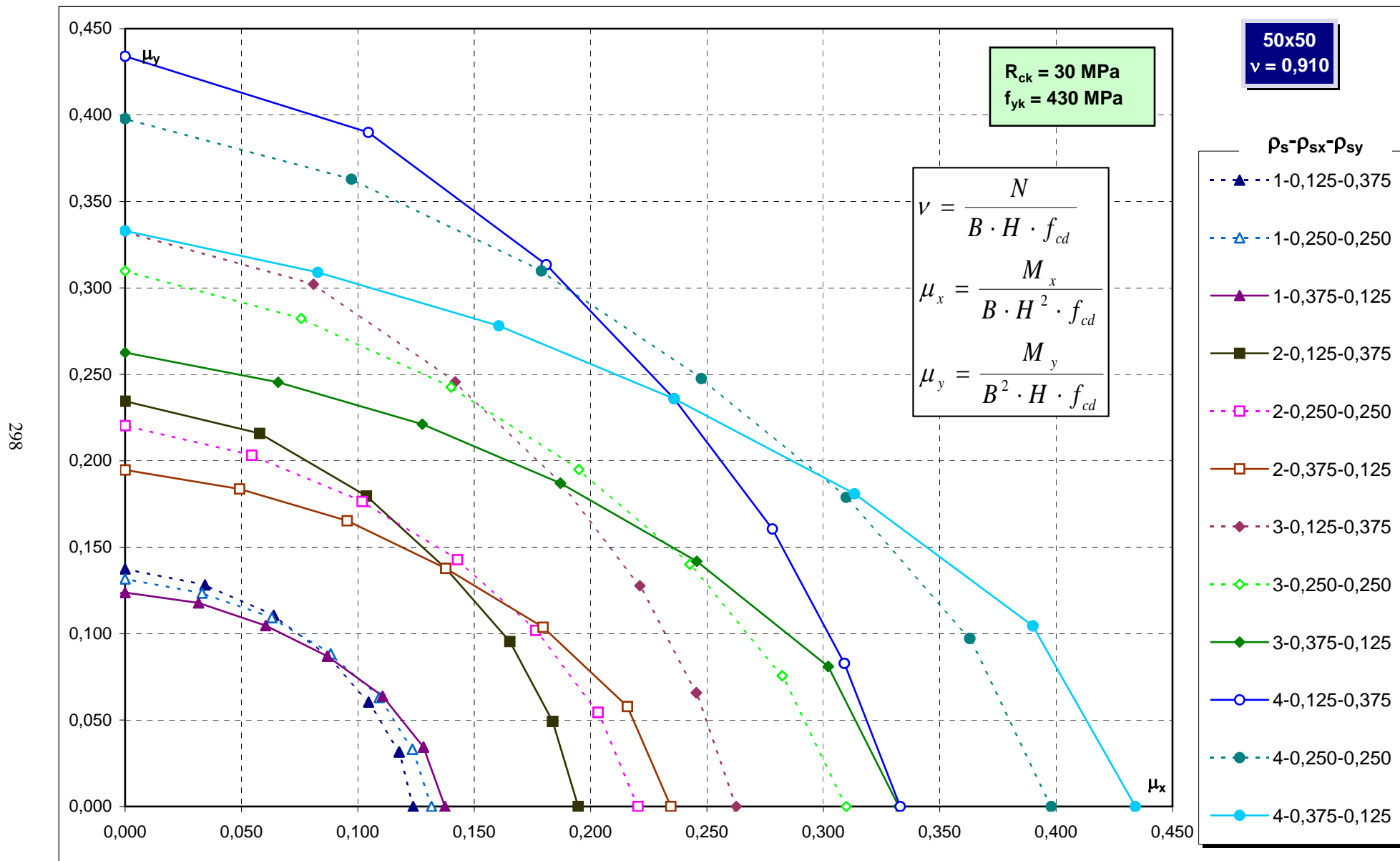


Abachi di progetto

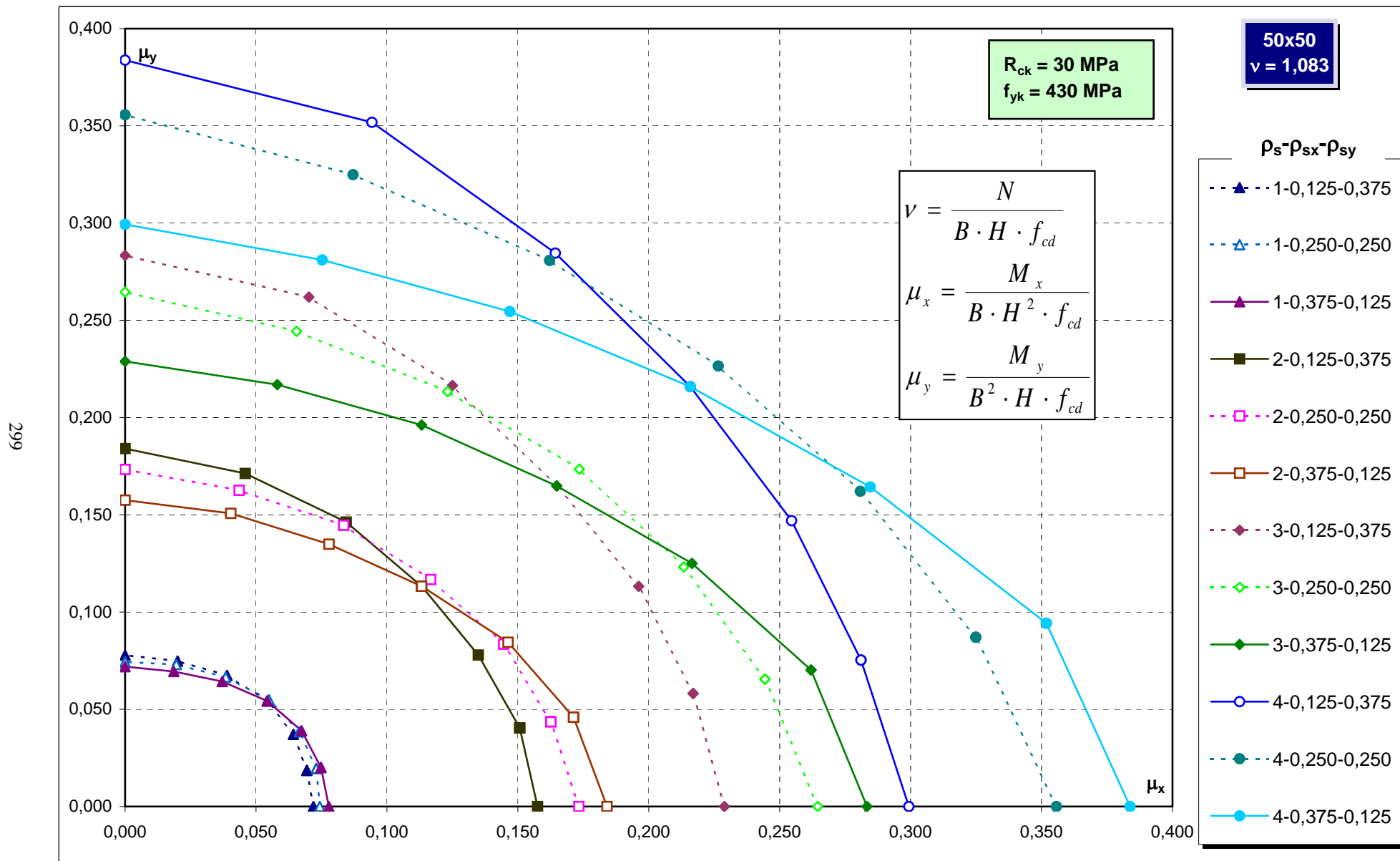
297



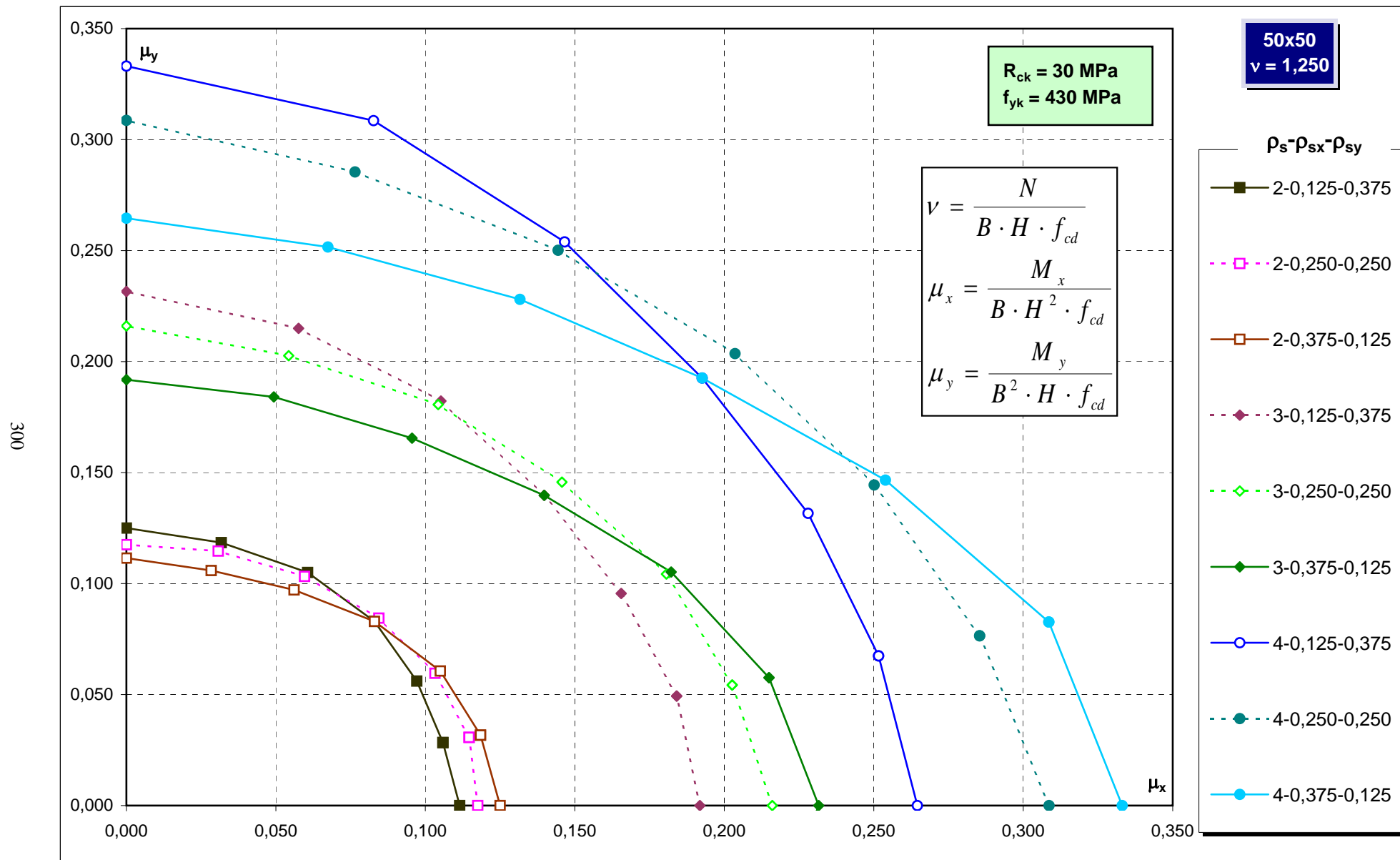
Abachi di progetto



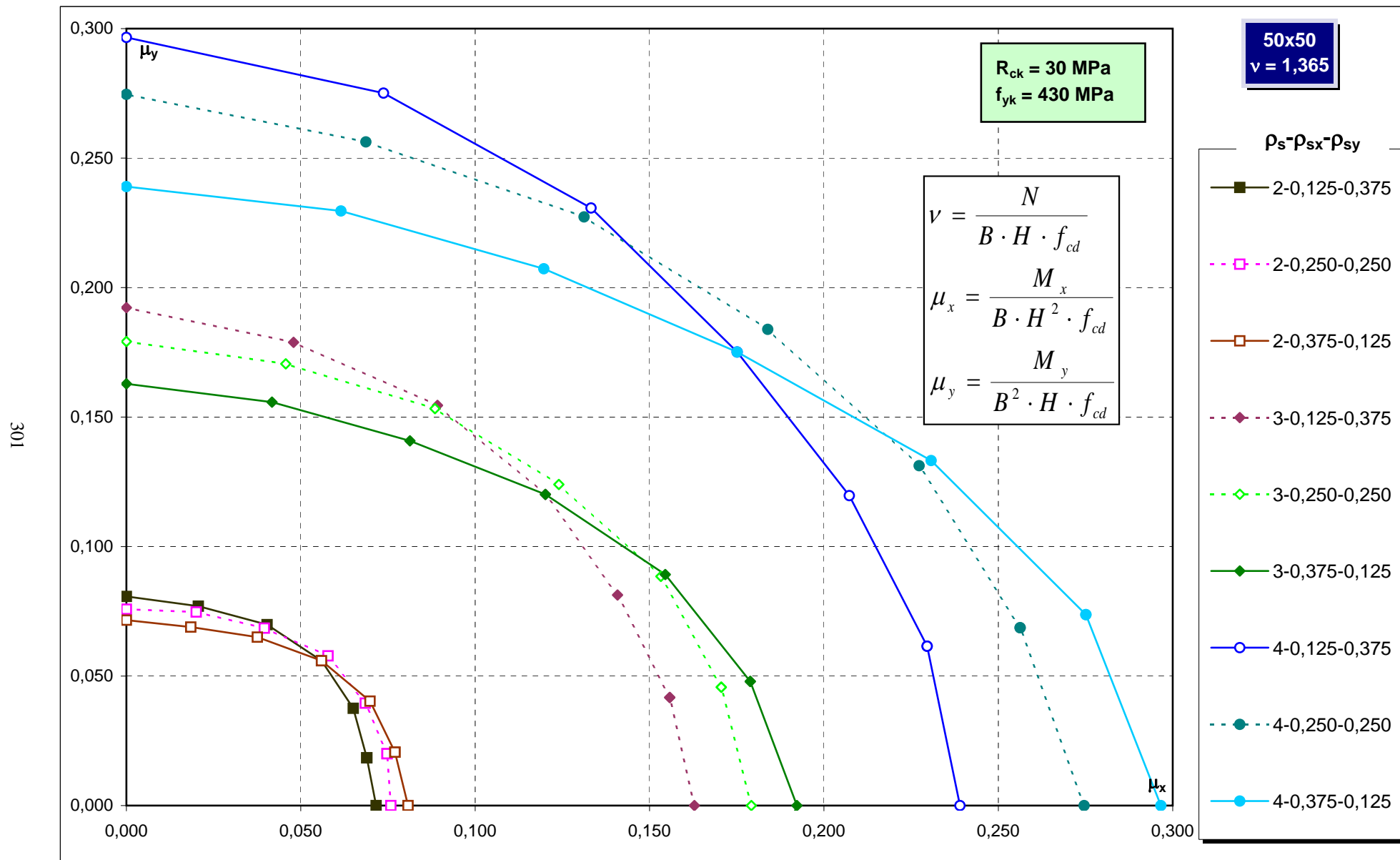
Abachi di progetto



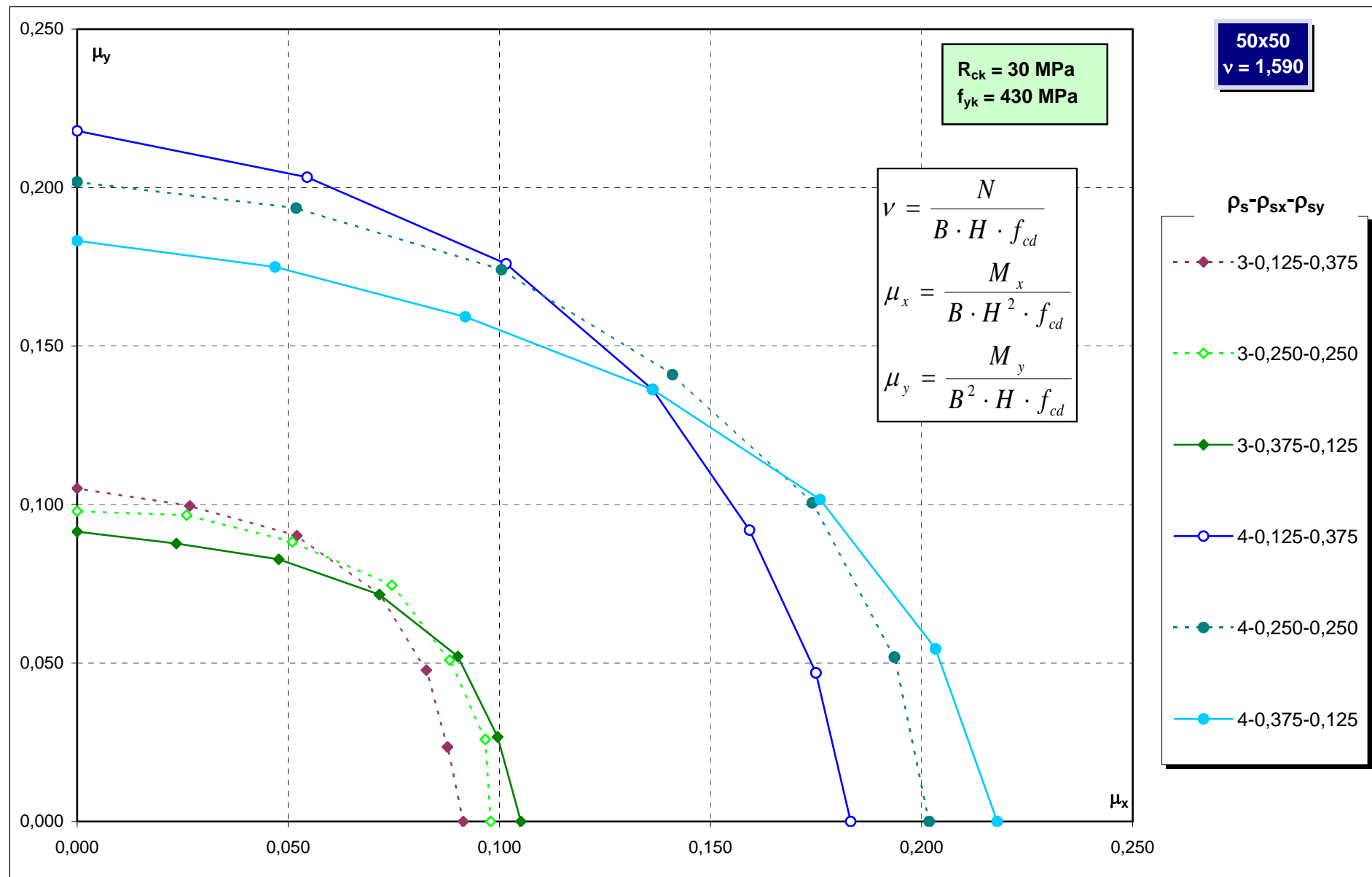
Abachi di progetto



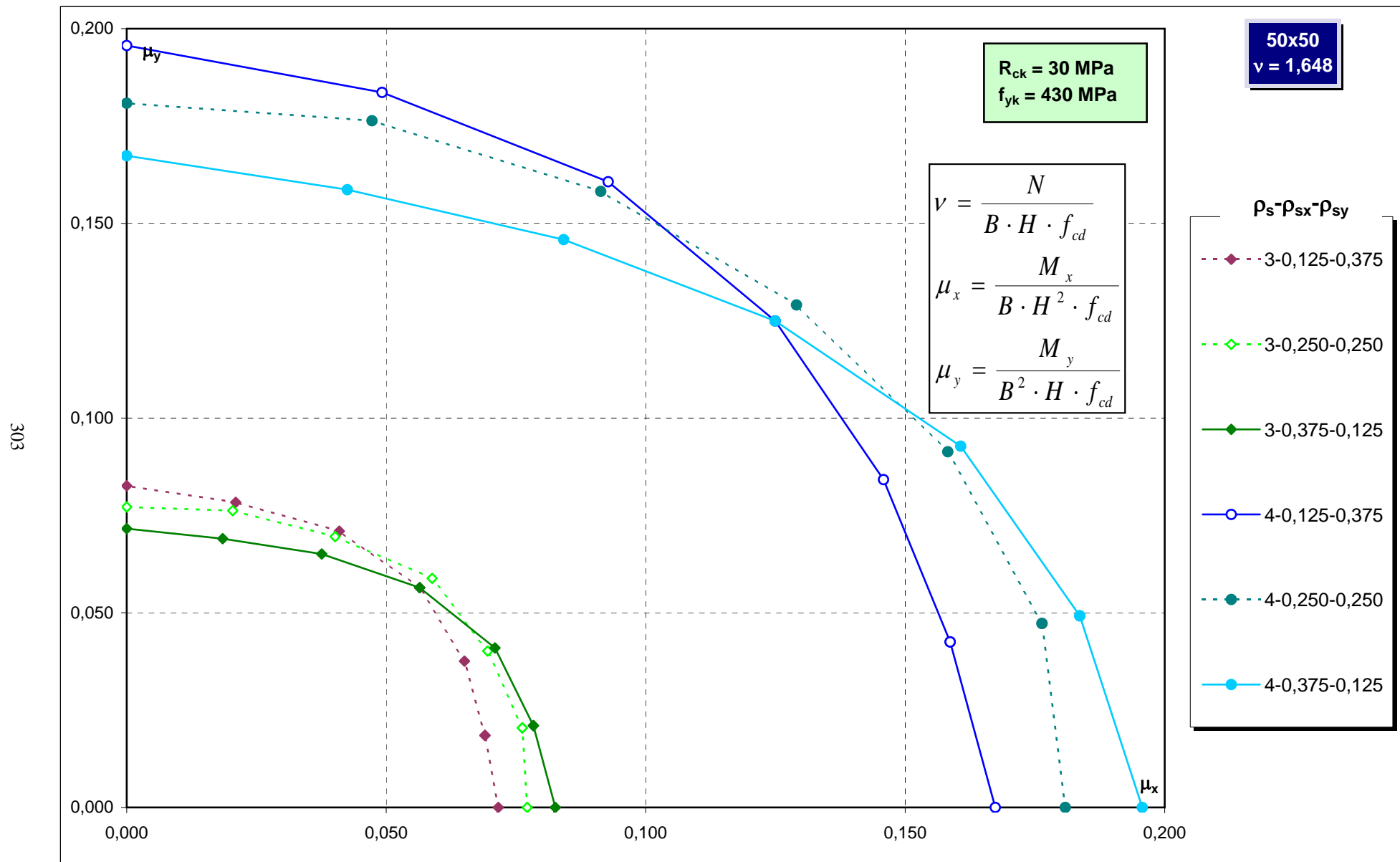
Abachi di progetto



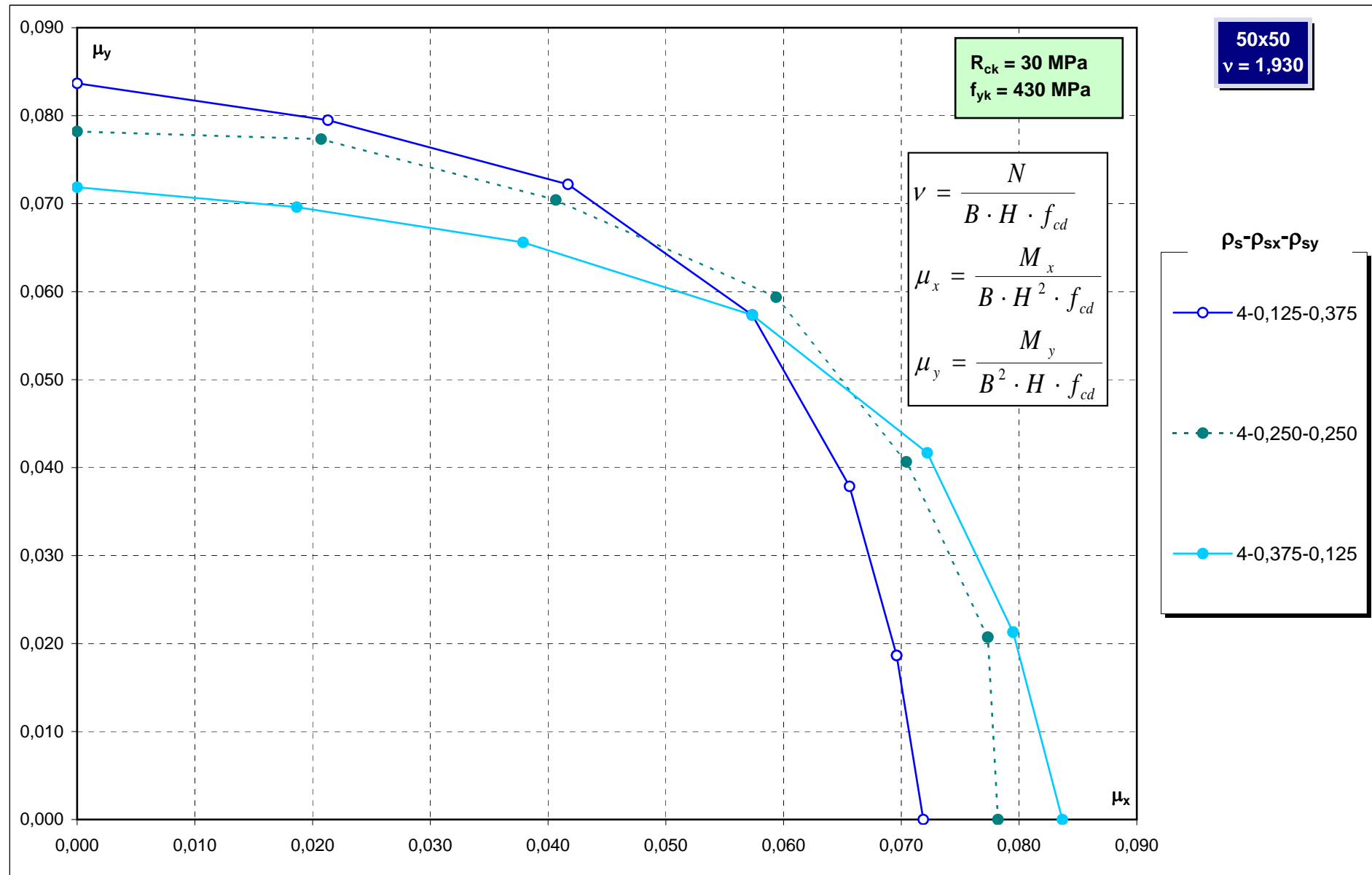
Abachi di progetto



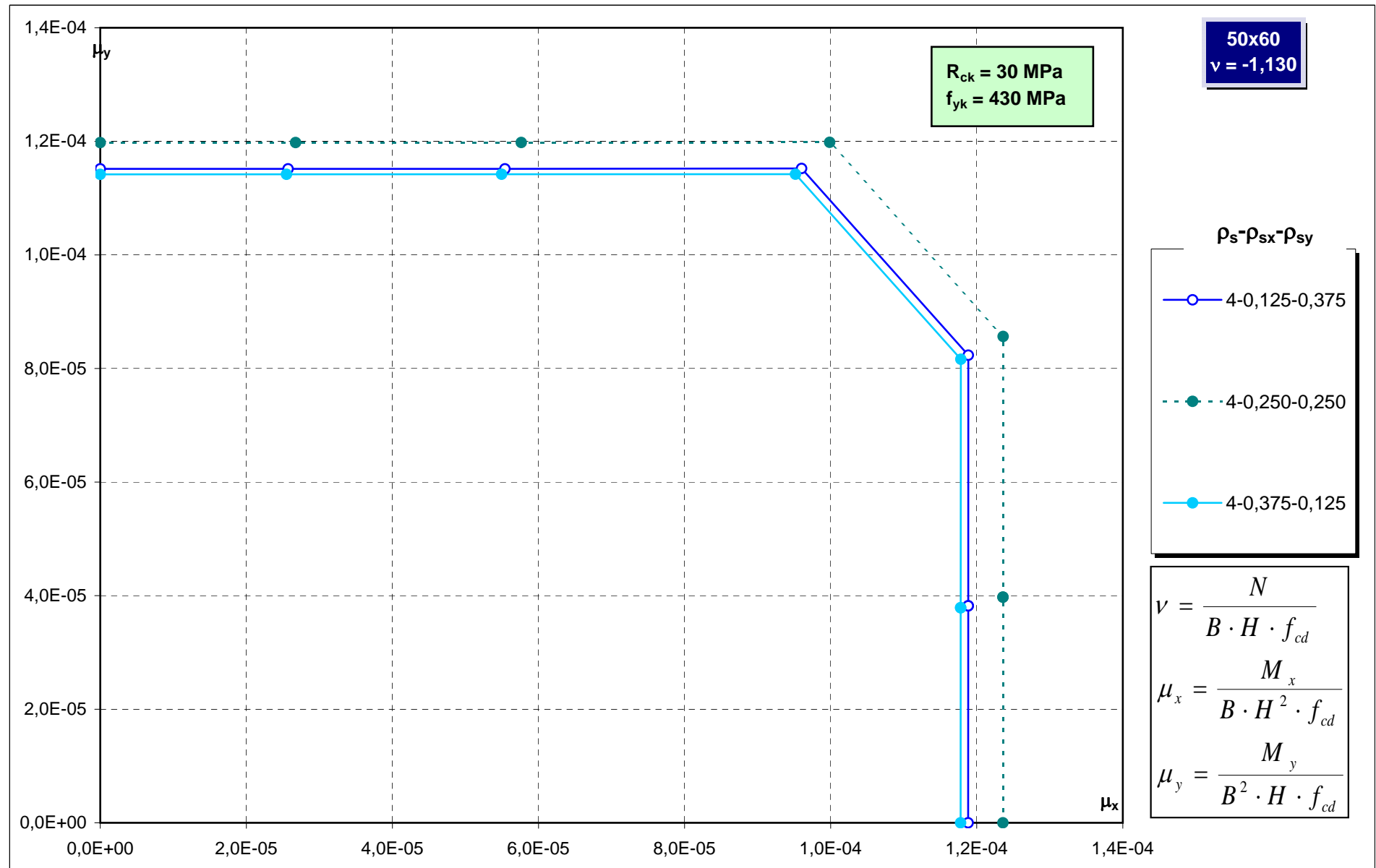
Abachi di progetto



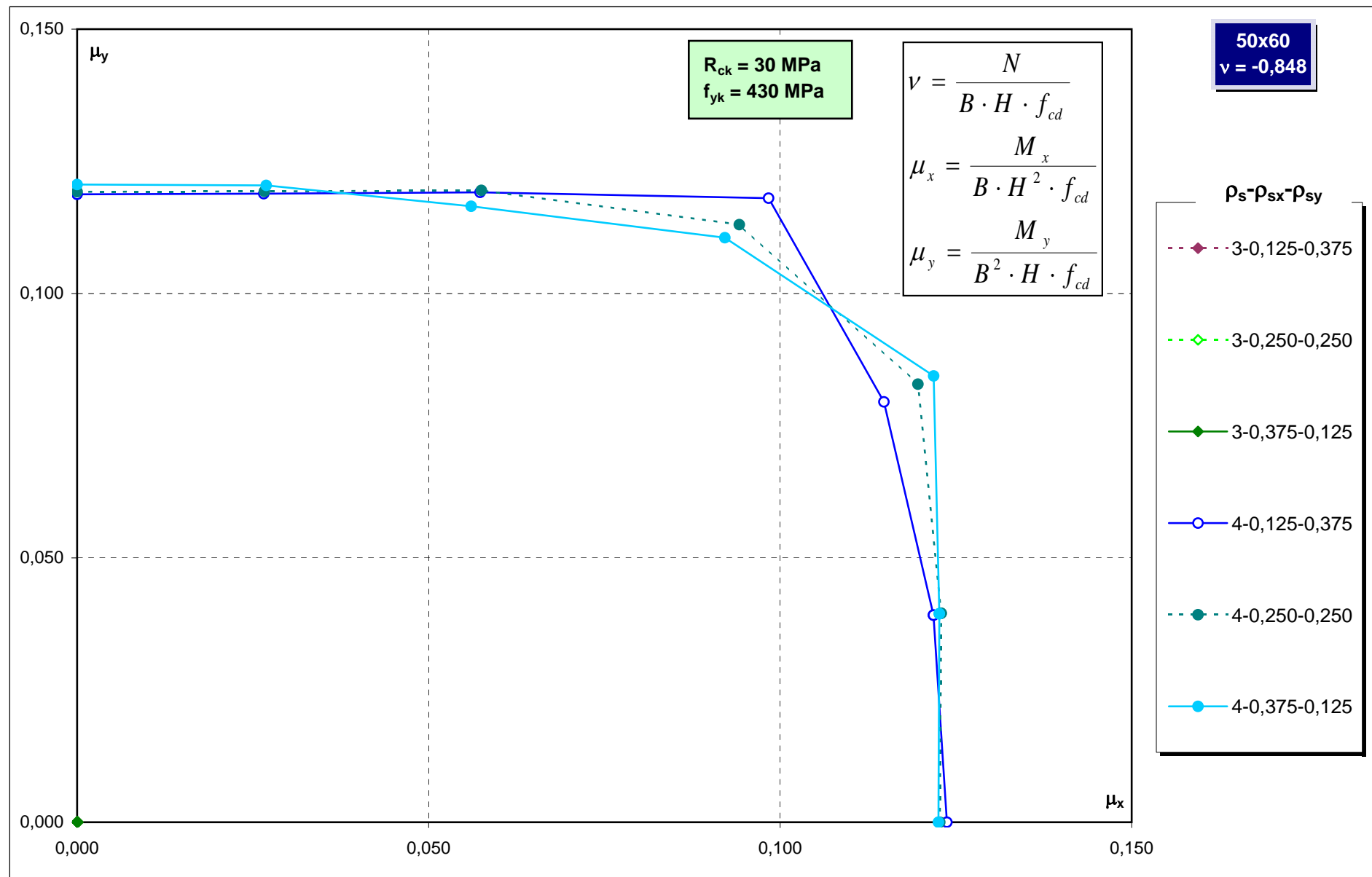
Abachi di progetto



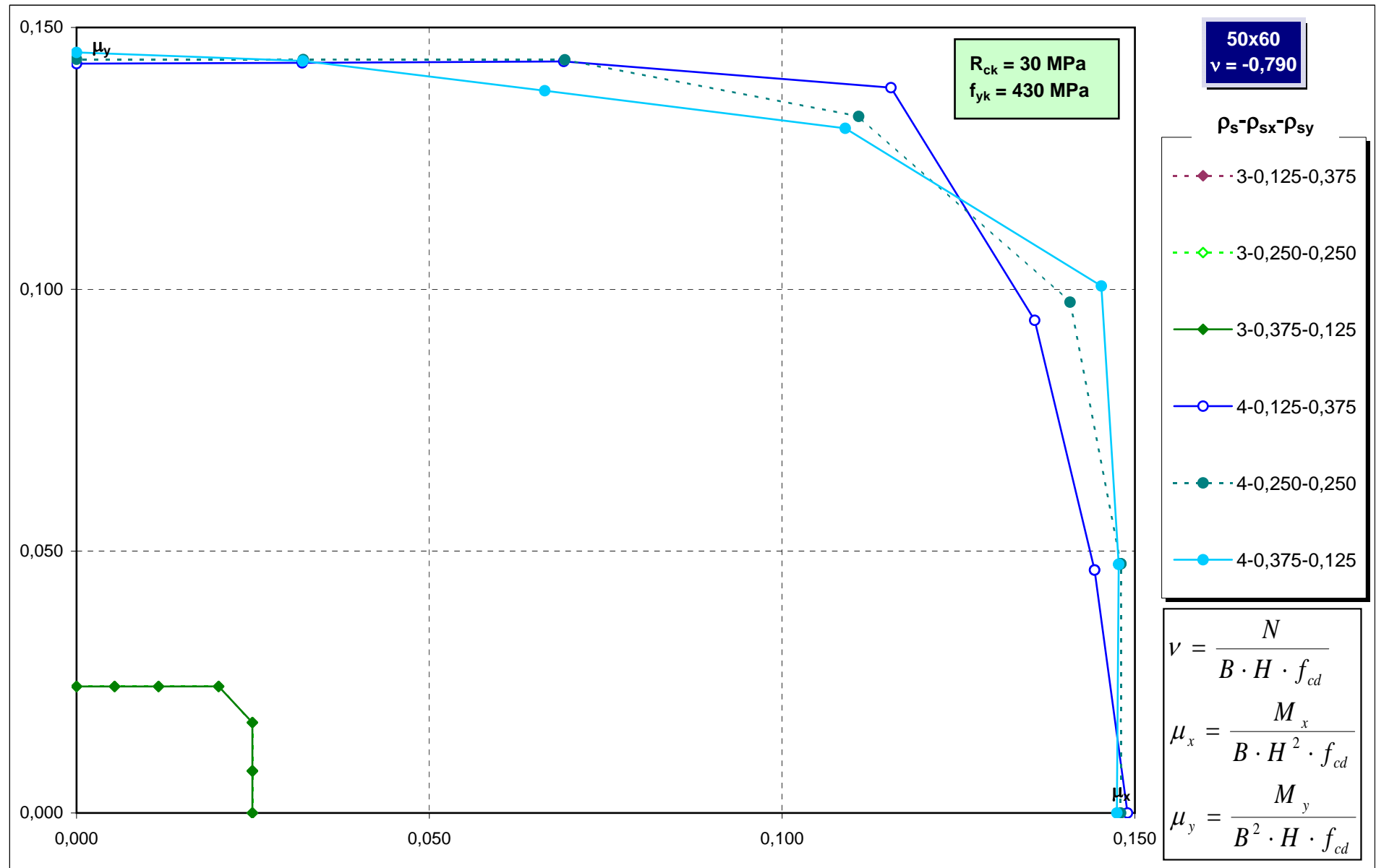
Abachi di progetto



Abachi di progetto



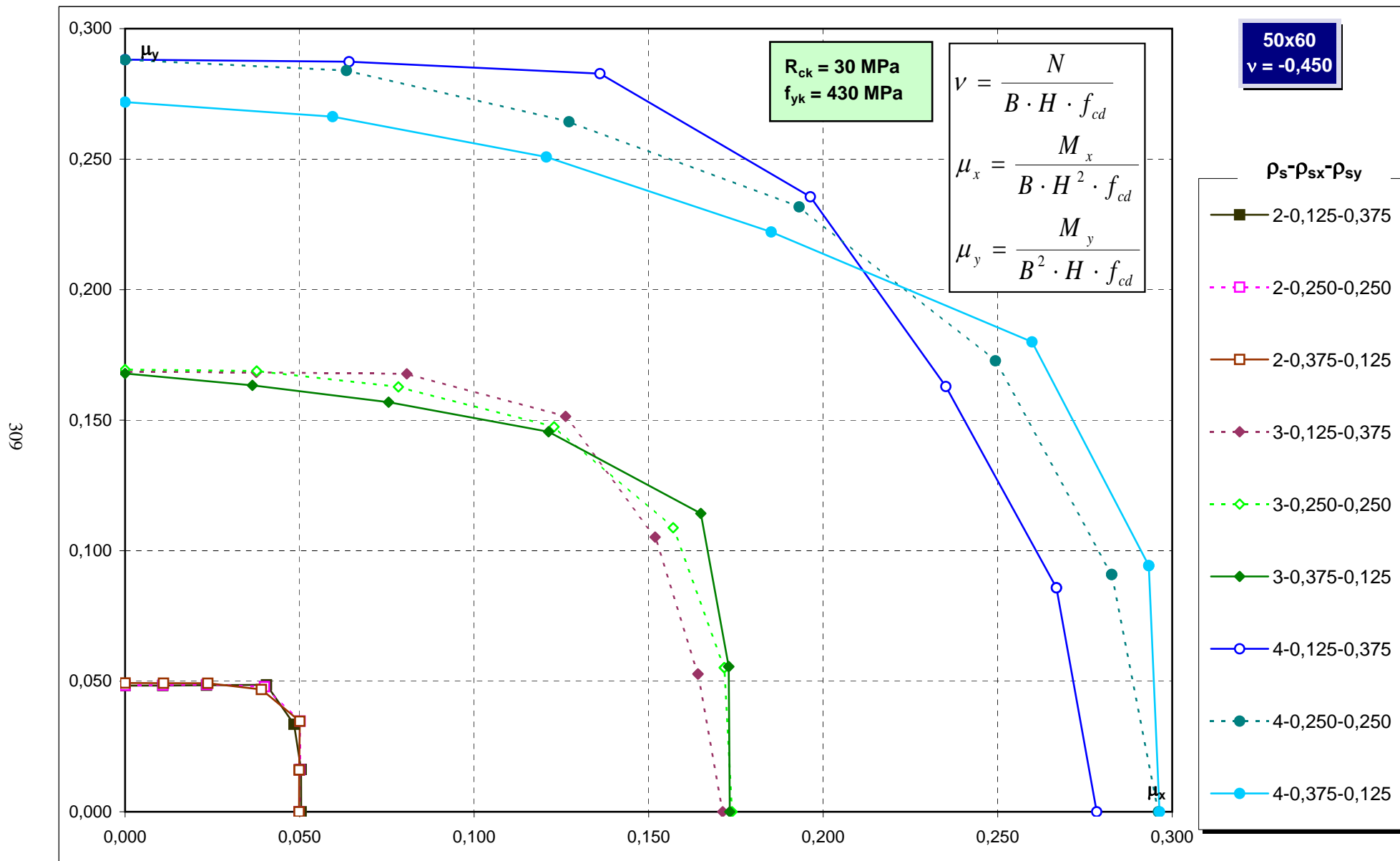
Abachi di progetto



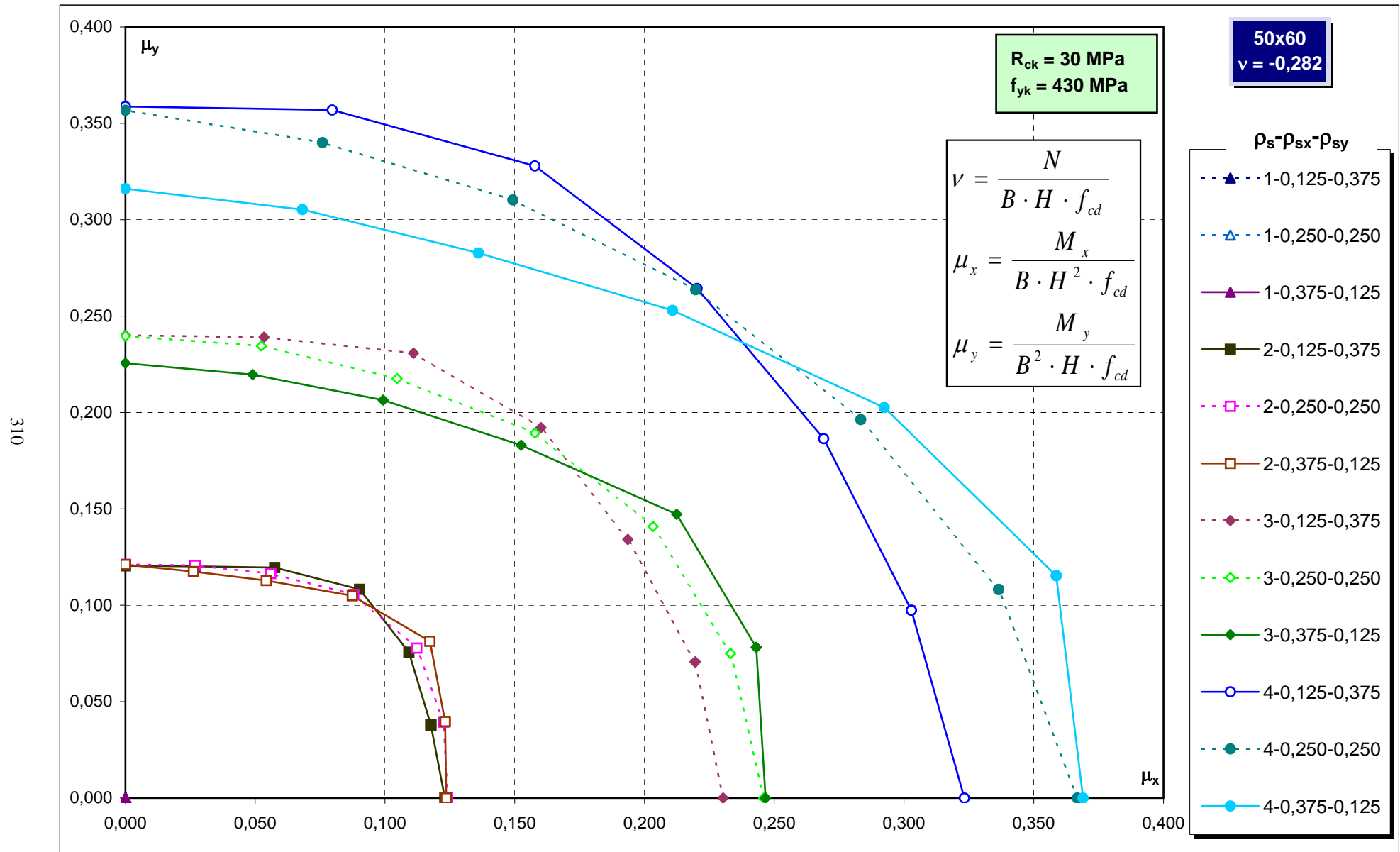
Abachi di progetto



Abachi di progetto

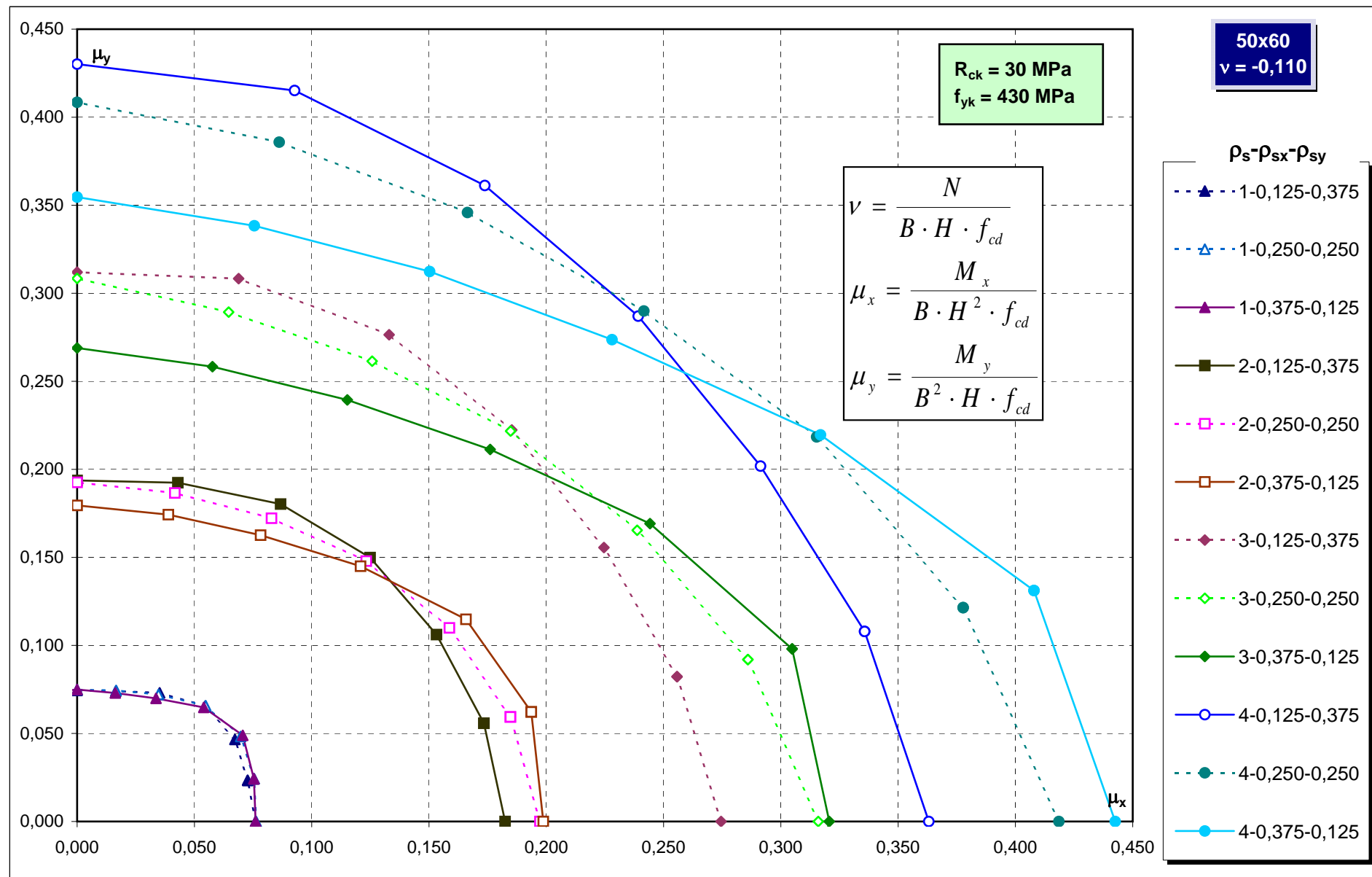


Abachi di progetto



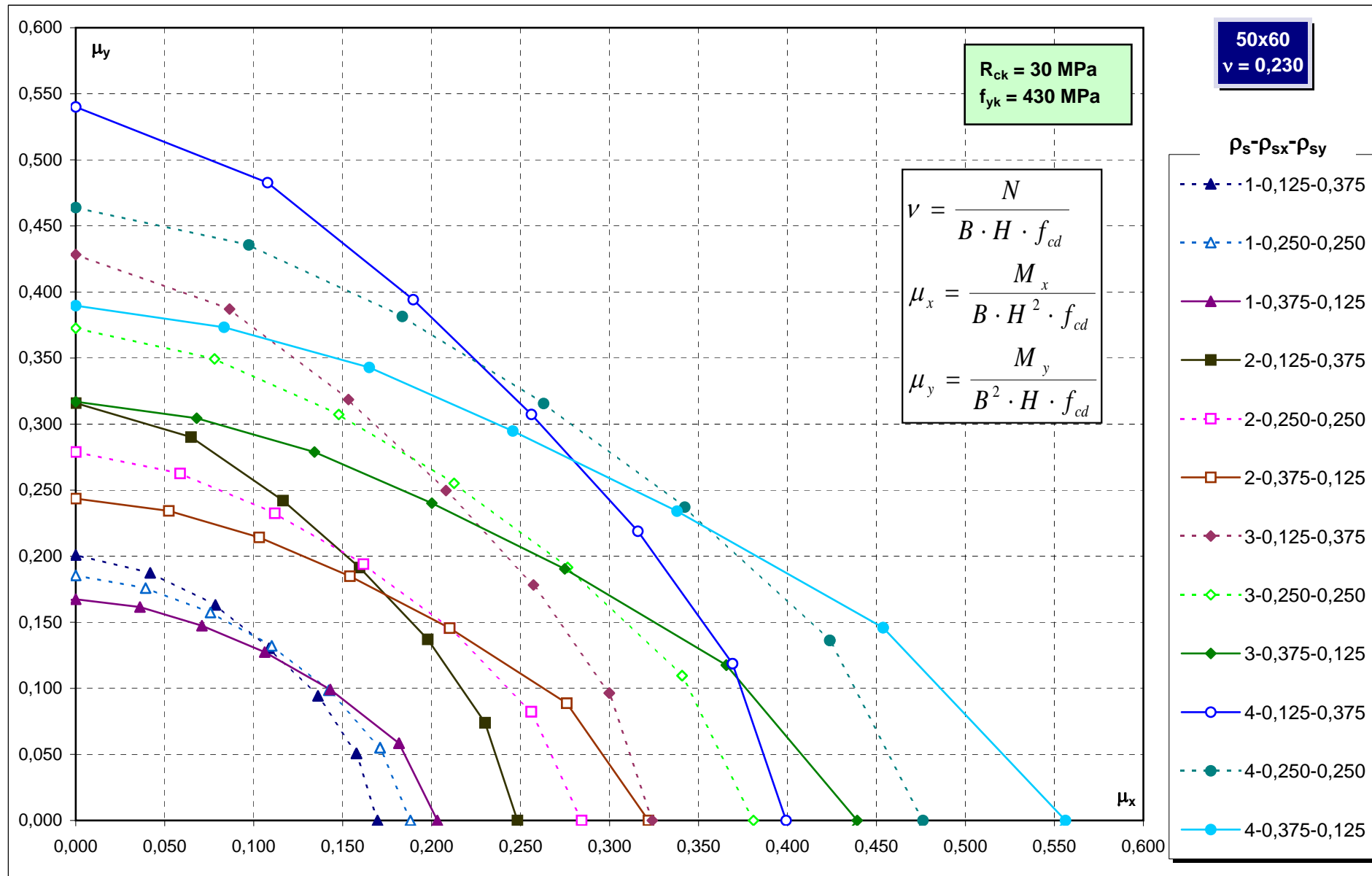
Abachi di progetto

311

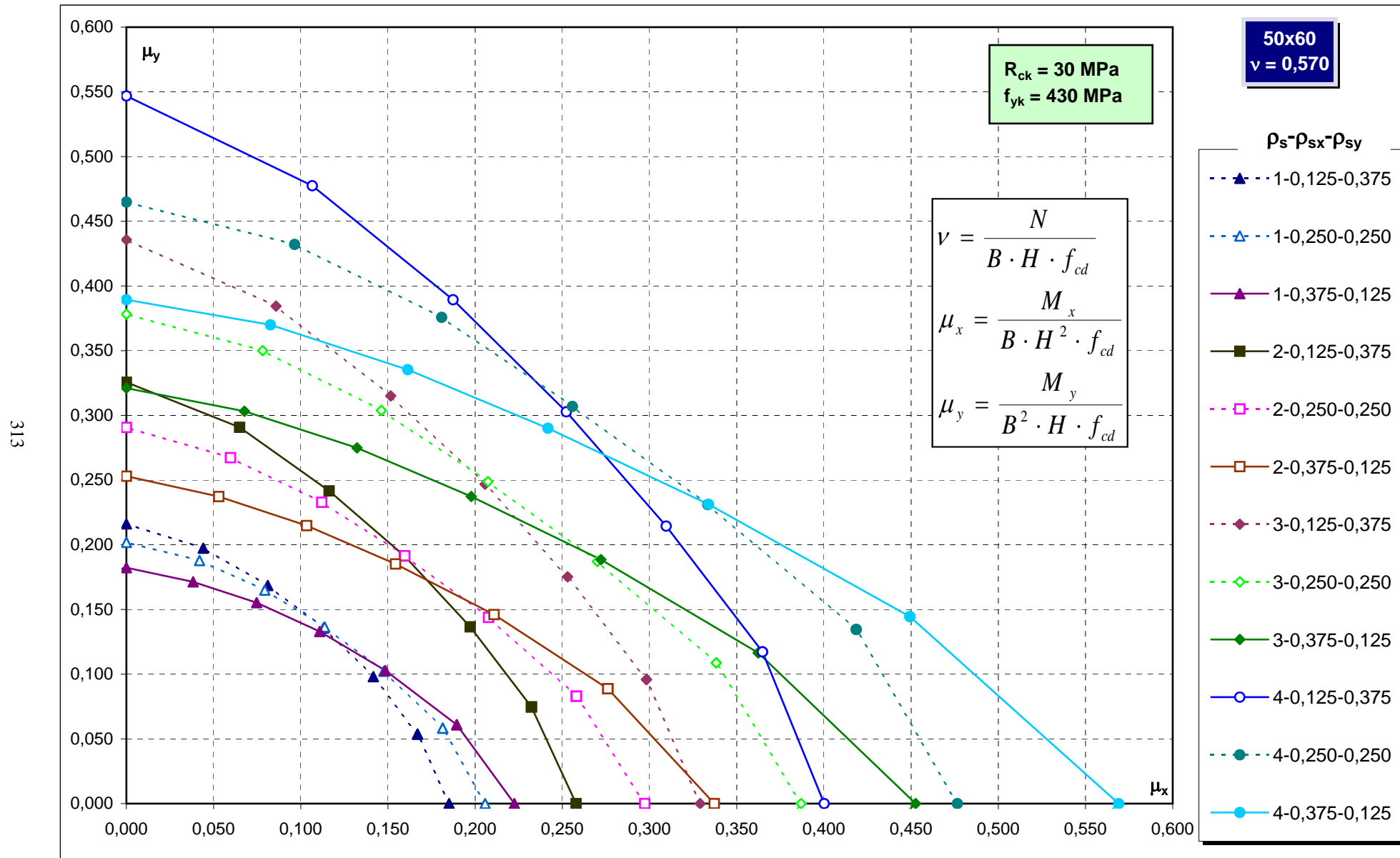


Abachi di progetto

312

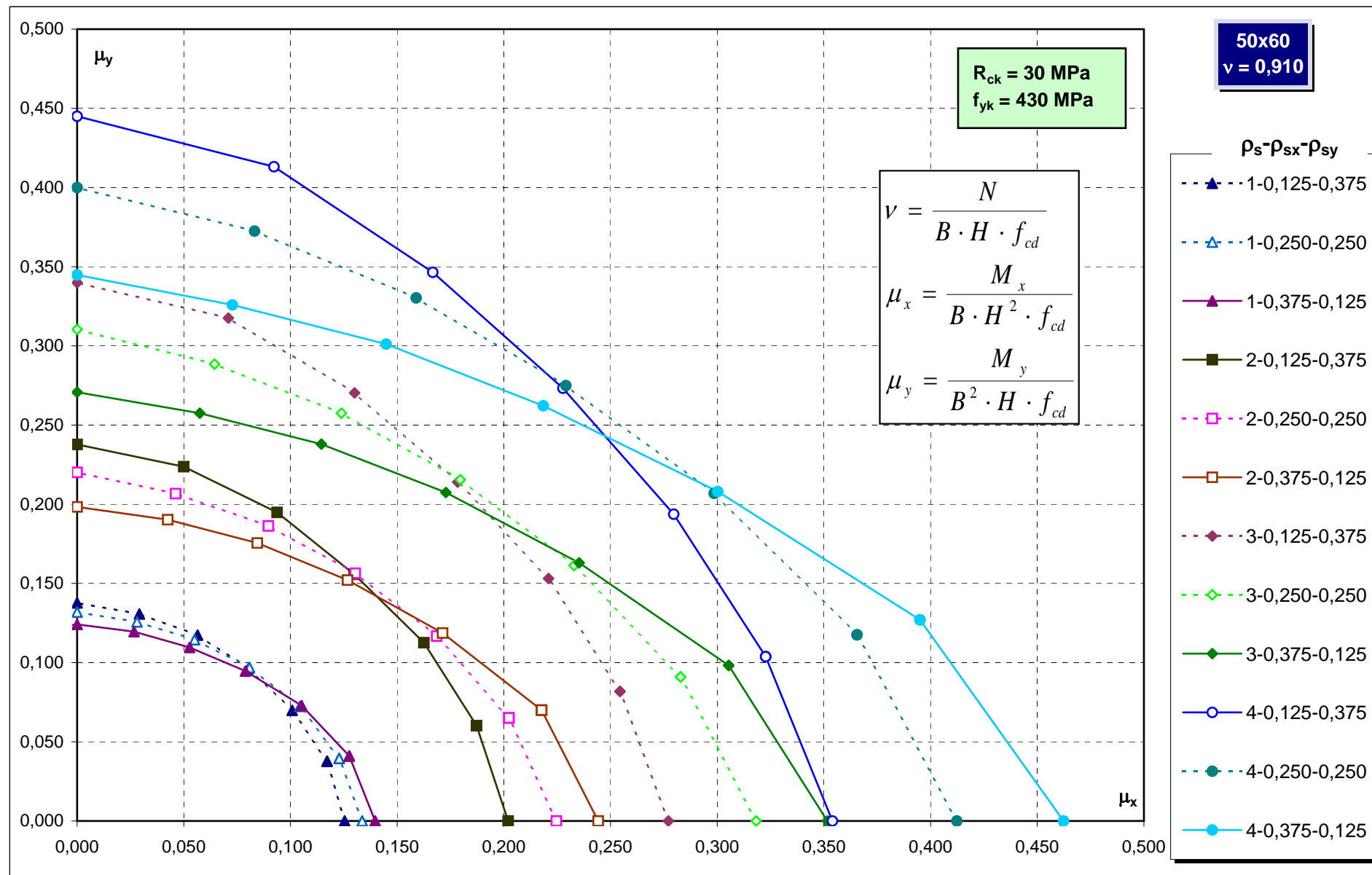


Abachi di progetto

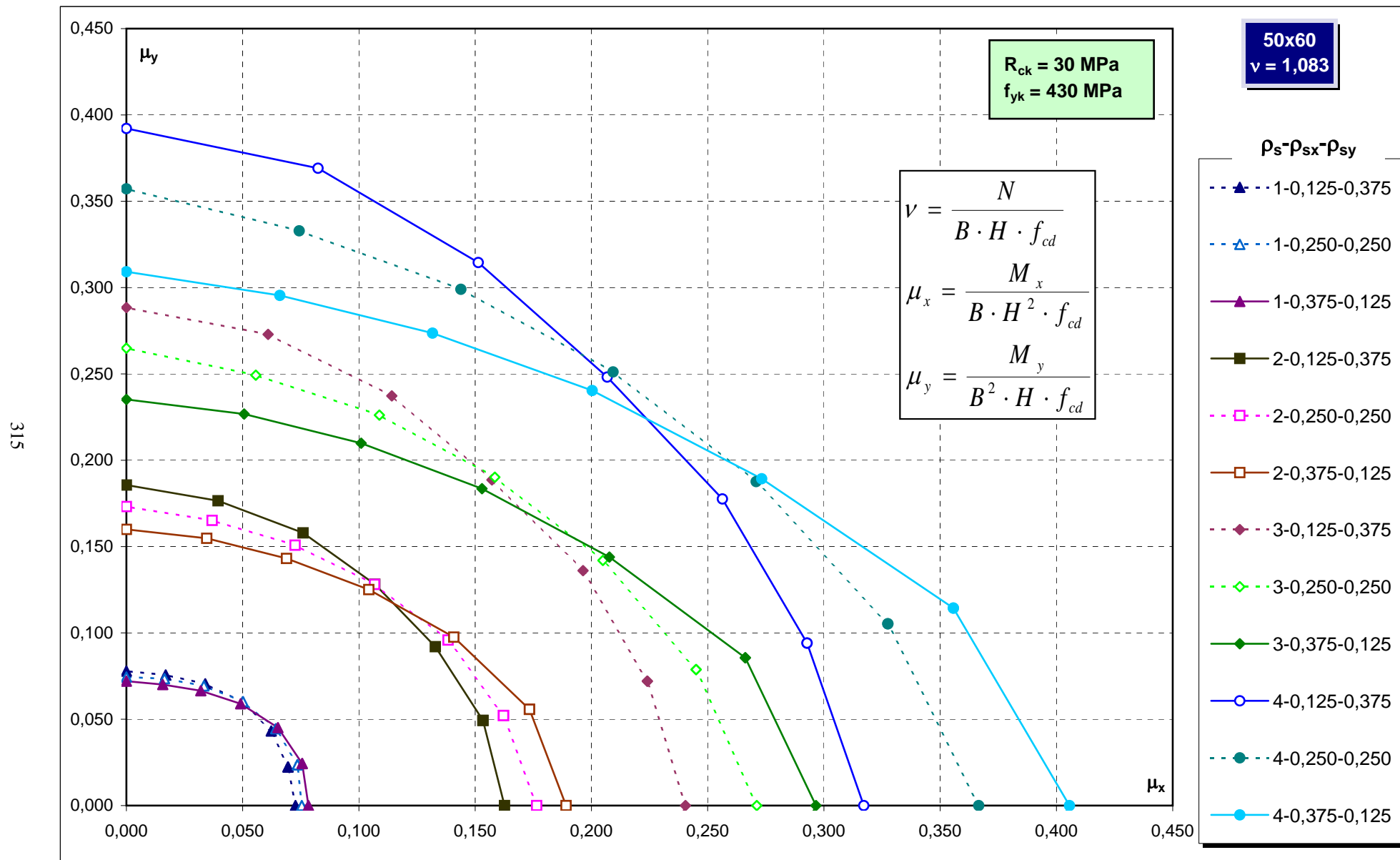


Abachi di progetto

314

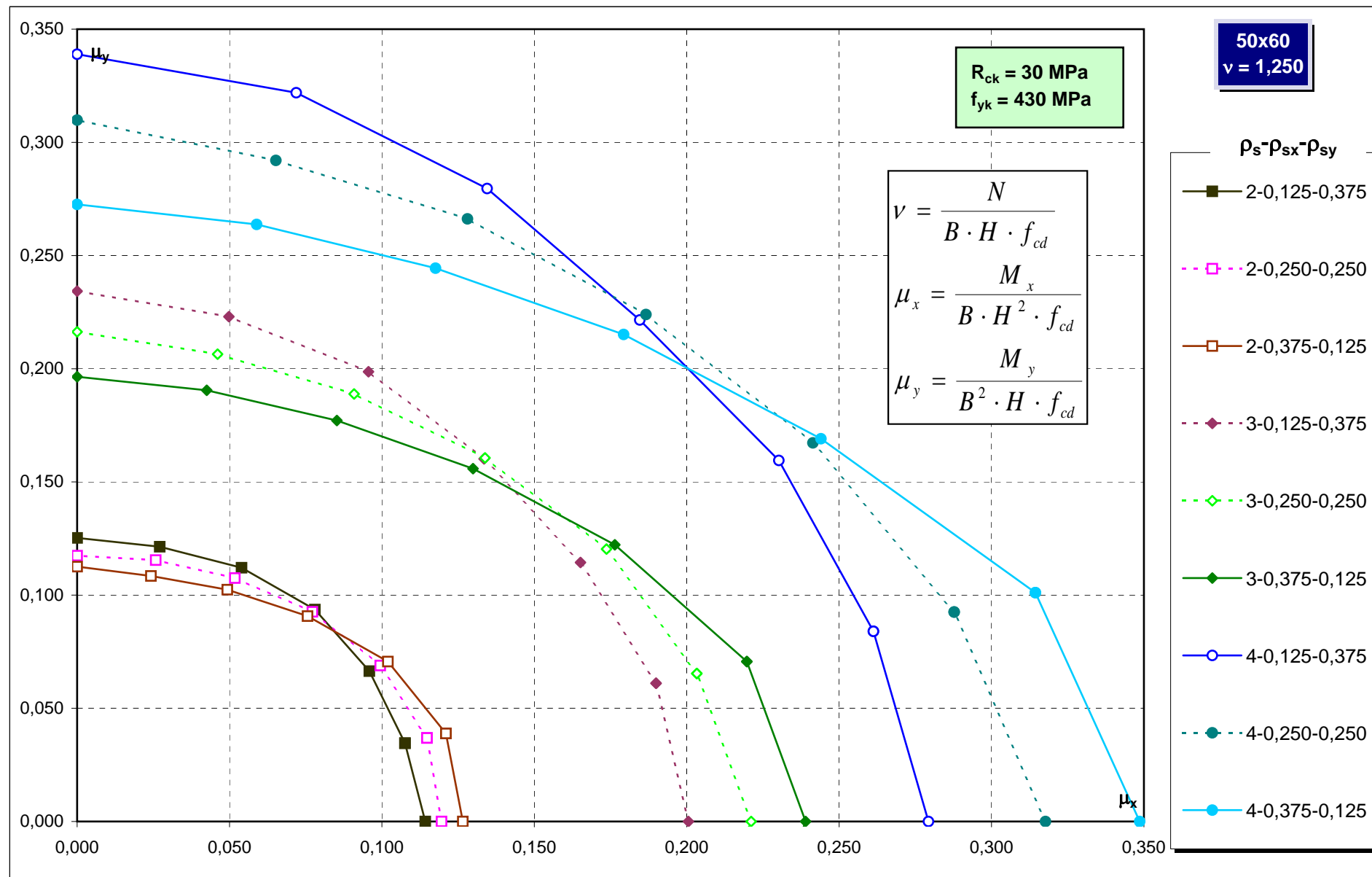


Abachi di progetto

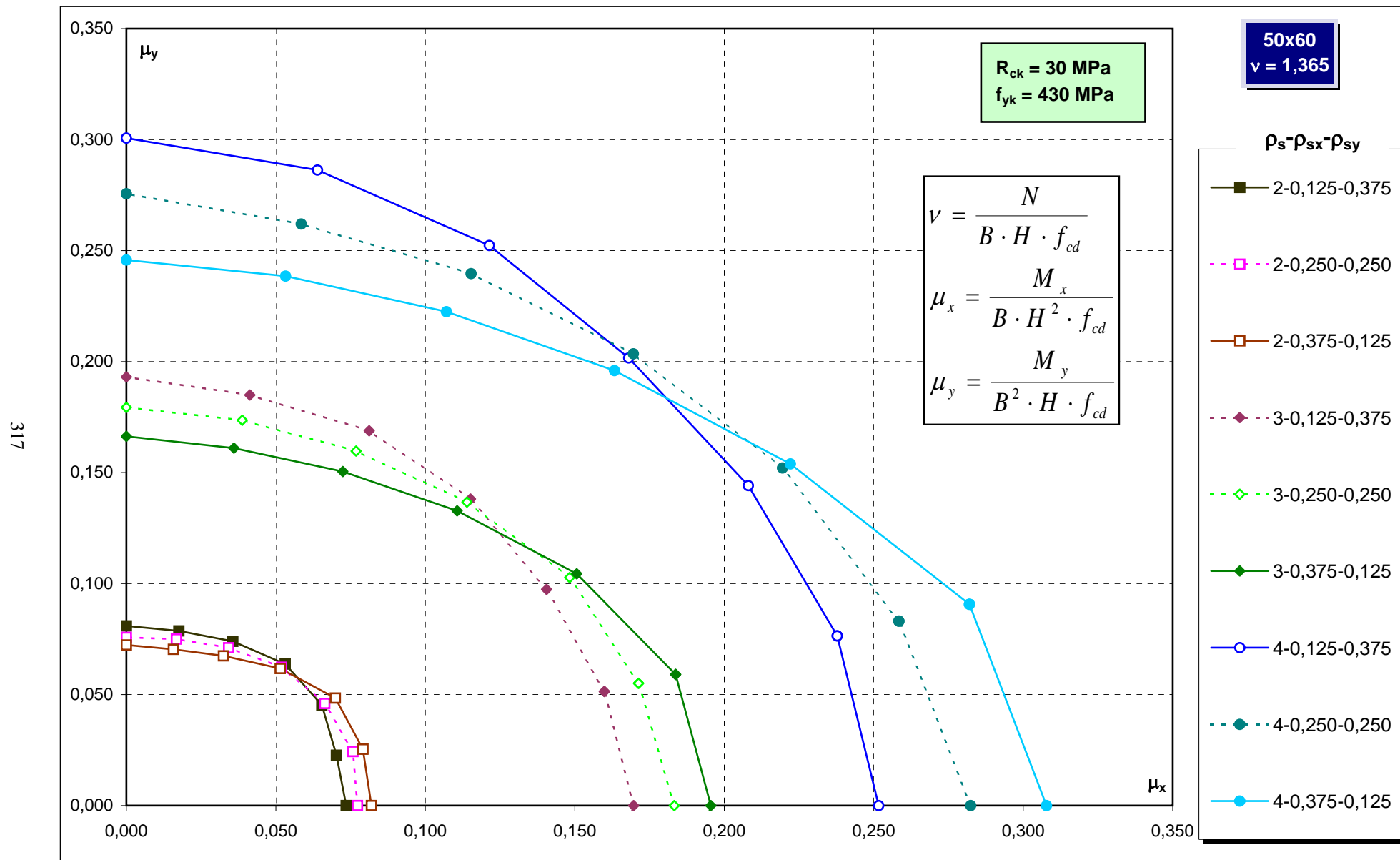


Abachi di progetto

316

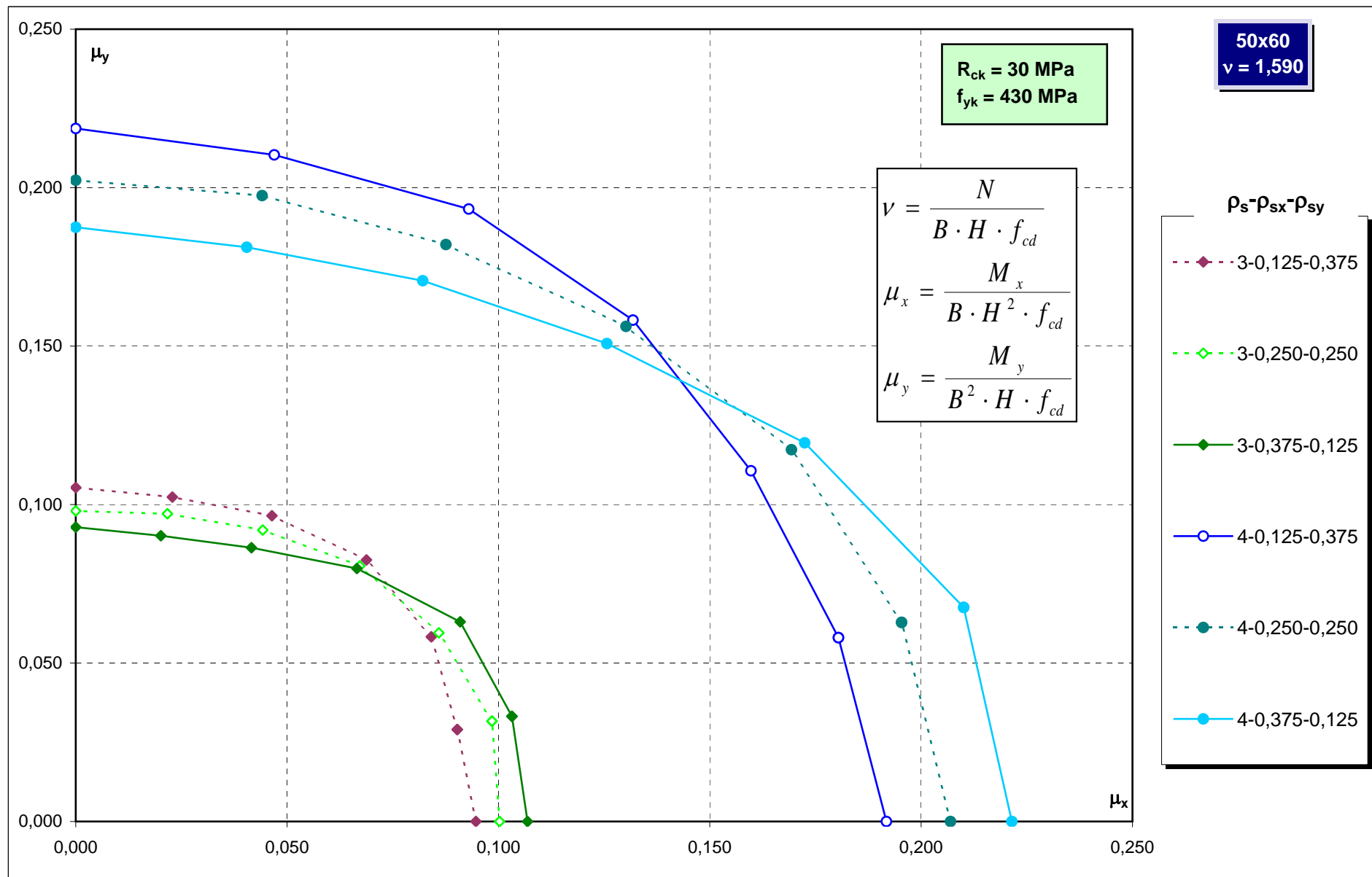


Abachi di progetto

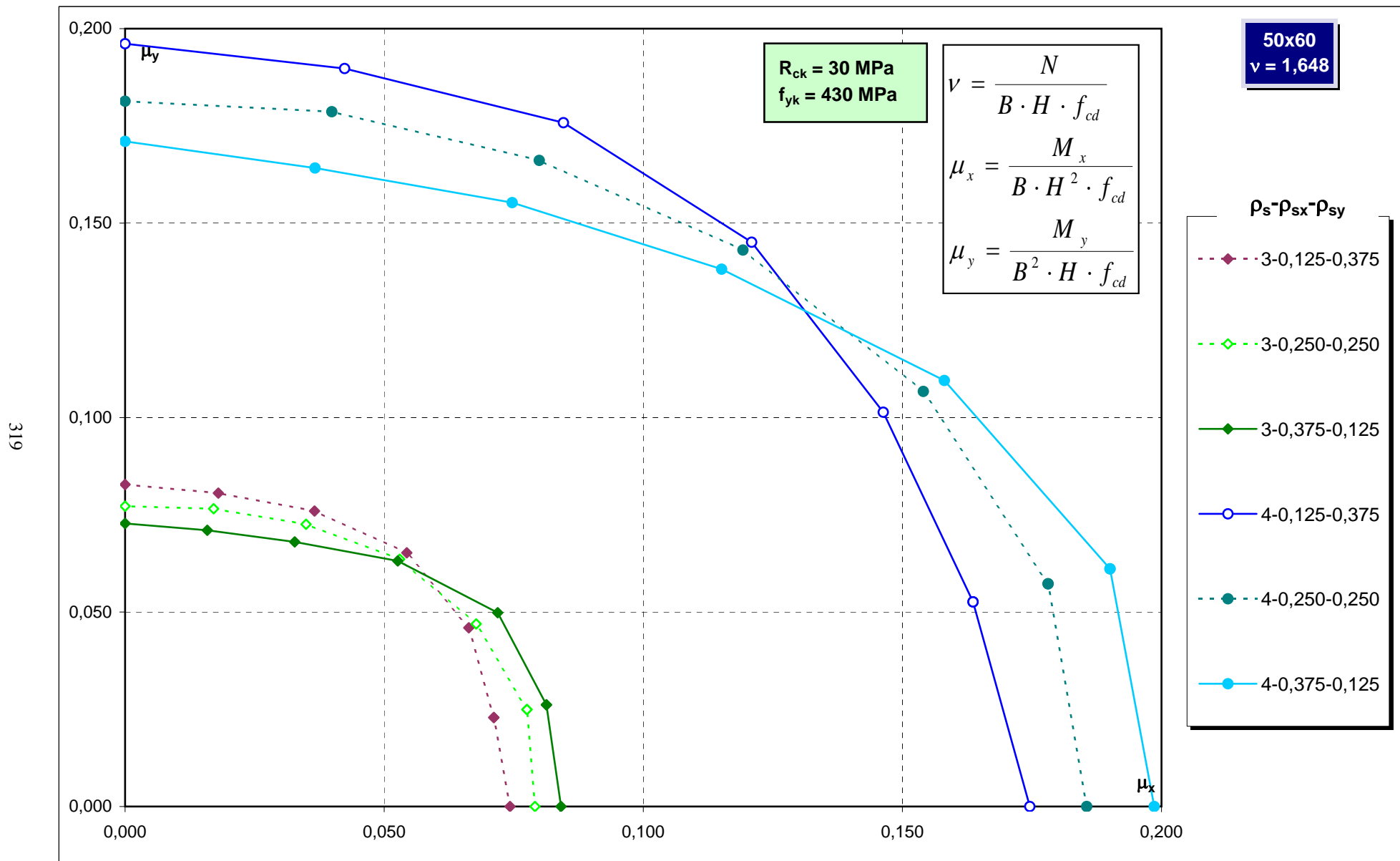


Abachi di progetto

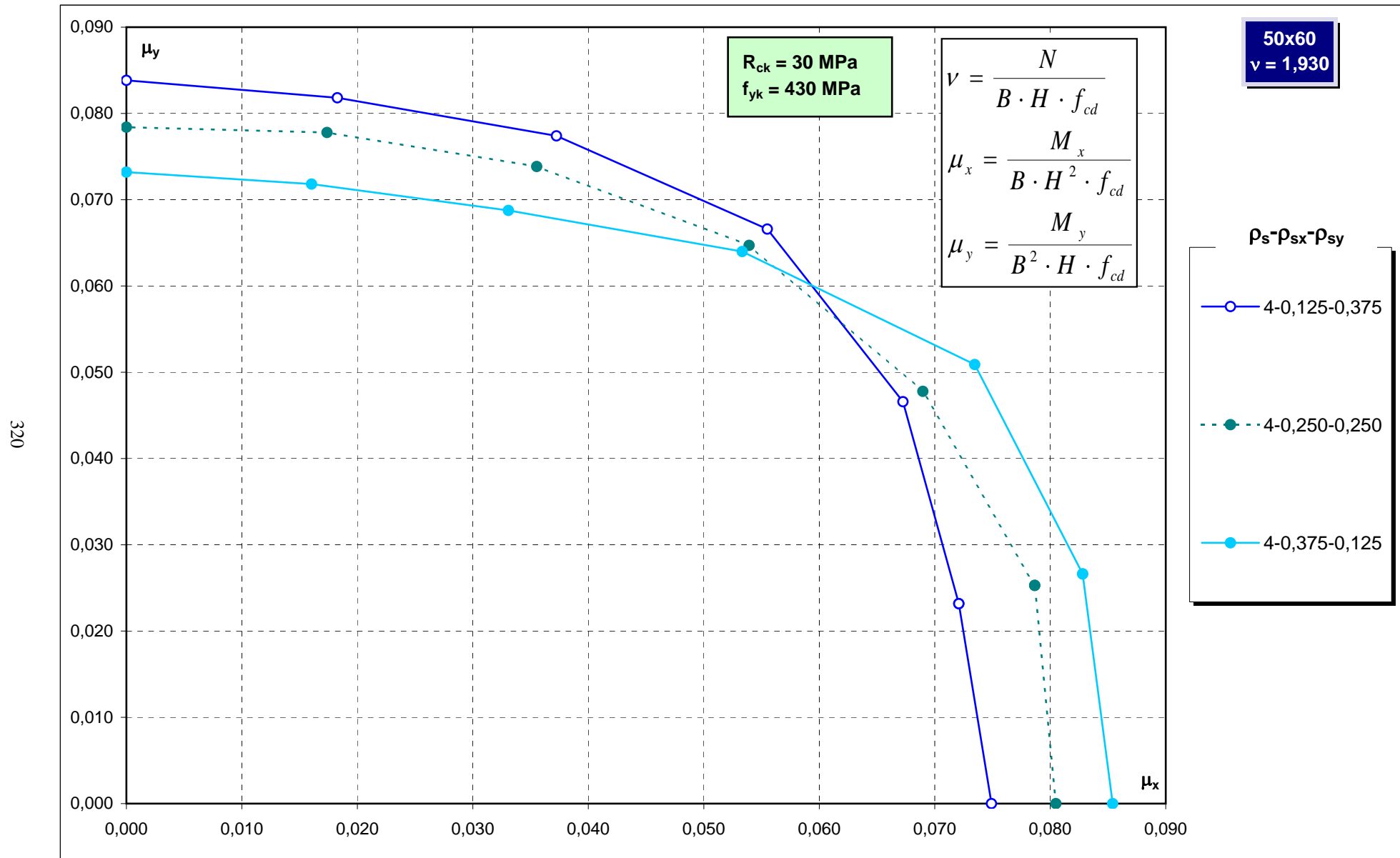
318



Abachi di progetto

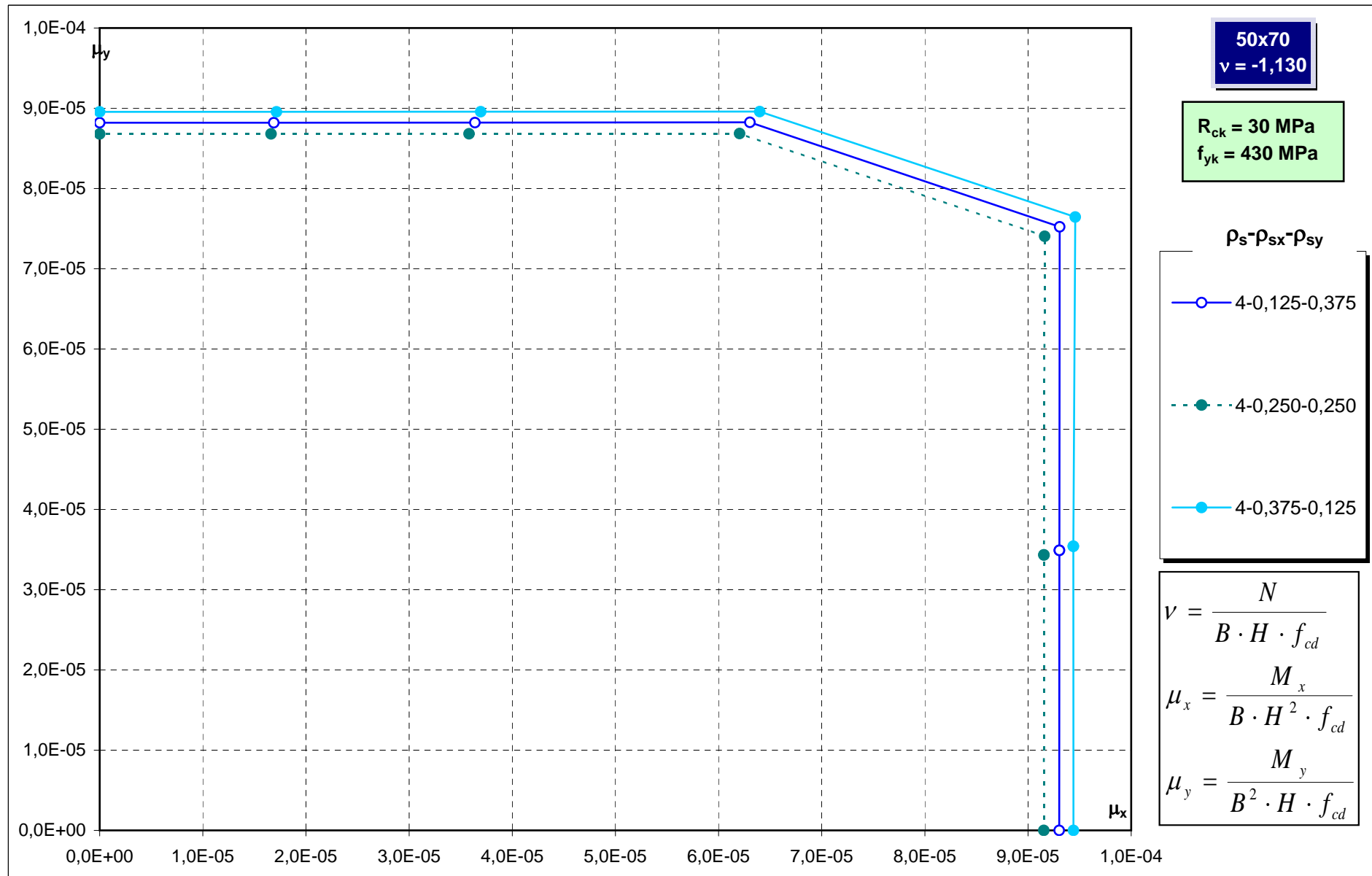


Abachi di progetto

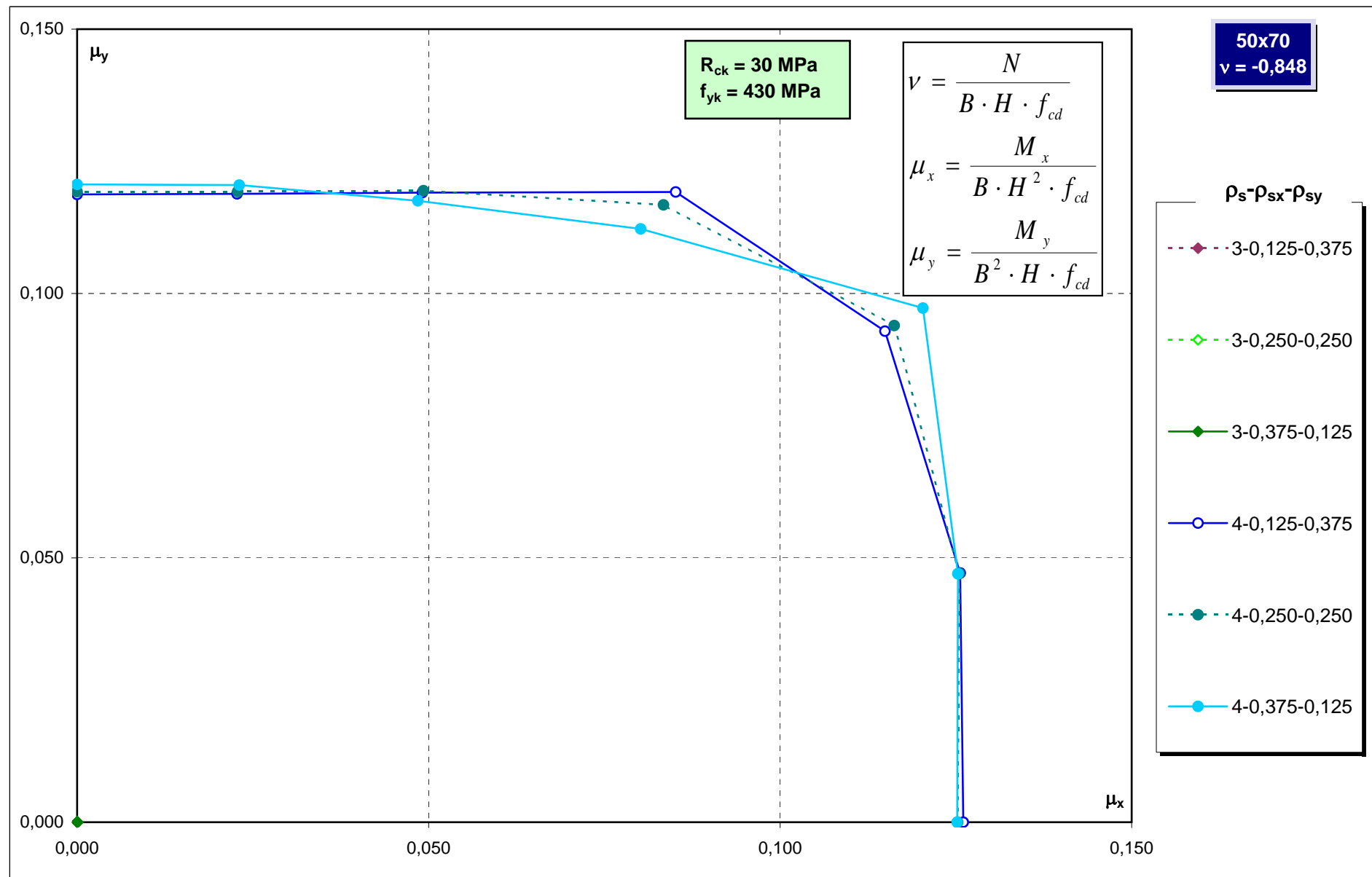


Abachi di progetto

321

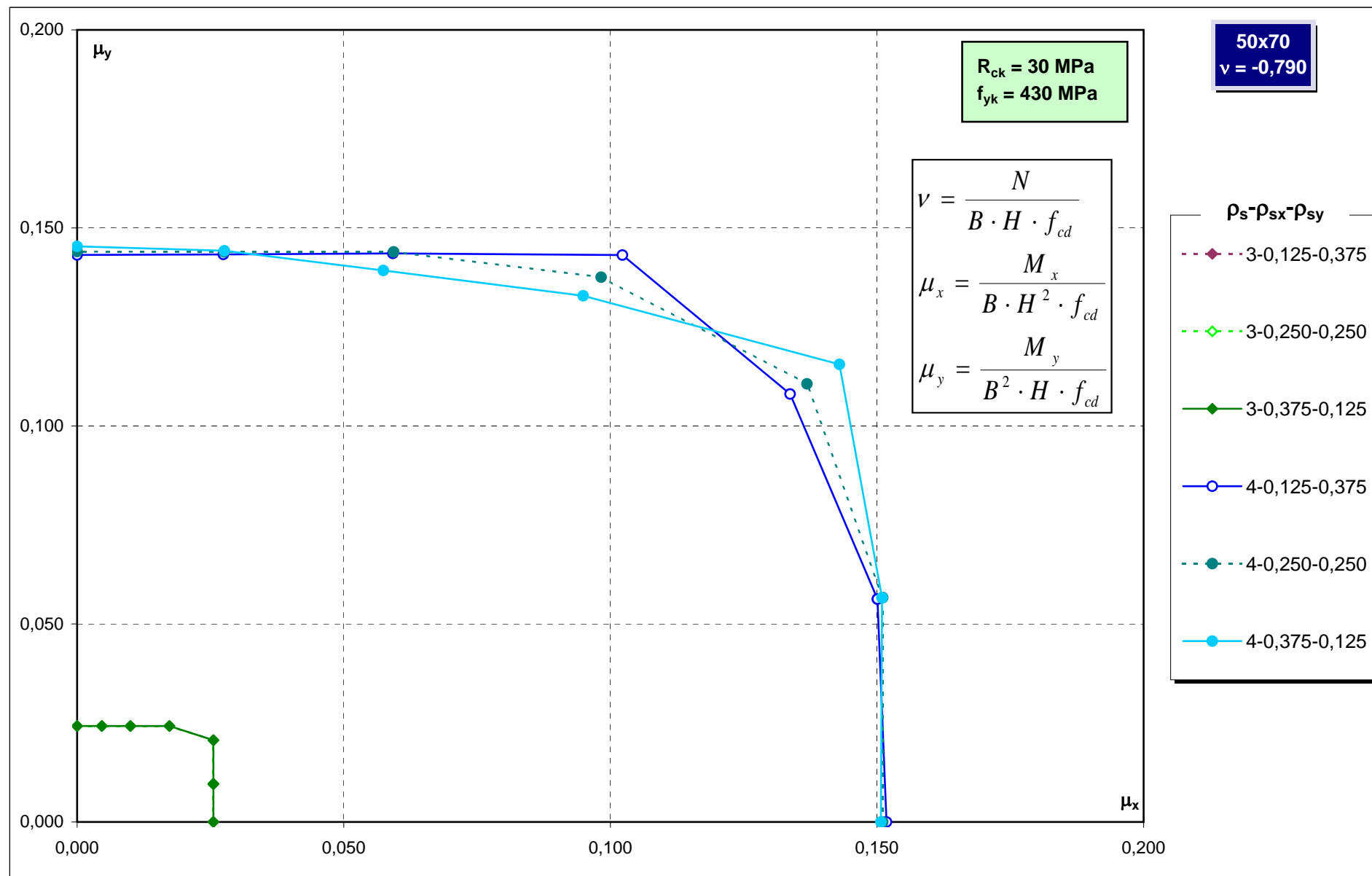


Abachi di progetto



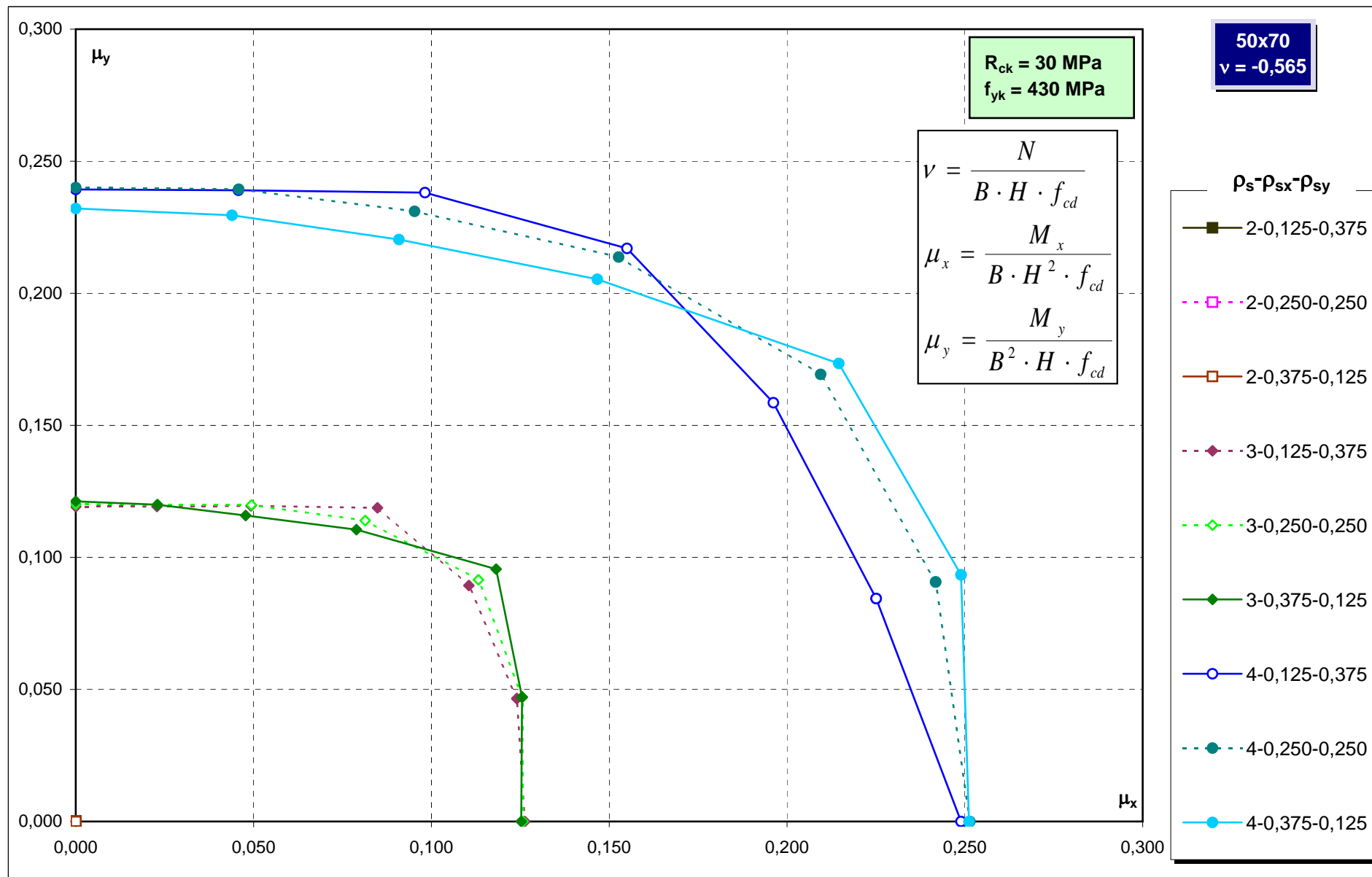
Abachi di progetto

323

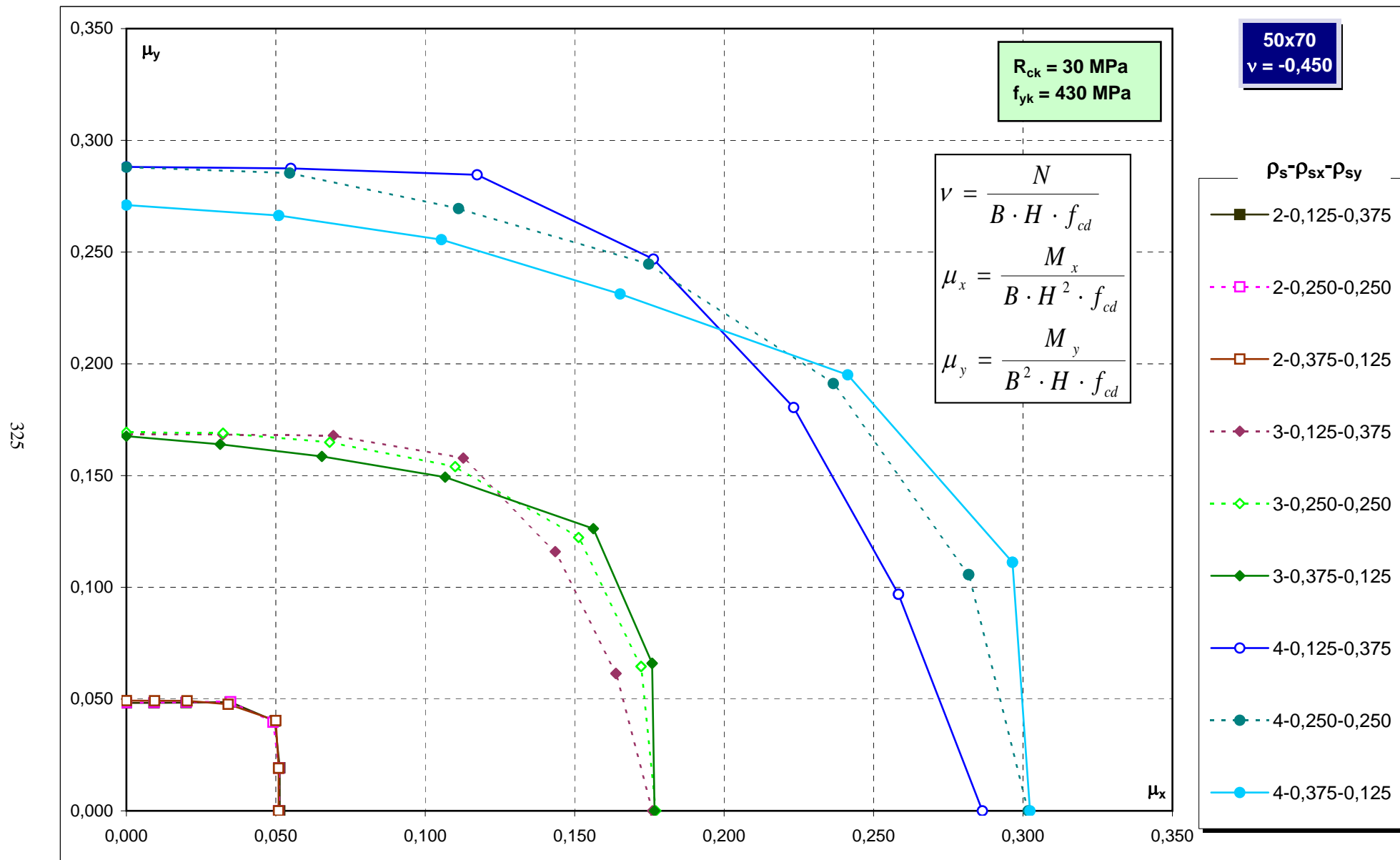


Abachi di progetto

324

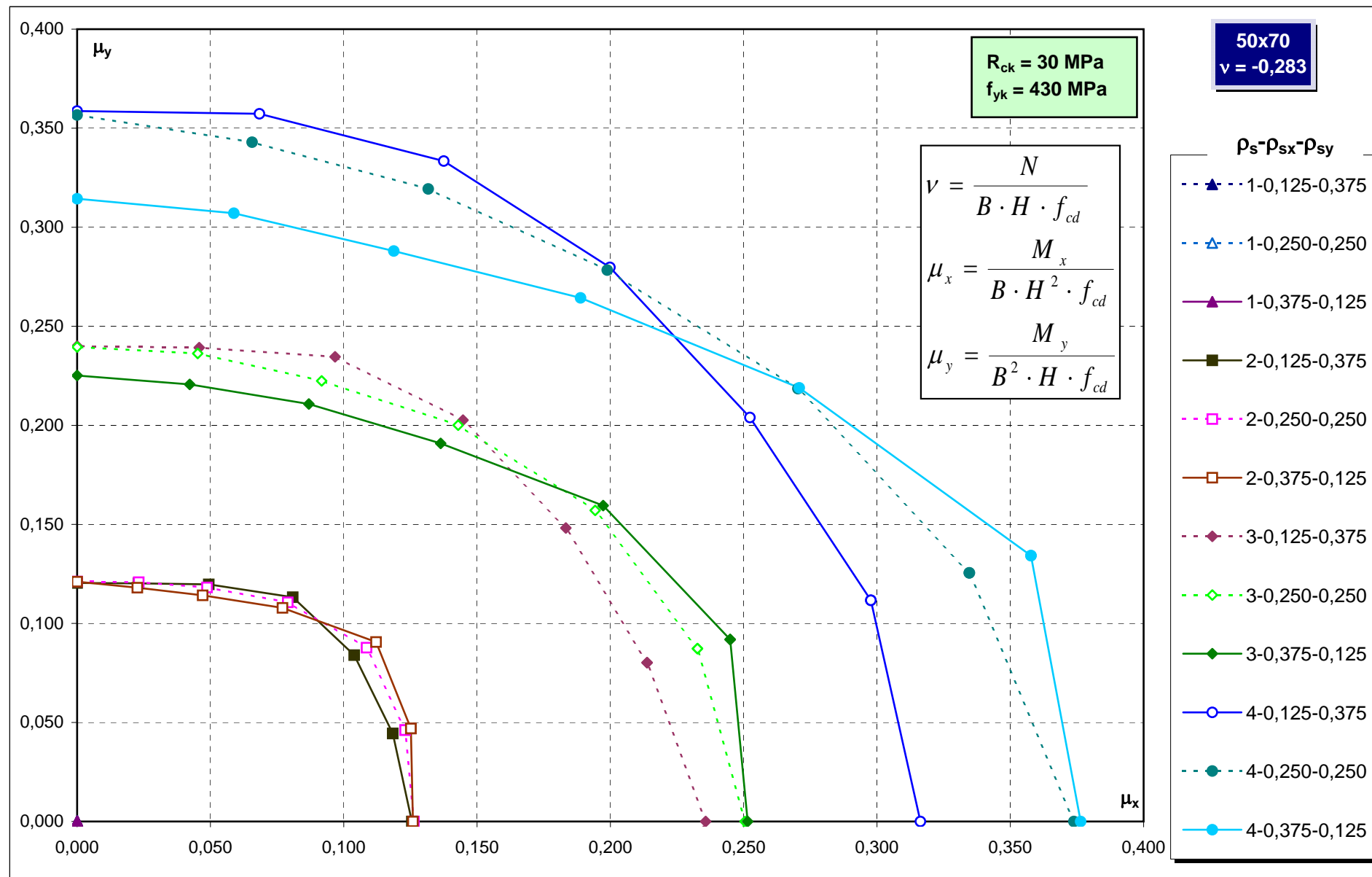


Abachi di progetto



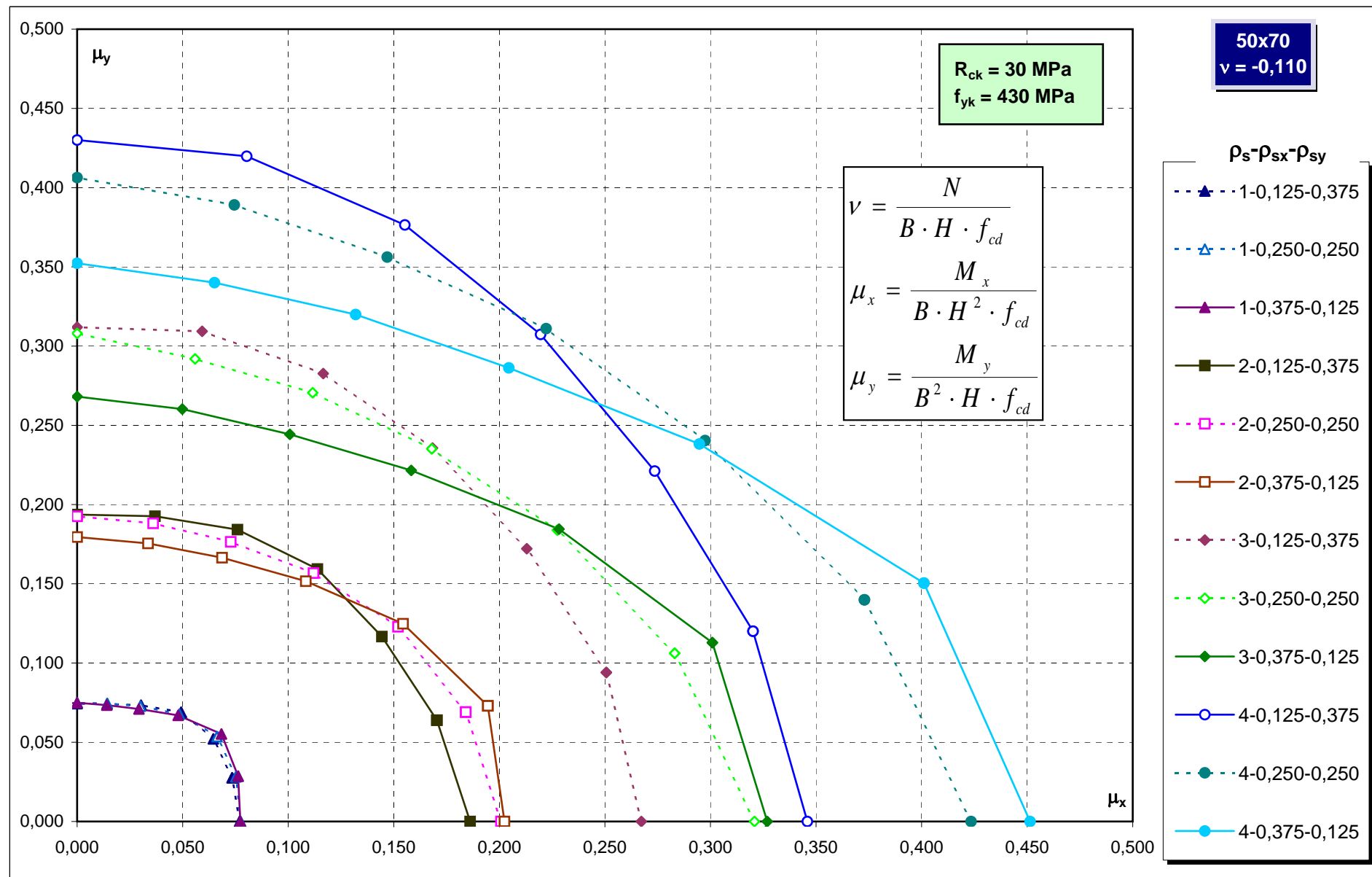
Abachi di progetto

326

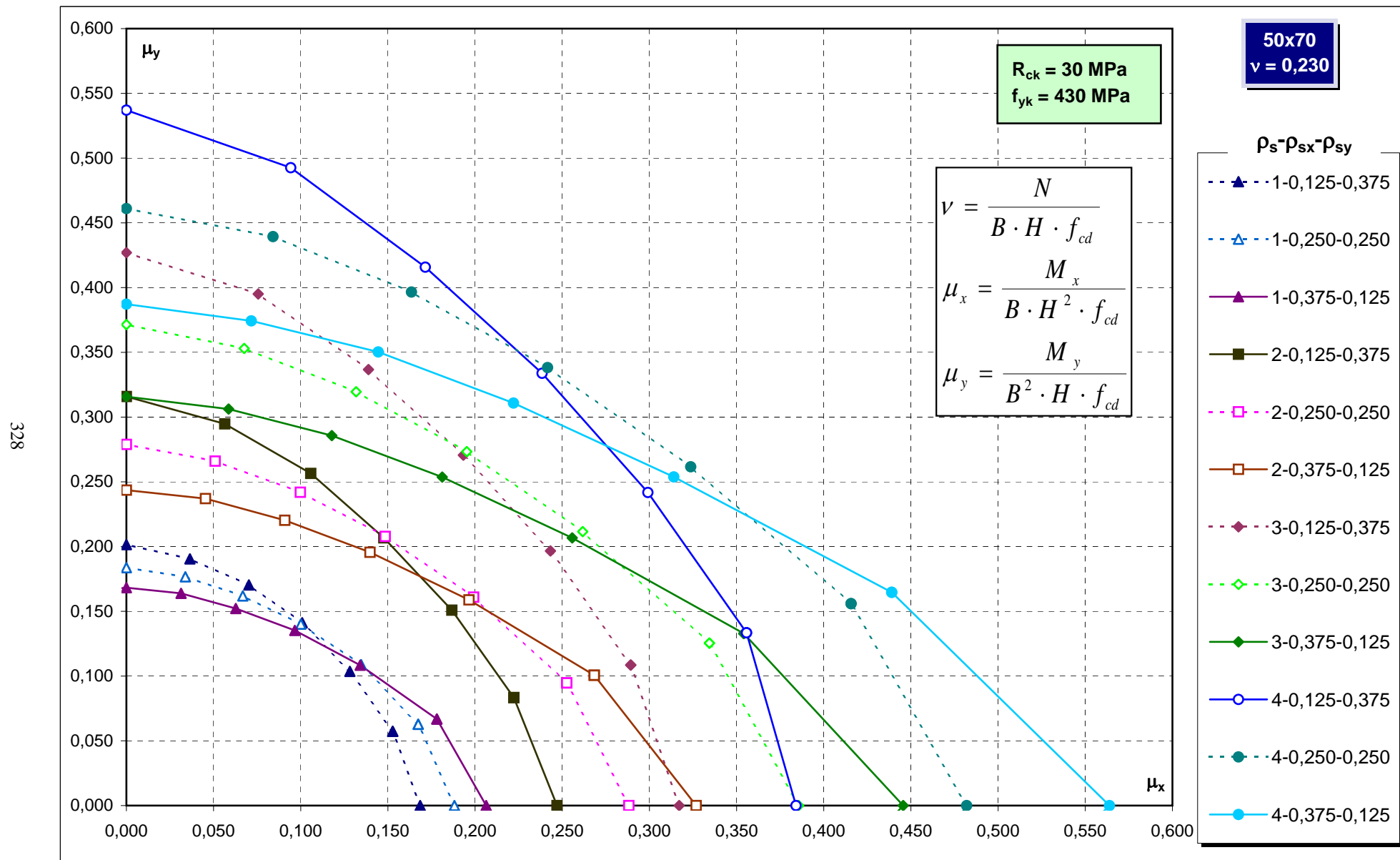


Abachi di progetto

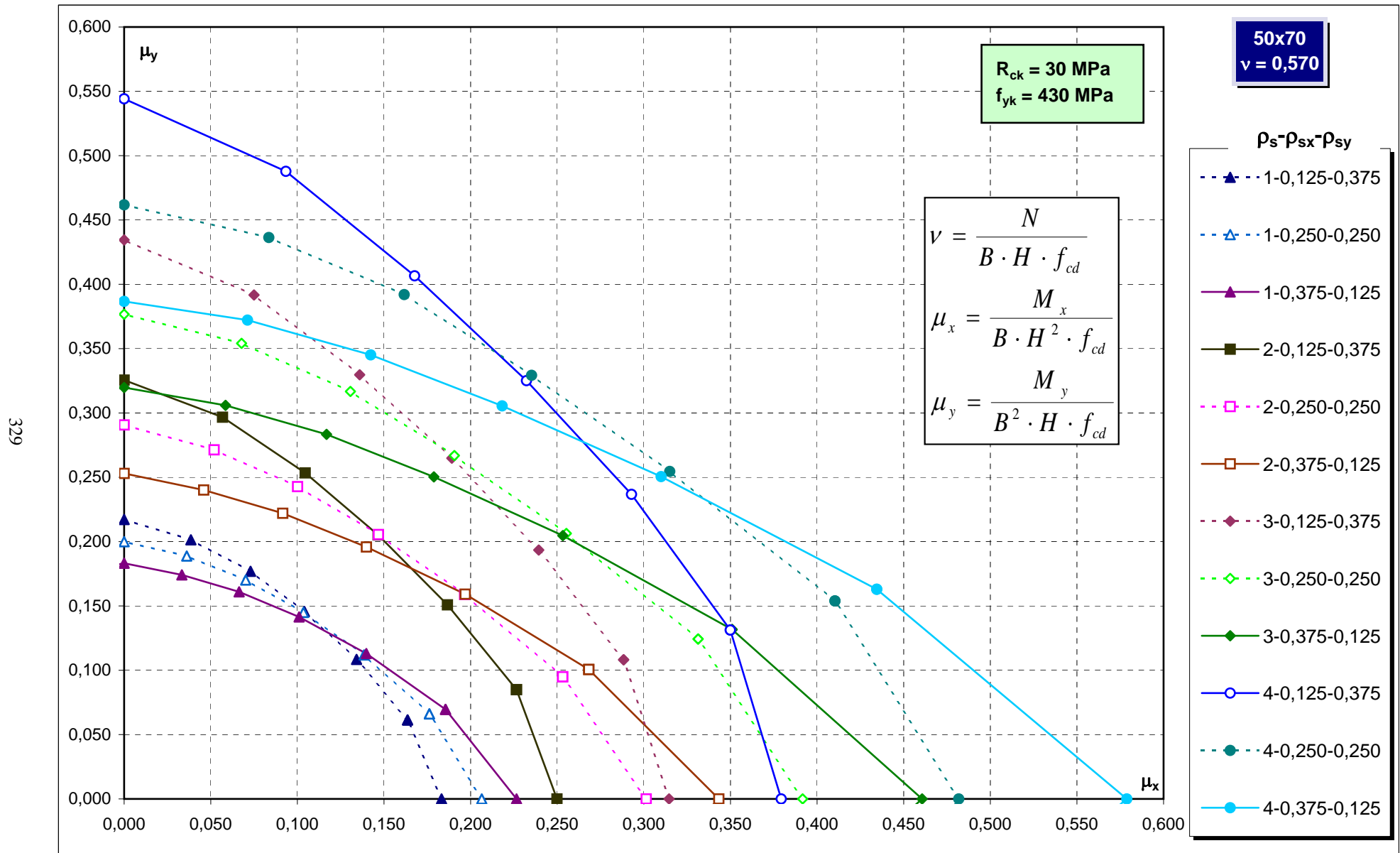
327



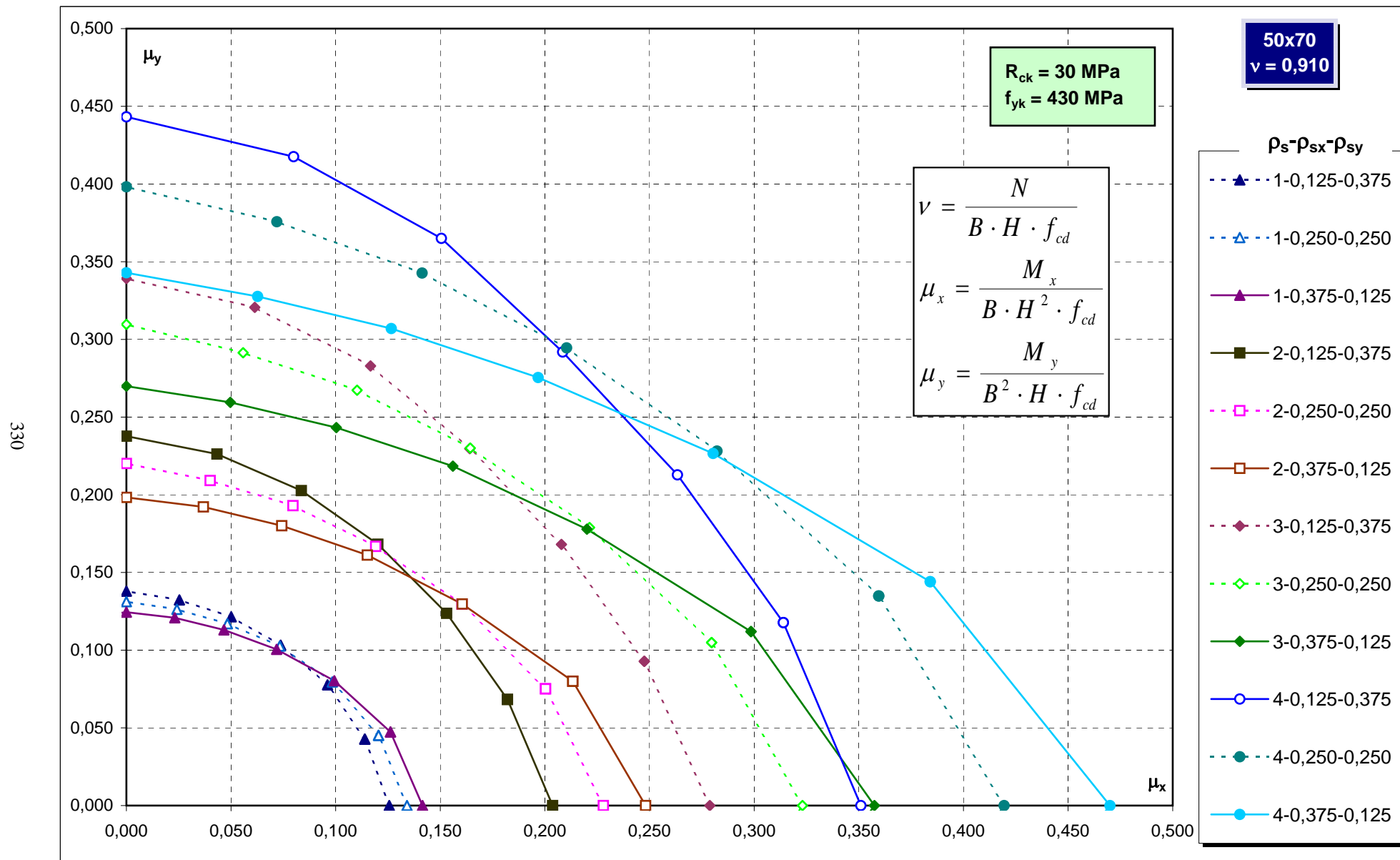
Abachi di progetto



Abachi di progetto

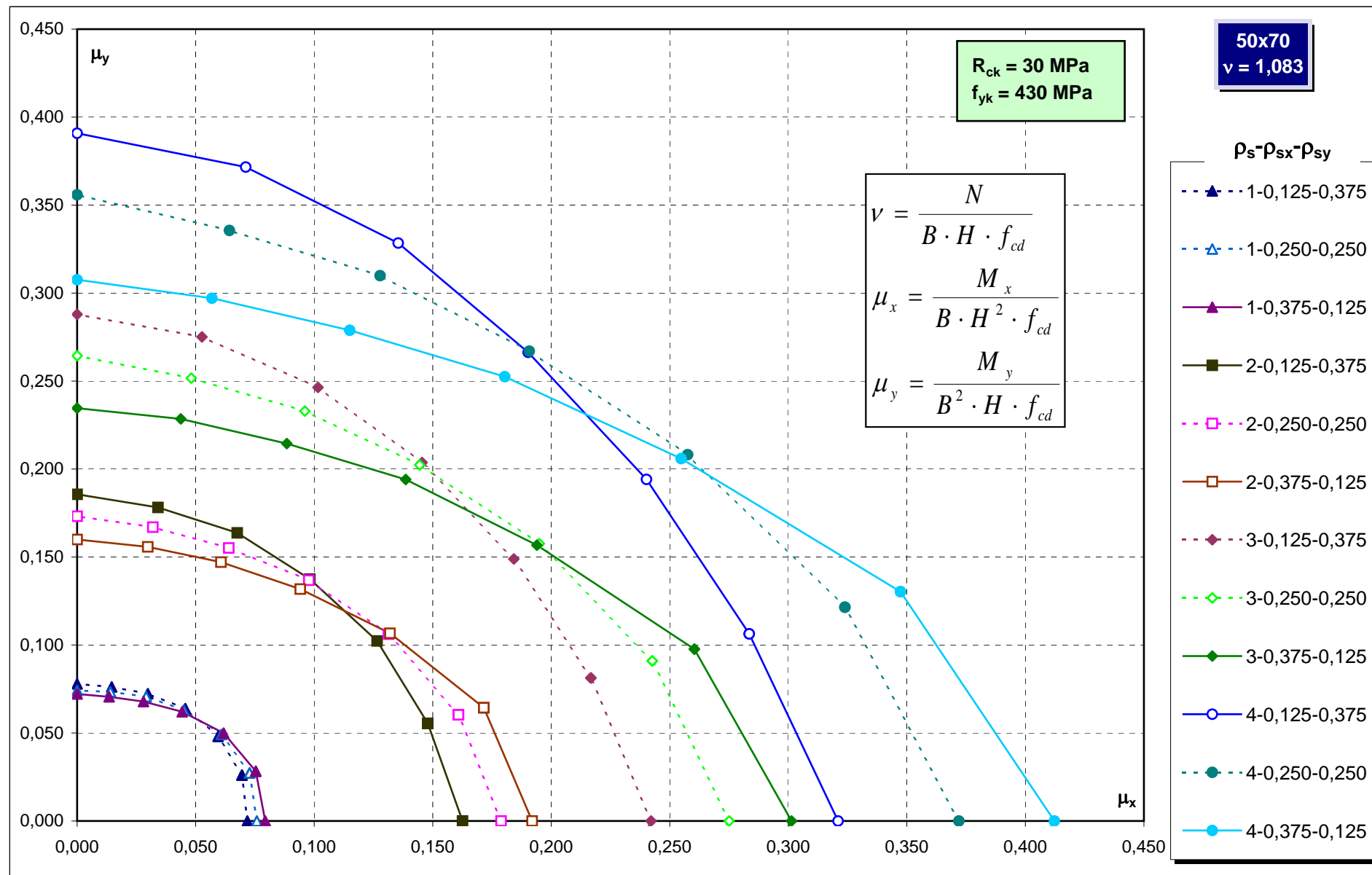


Abachi di progetto



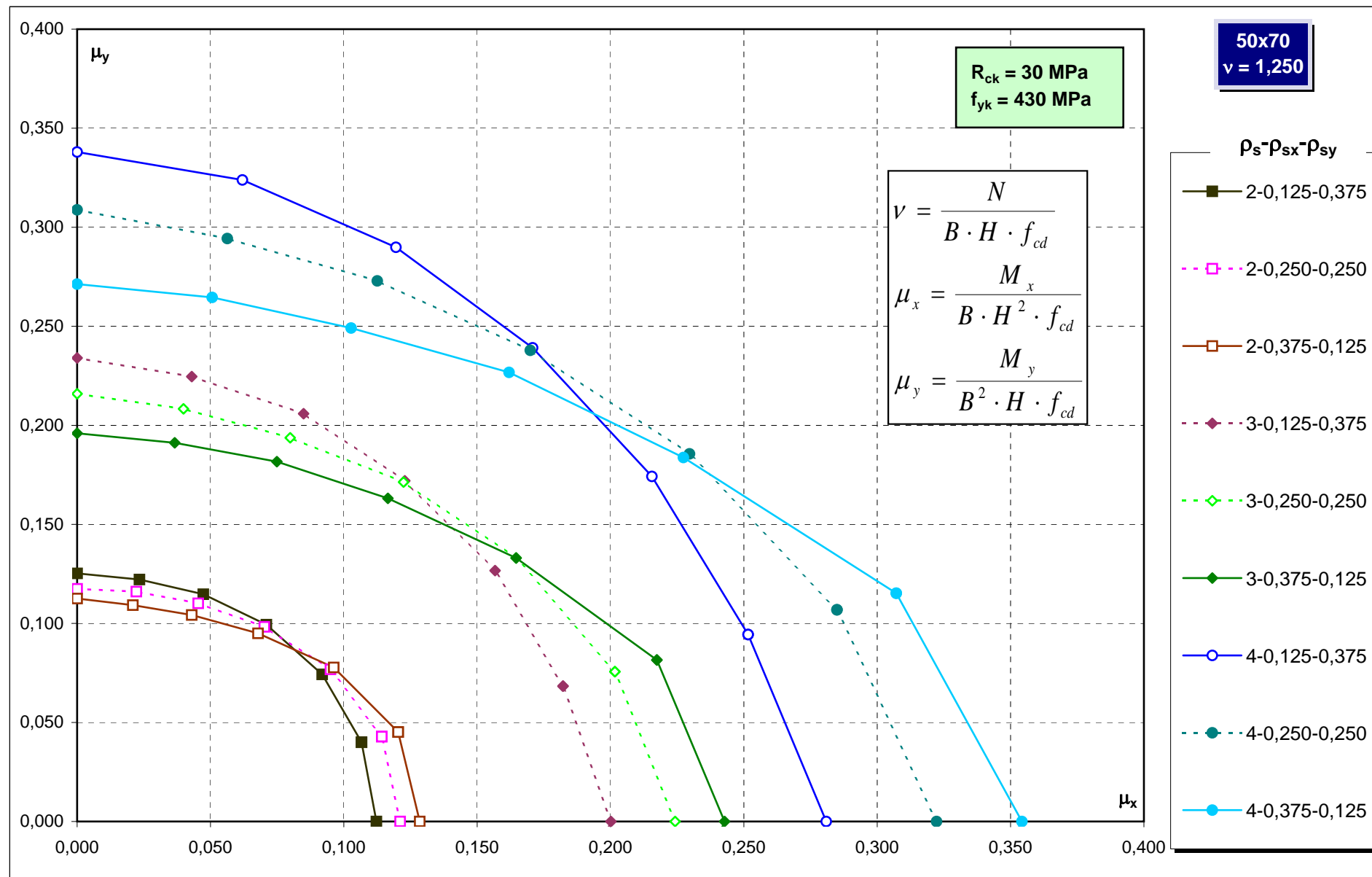
Abachi di progetto

331

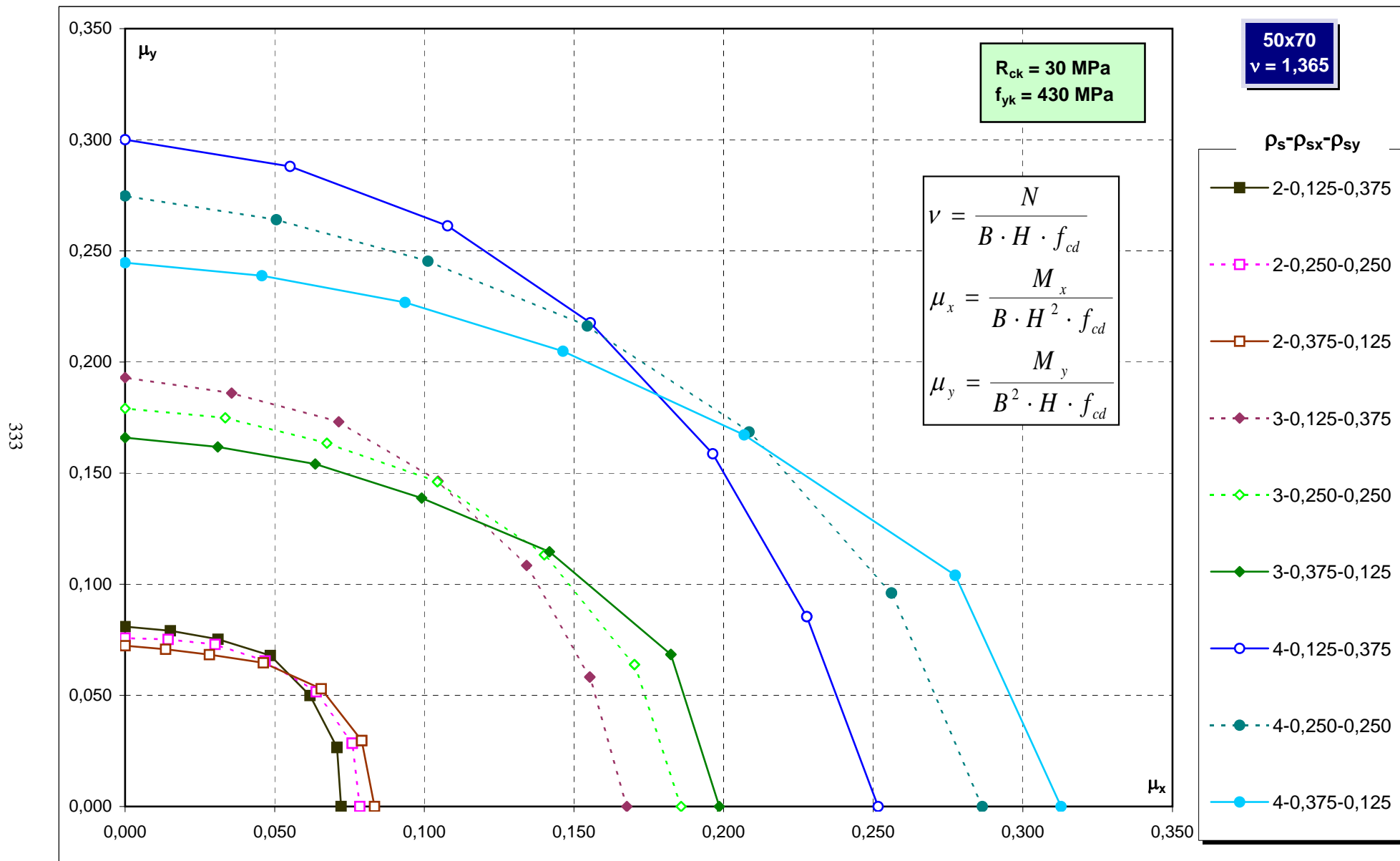


Abachi di progetto

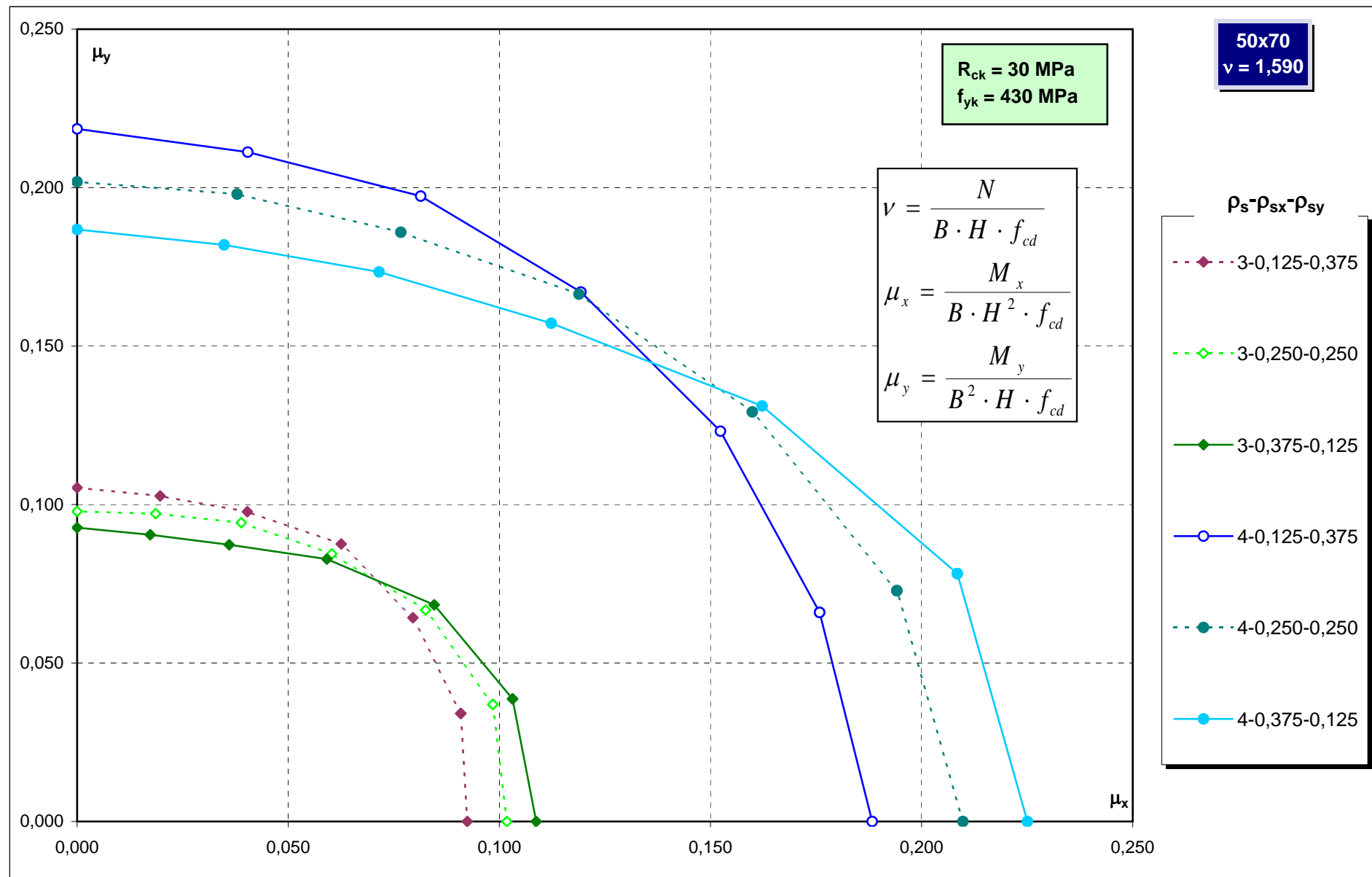
332



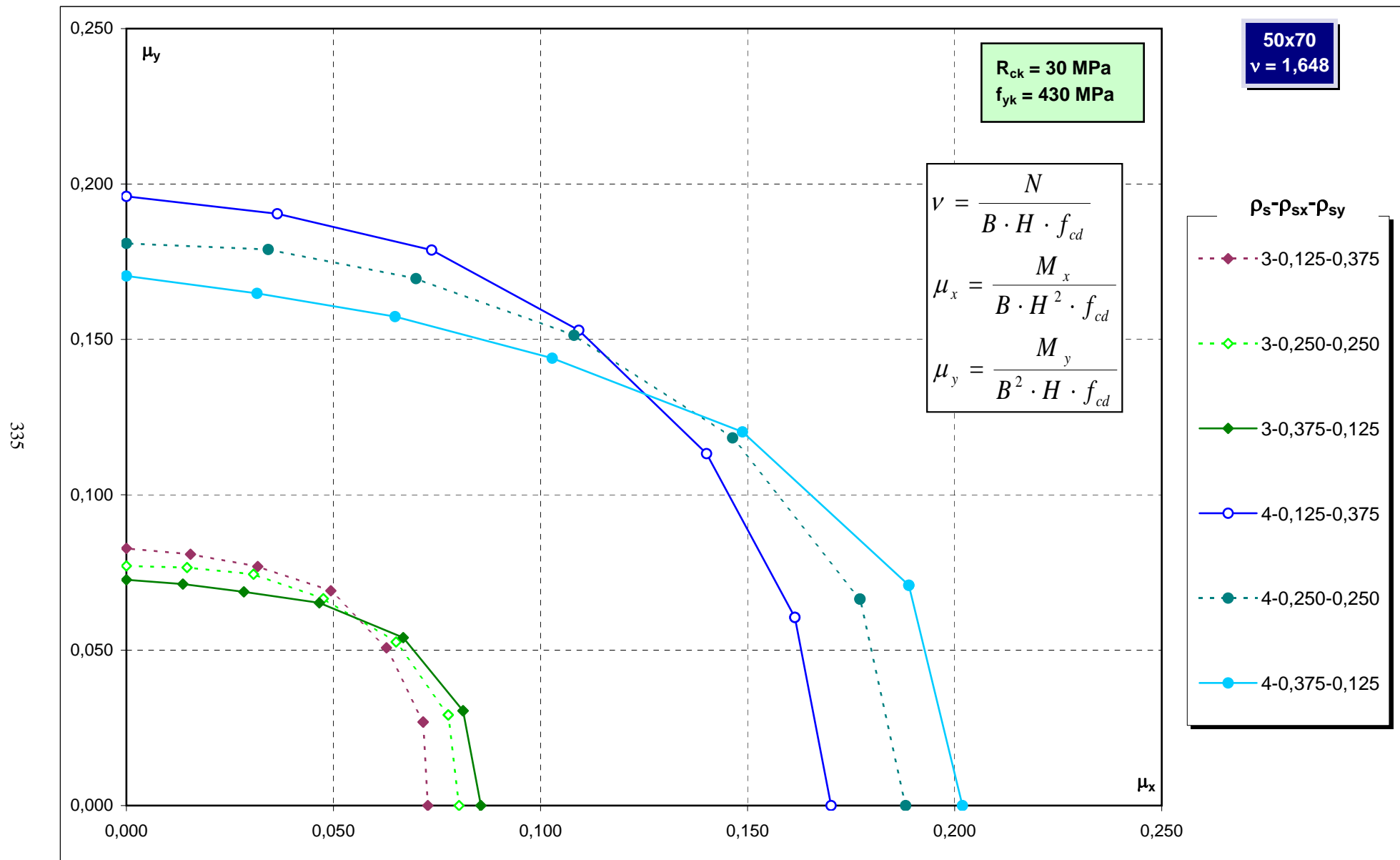
Abachi di progetto



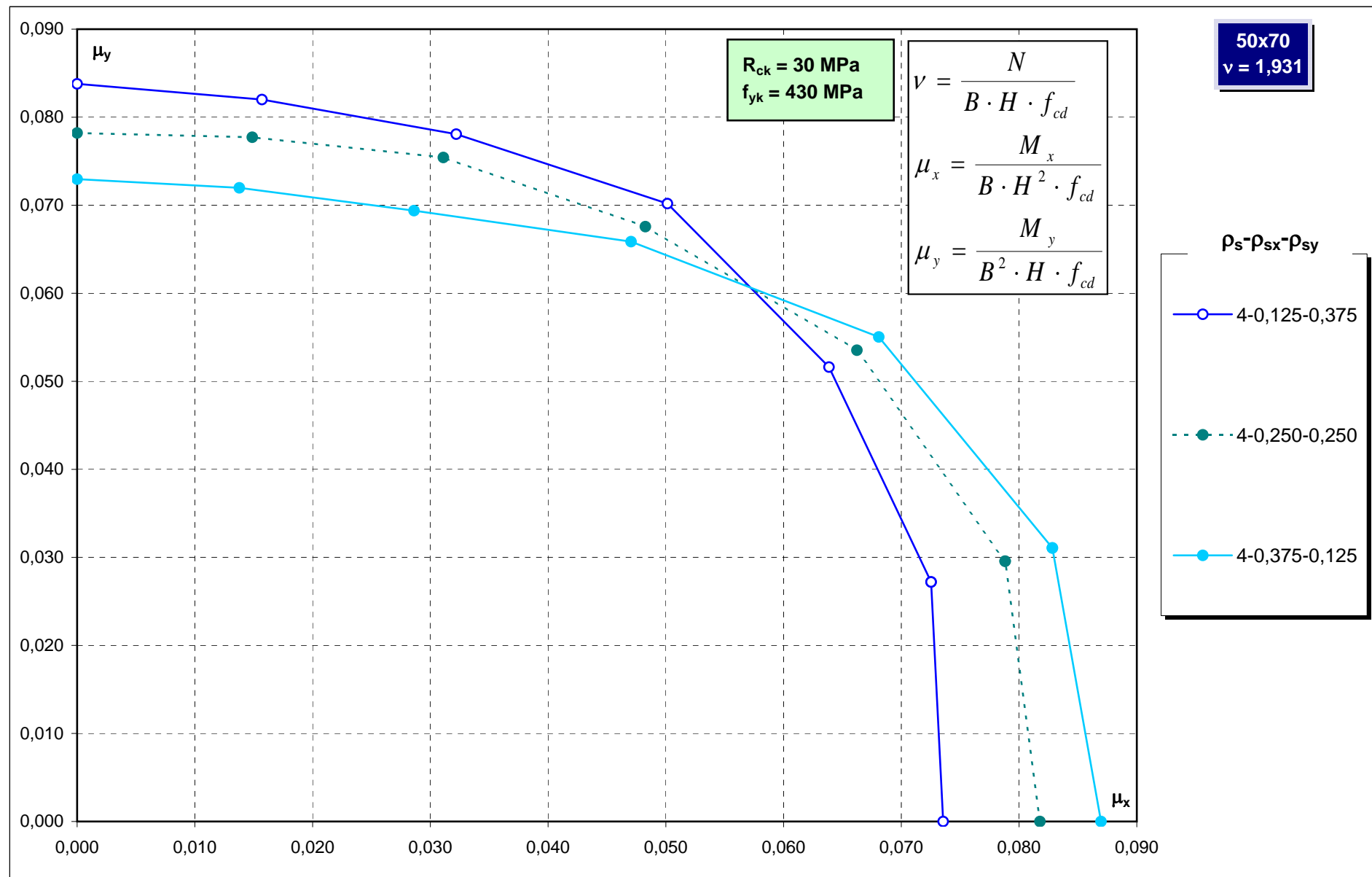
Abachi di progetto



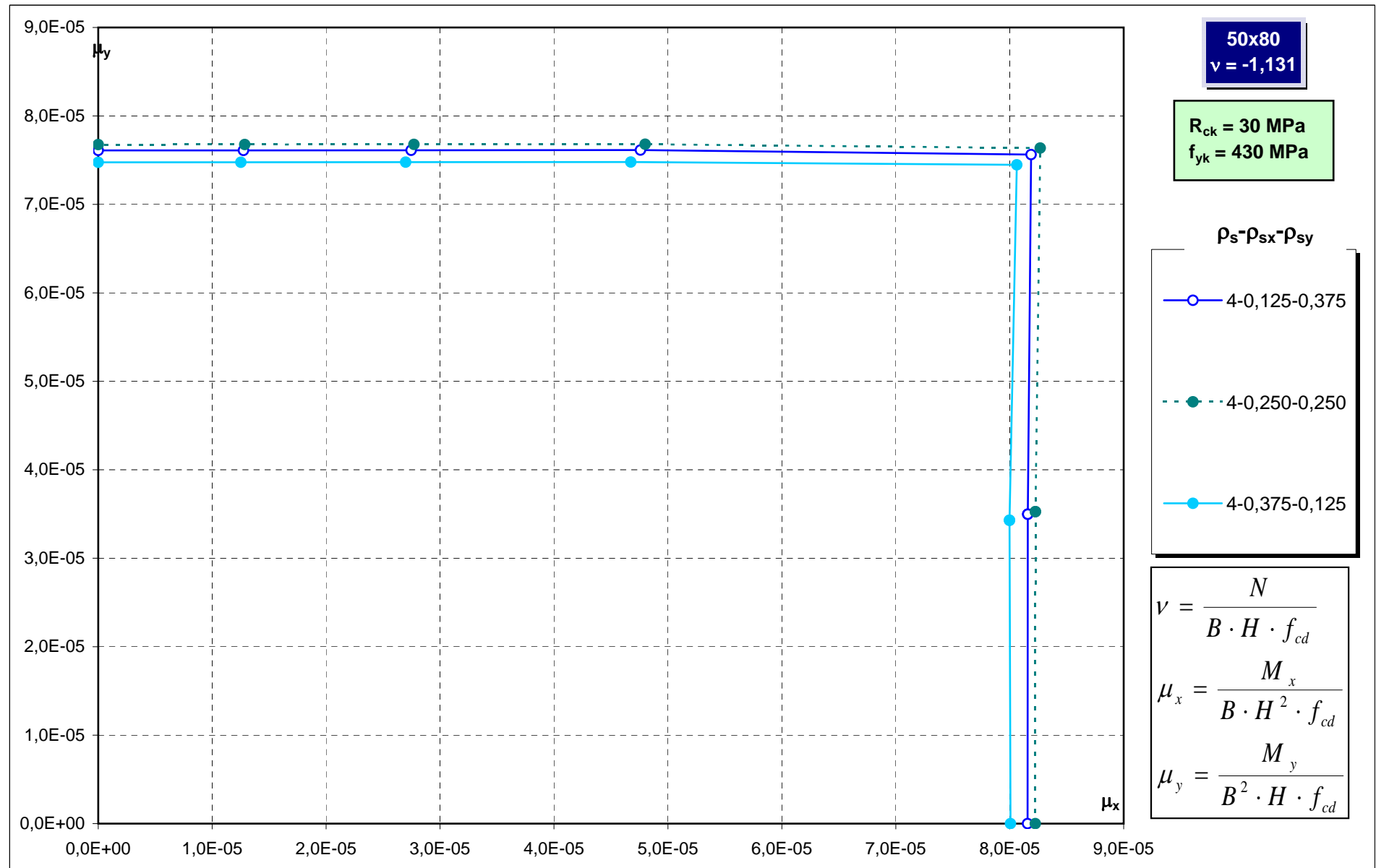
Abachi di progetto



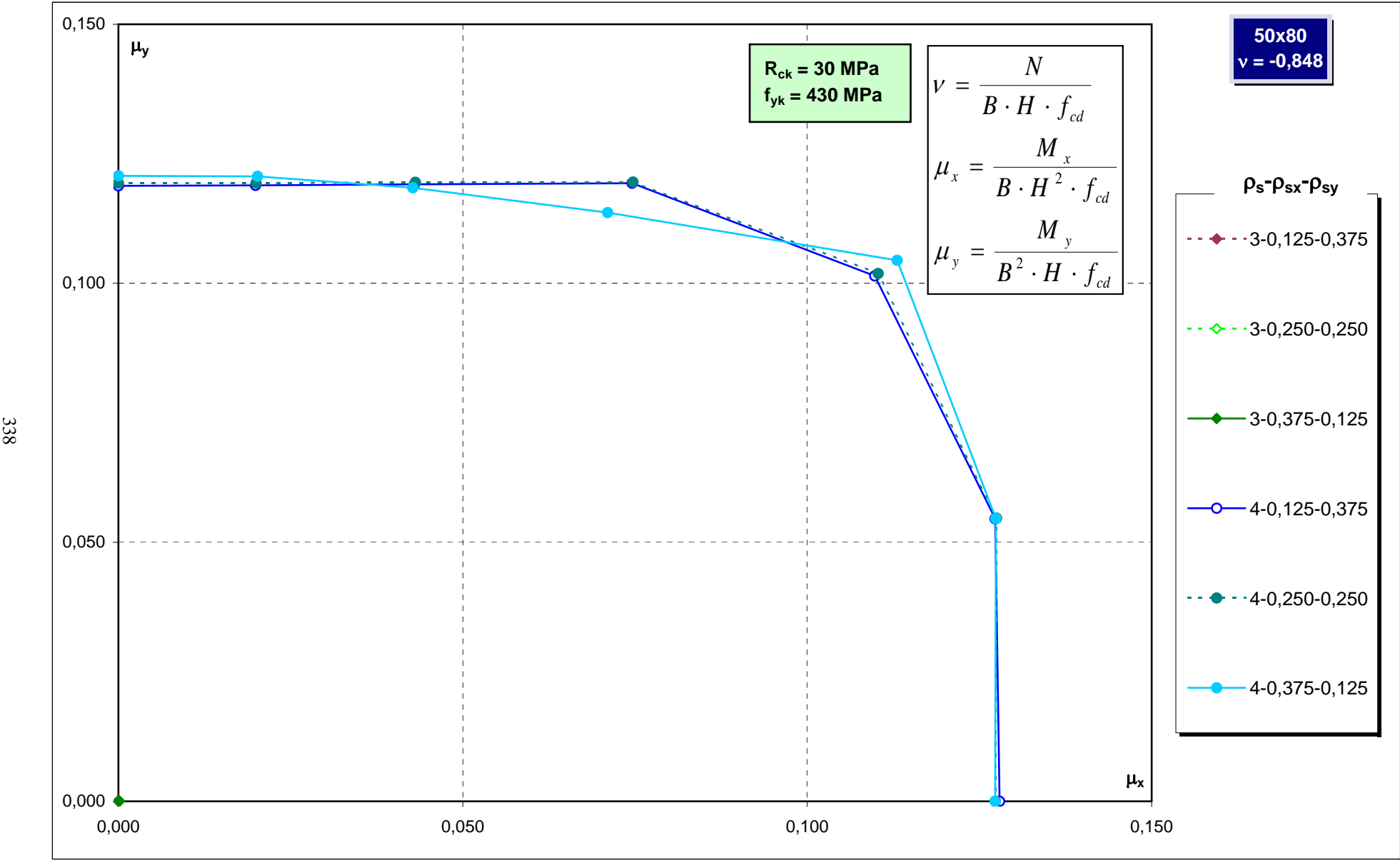
Abachi di progetto



Abachi di progetto

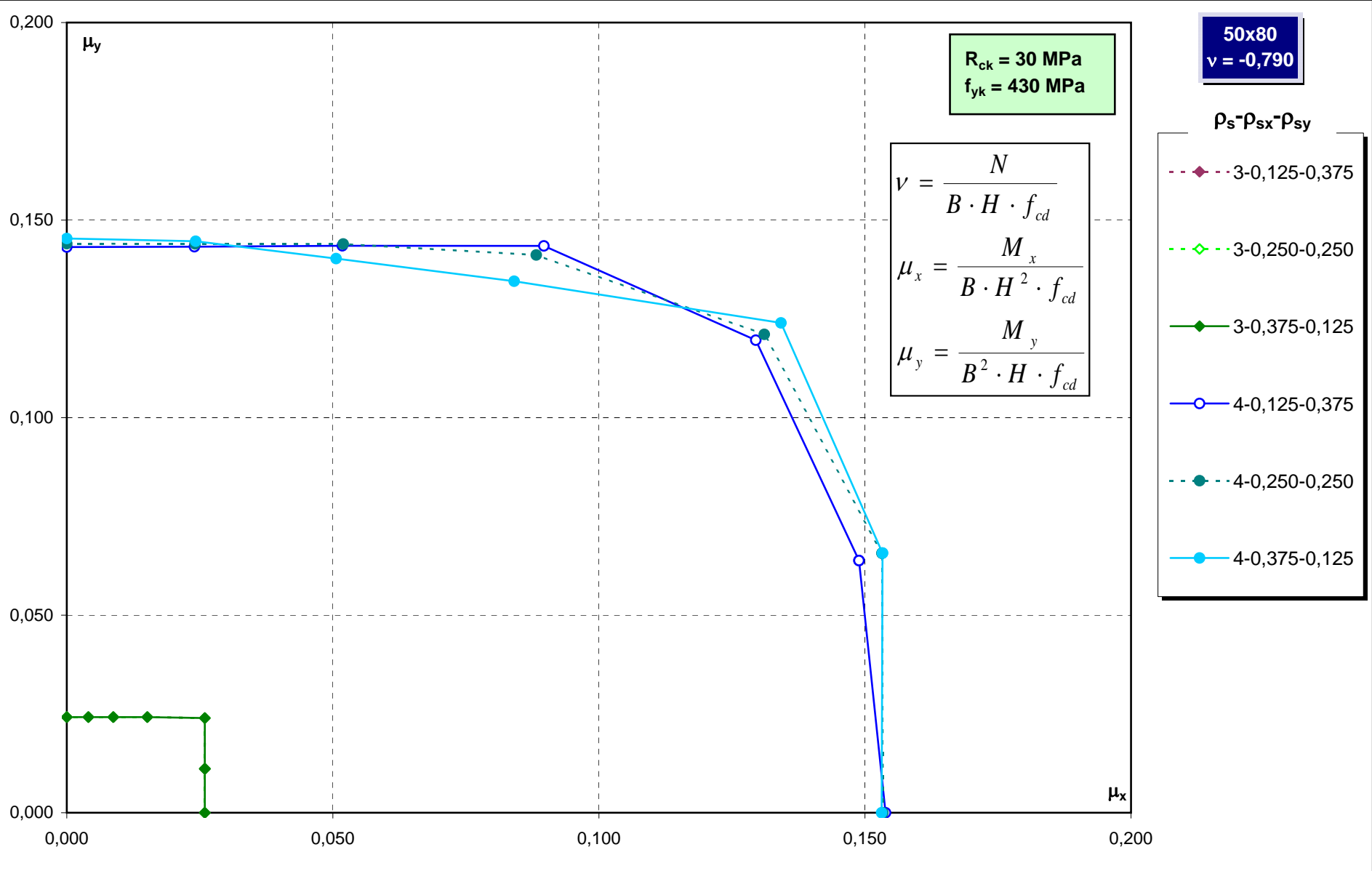


Abachi di progetto

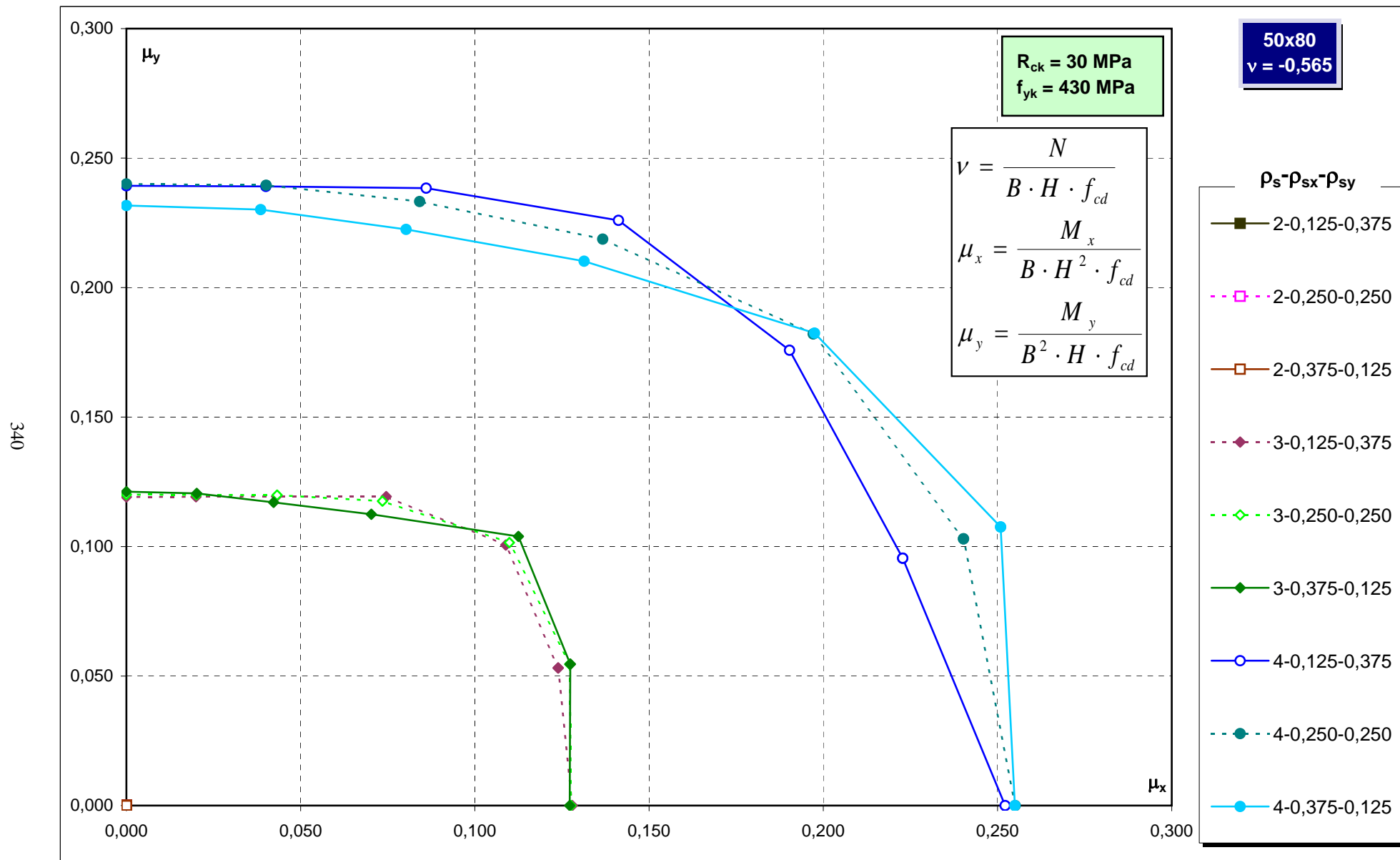


Abachi di progetto

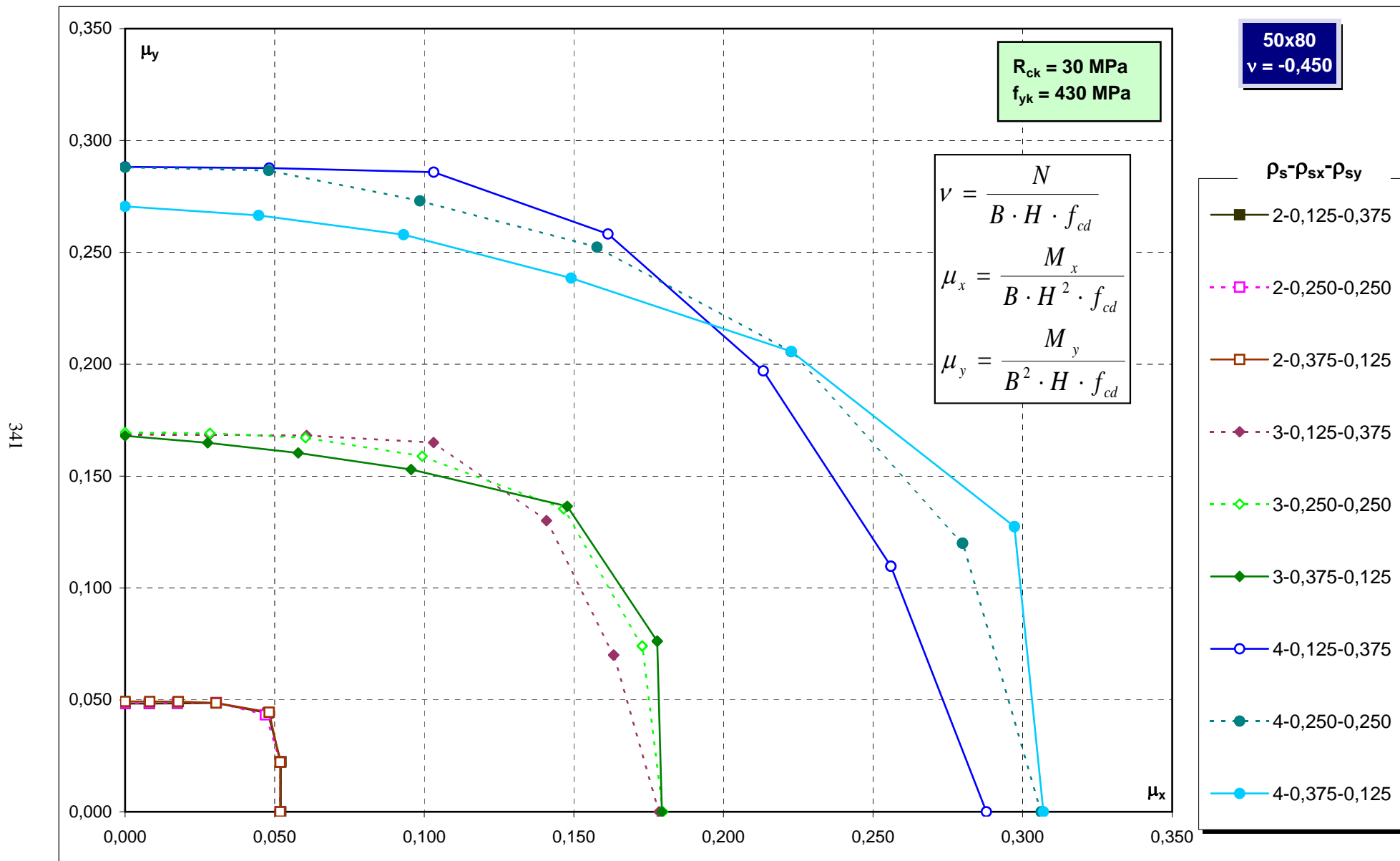
339



Abachi di progetto

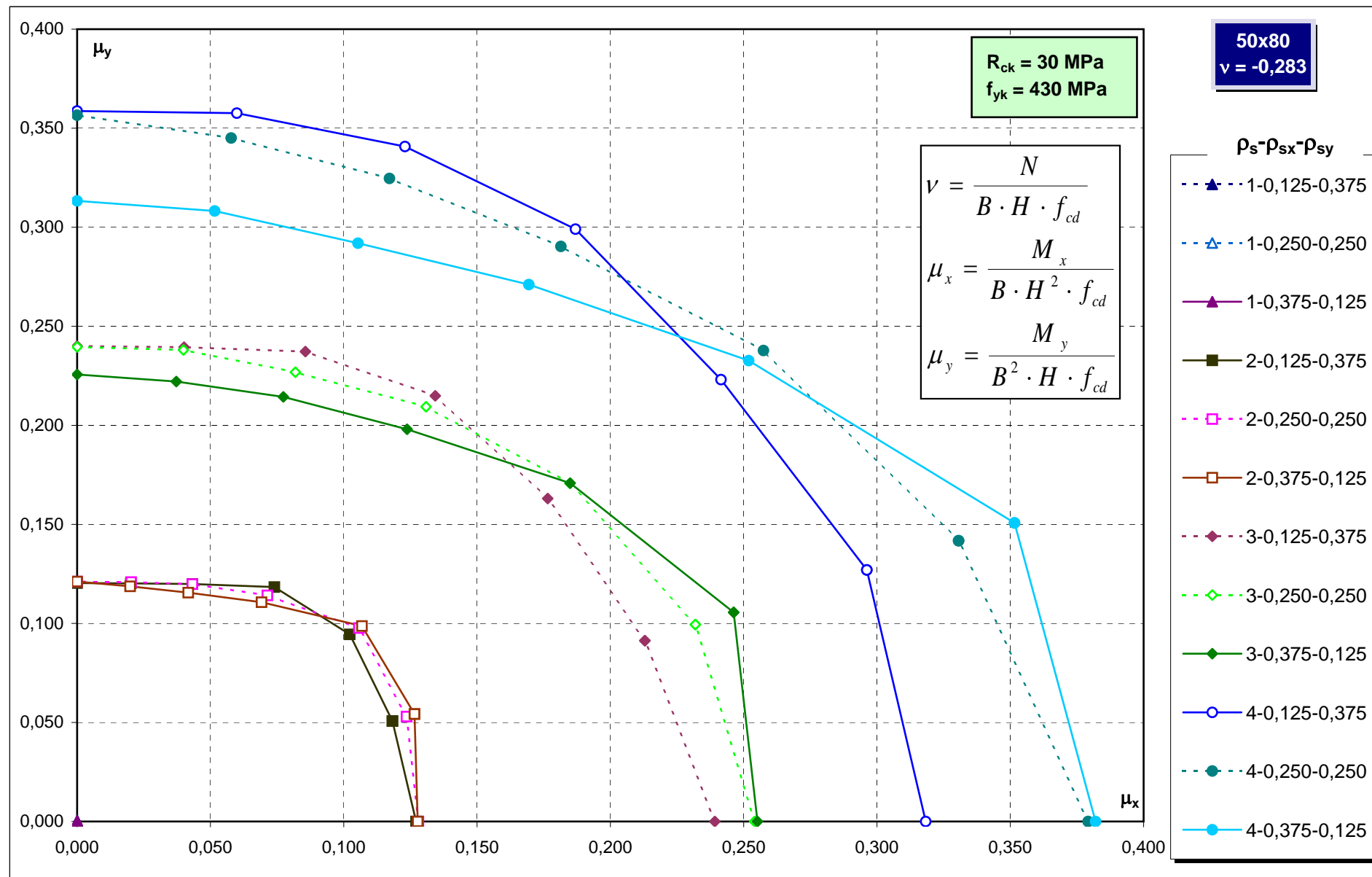


Abachi di progetto



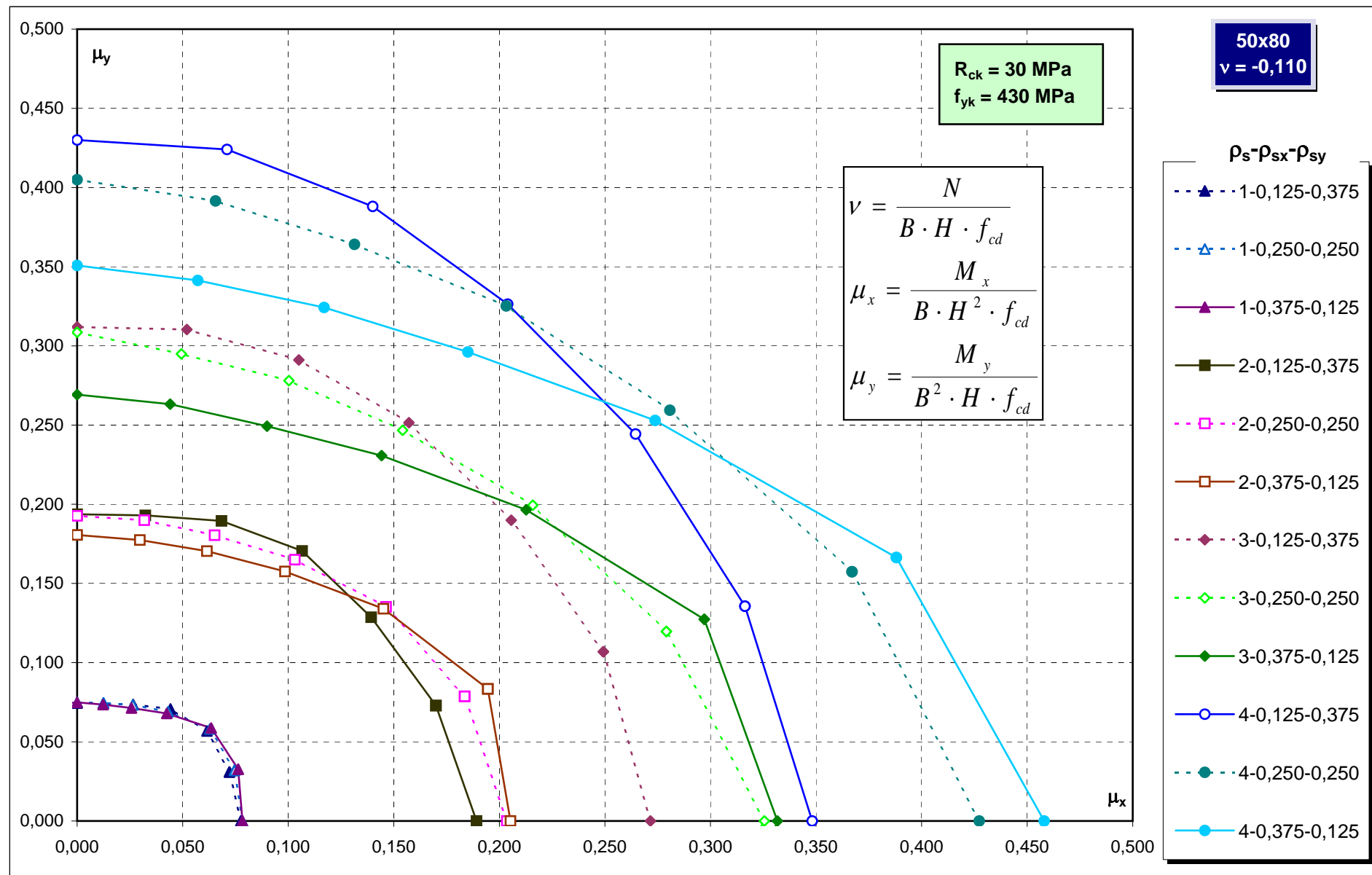
Abachi di progetto

342



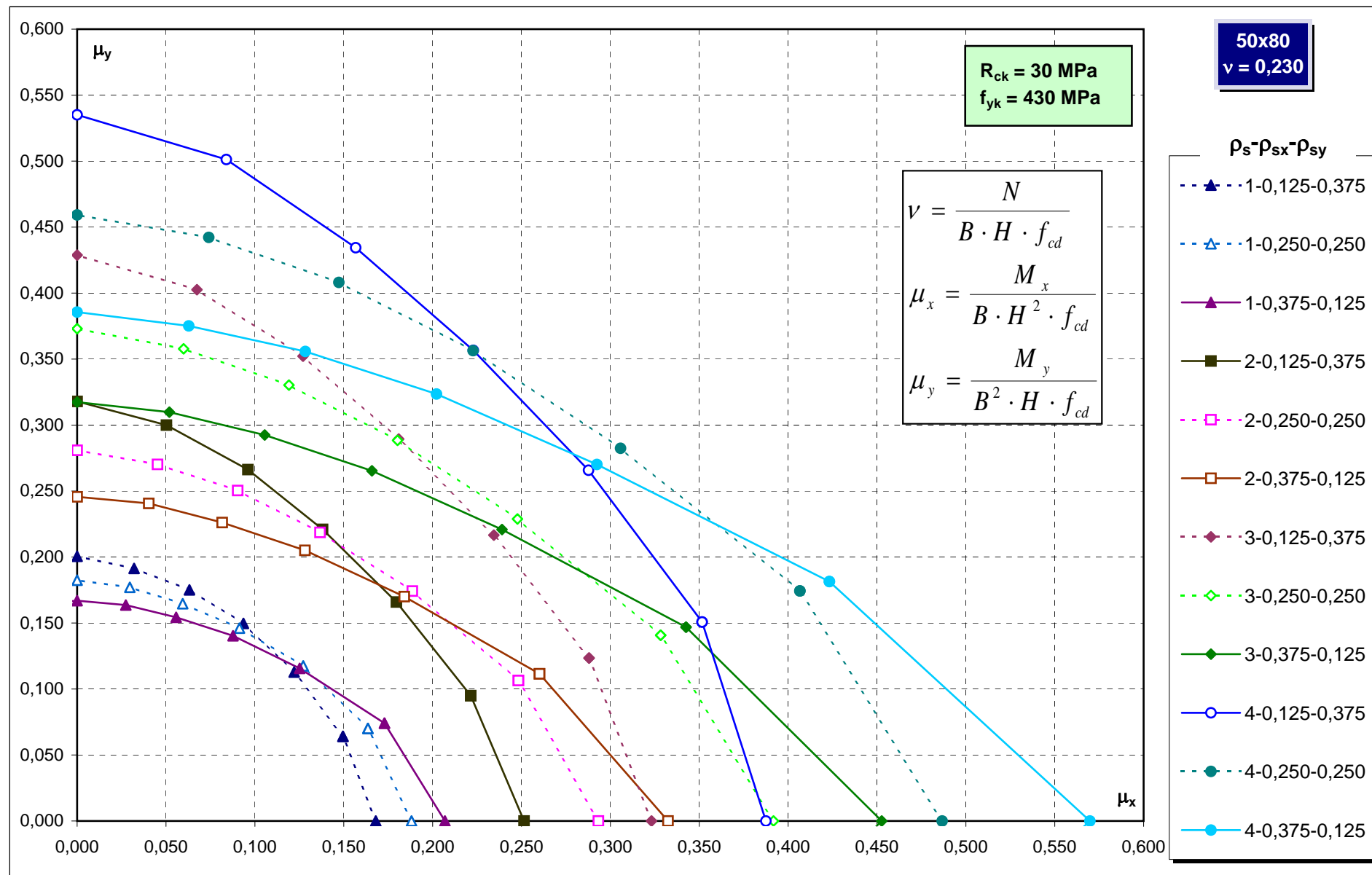
Abachi di progetto

343

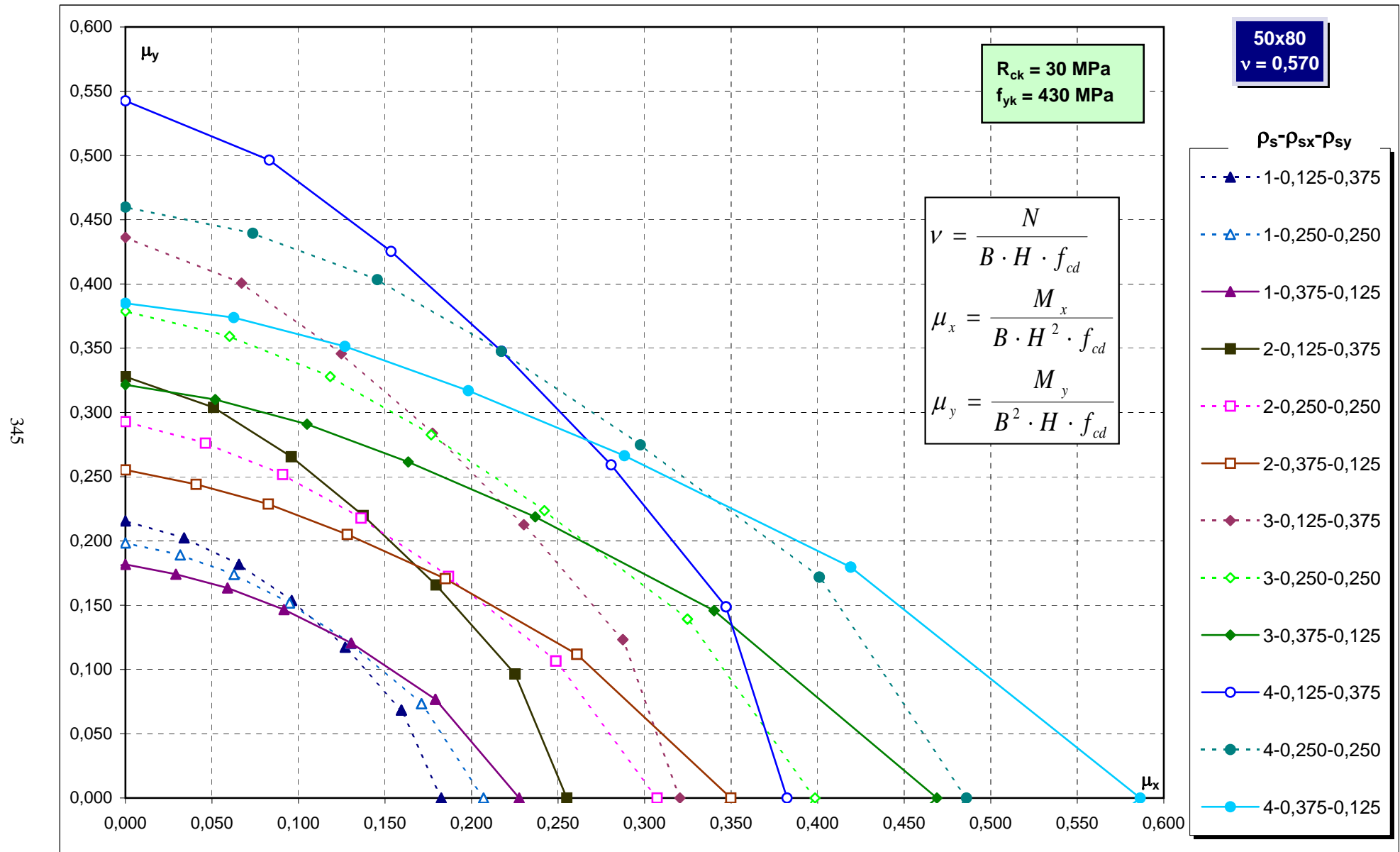


Abachi di progetto

344

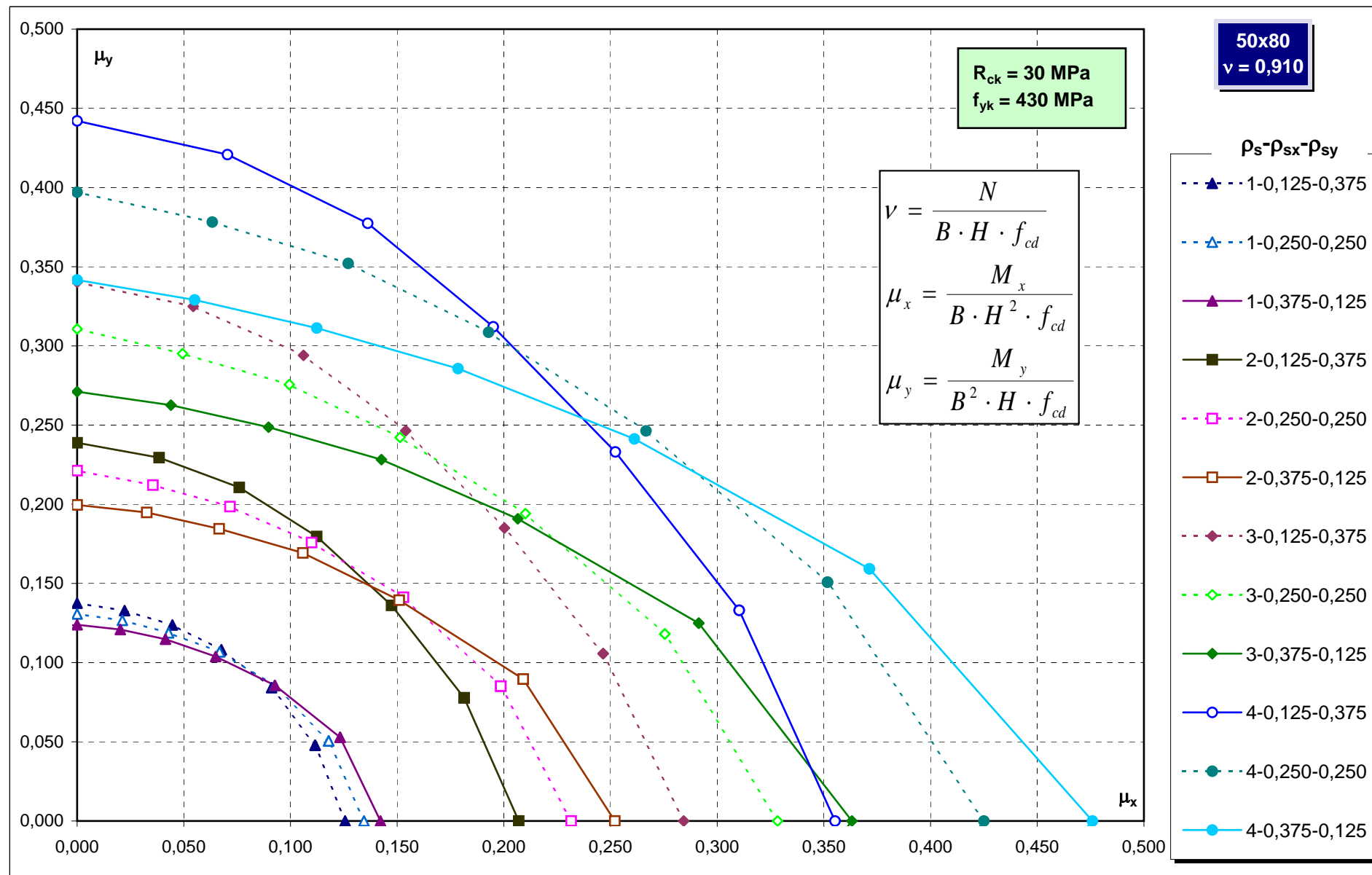


Abachi di progetto



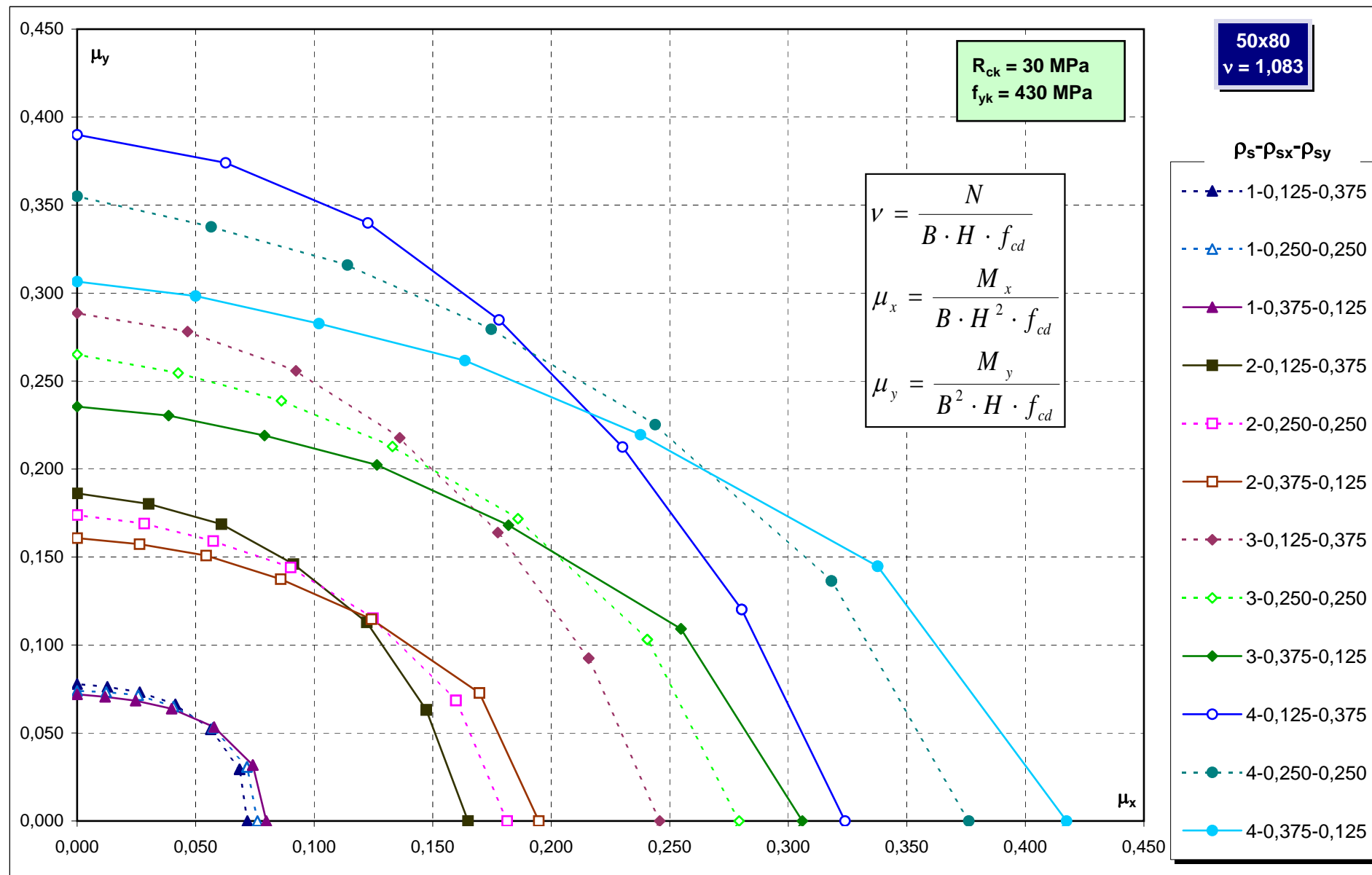
Abachi di progetto

346



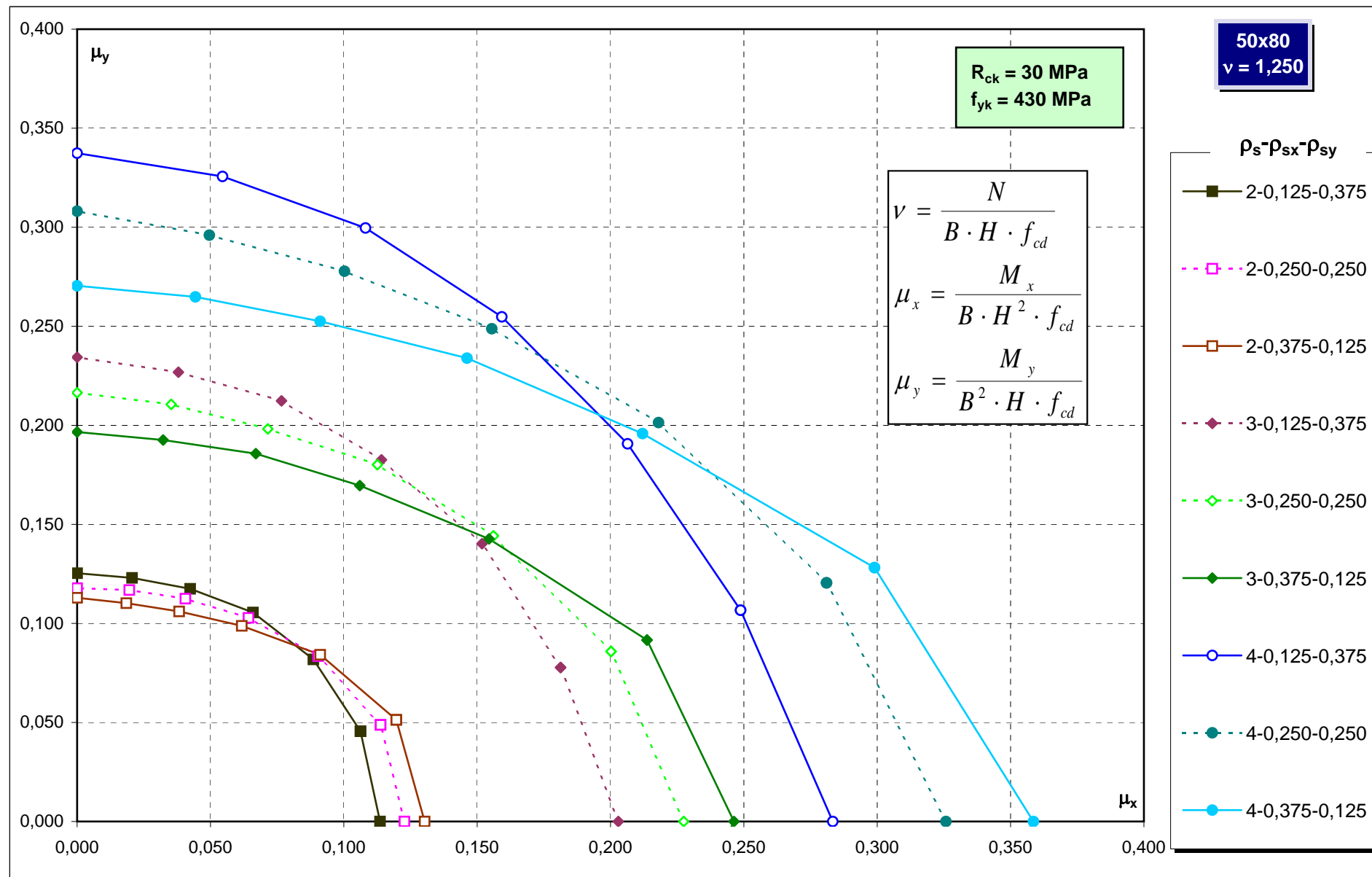
Abachi di progetto

347



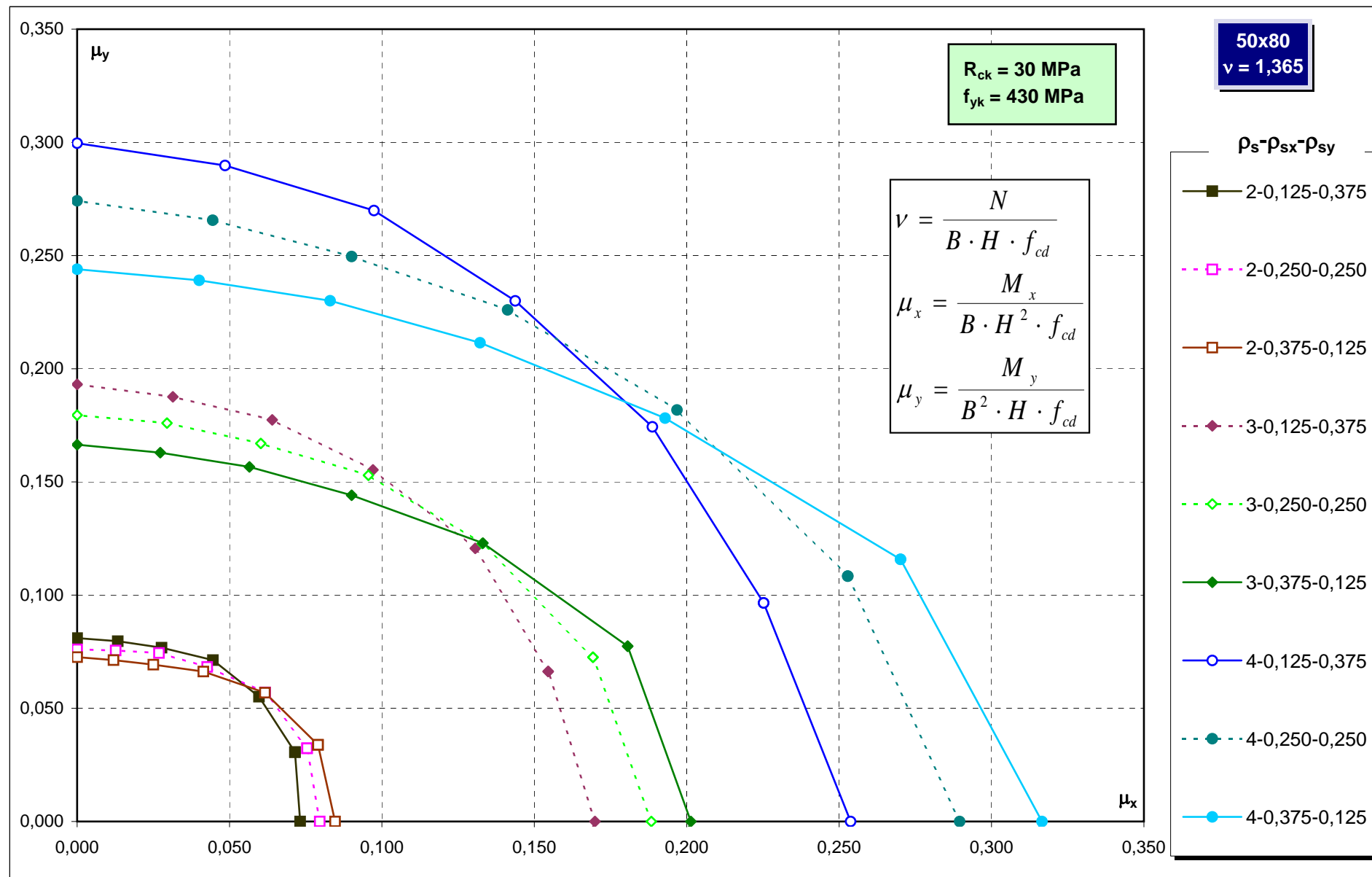
Abachi di progetto

348

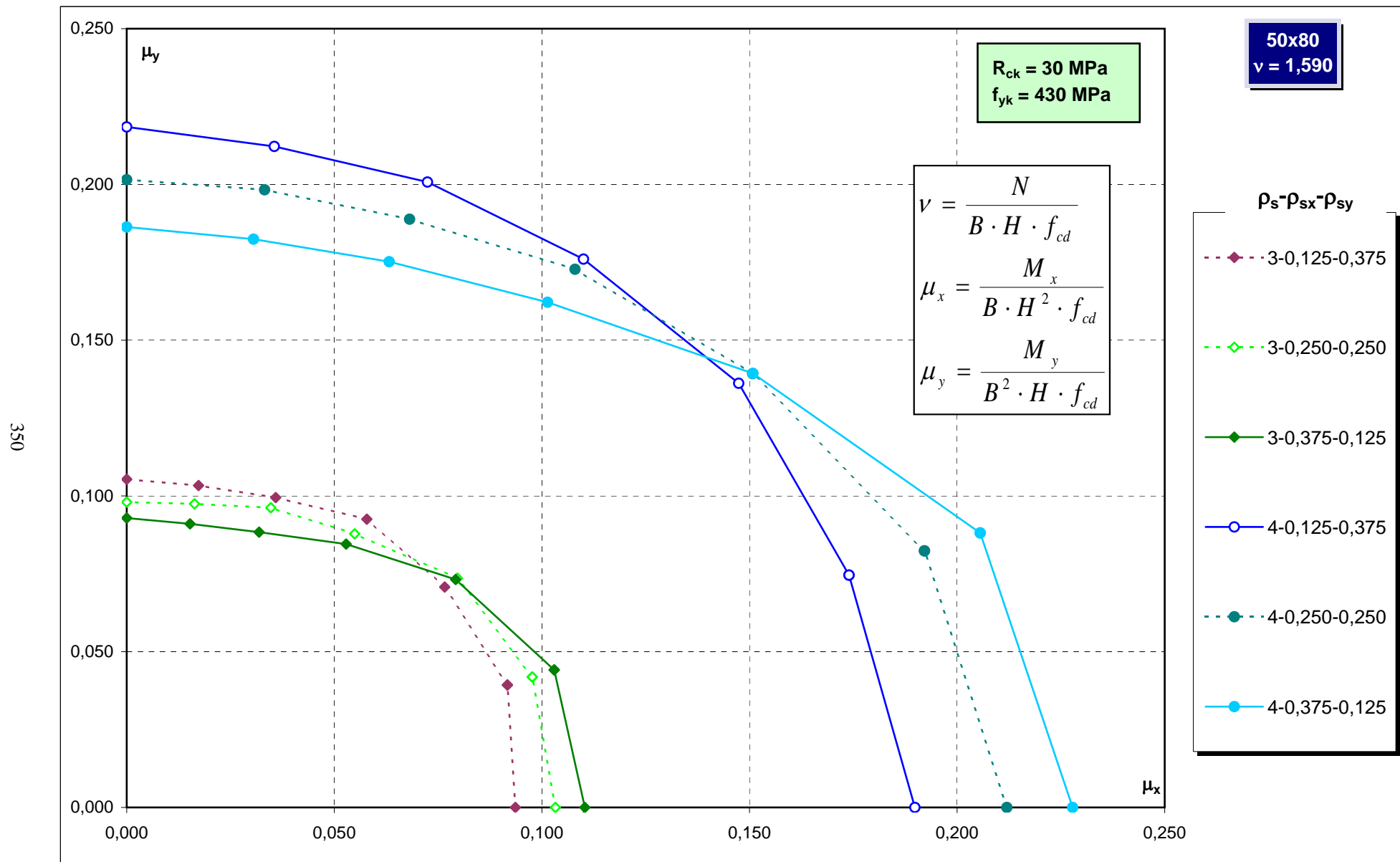


Abachi di progetto

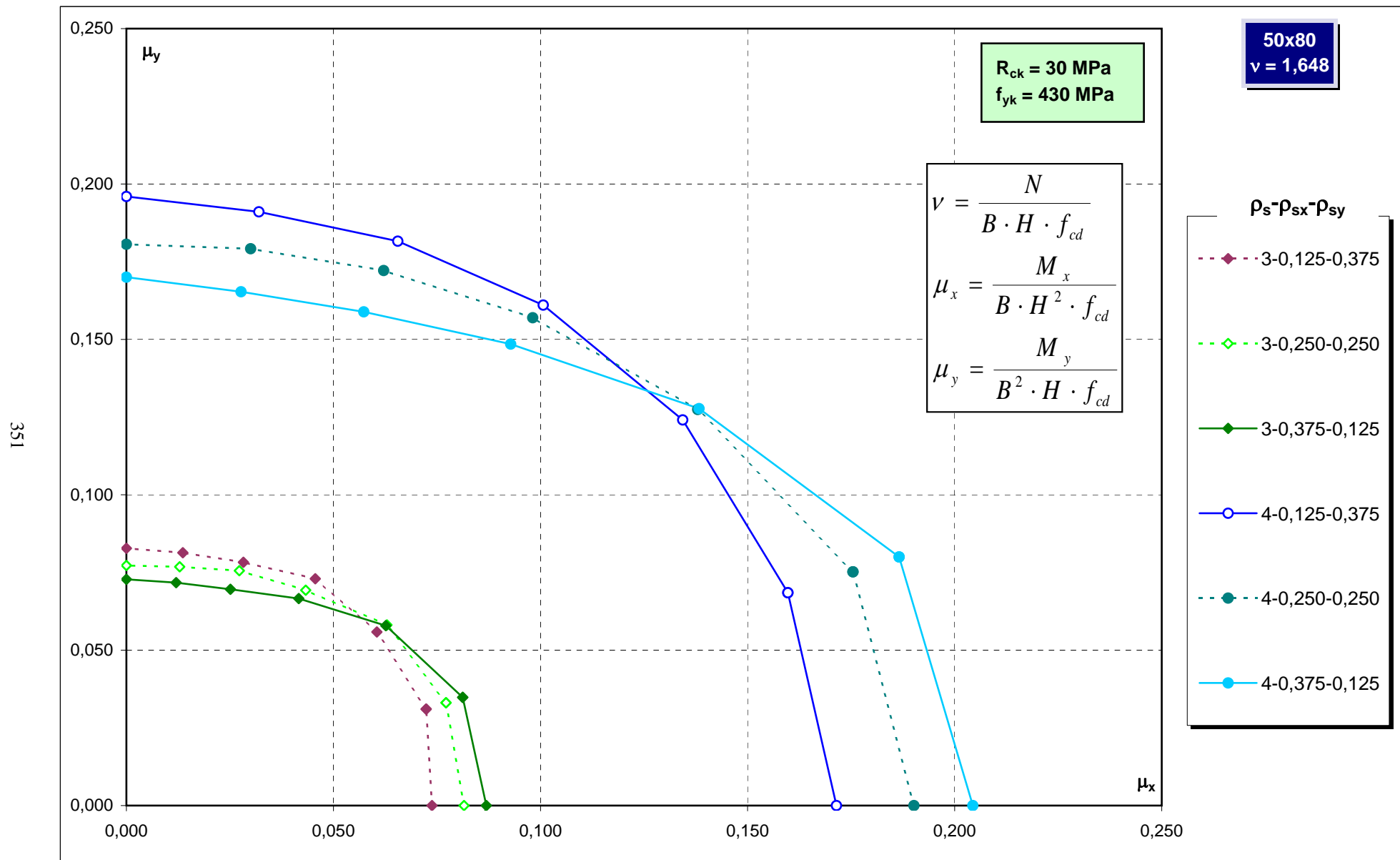
349



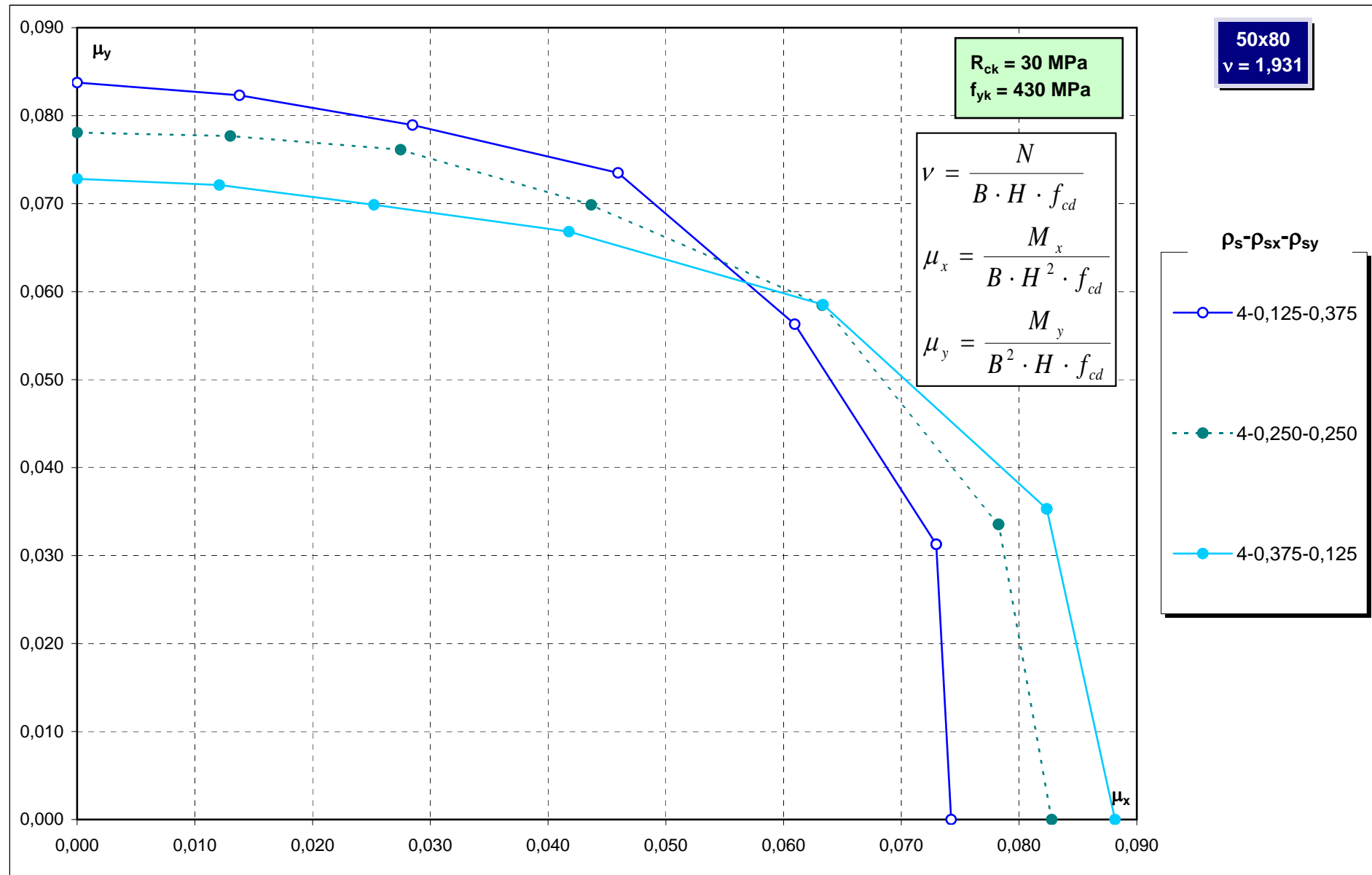
Abachi di progetto



Abachi di progetto

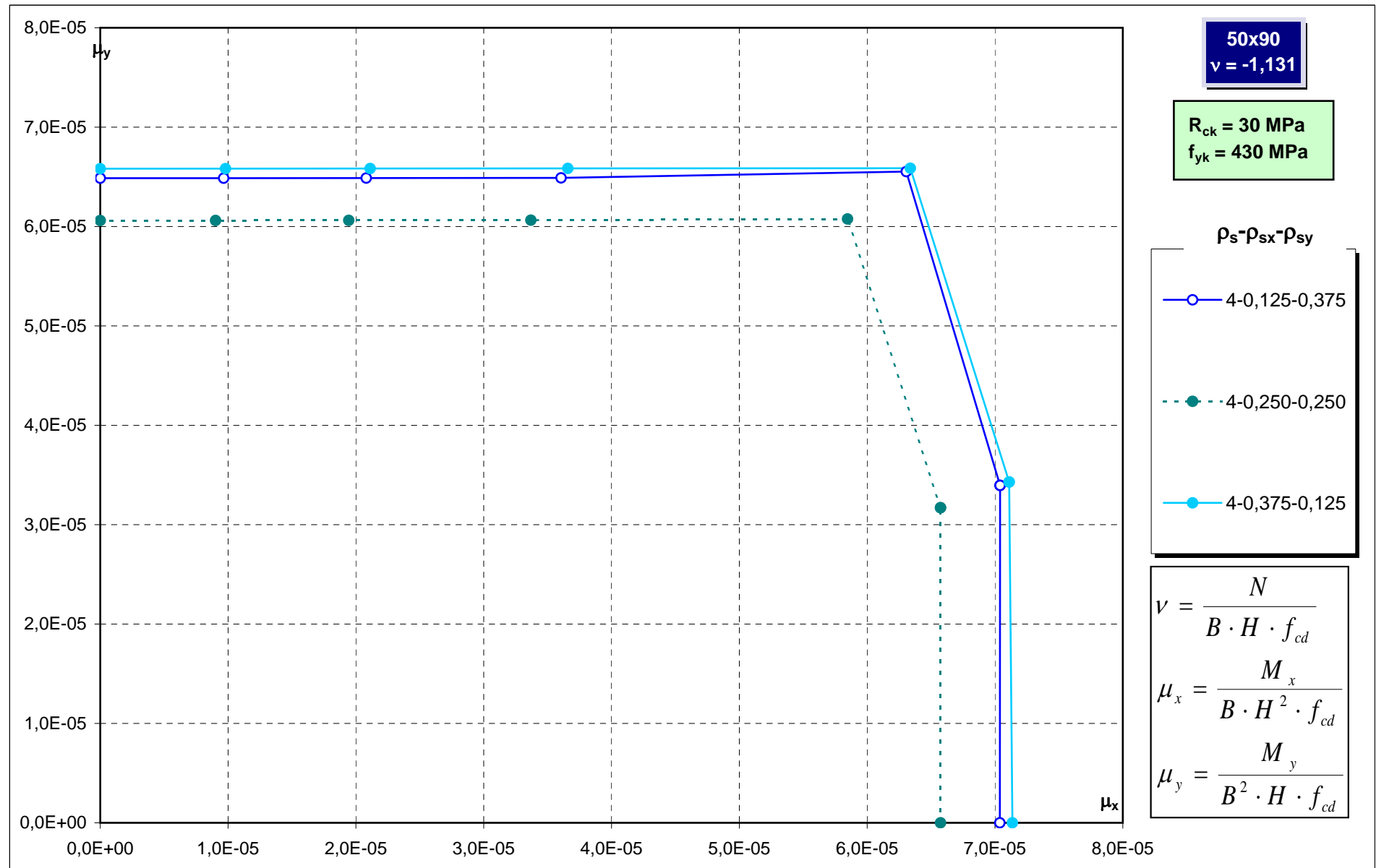


Abachi di progetto

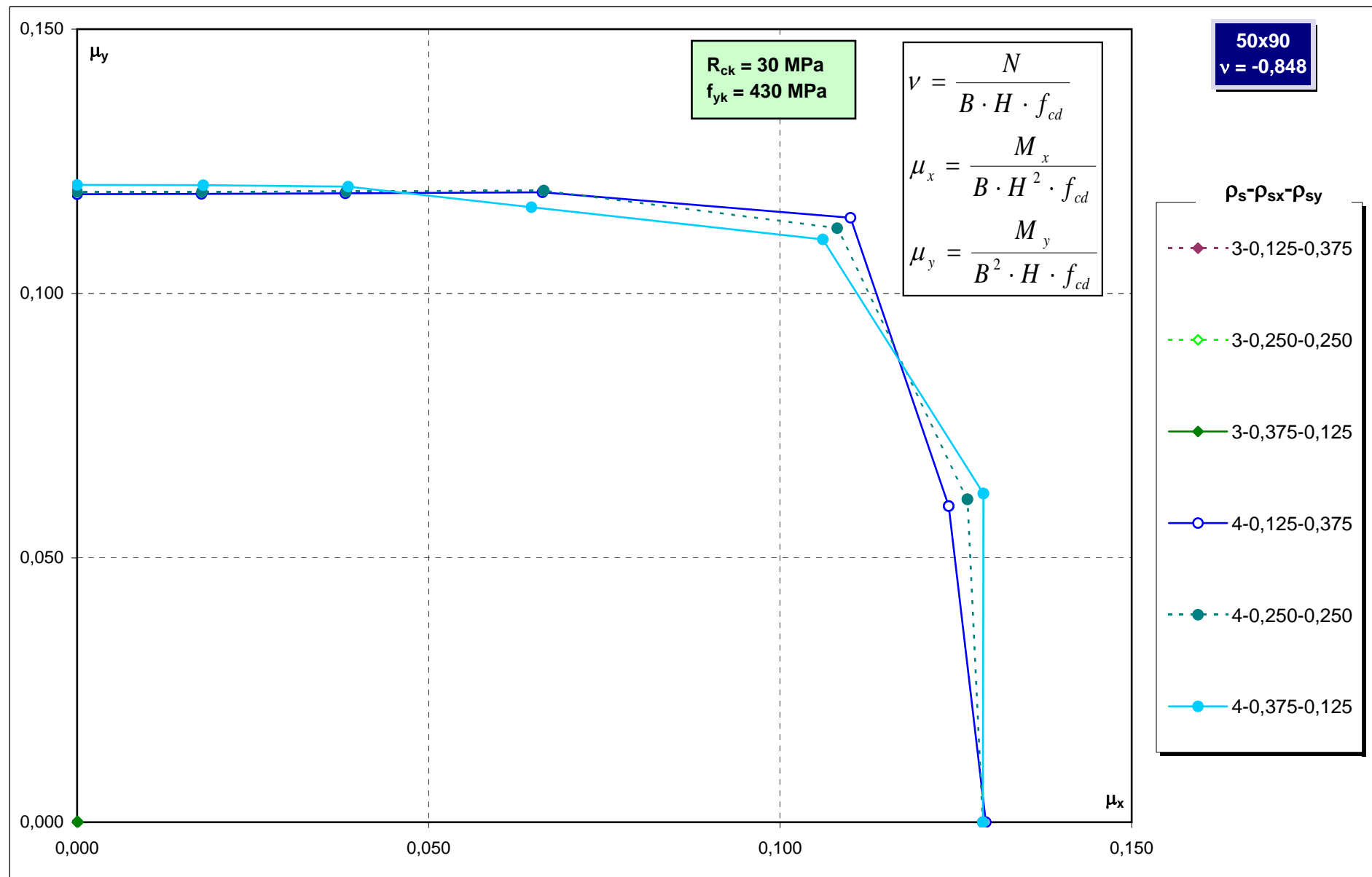


Abachi di progetto

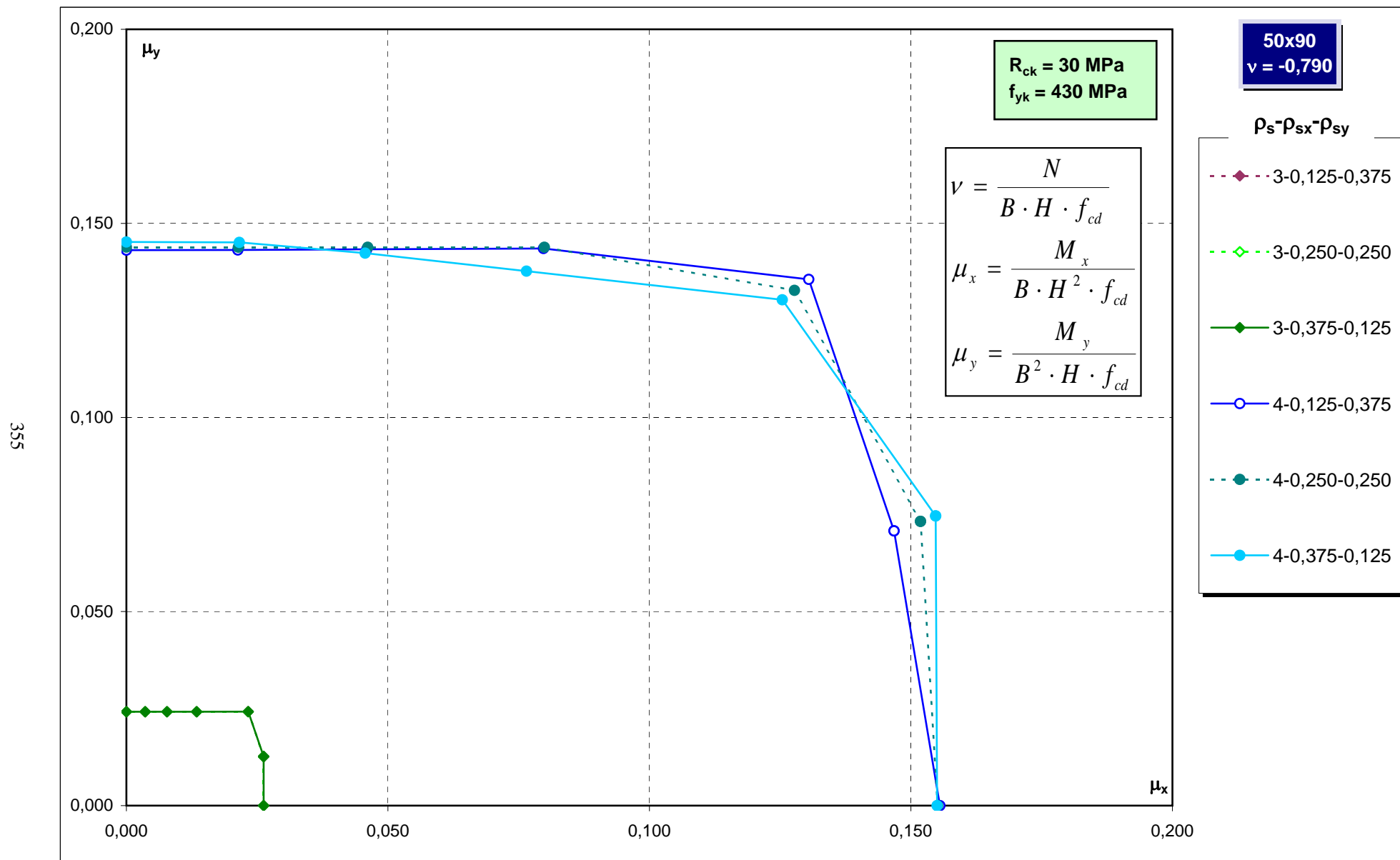
353



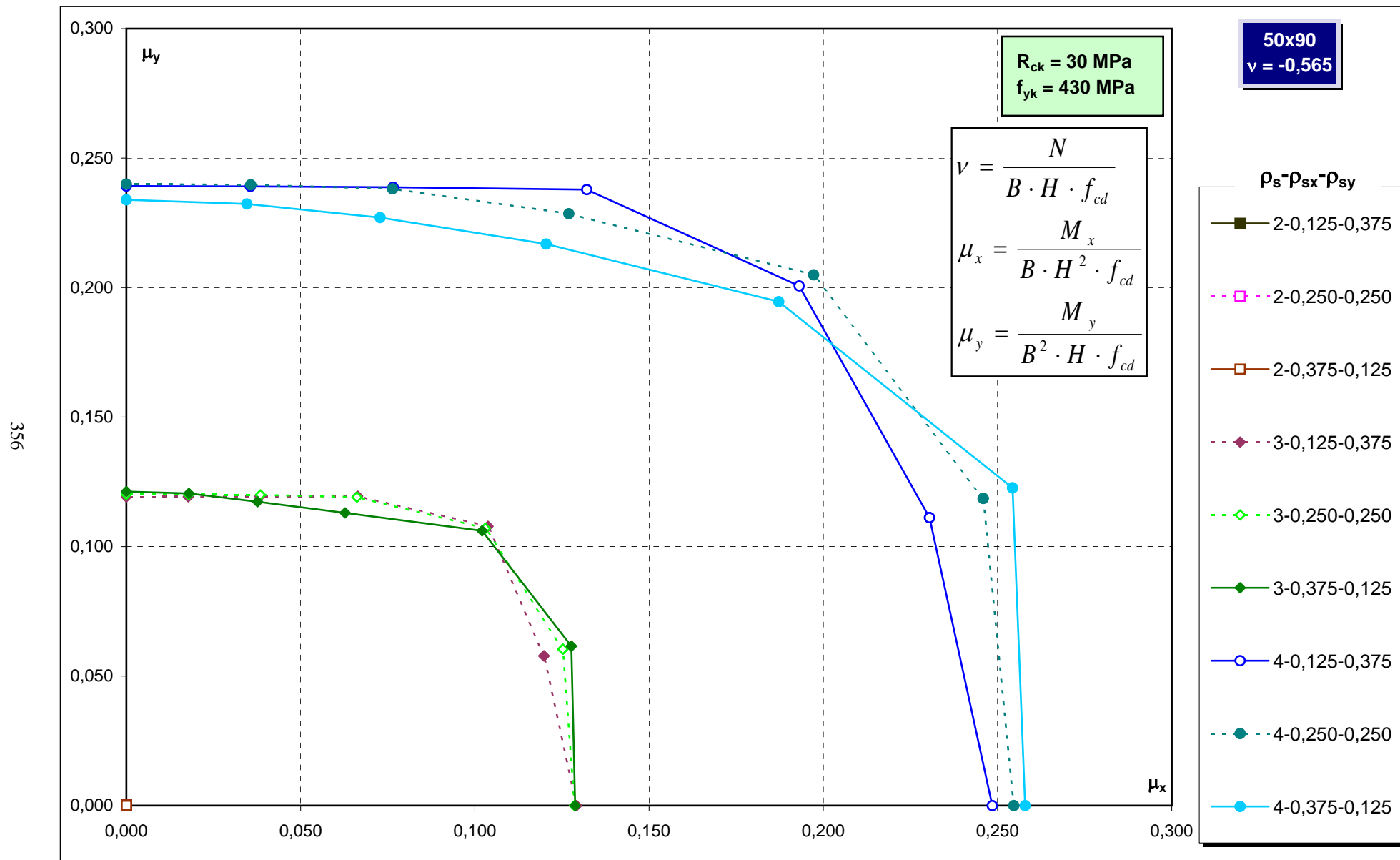
Abachi di progetto



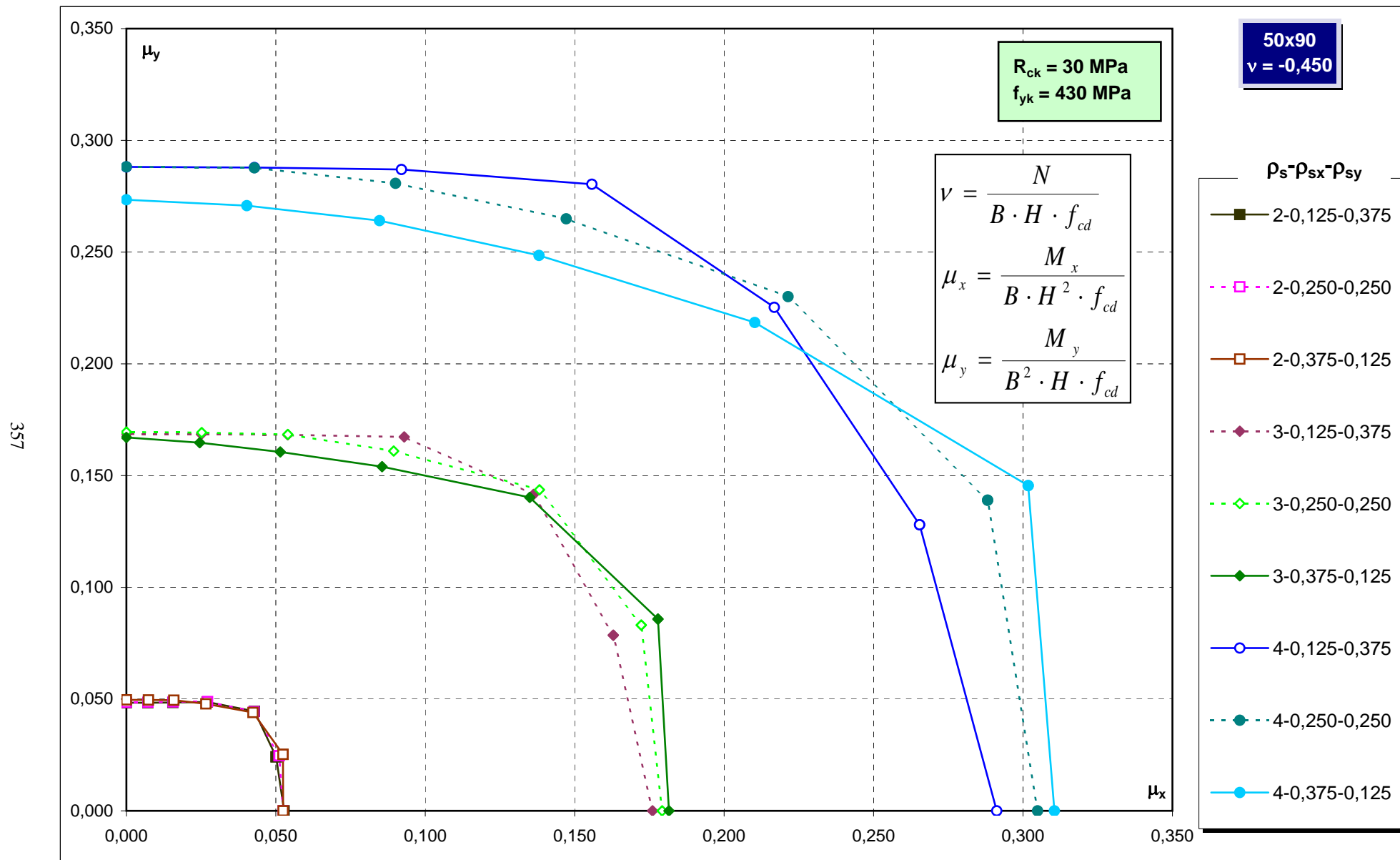
Abachi di progetto



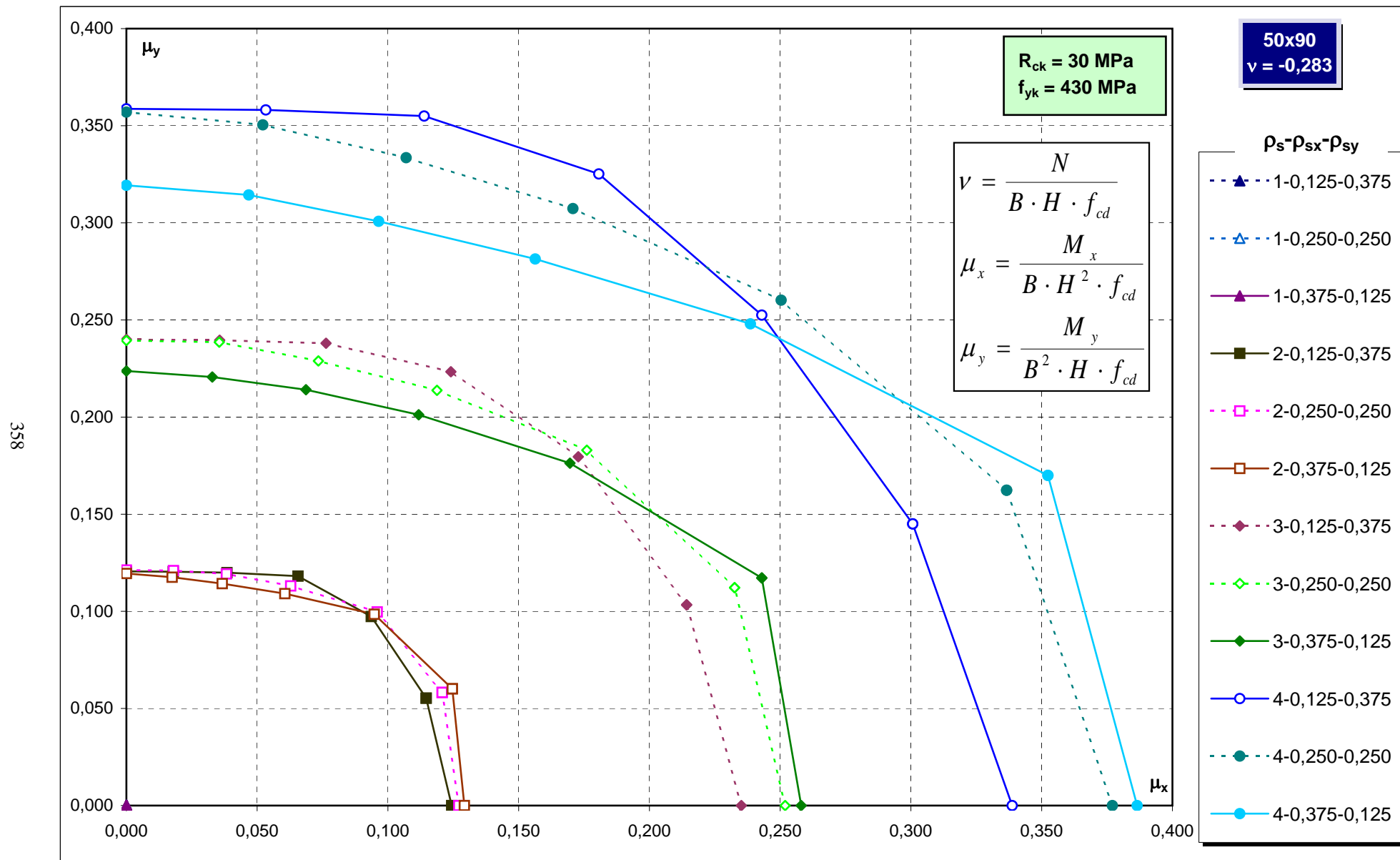
Abachi di progetto



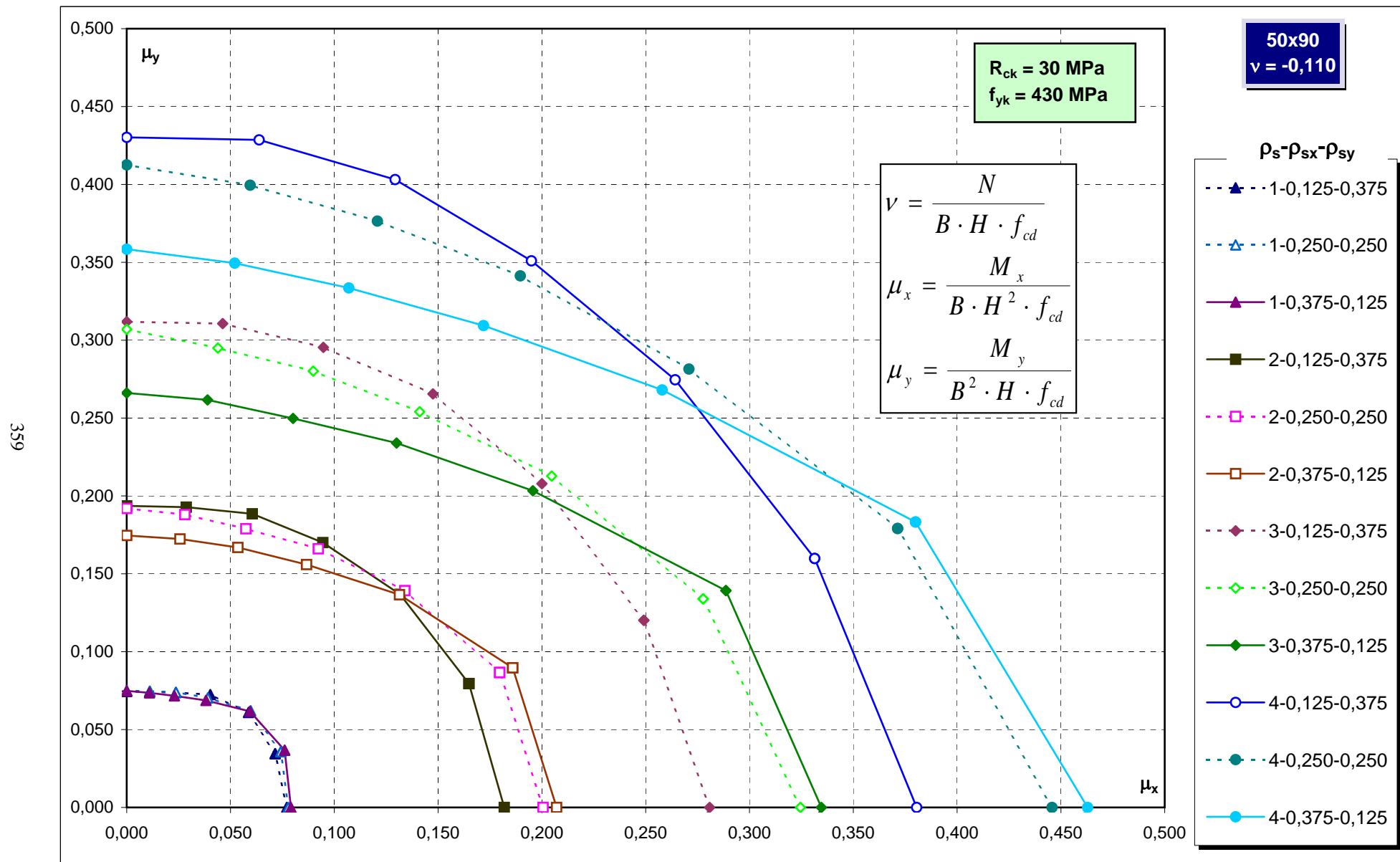
Abachi di progetto



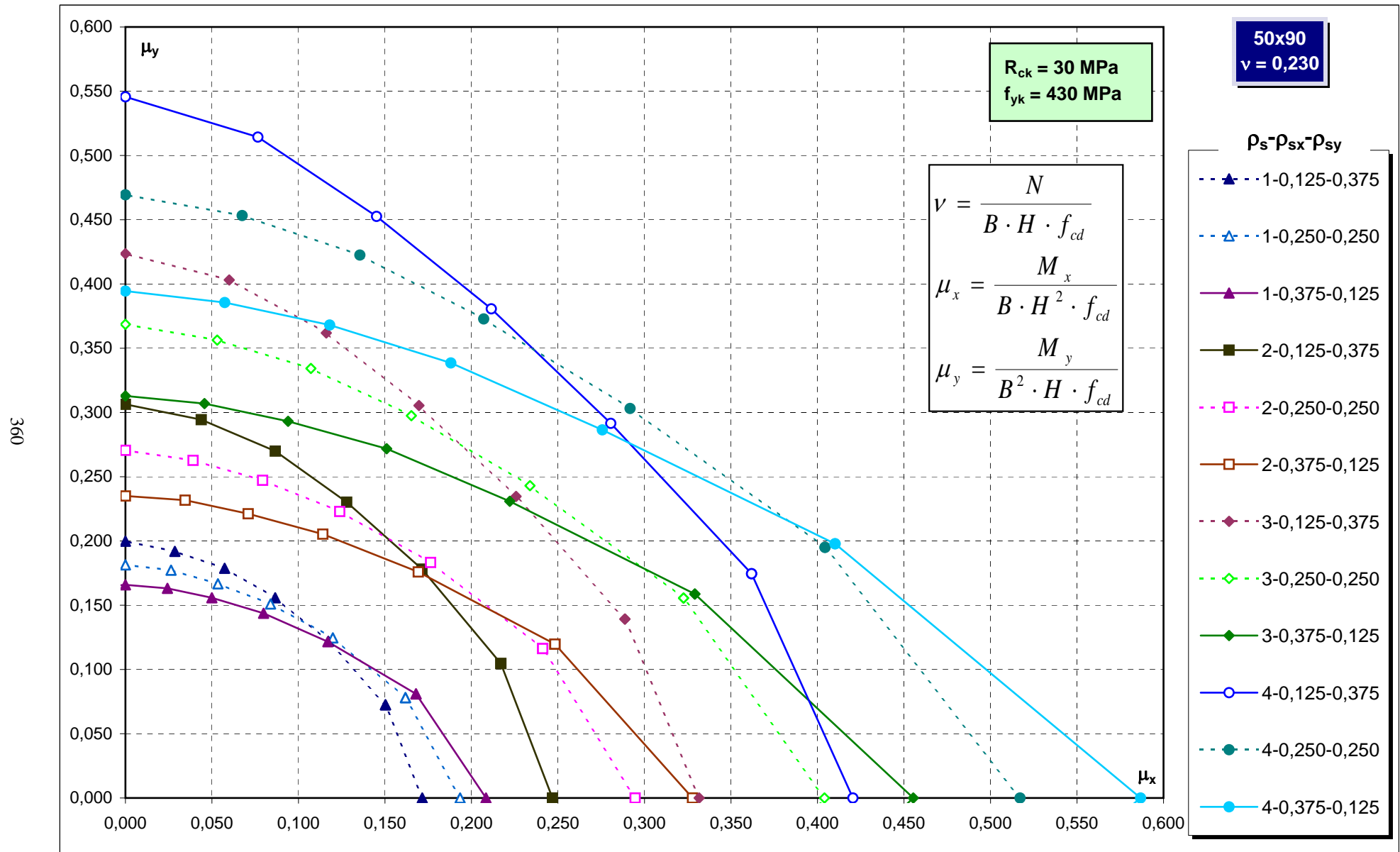
Abachi di progetto



Abachi di progetto

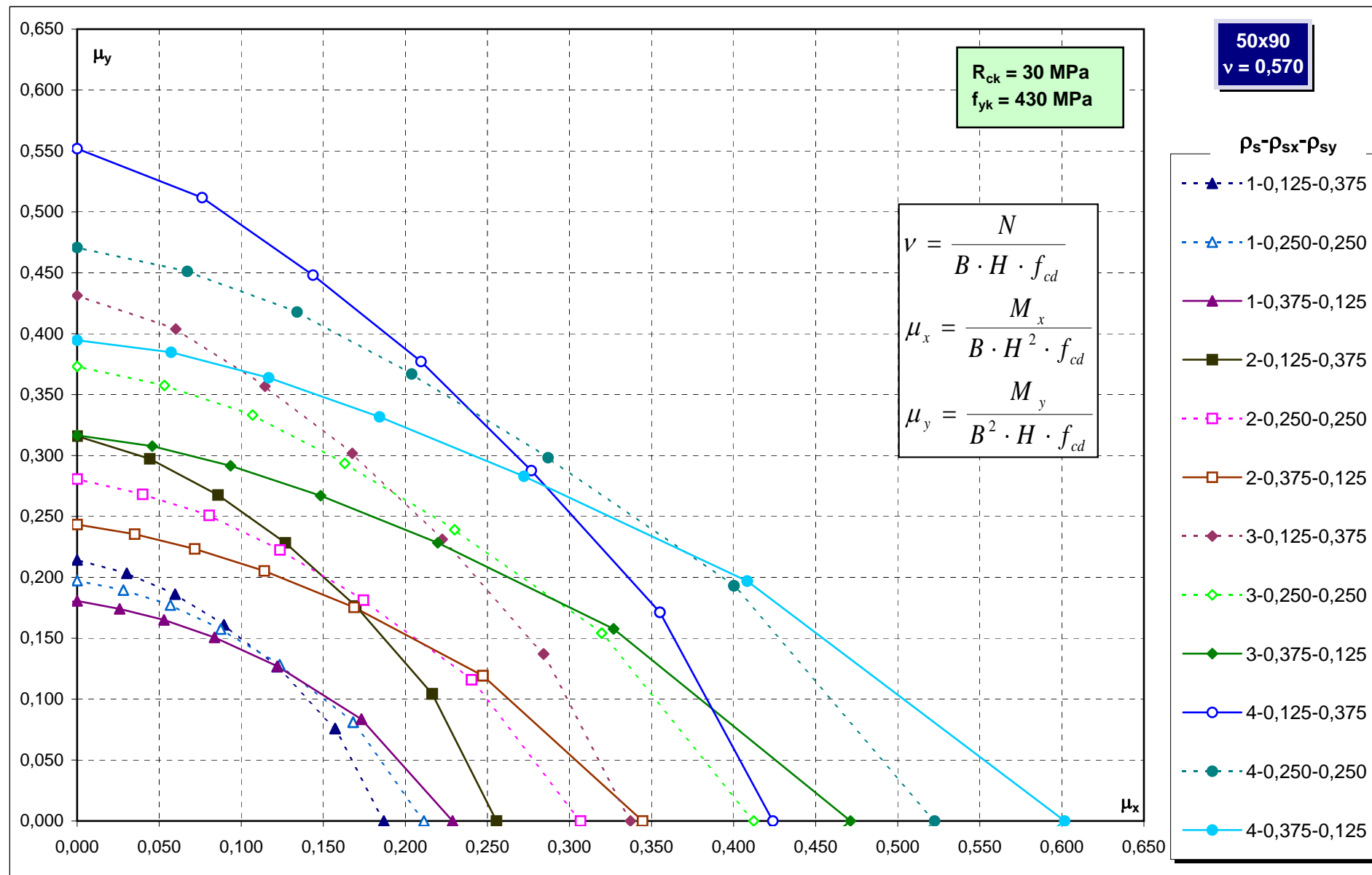


Abachi di progetto



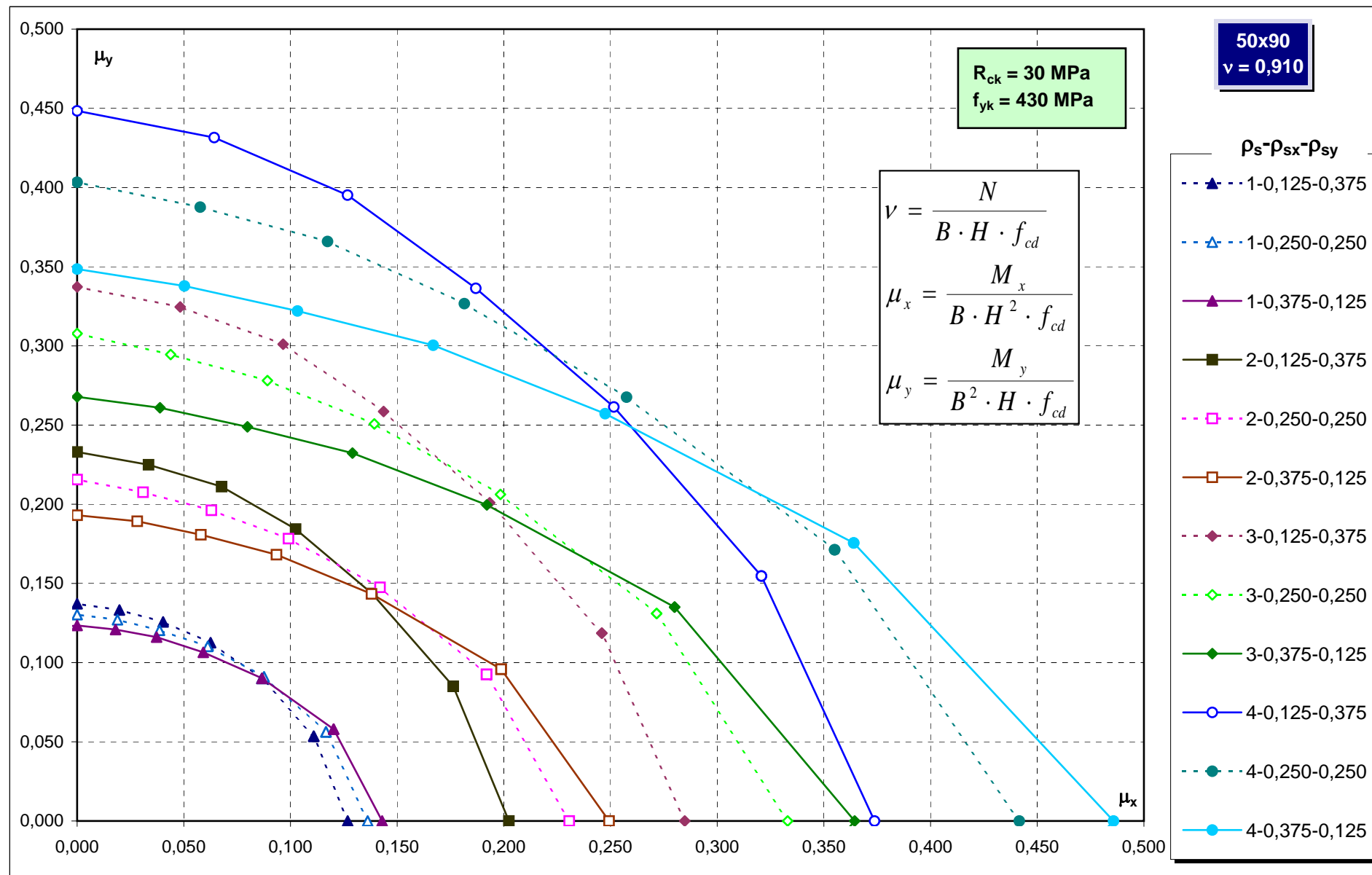
Abachi di progetto

361



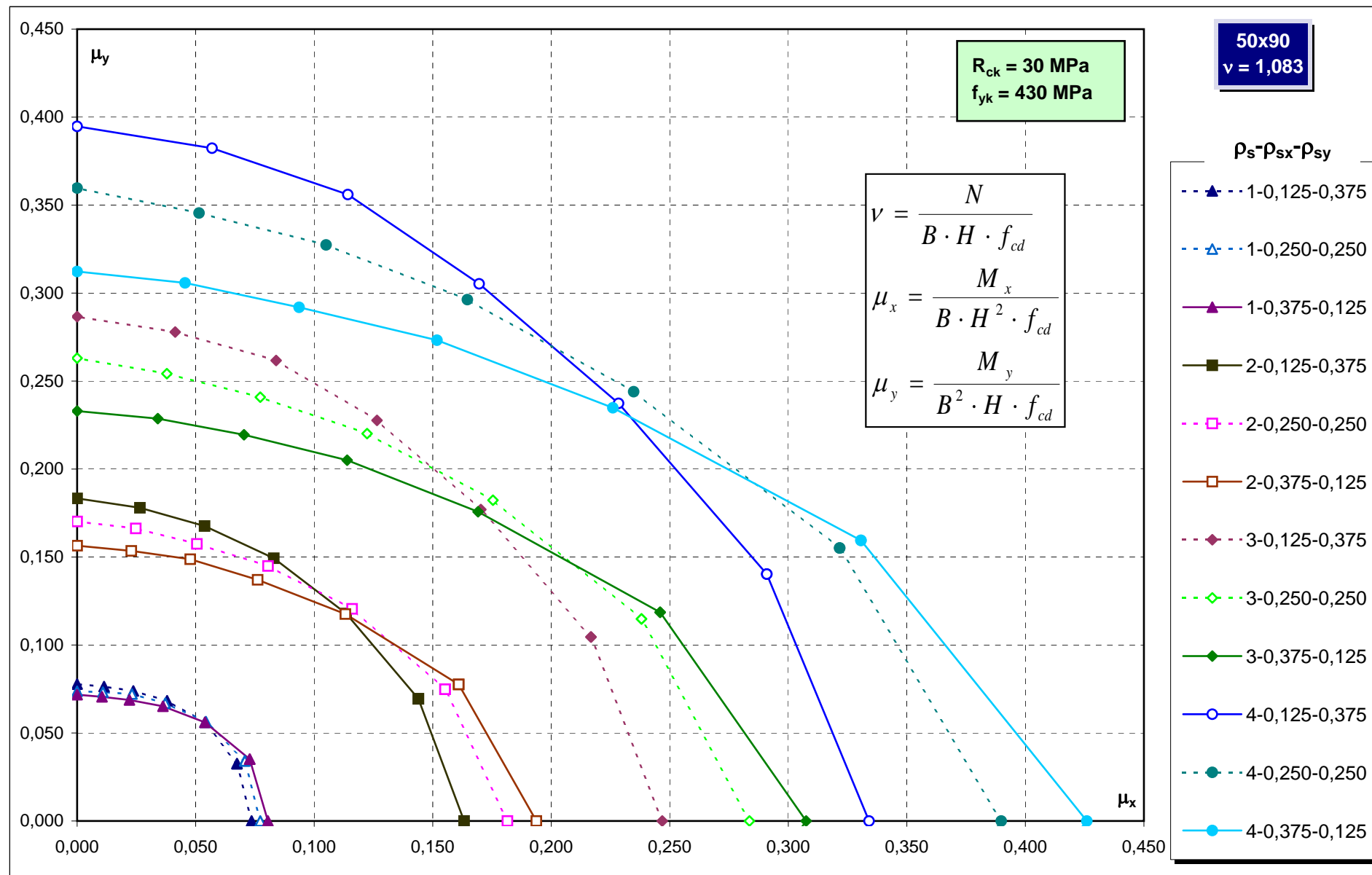
Abachi di progetto

362



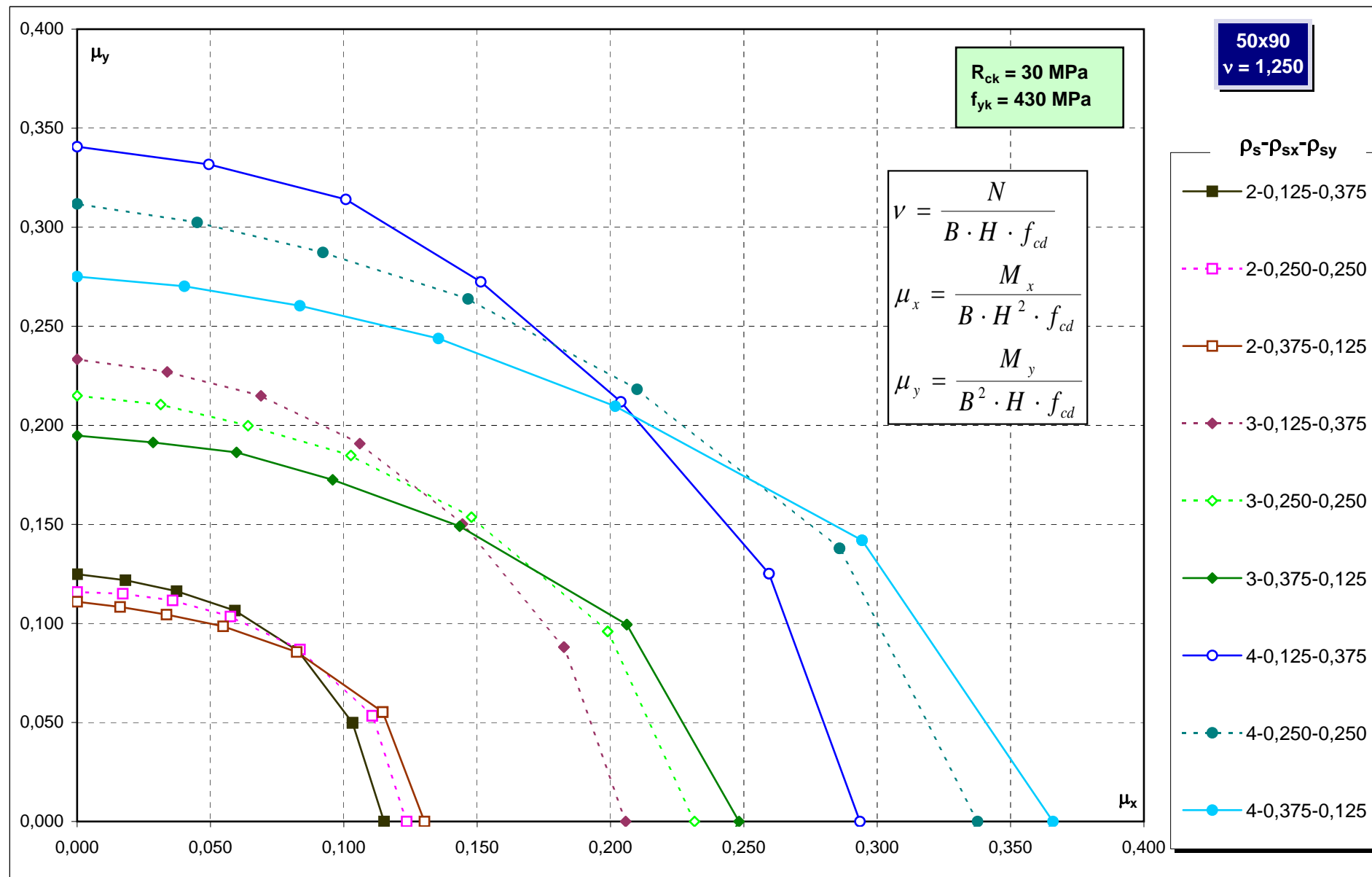
Abachi di progetto

363

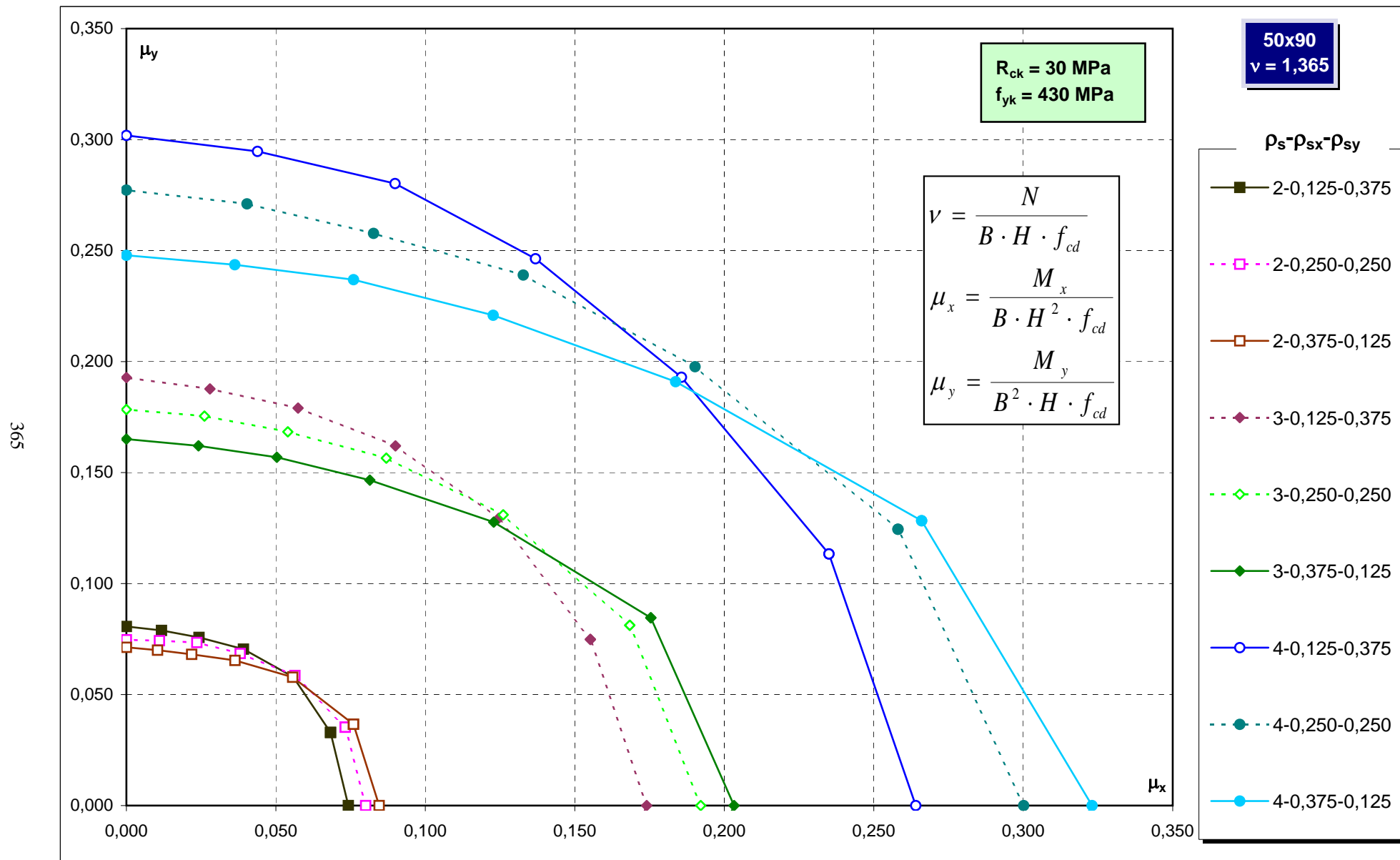


Abachi di progetto

364

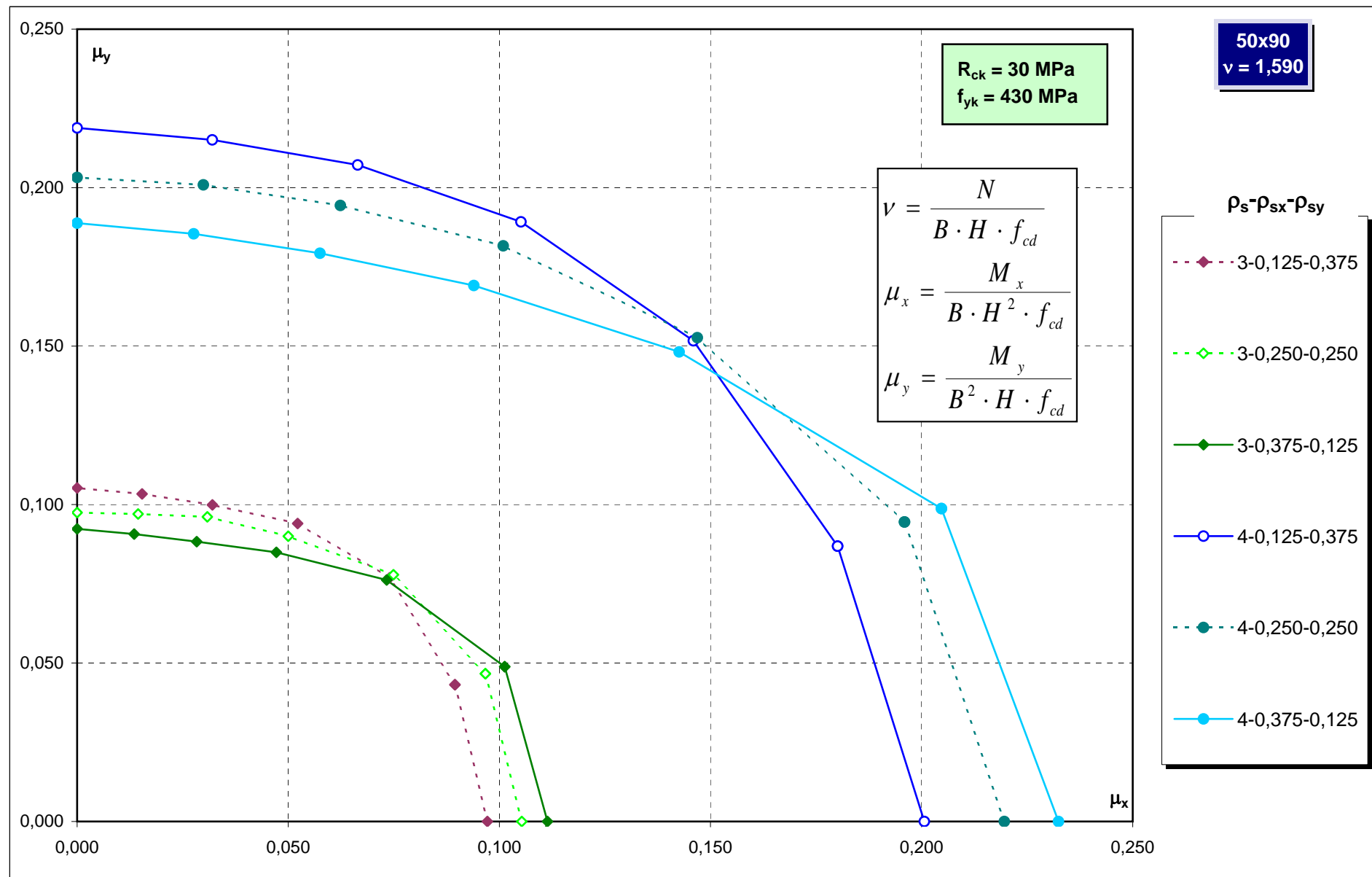


Abachi di progetto

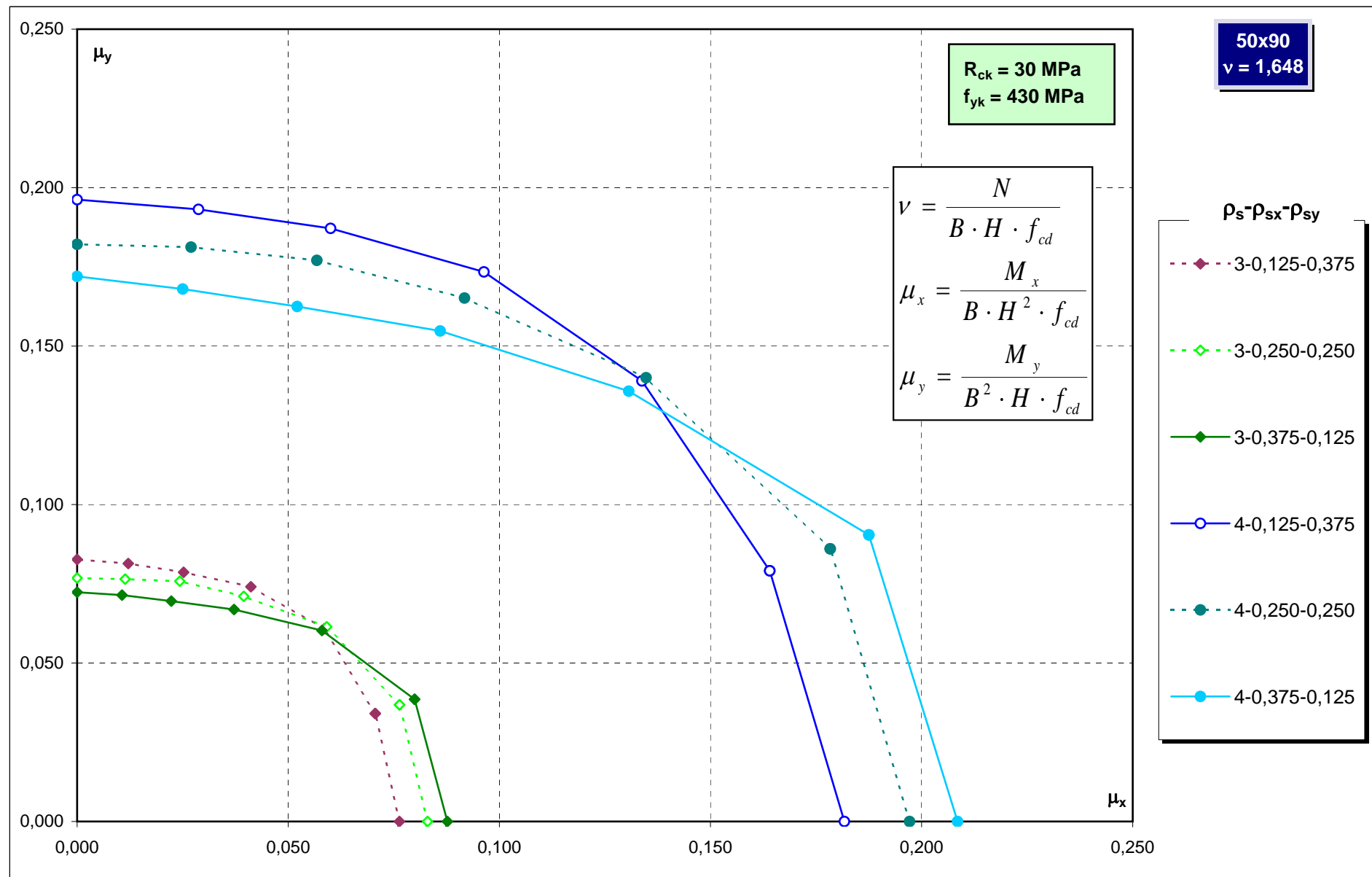


Abachi di progetto

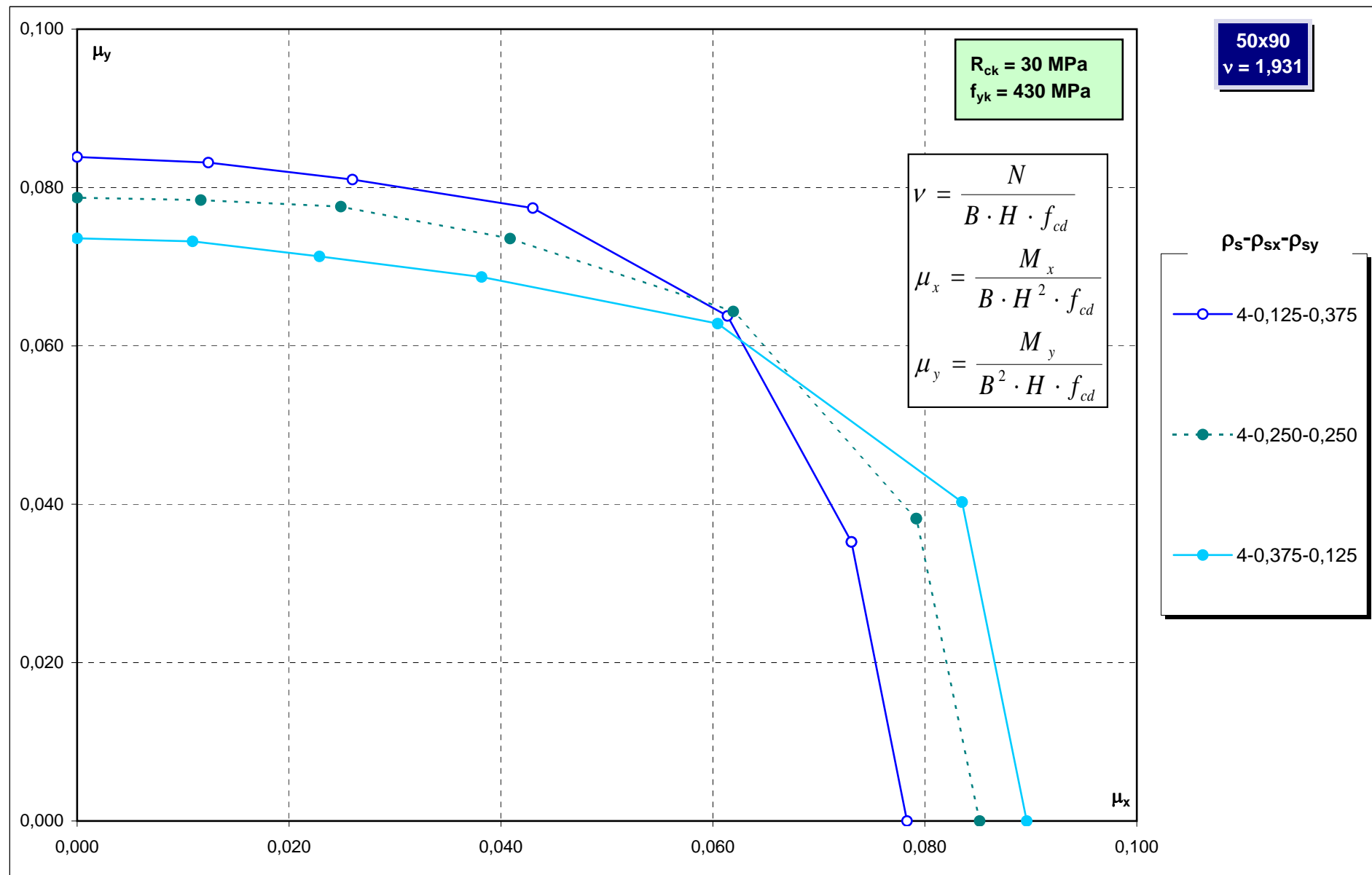
366



Abachi di progetto

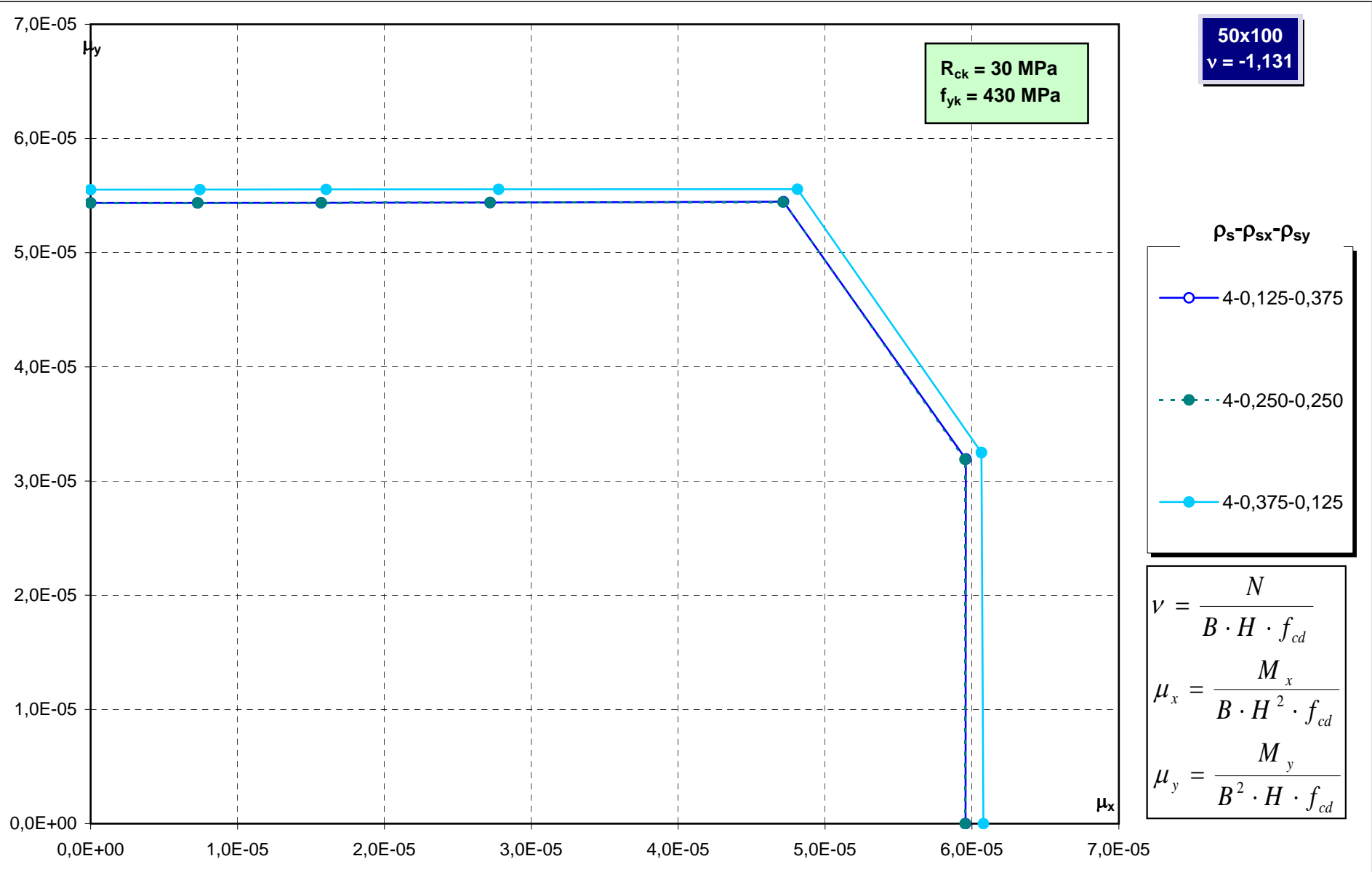


Abachi di progetto

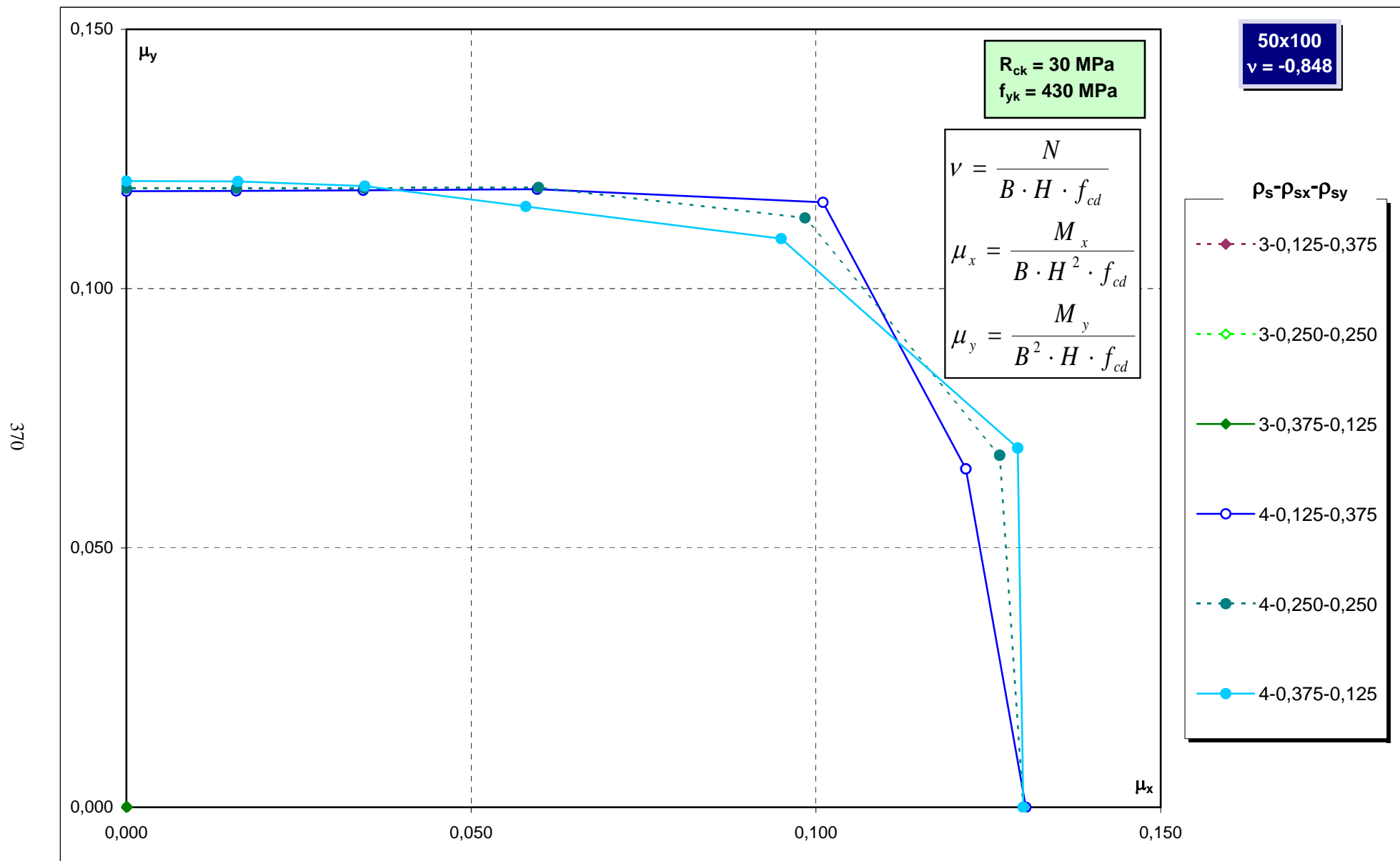


Abachi di progetto

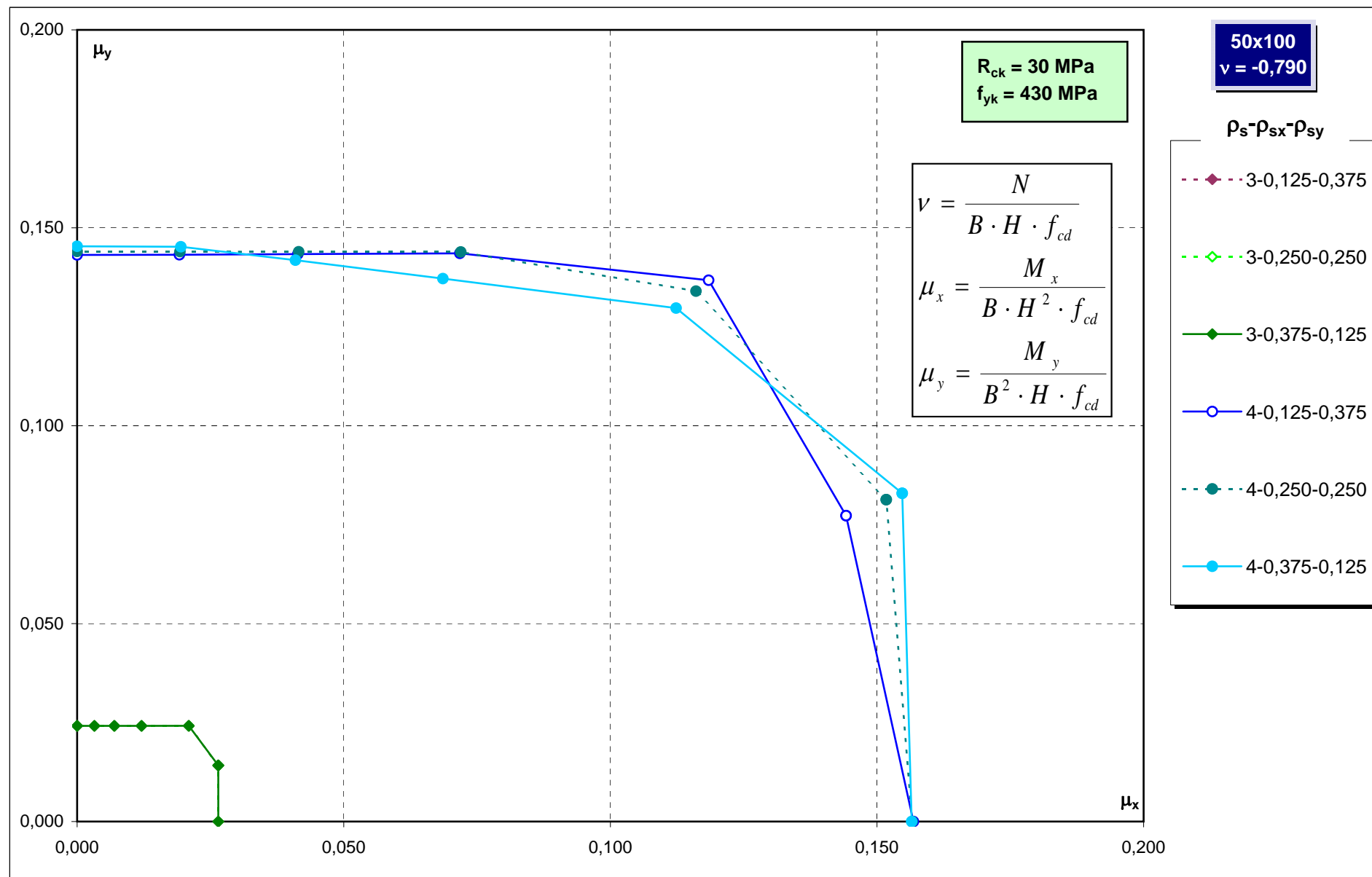
369



Abachi di progetto

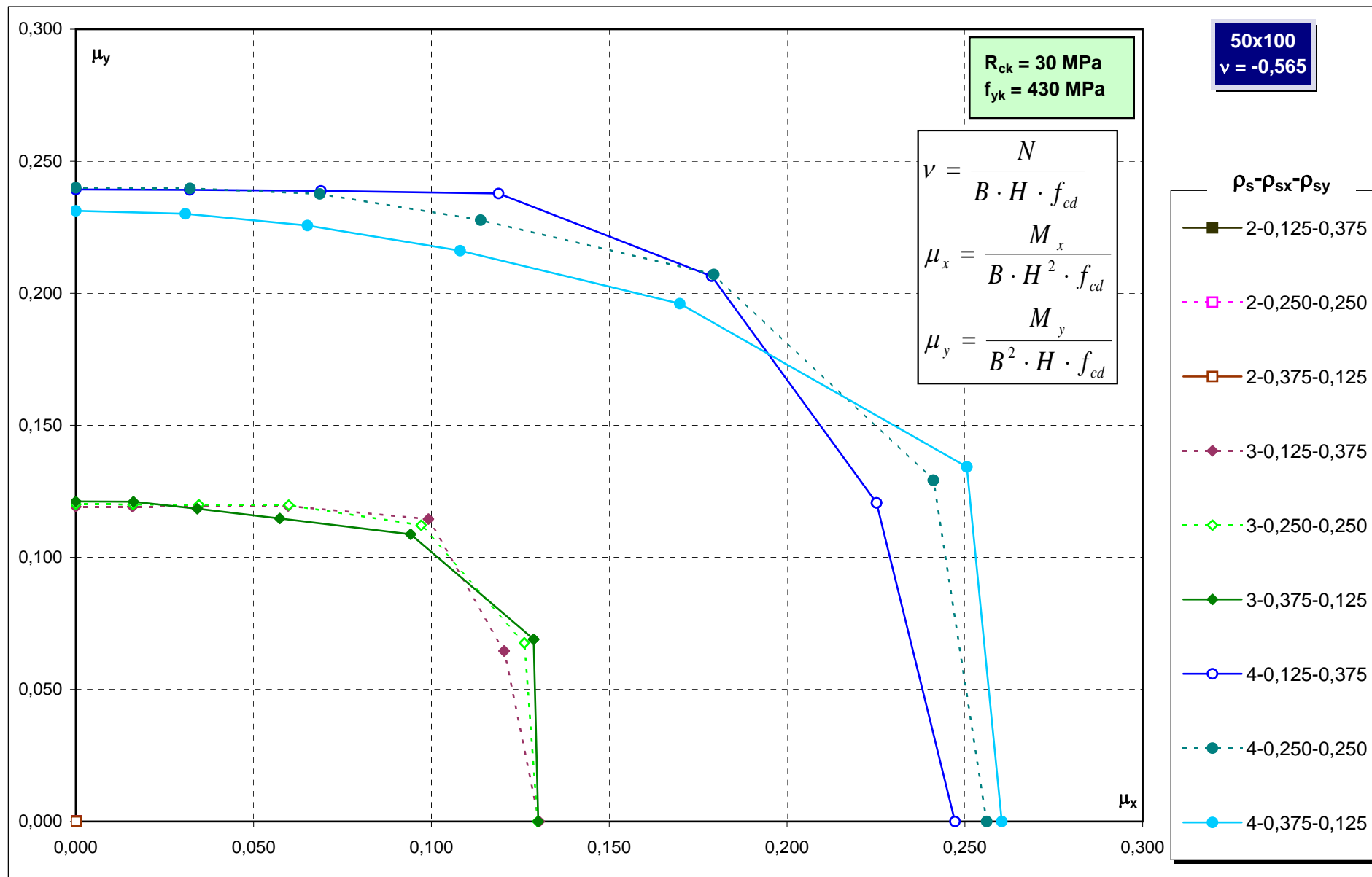


Abachi di progetto

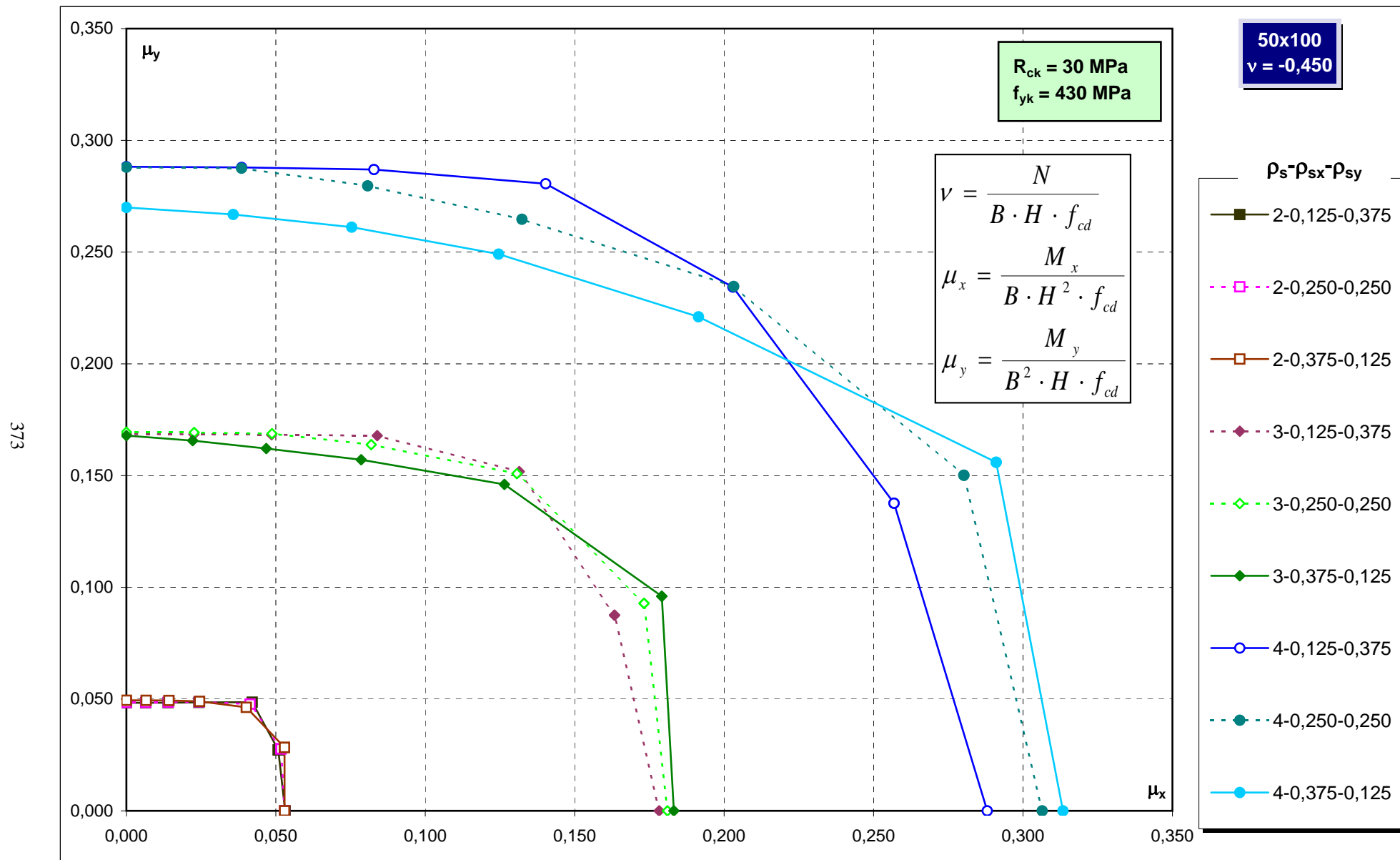


Abachi di progetto

372

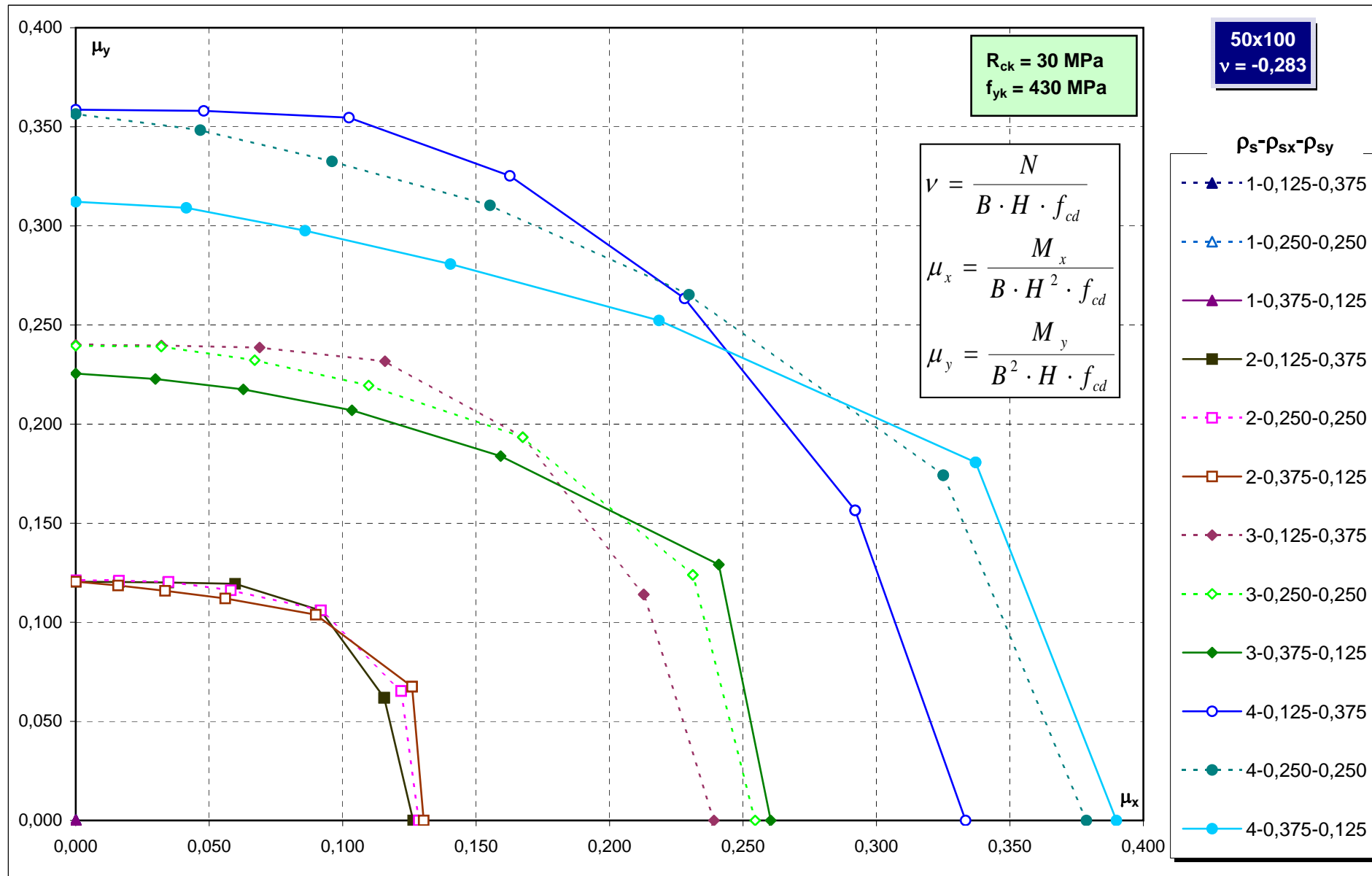


Abachi di progetto

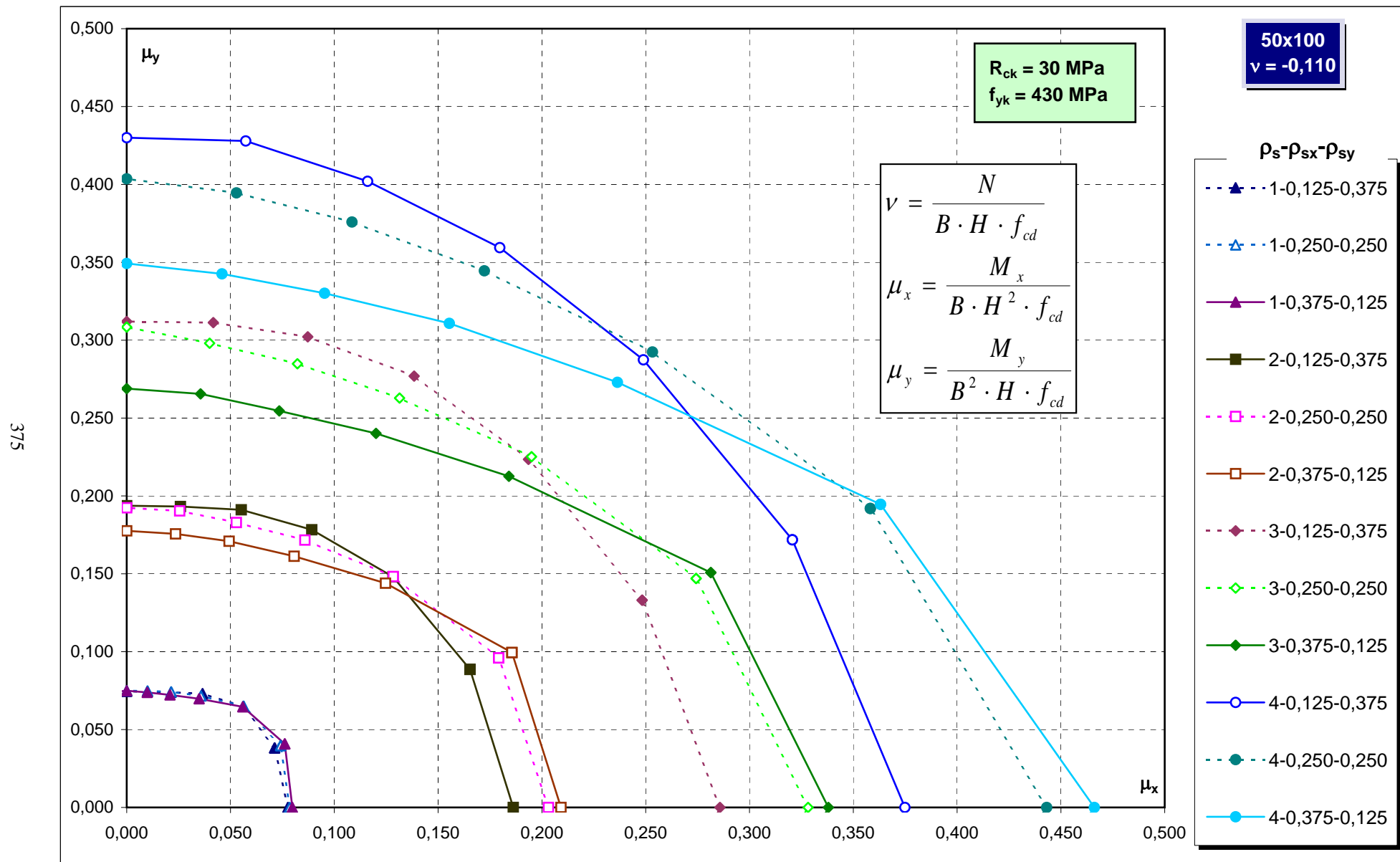


Abachi di progetto

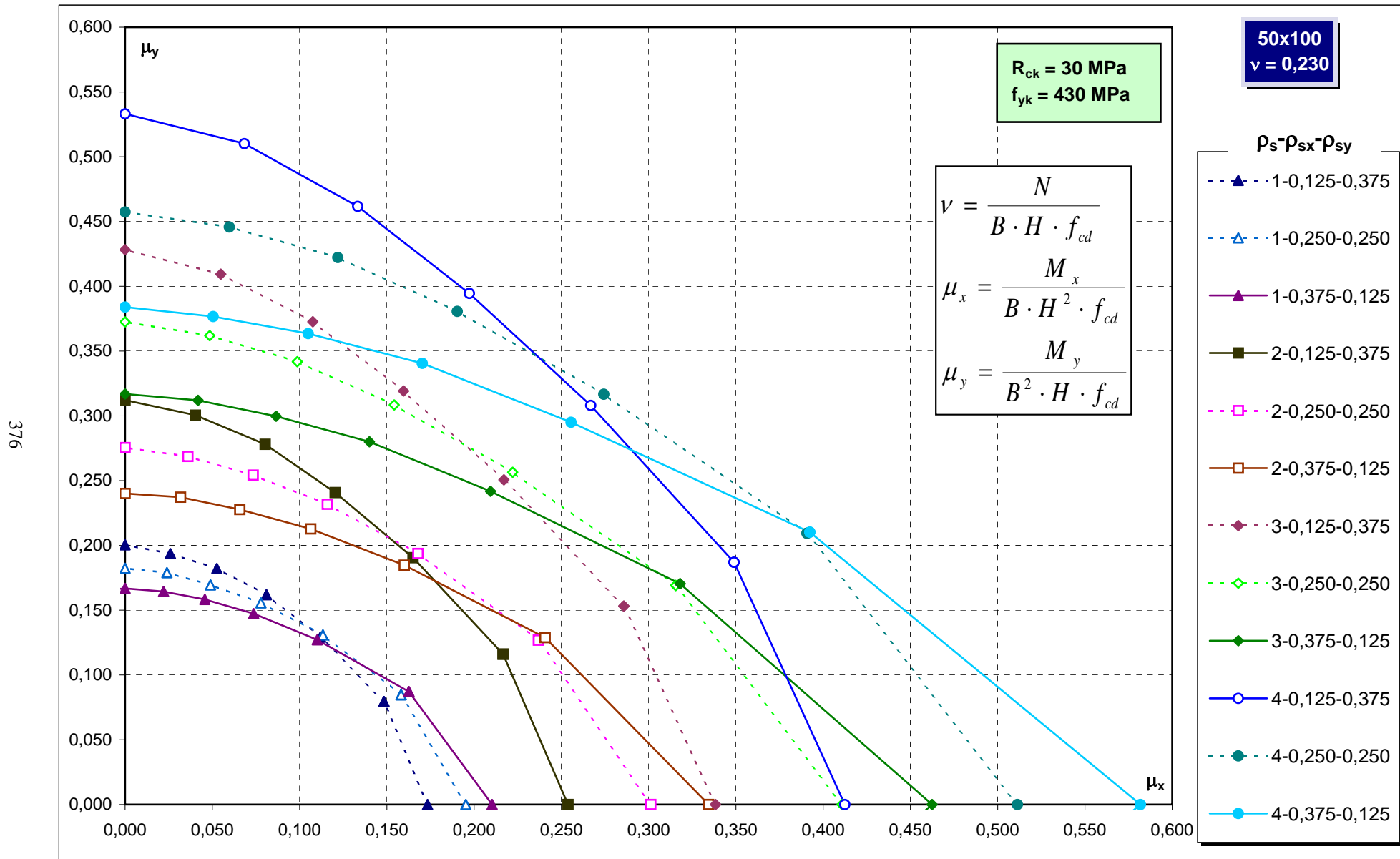
374



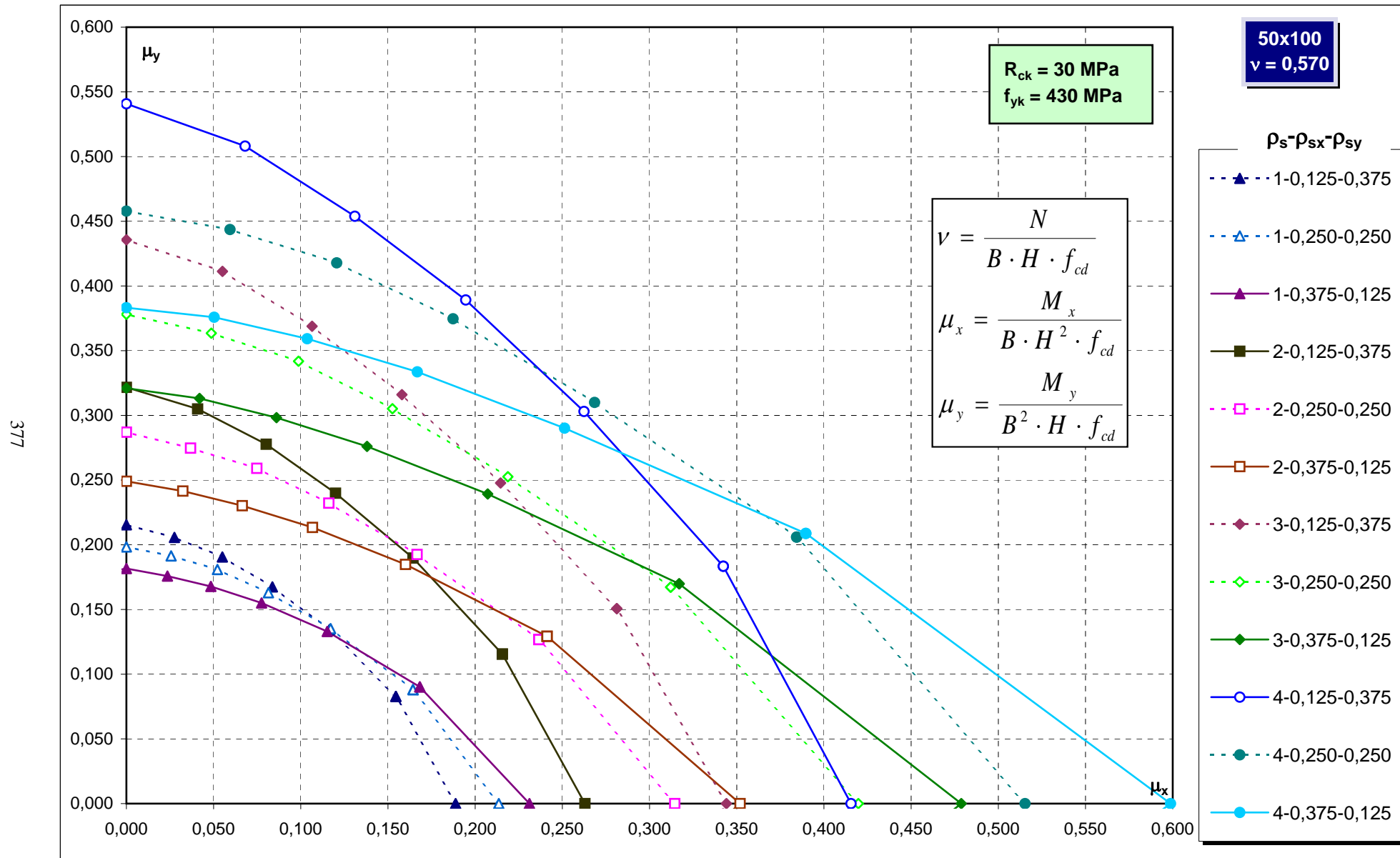
Abachi di progetto



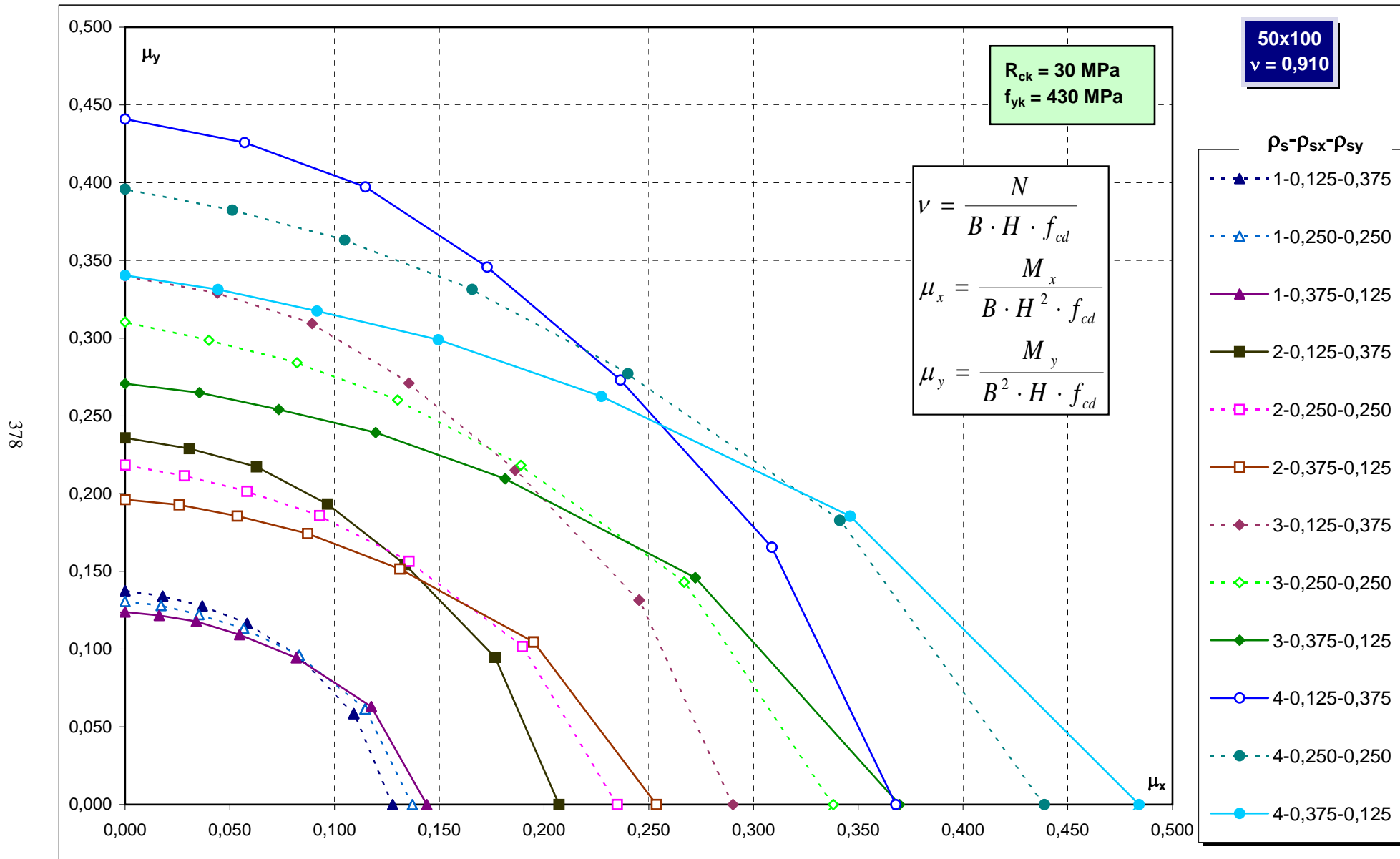
Abachi di progetto



Abachi di progetto

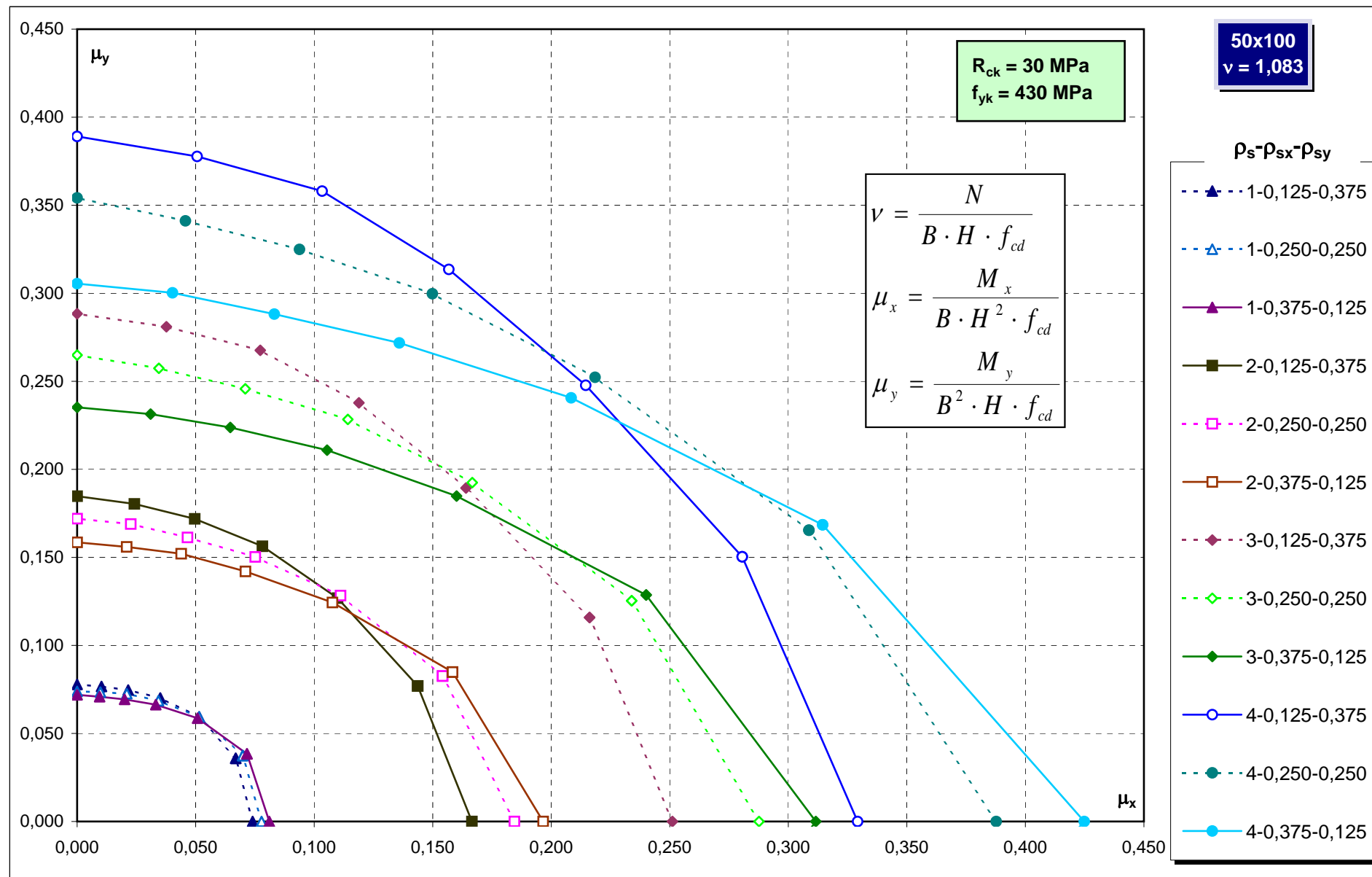


Abachi di progetto

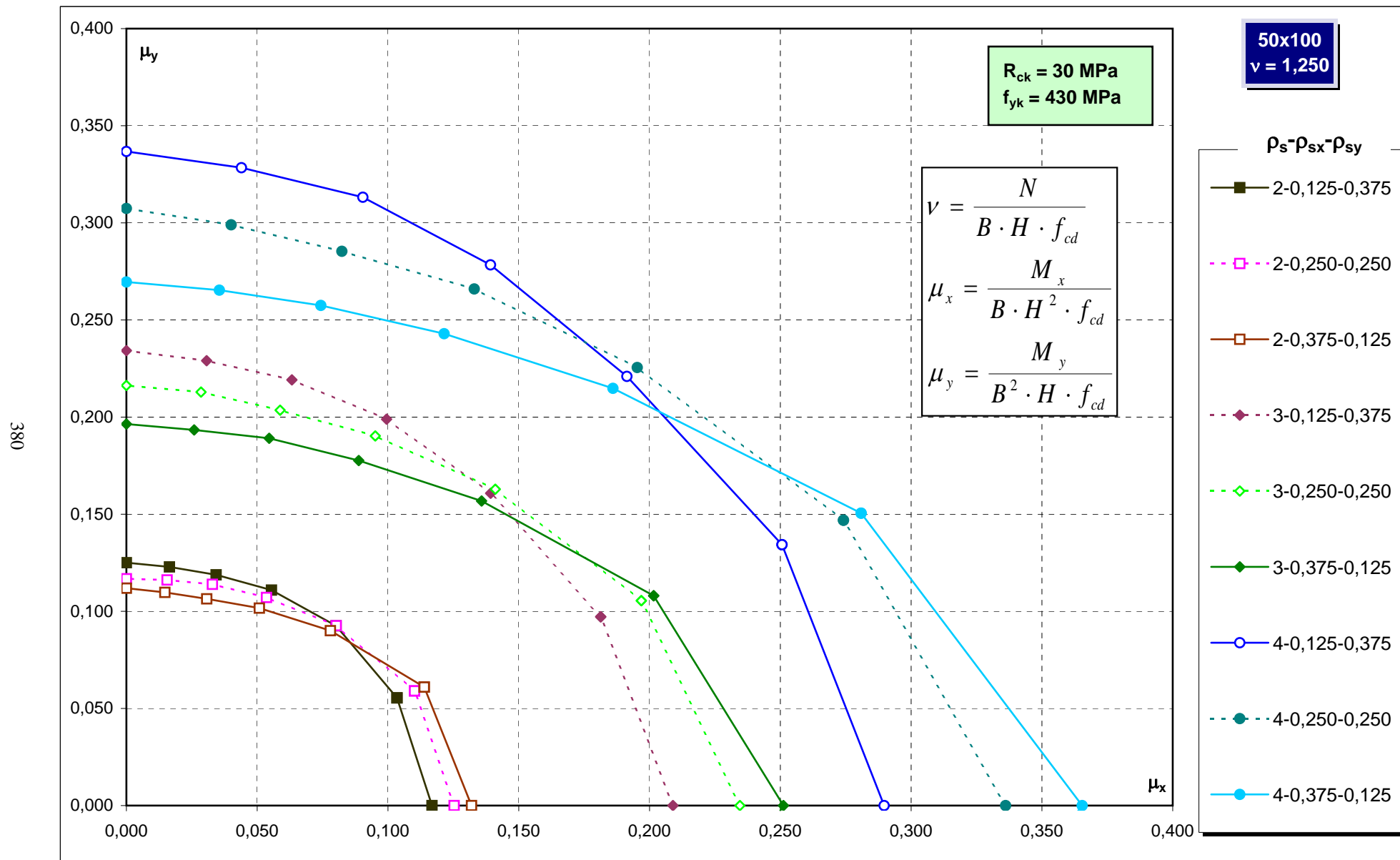


Abachi di progetto

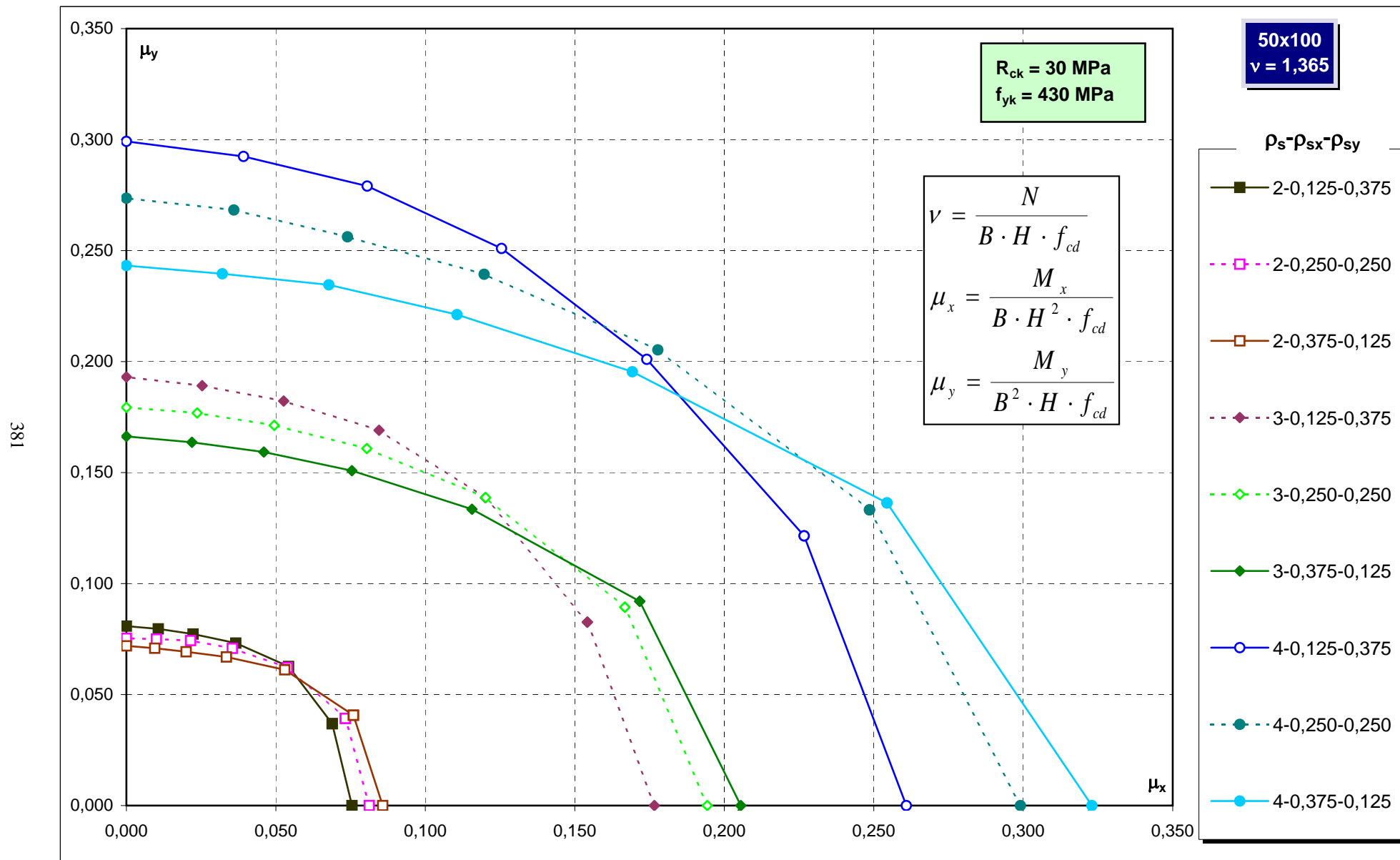
379



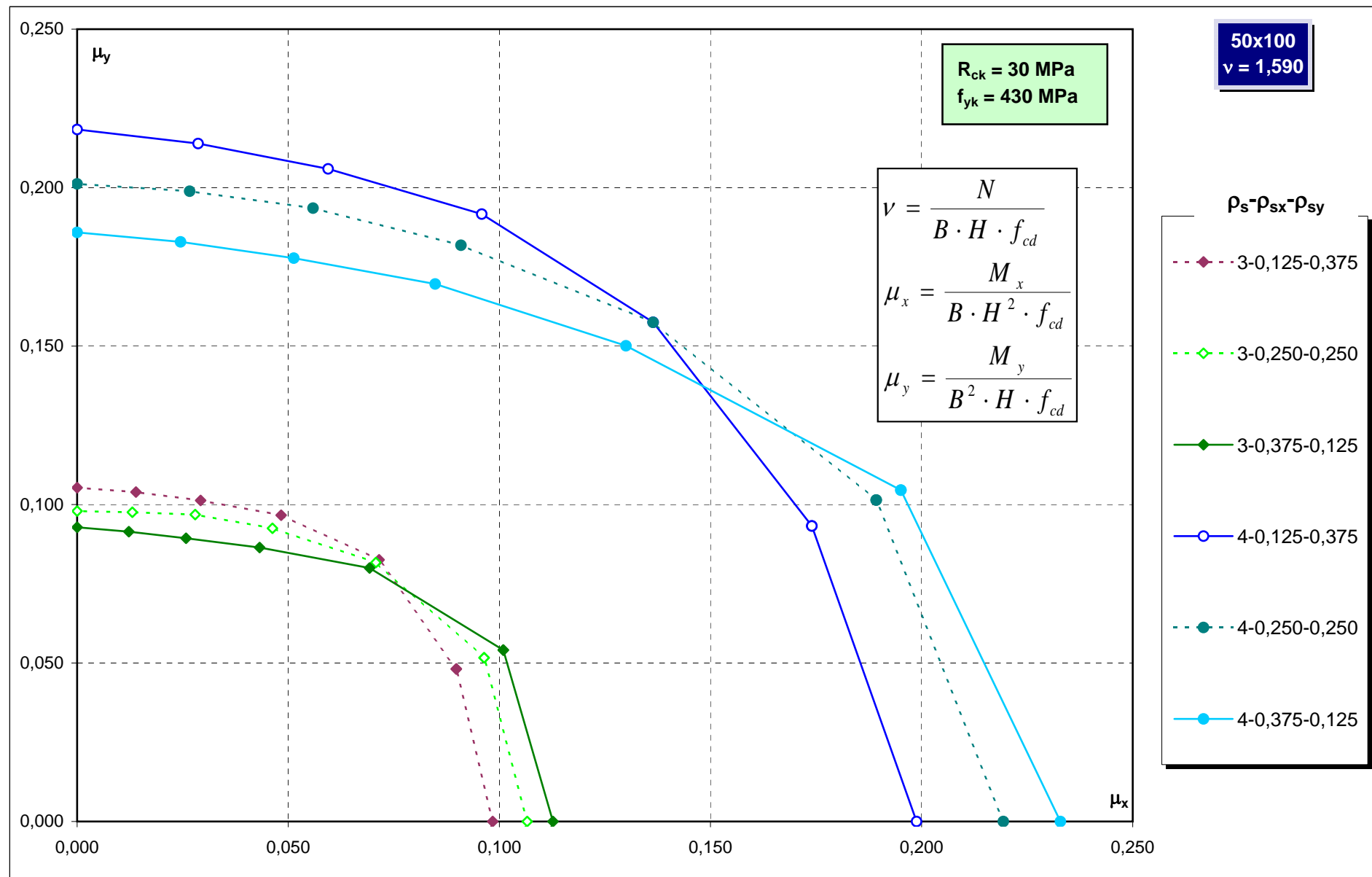
Abachi di progetto



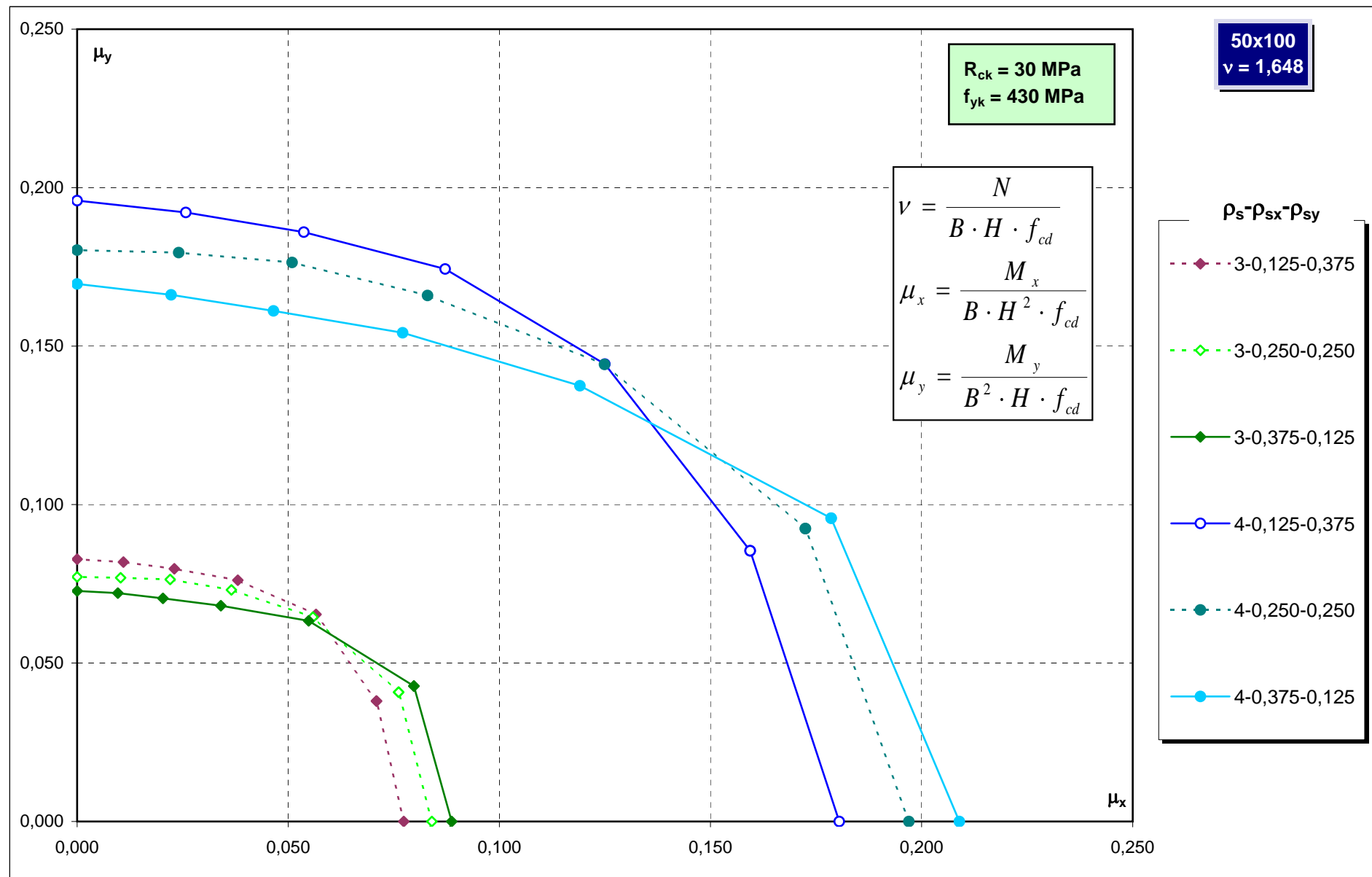
Abachi di progetto



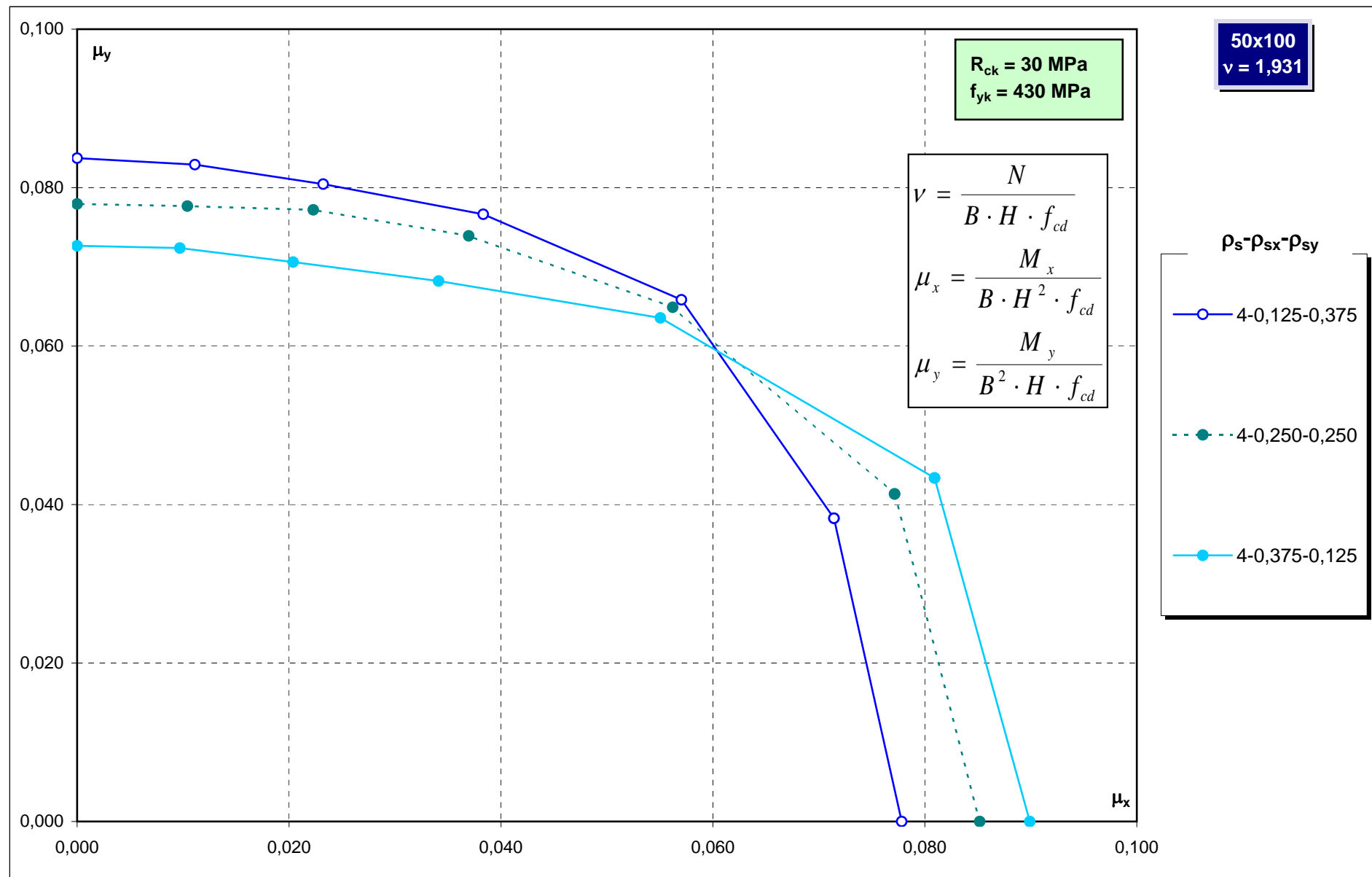
Abachi di progetto



Abachi di progetto

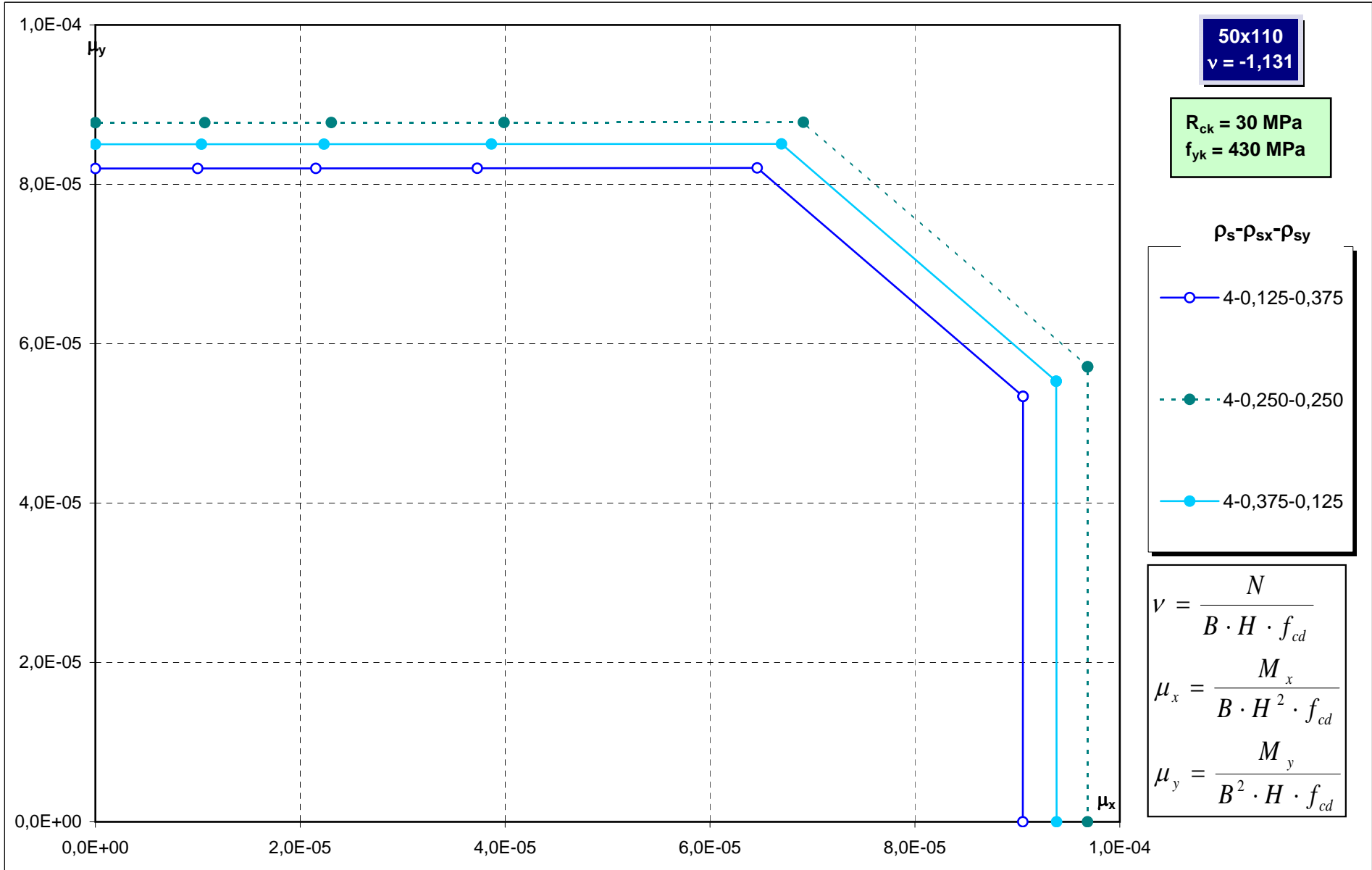


Abachi di progetto

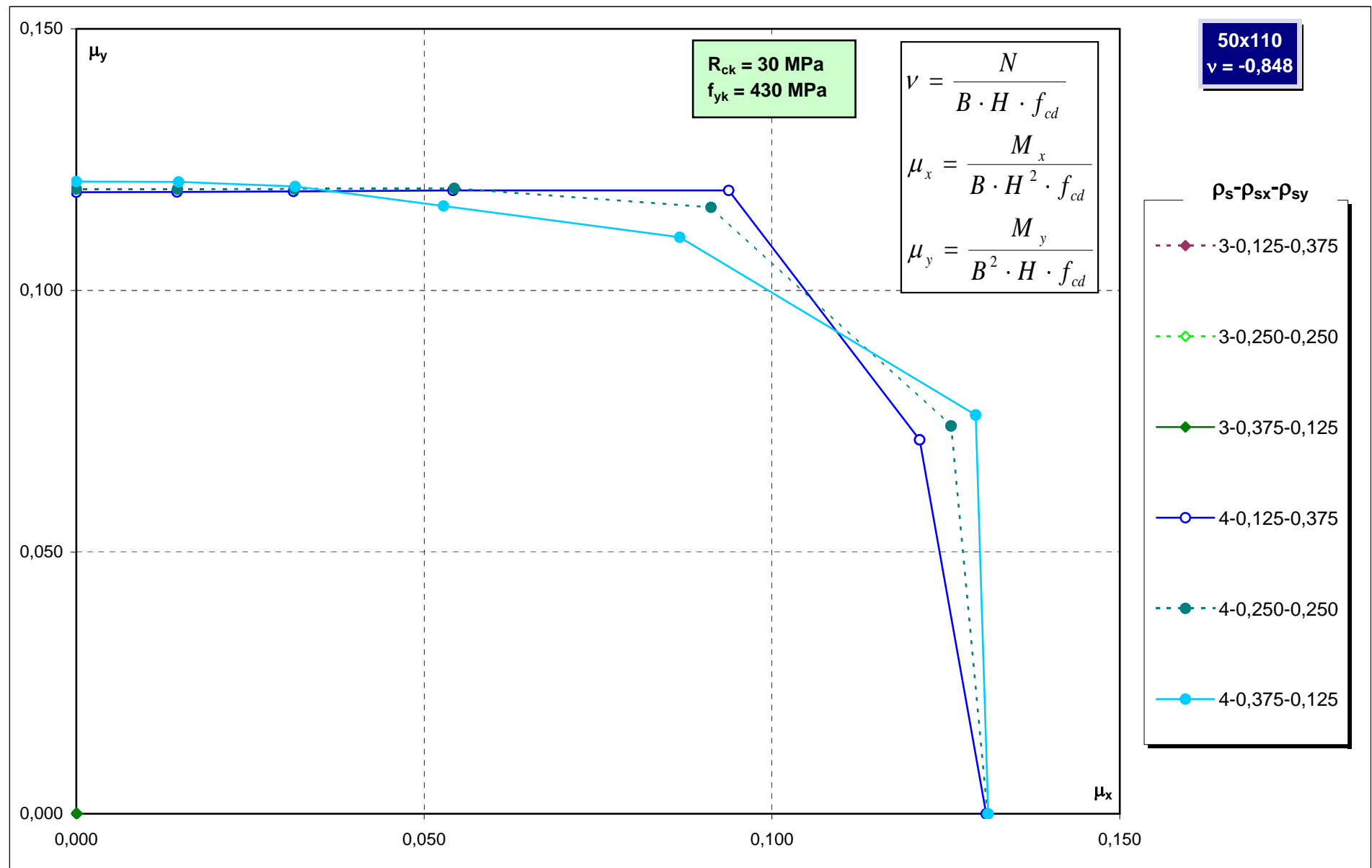


Abachi di progetto

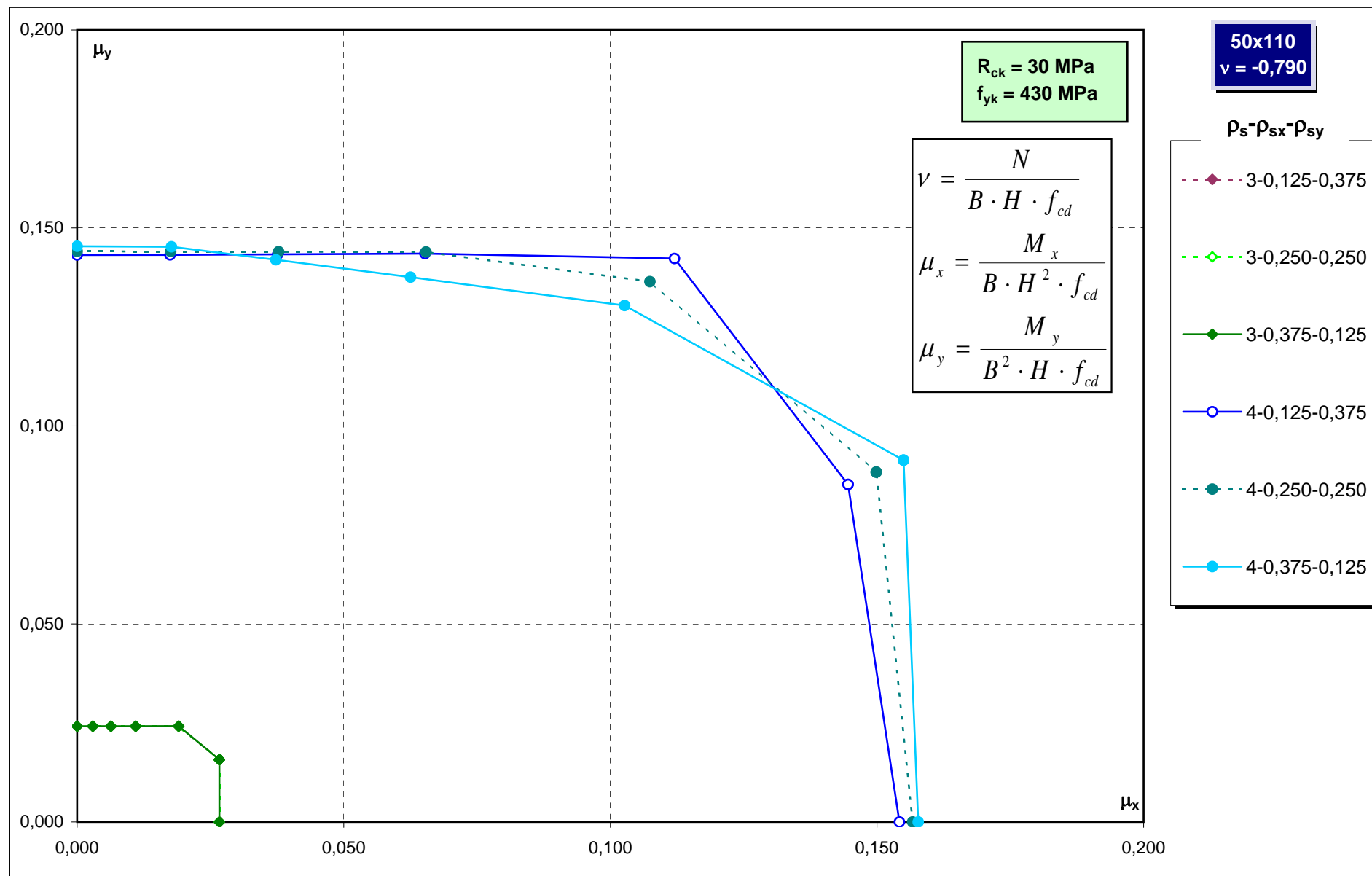
385



Abachi di progetto



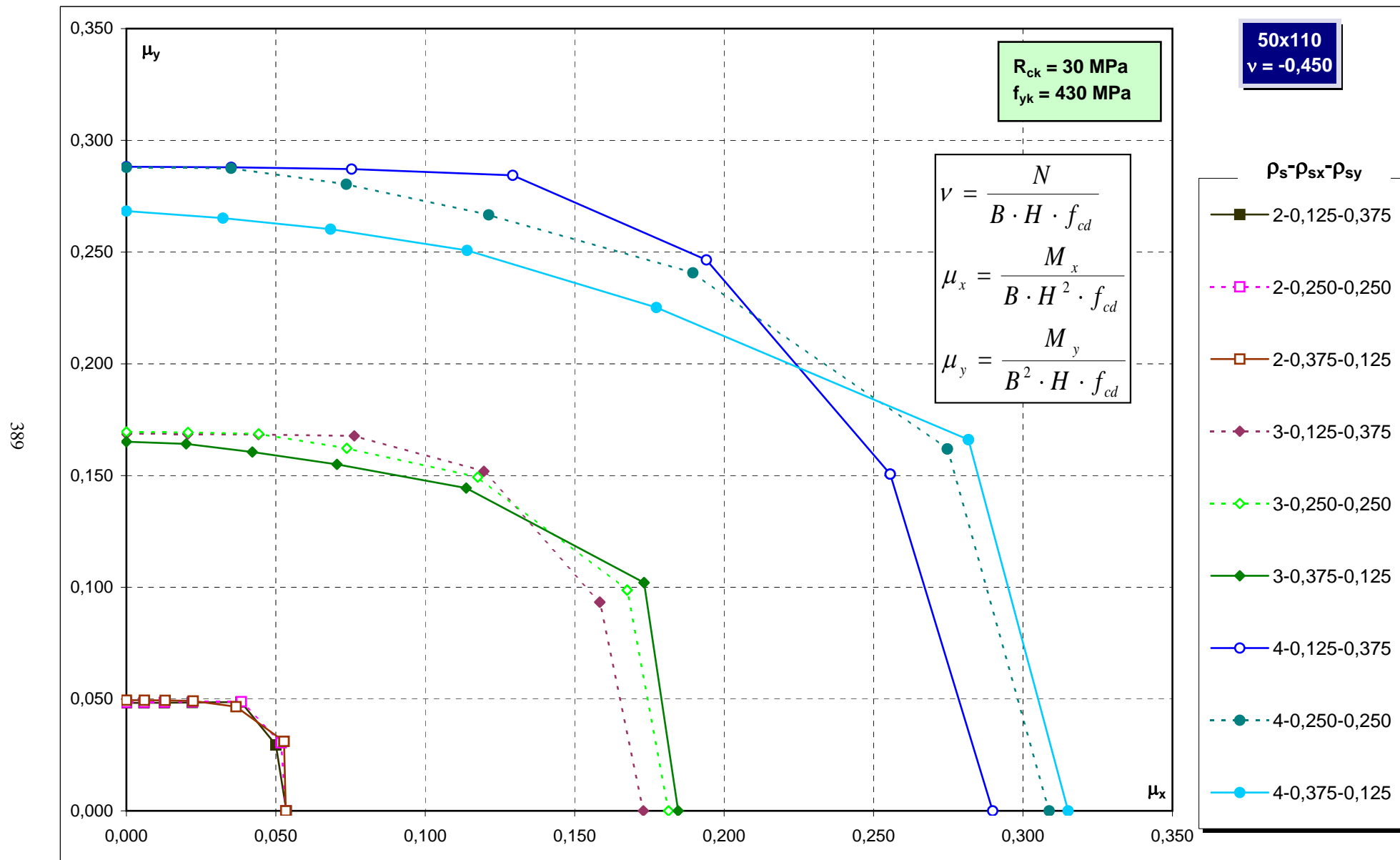
Abachi di progetto



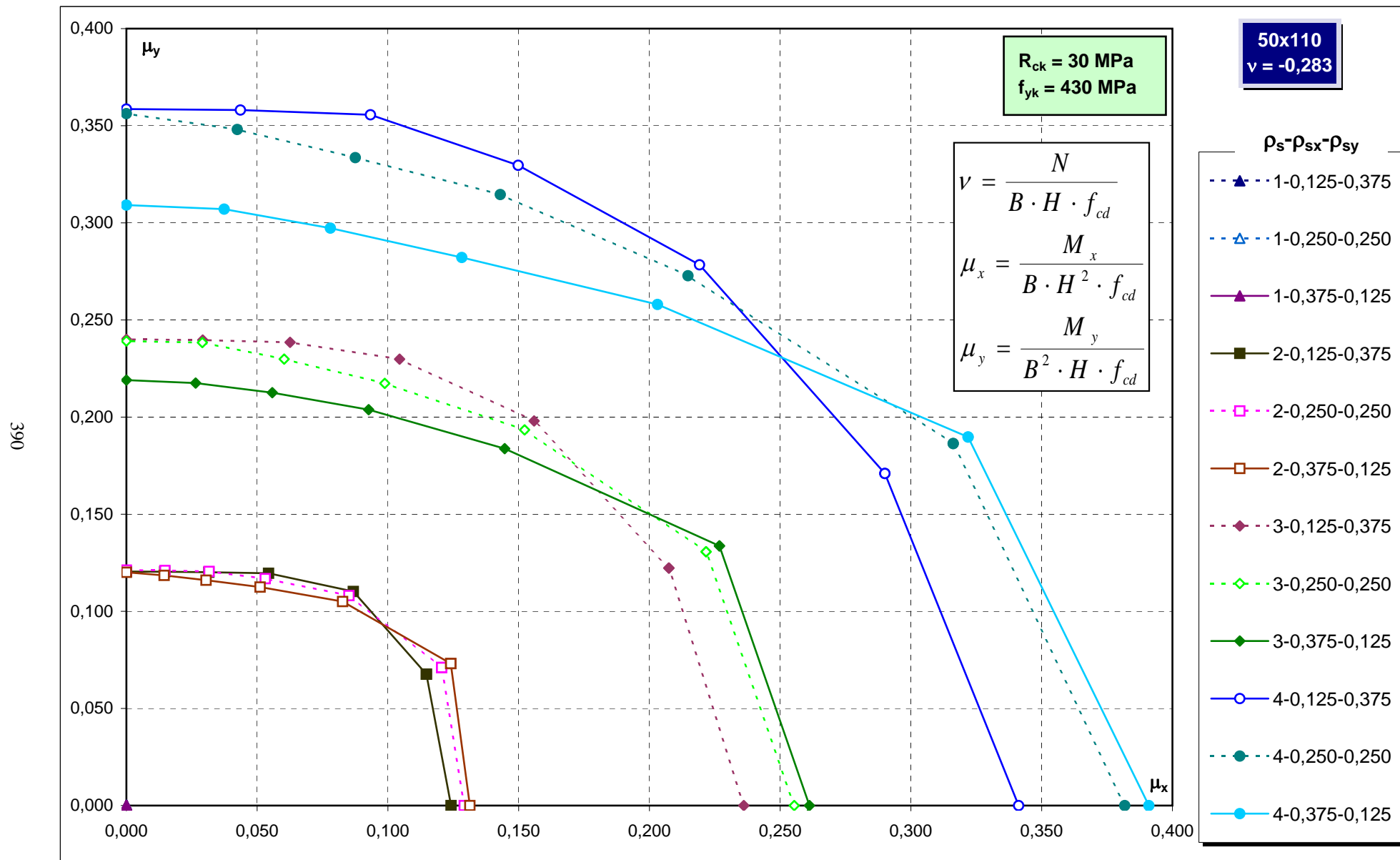
Abachi di progetto



Abachi di progetto

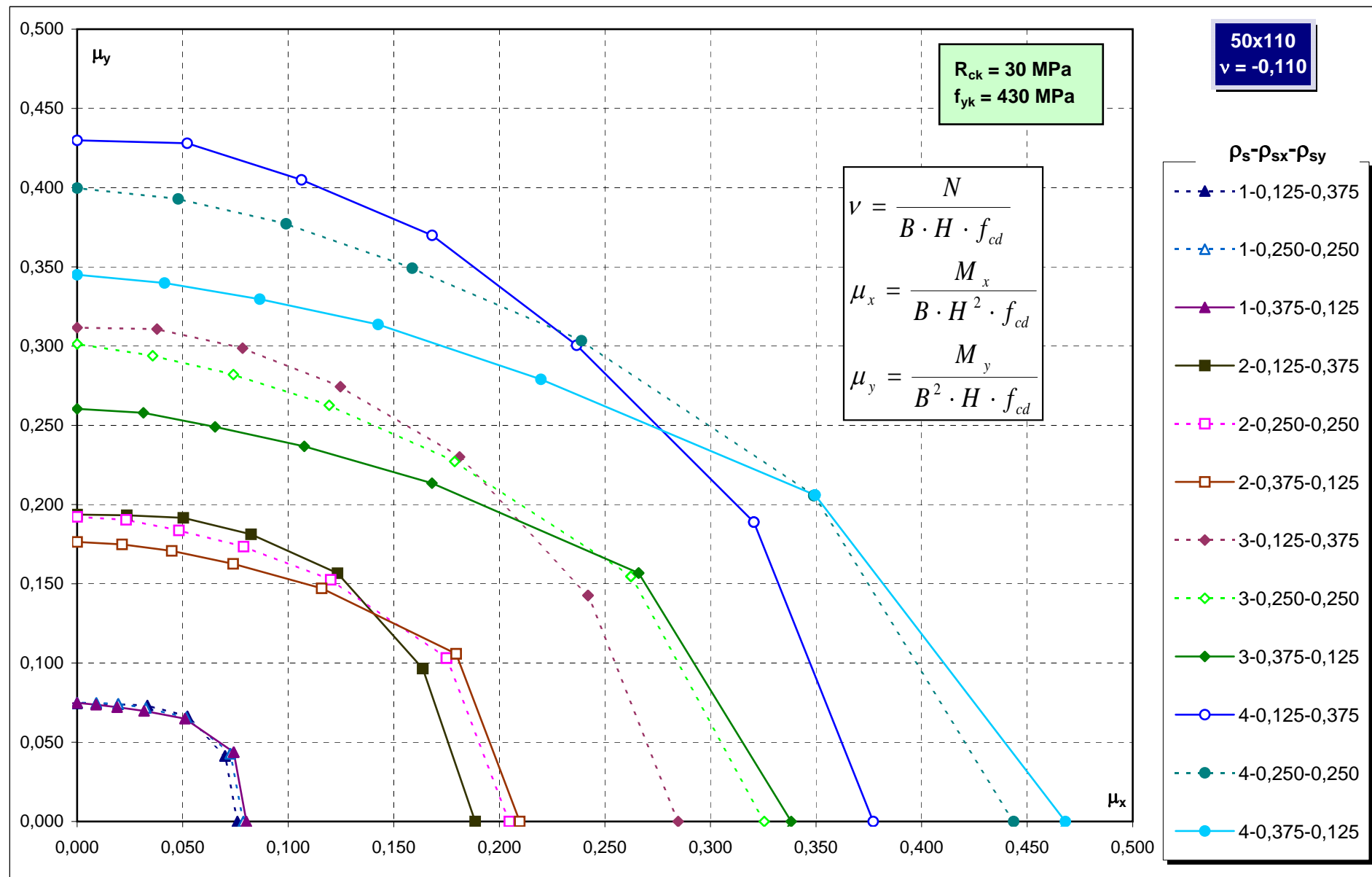


Abachi di progetto



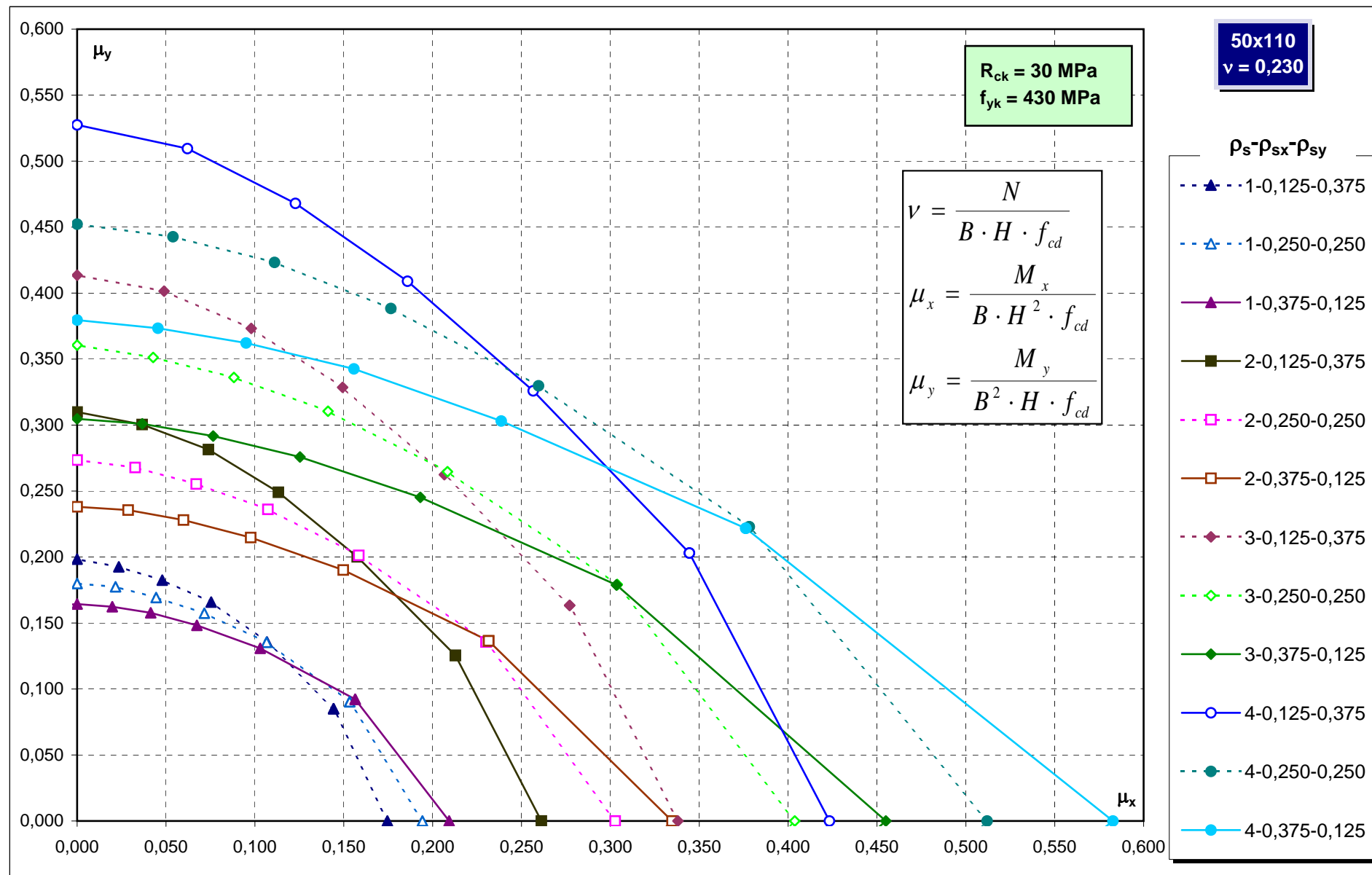
Abachi di progetto

391

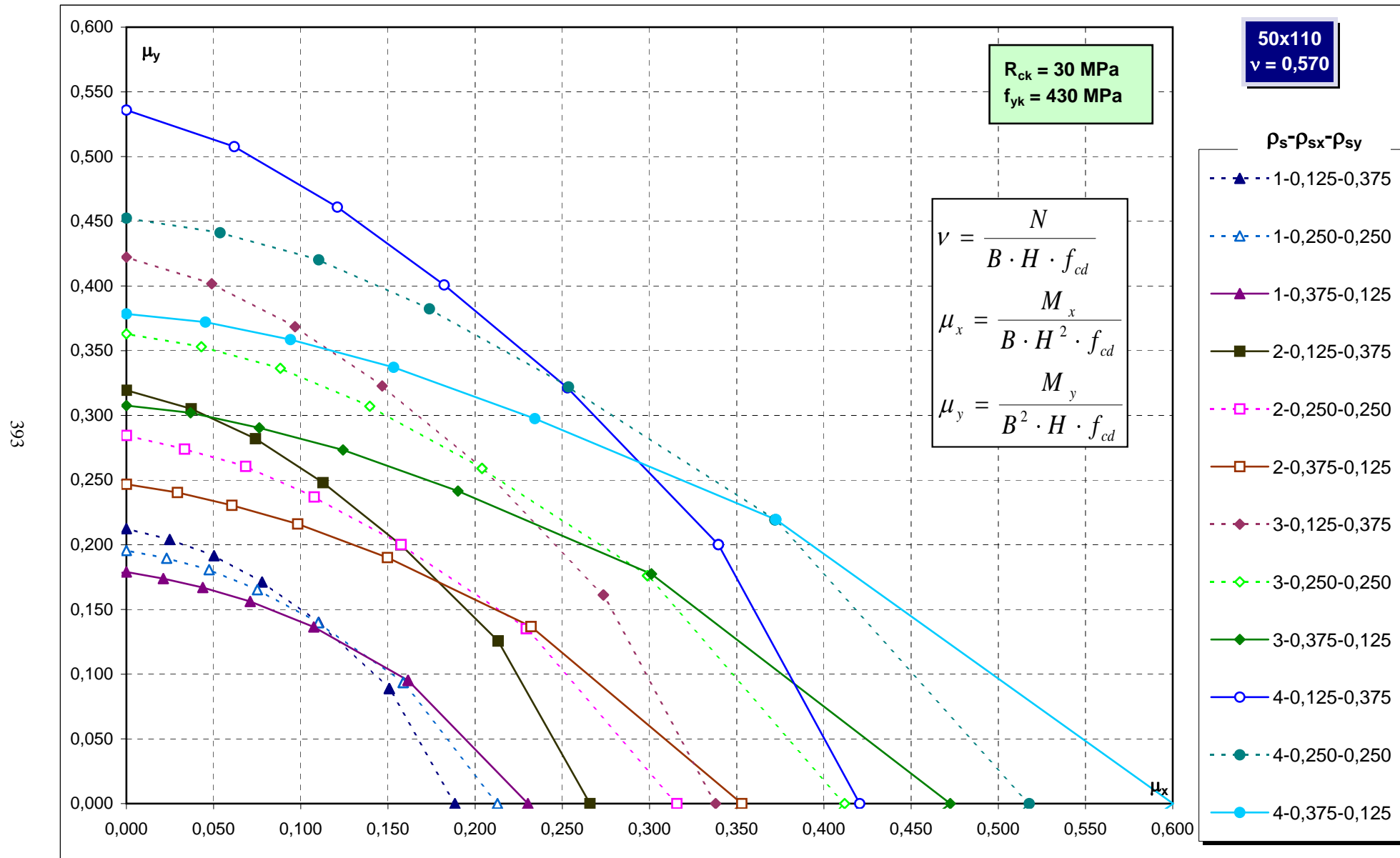


Abachi di progetto

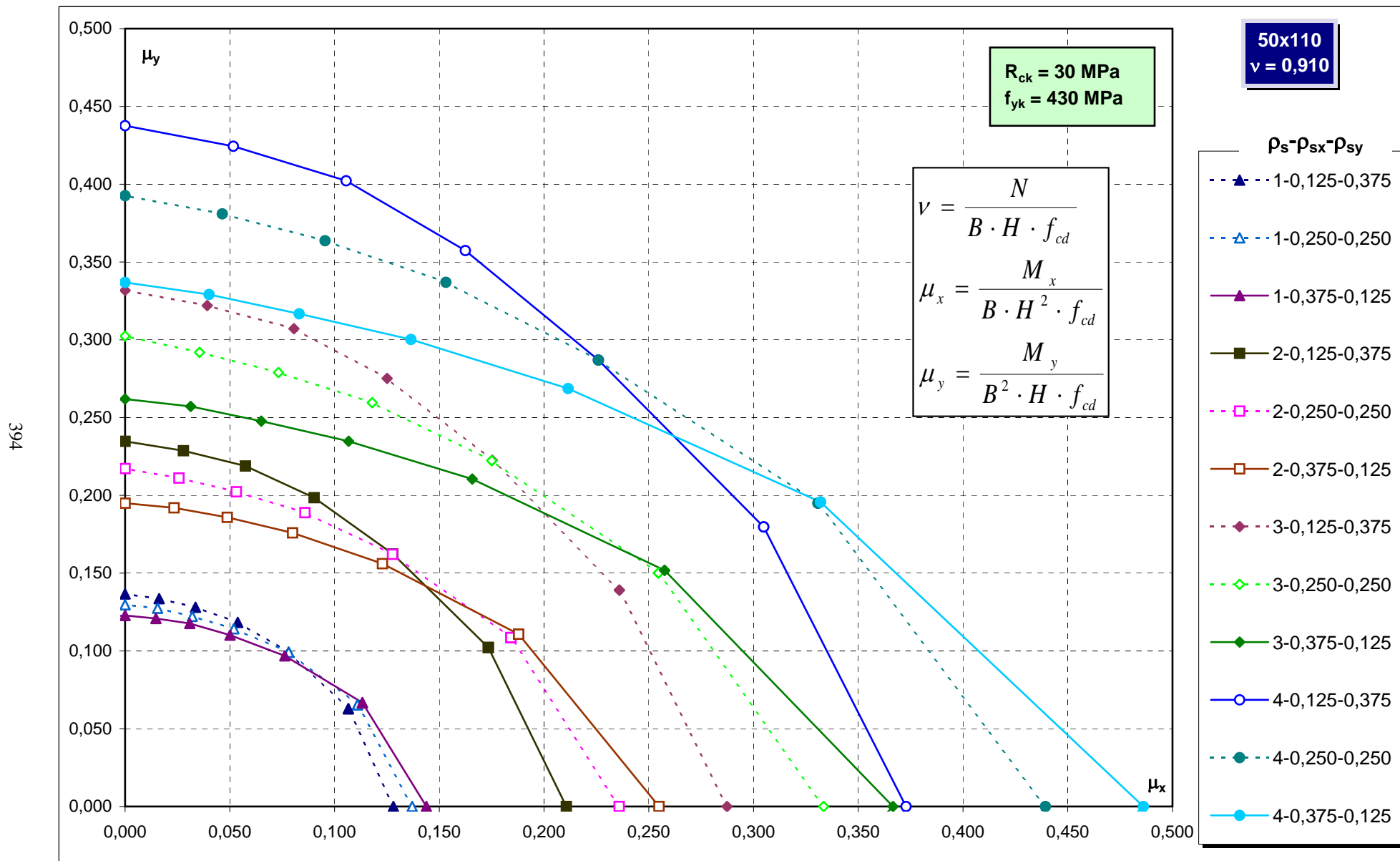
392



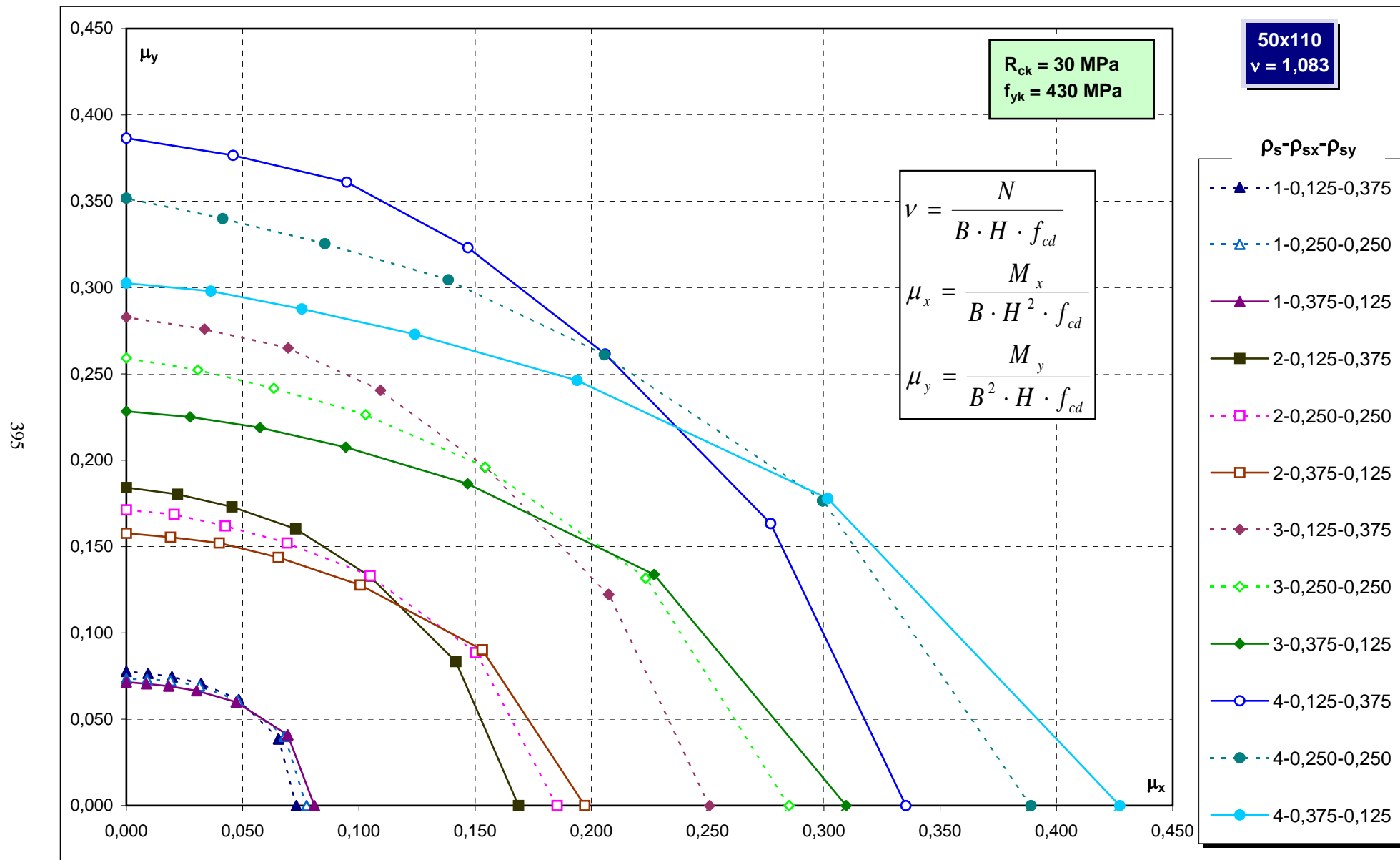
Abachi di progetto



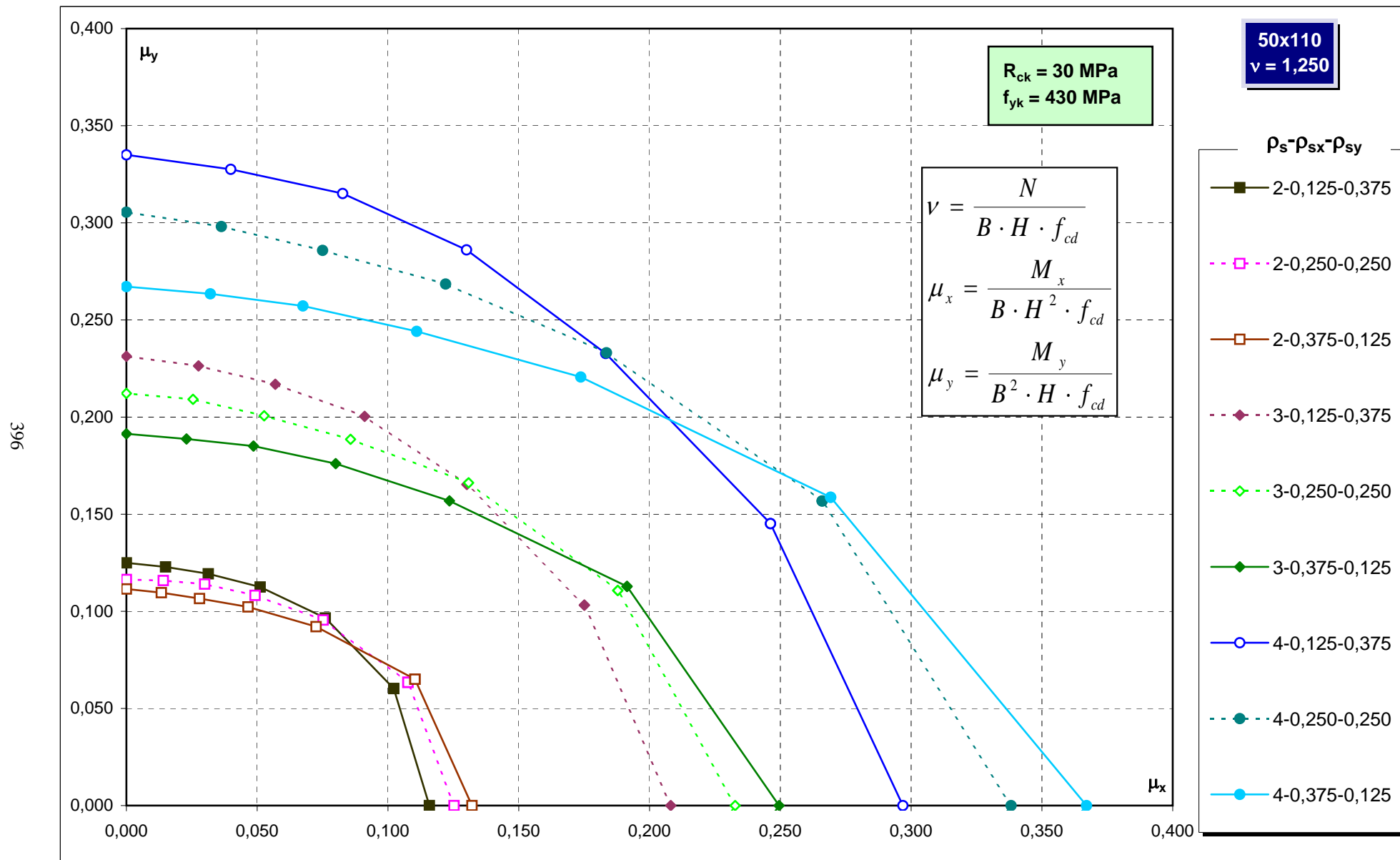
Abachi di progetto



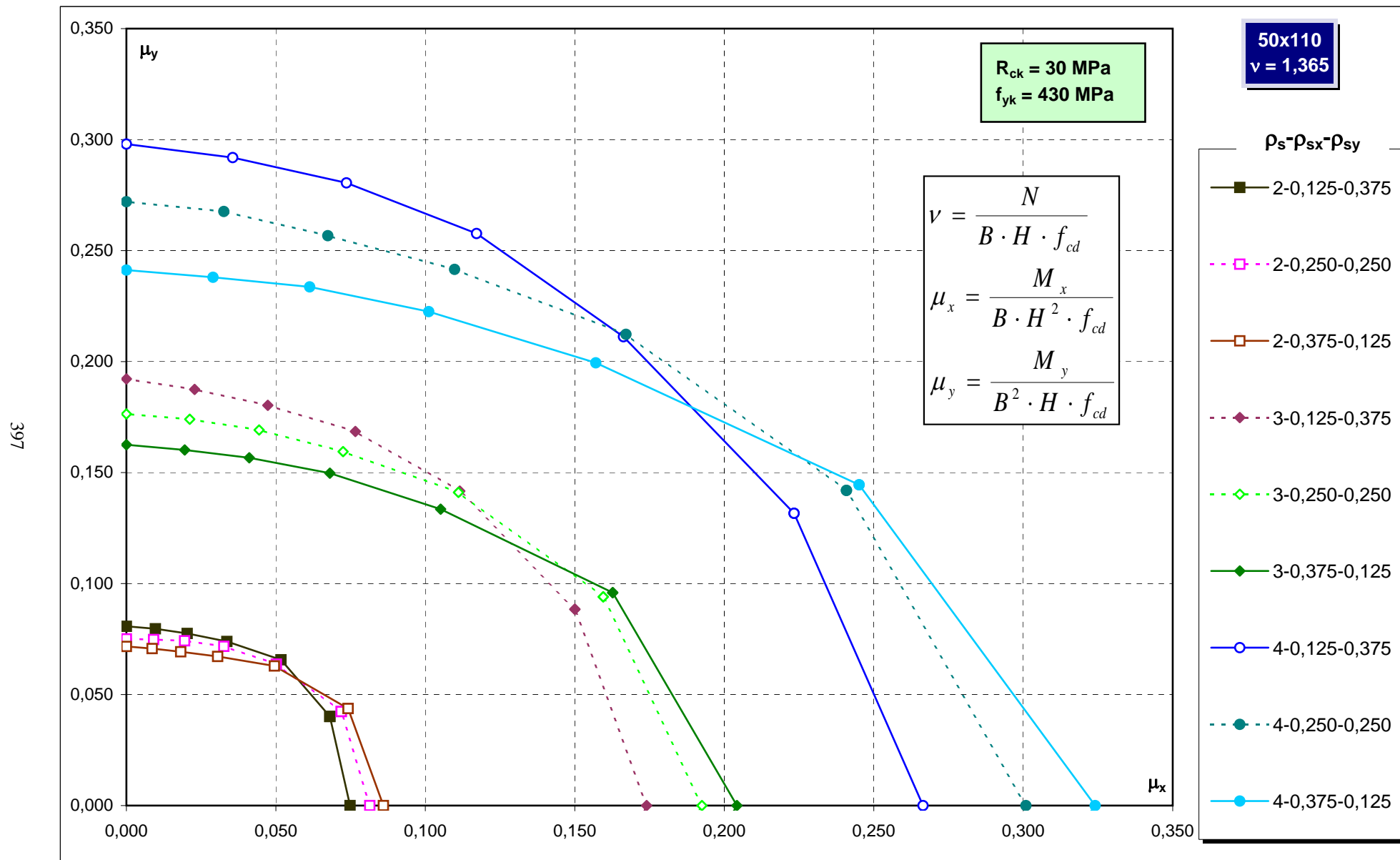
Abachi di progetto



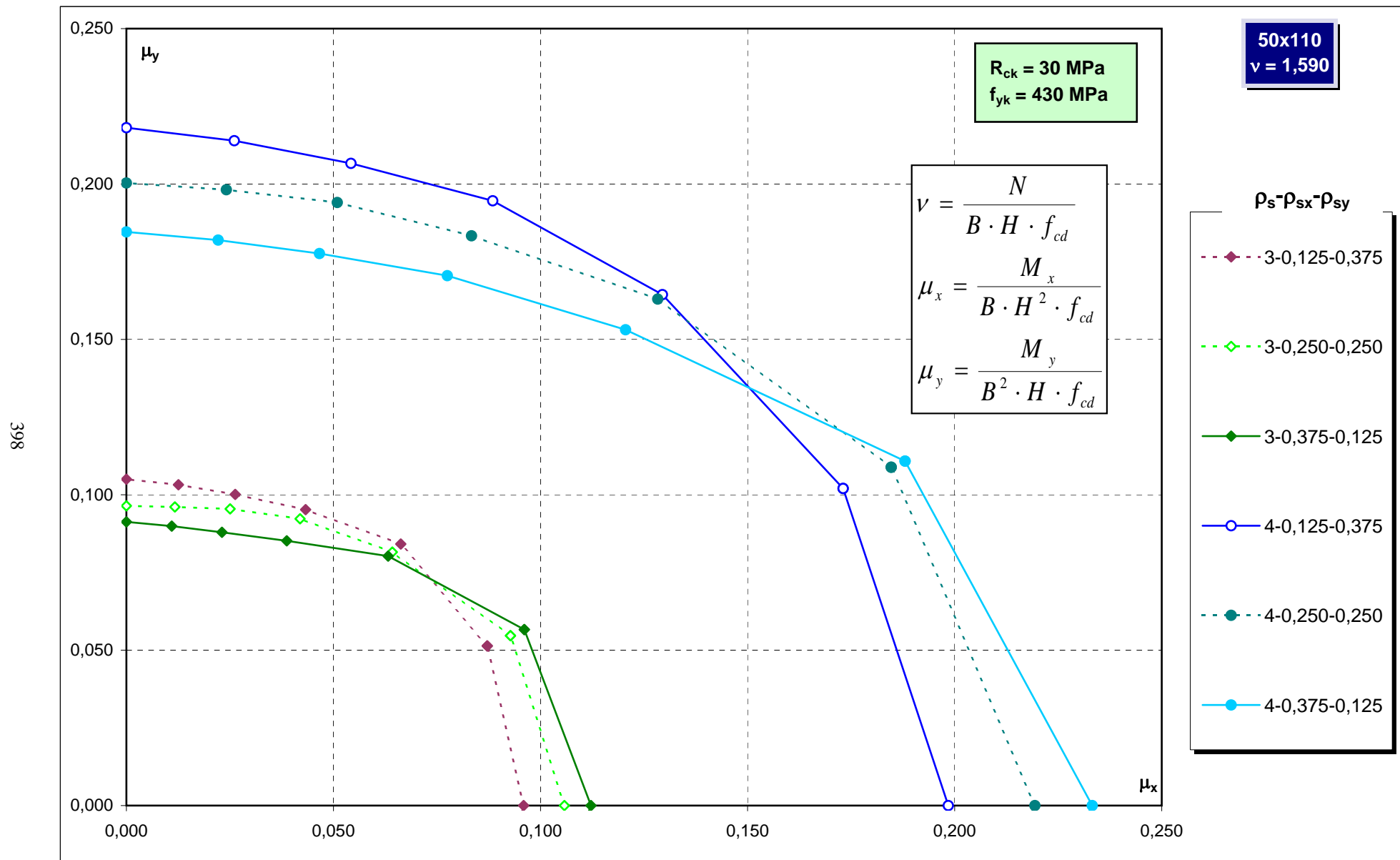
Abachi di progetto



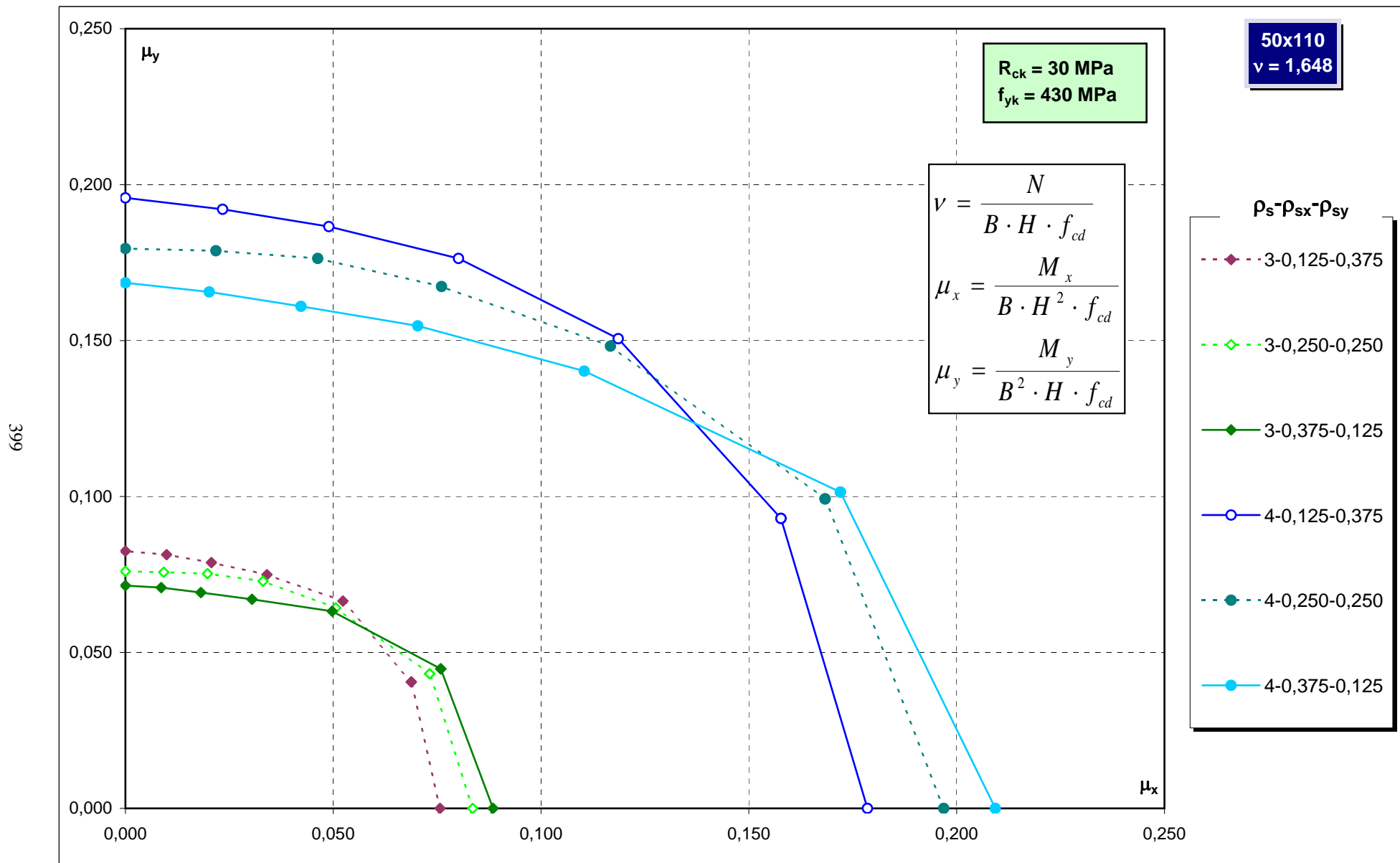
Abachi di progetto



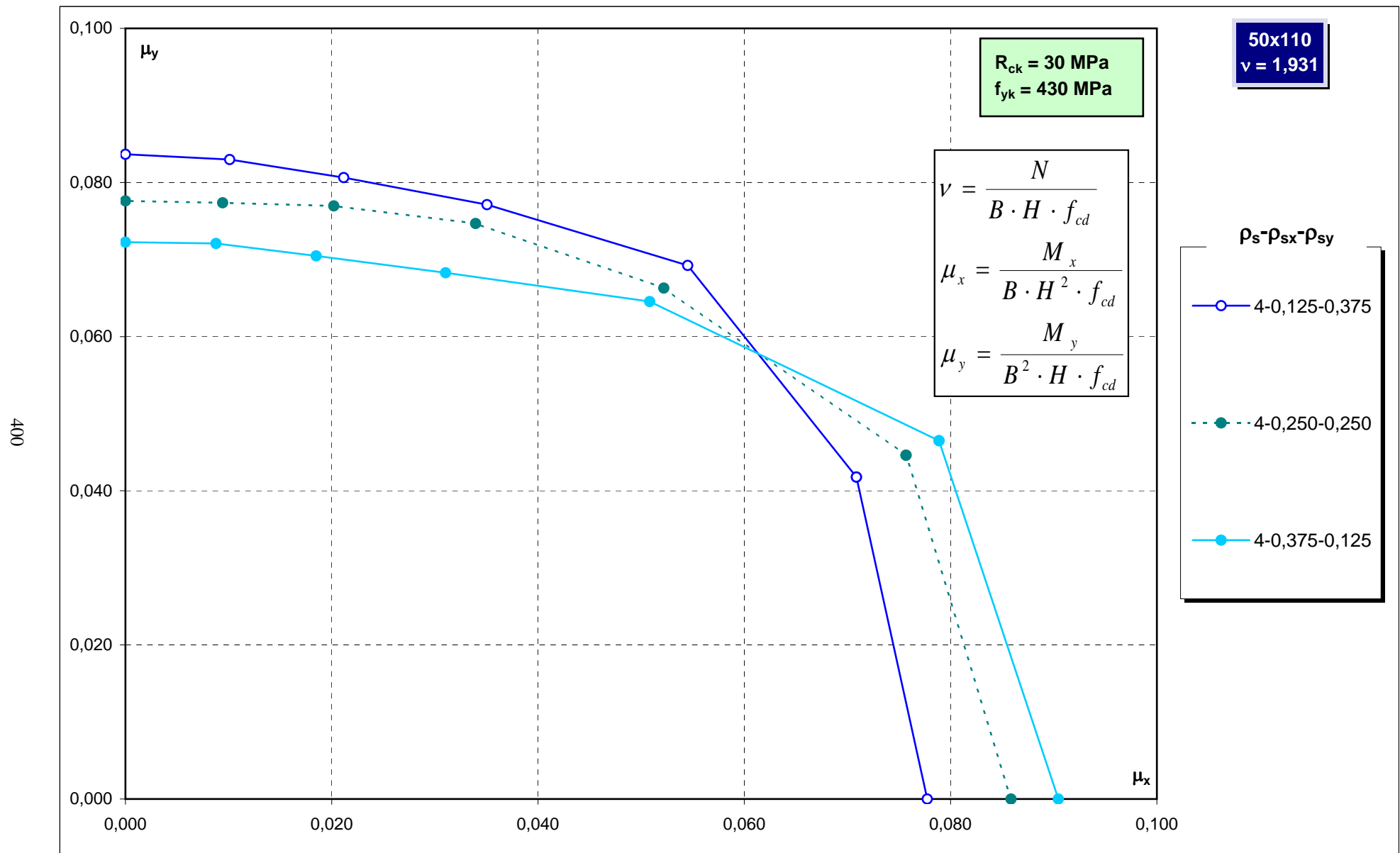
Abachi di progetto



Abachi di progetto

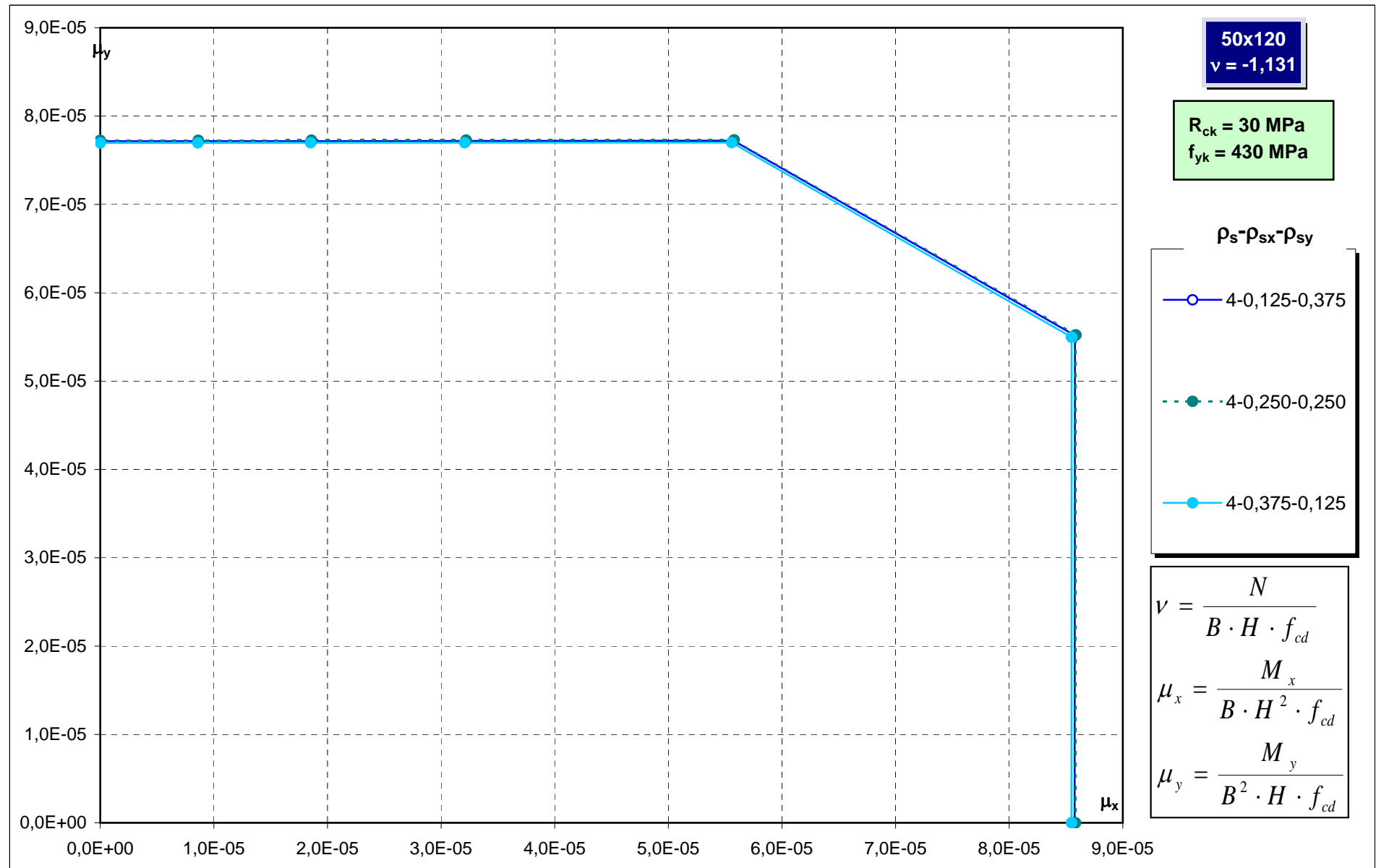


Abachi di progetto

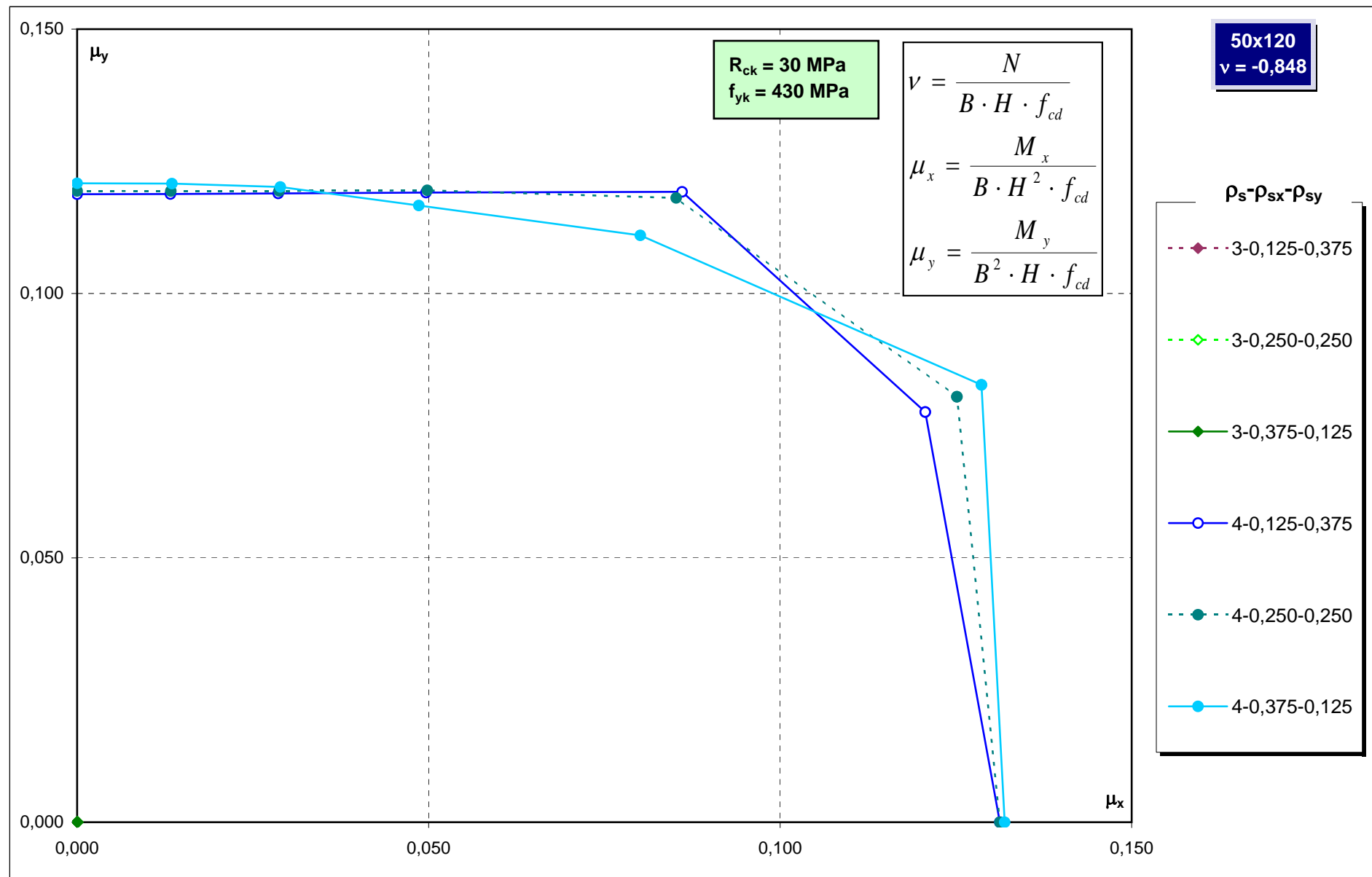


Abachi di progetto

401

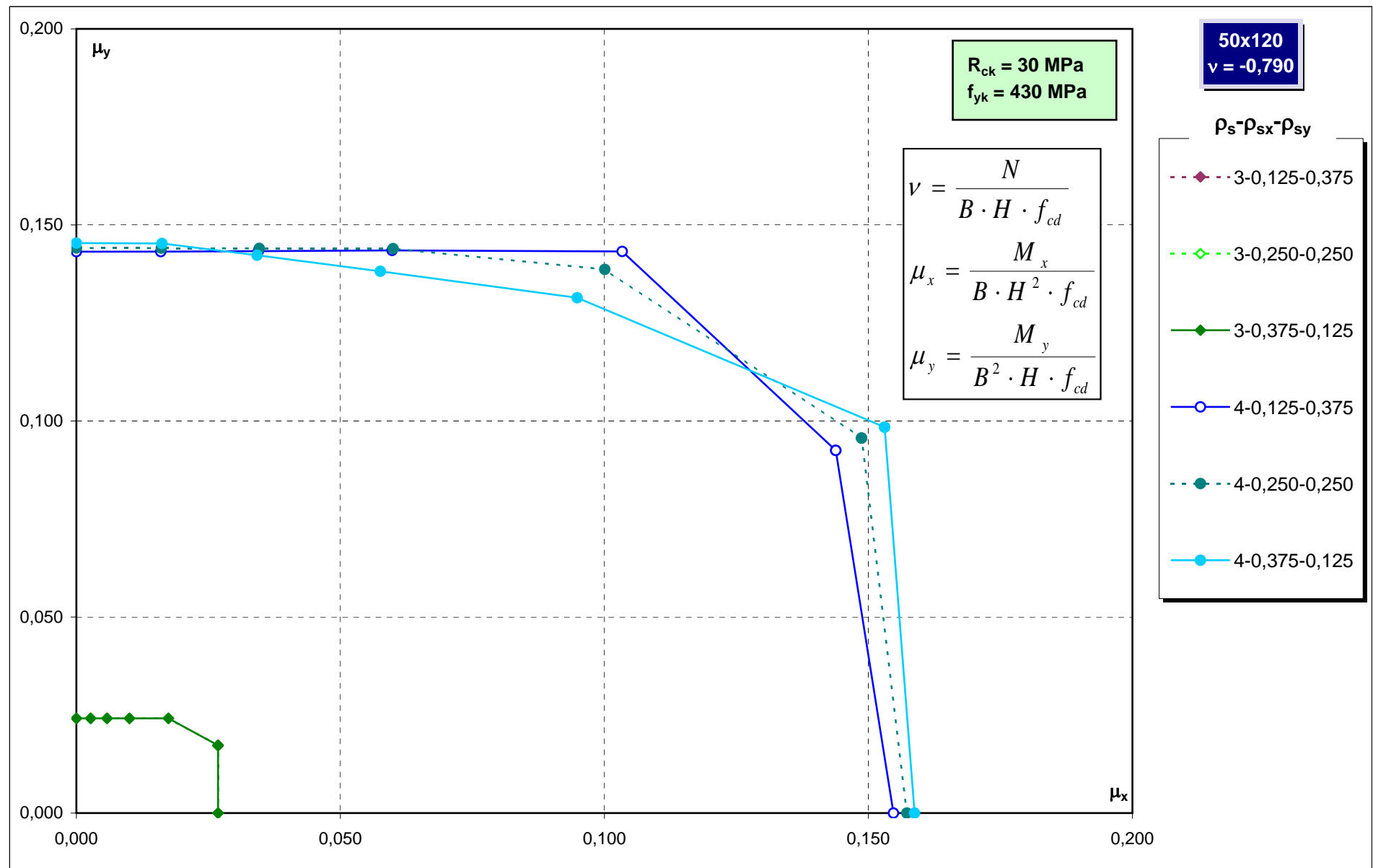


Abachi di progetto



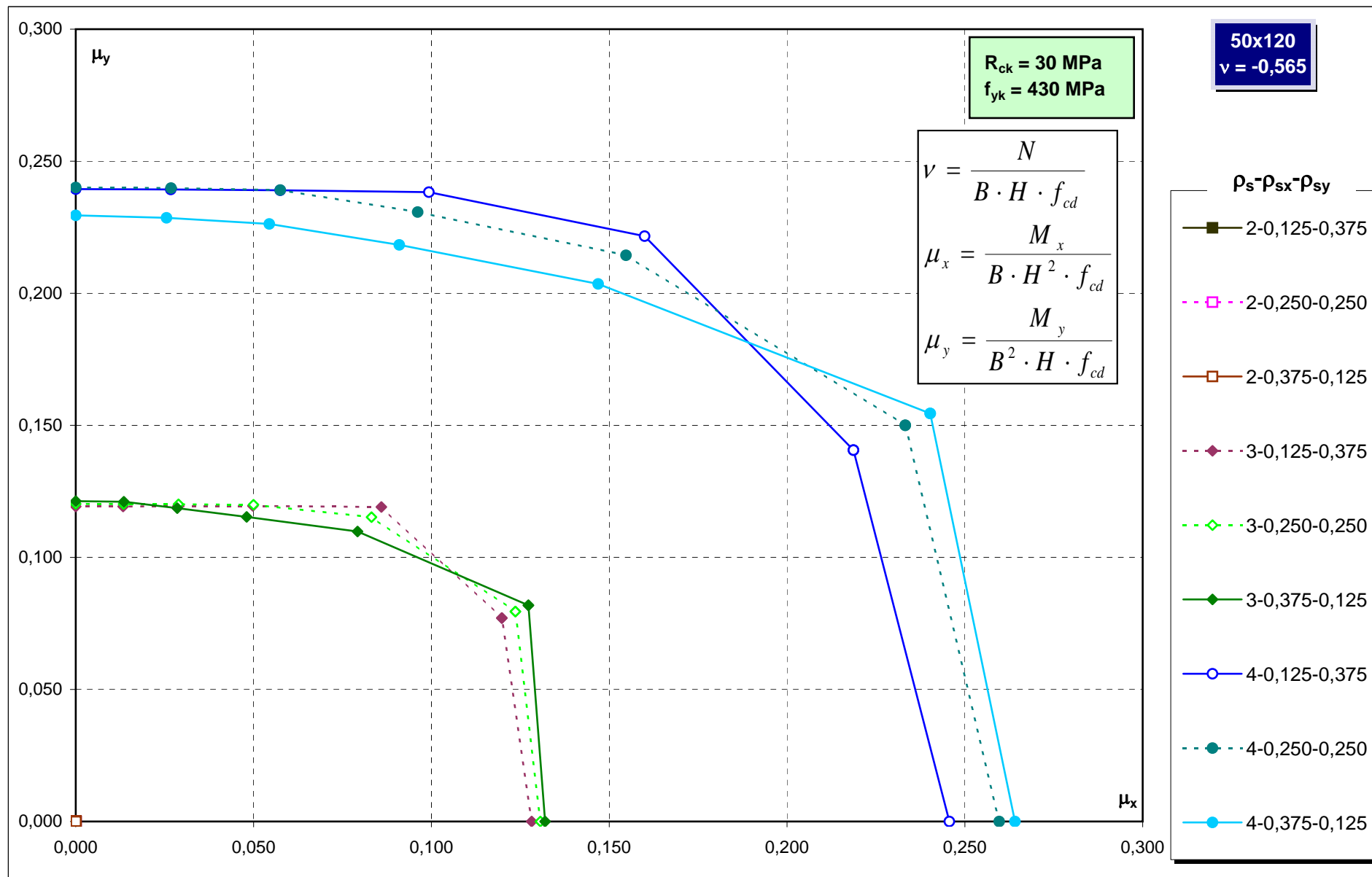
Abachi di progetto

403

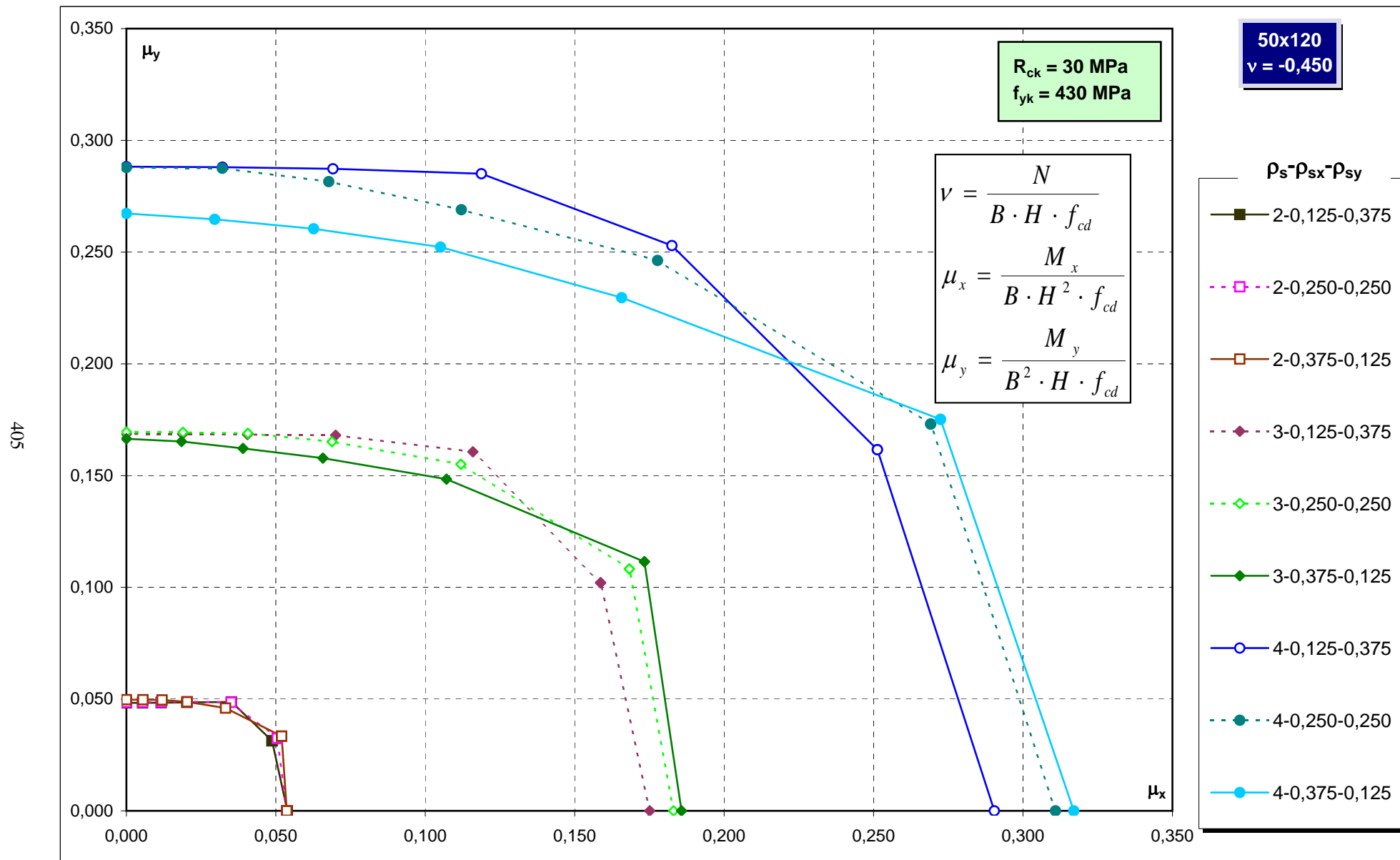


Abachi di progetto

404

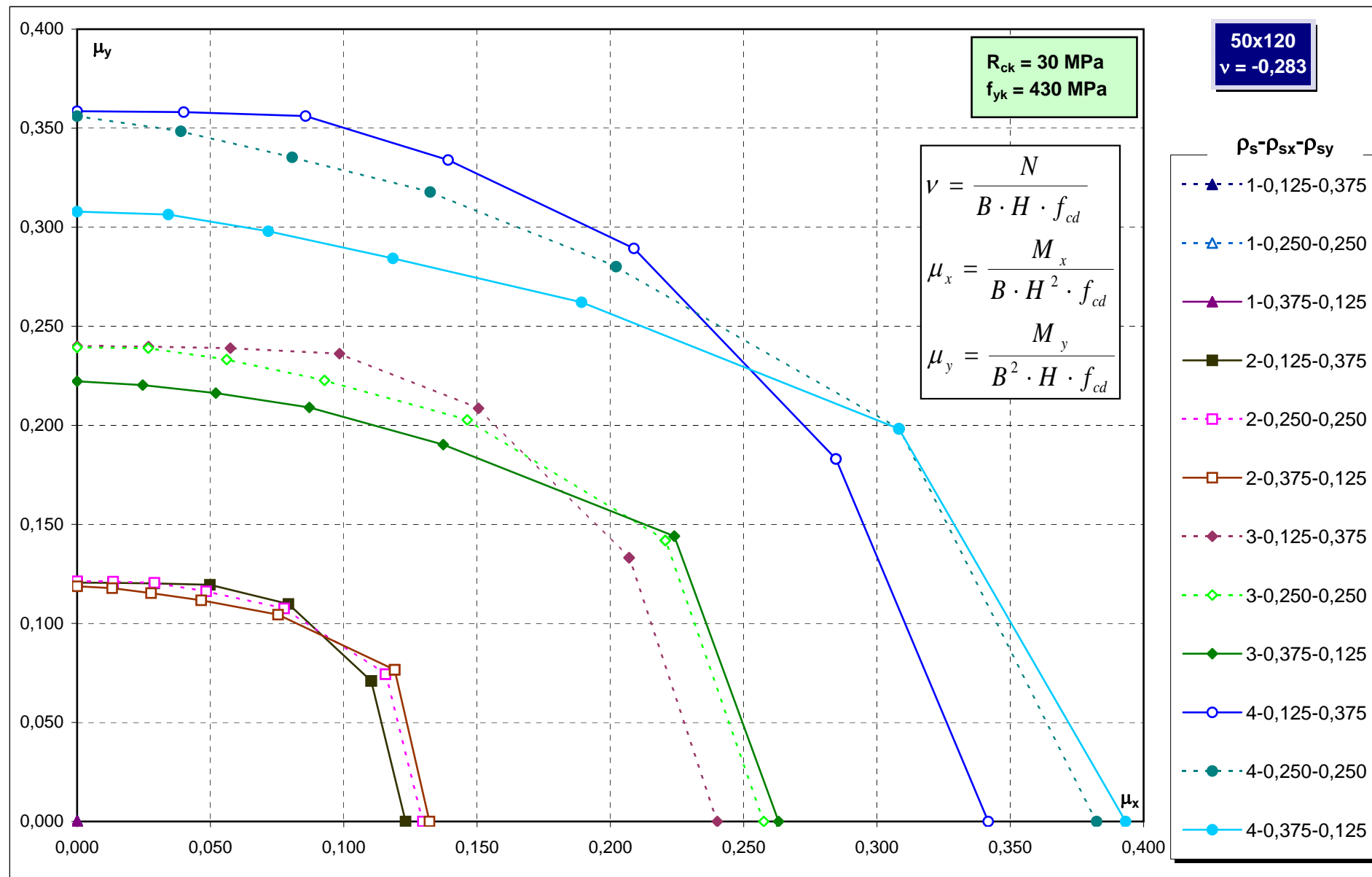


Abachi di progetto



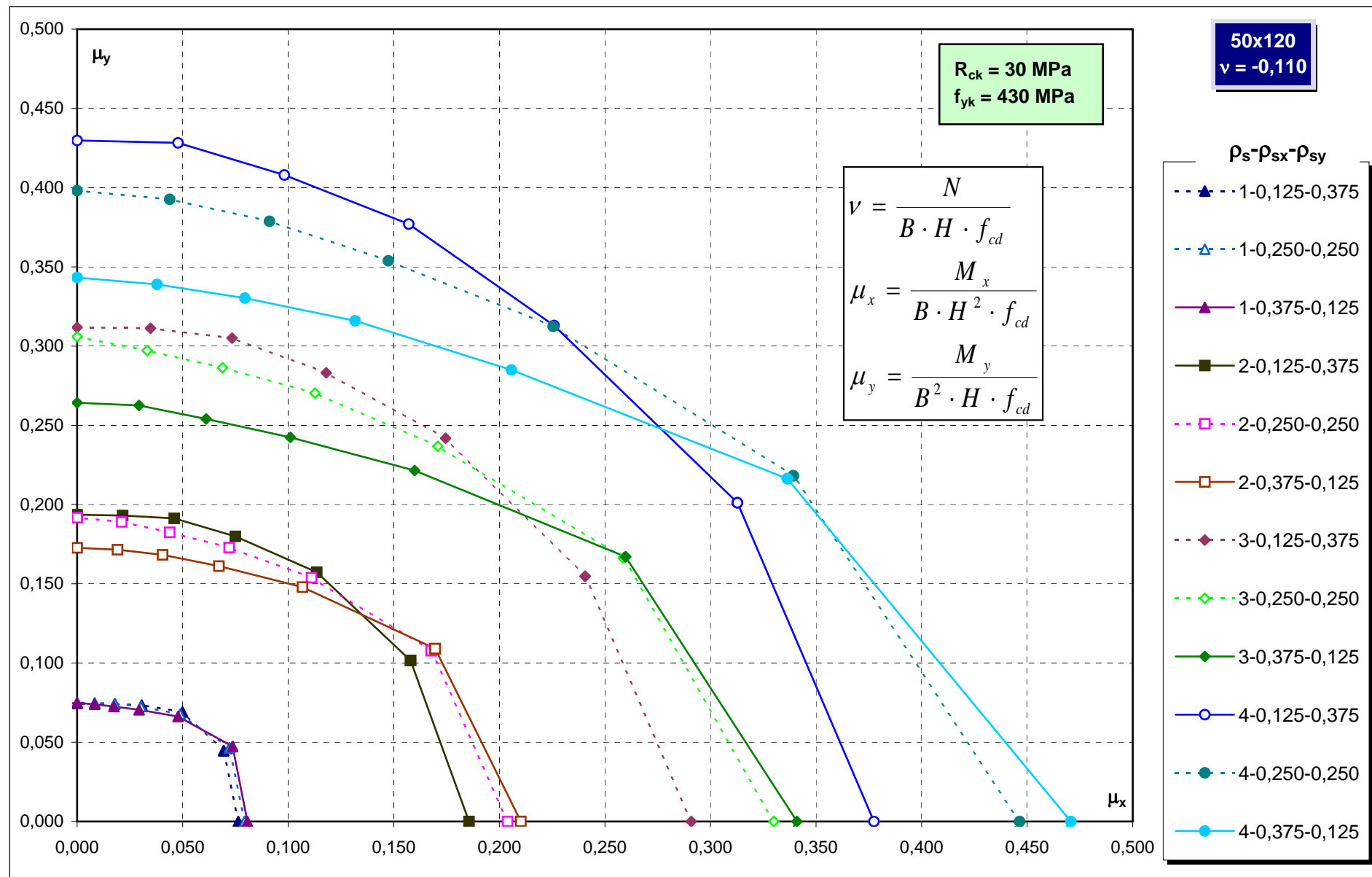
Abachi di progetto

406

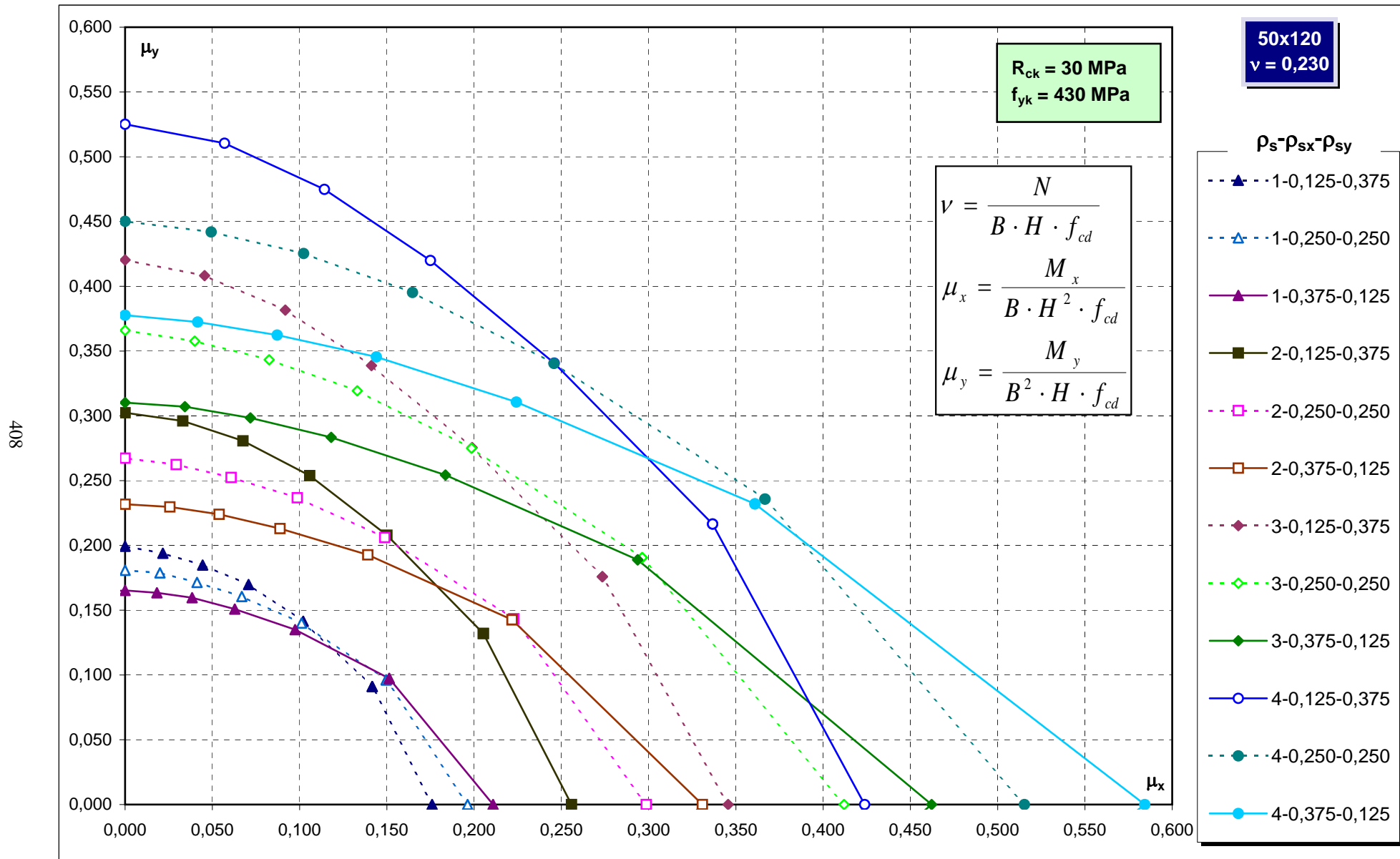


Abachi di progetto

407

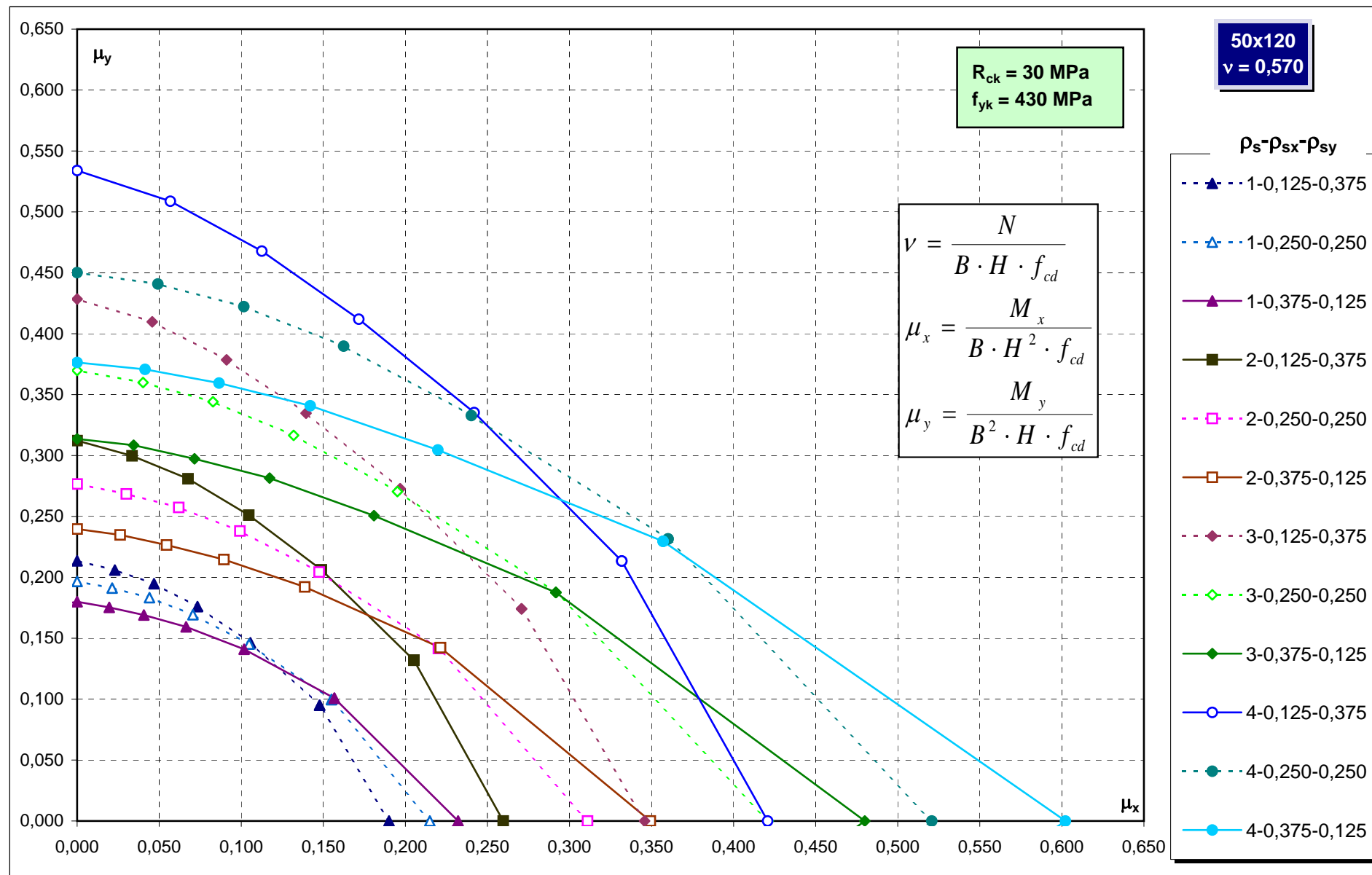


Abachi di progetto

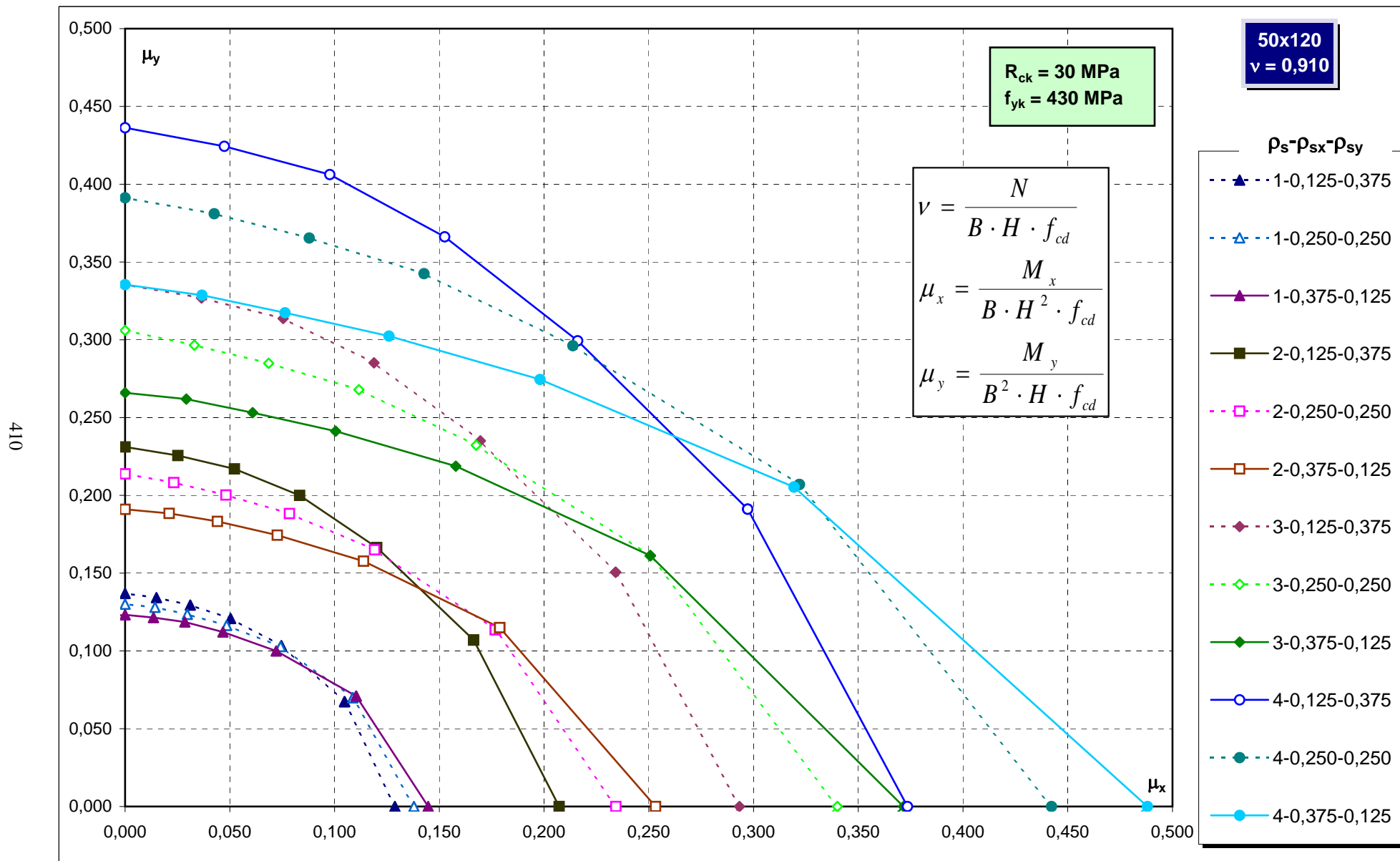


Abachi di progetto

409

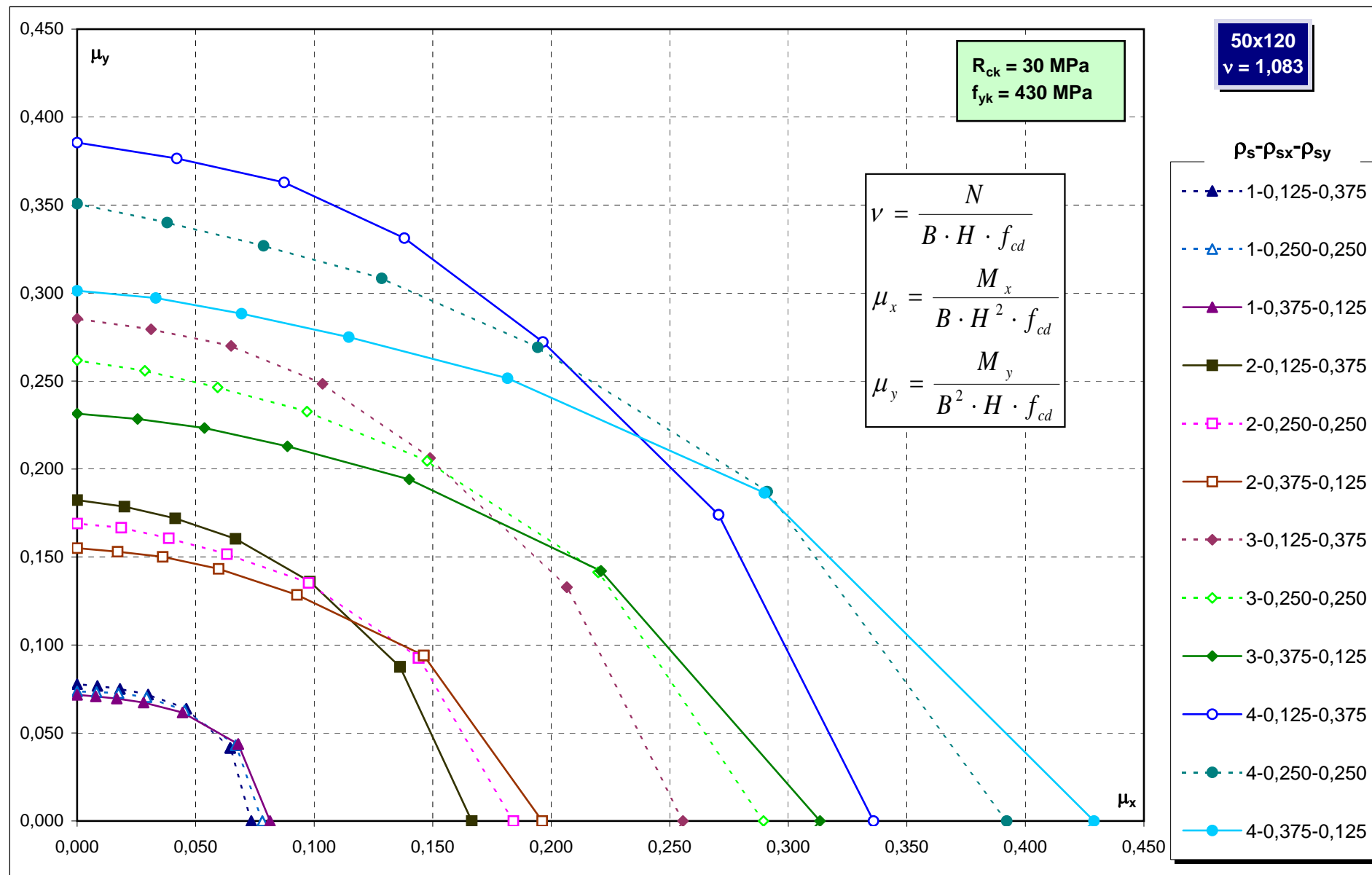


Abachi di progetto



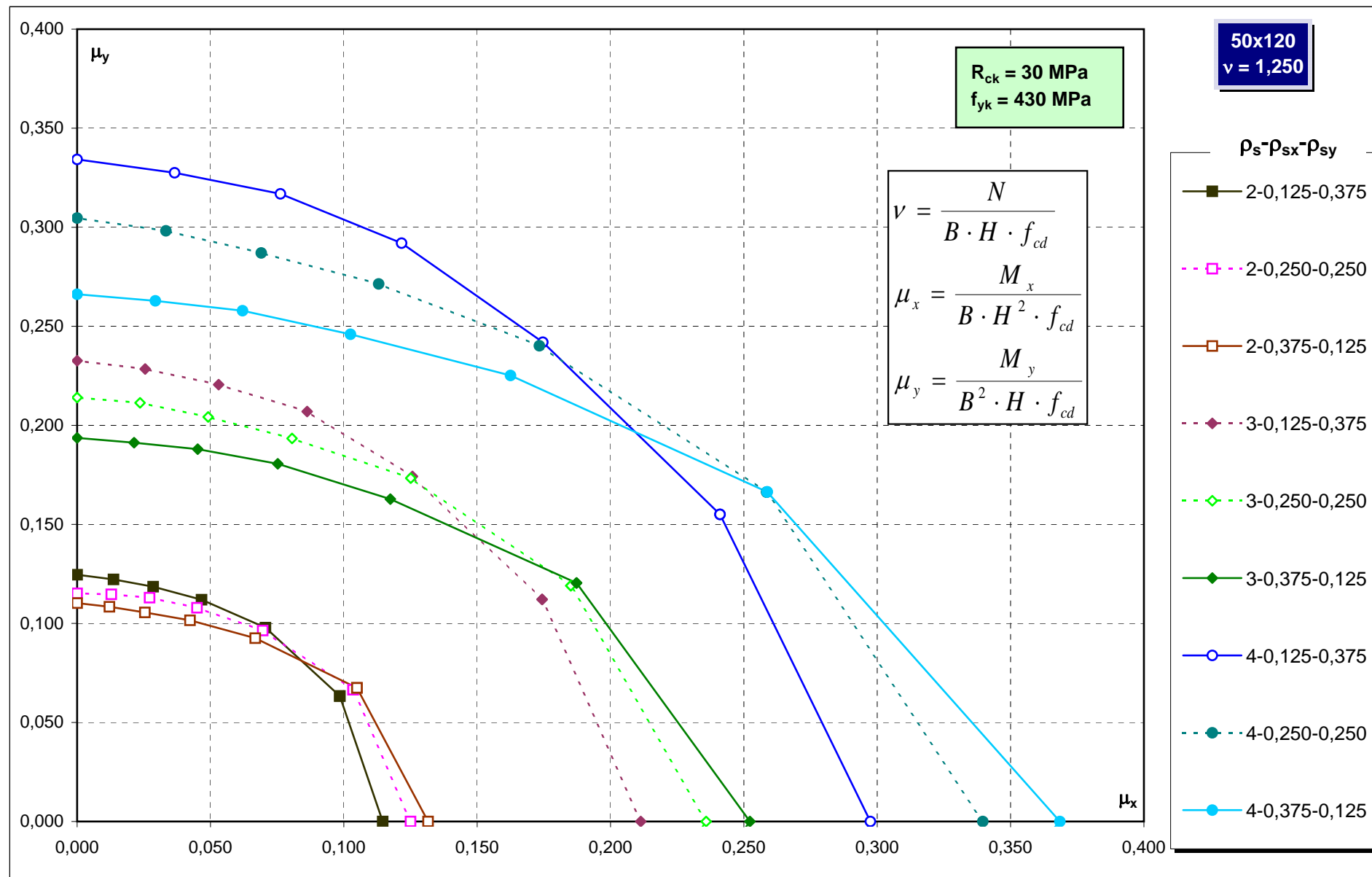
Abachi di progetto

411

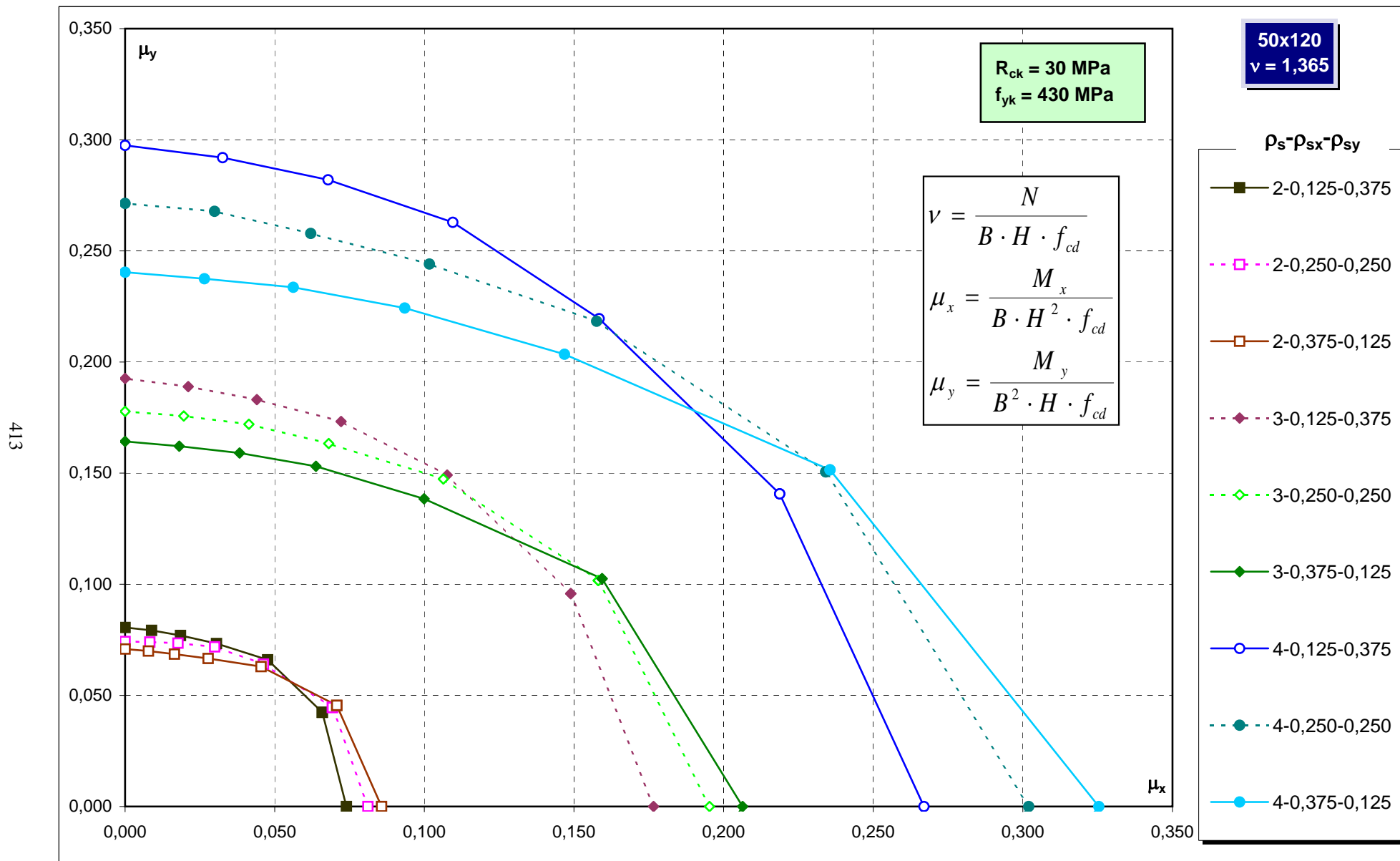


Abachi di progetto

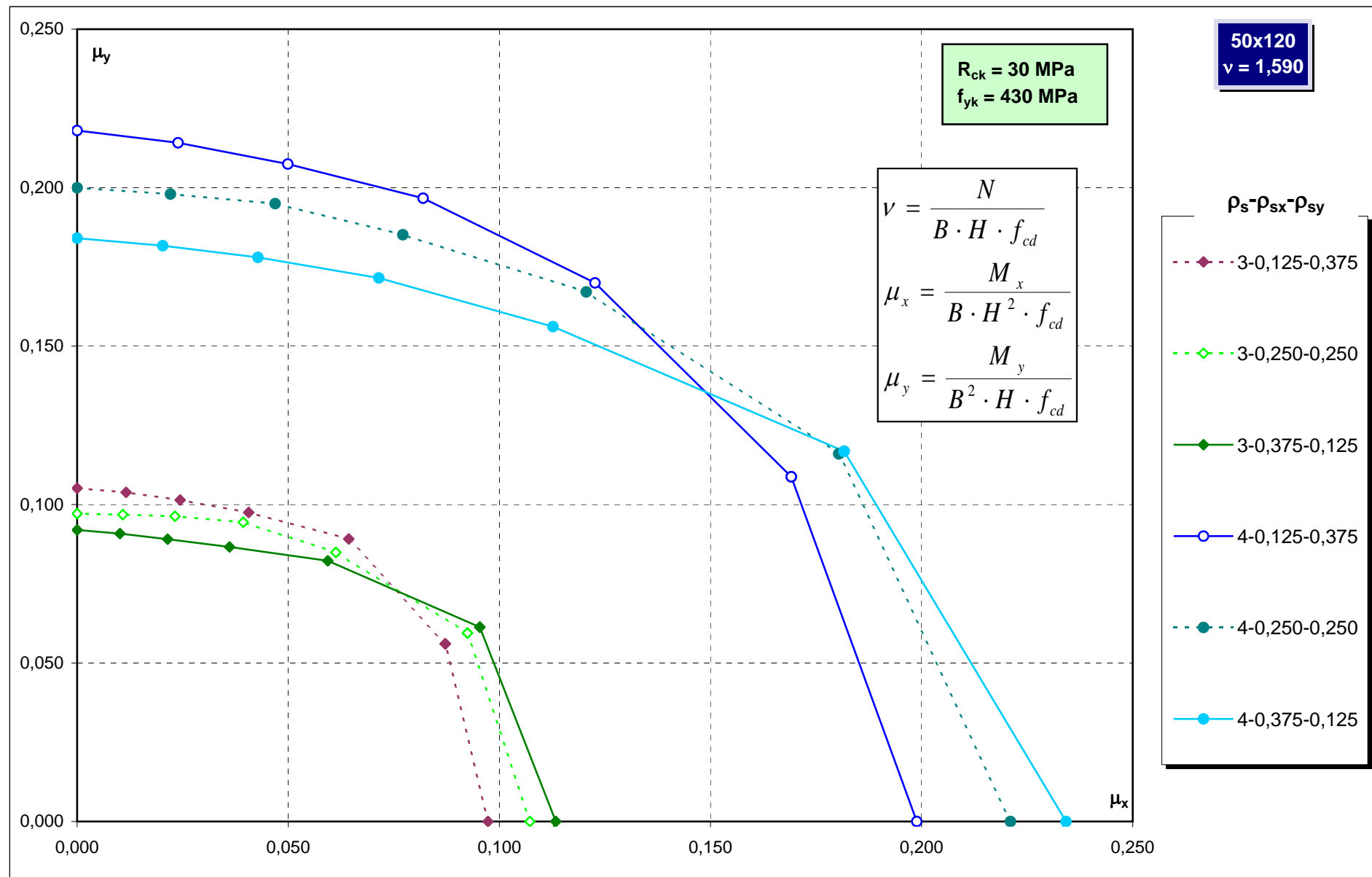
412



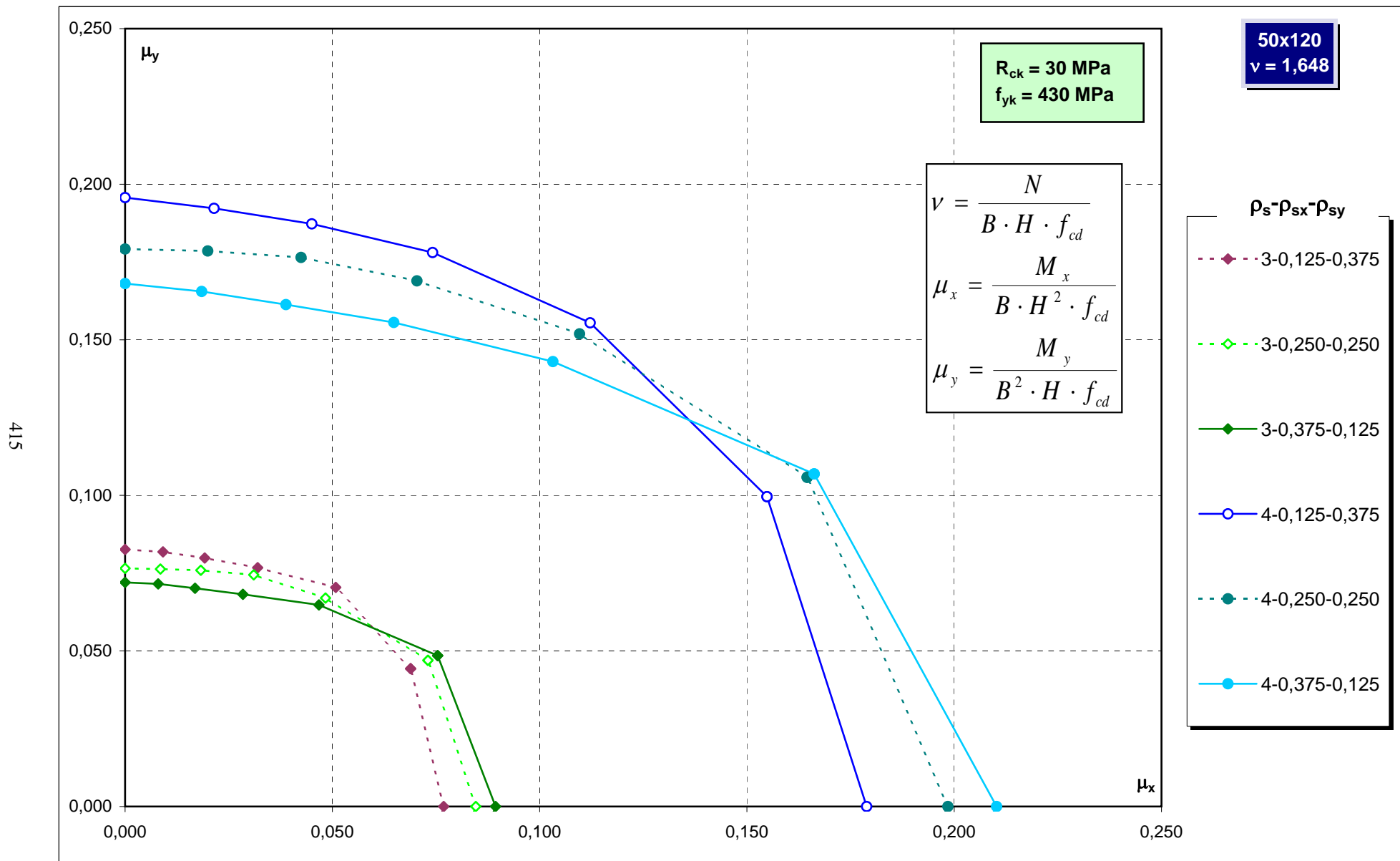
Abachi di progetto



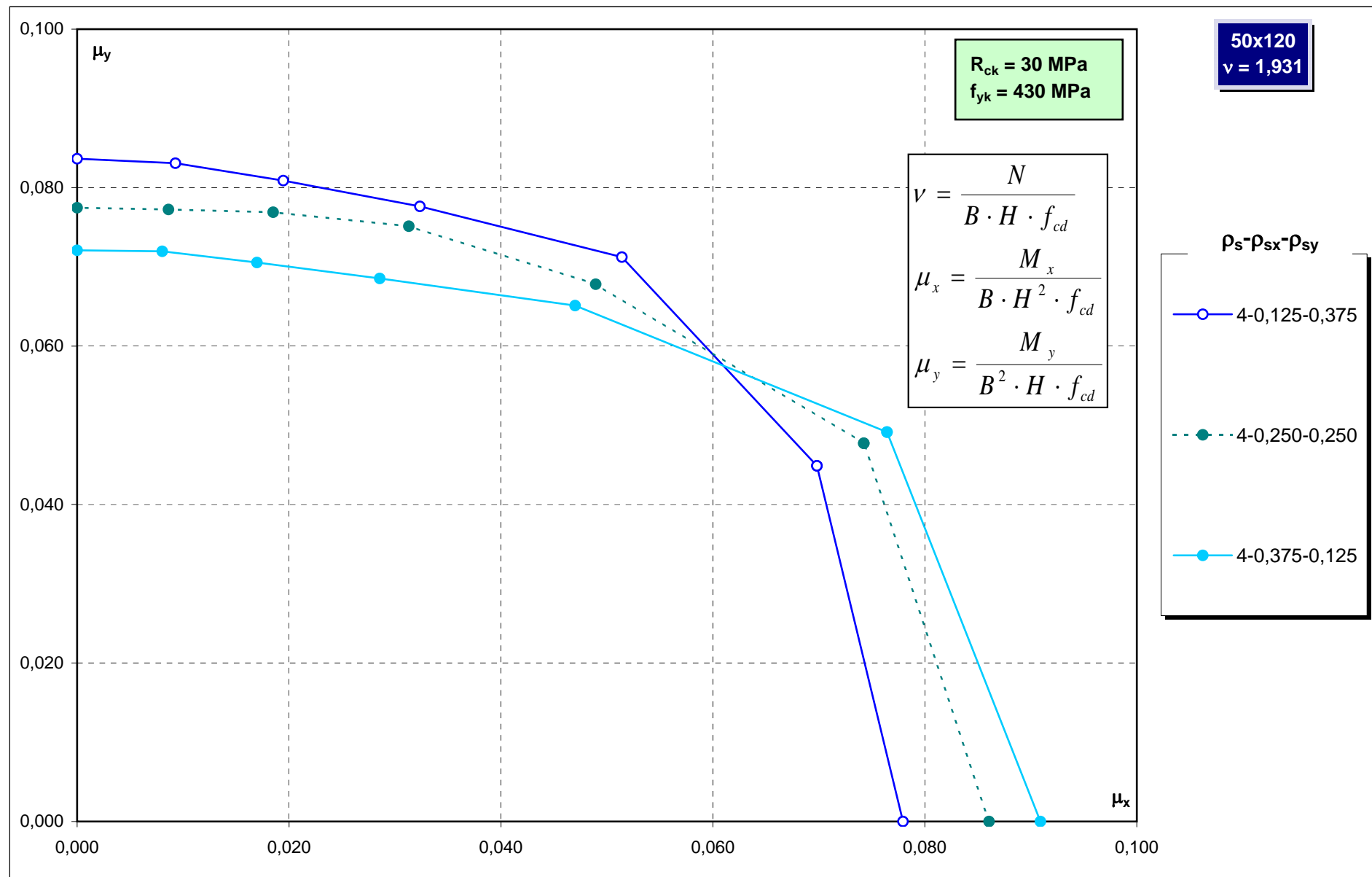
Abachi di progetto



Abachi di progetto



Abachi di progetto



Abachi di progetto

50x130
v = -1,131

R_{ck} = 30 MPa
f_{yk} = 430 MPa

ρ_s-ρ_{sx}-ρ_{sy}

—○— 4-0,125-0,375

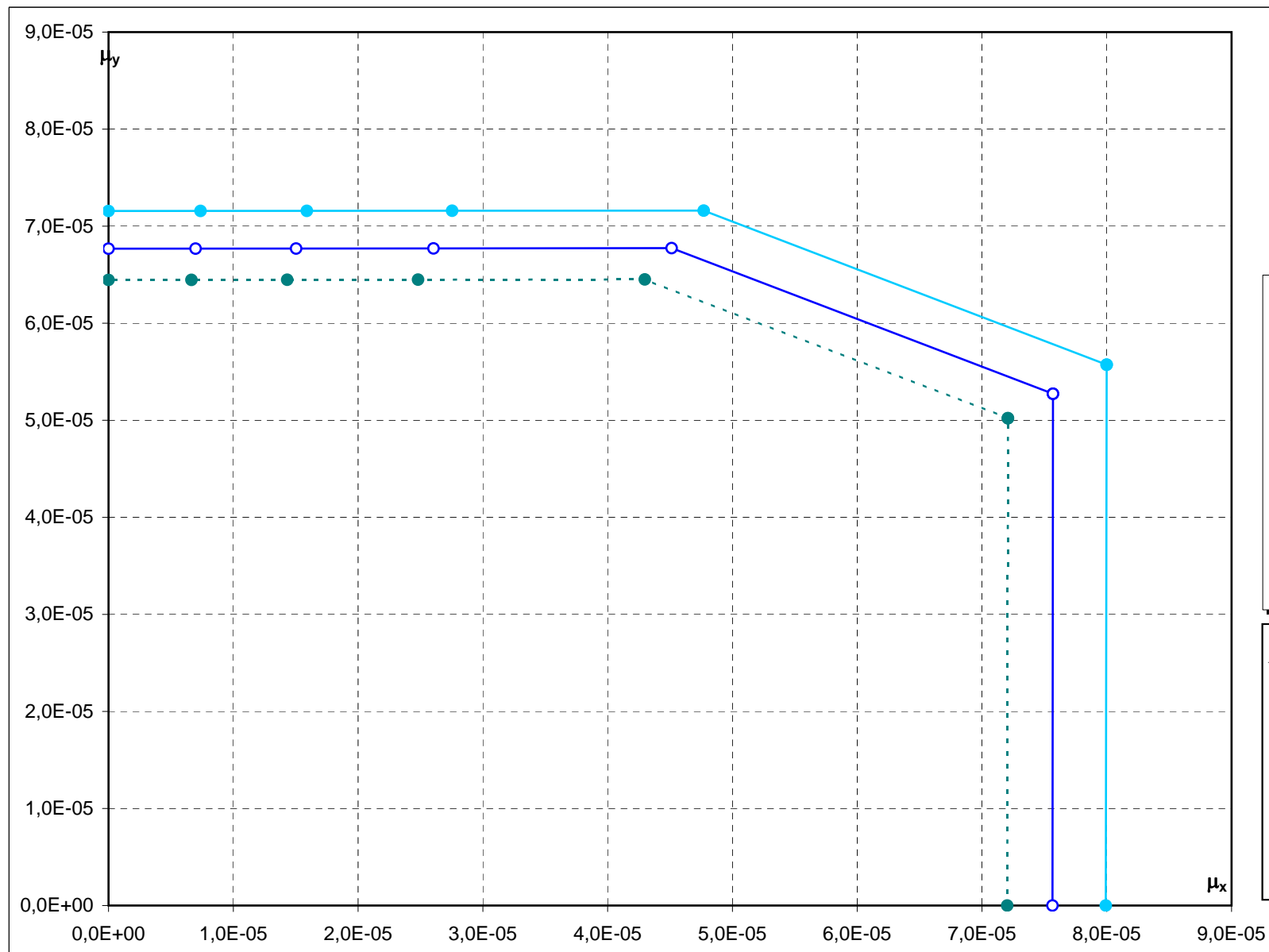
-●- 4-0,250-0,250

—●— 4-0,375-0,125

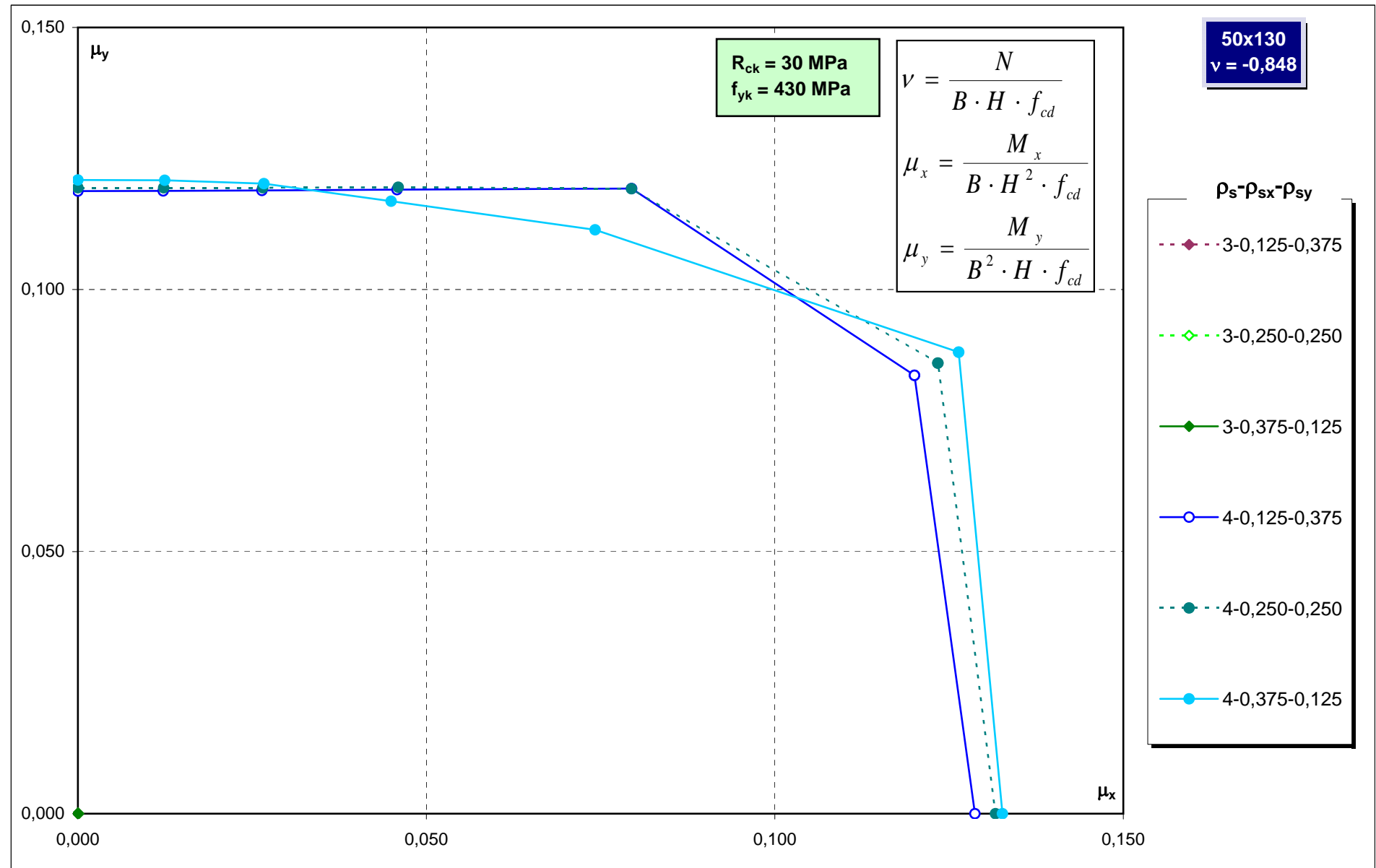
$$\nu = \frac{N}{B \cdot H \cdot f_{cd}}$$

$$\mu_x = \frac{M_x}{B \cdot H^2 \cdot f_{cd}}$$

$$\mu_y = \frac{M_y}{B^2 \cdot H \cdot f_{cd}}$$

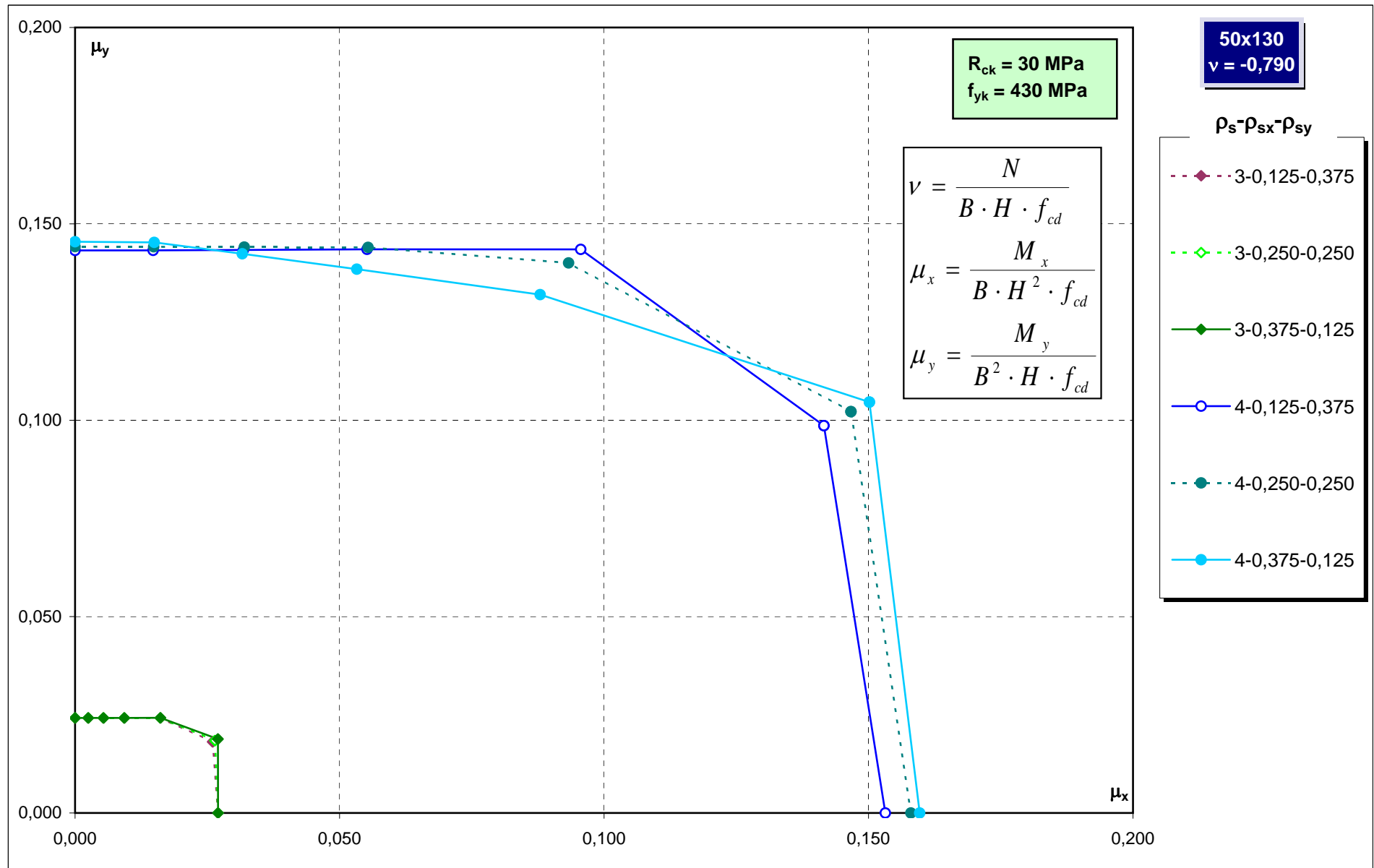


Abachi di progetto

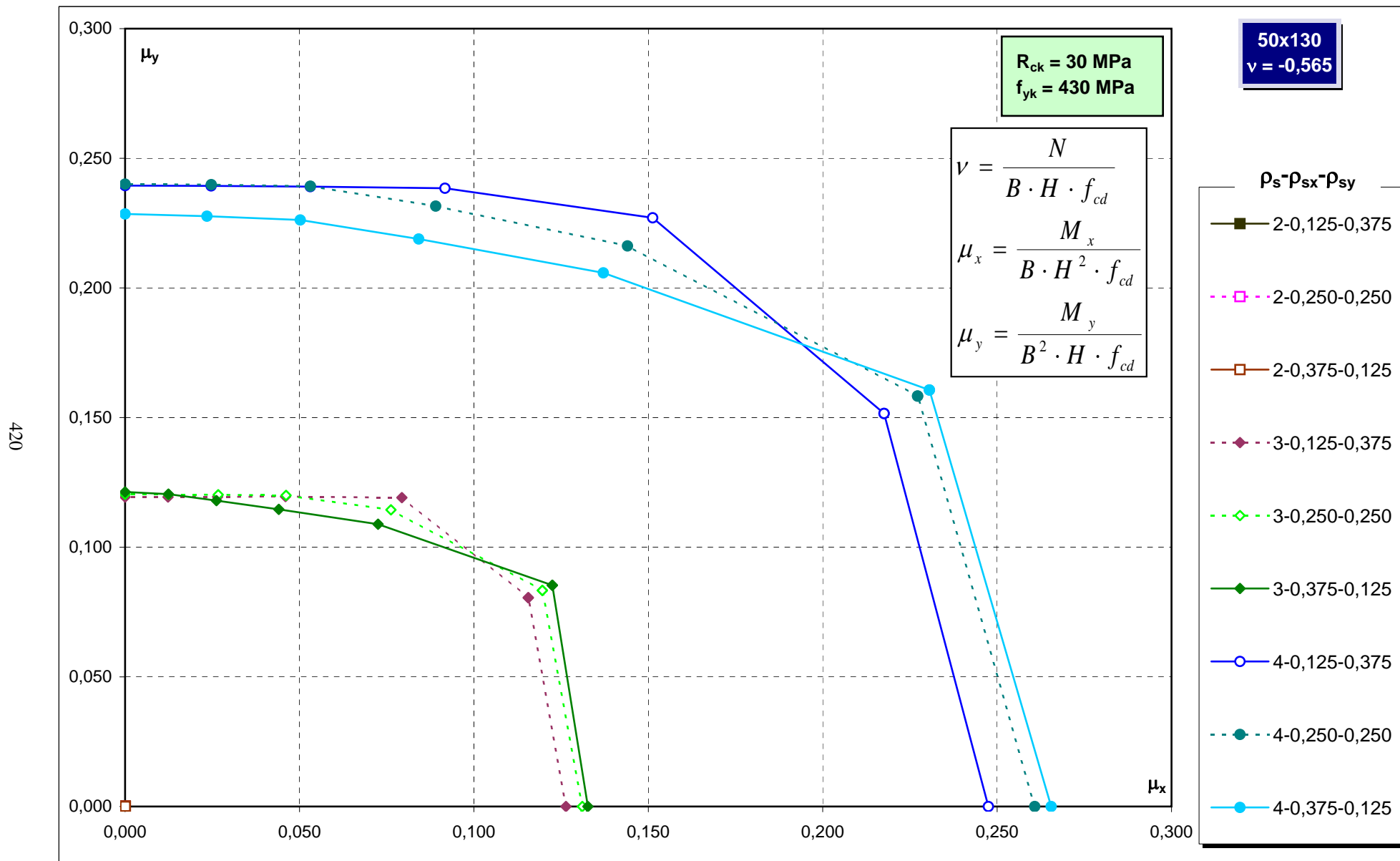


Abachi di progetto

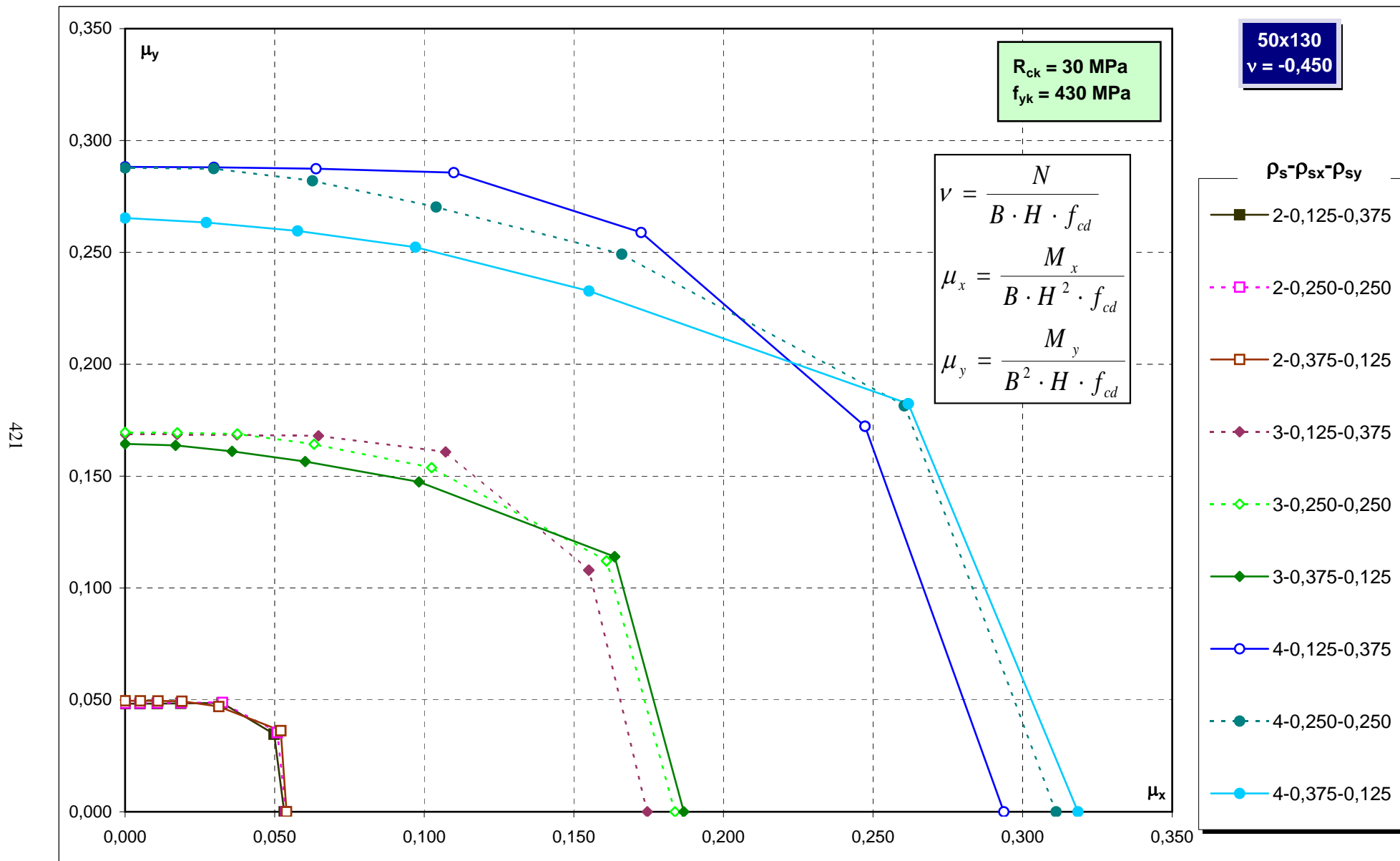
419



Abachi di progetto

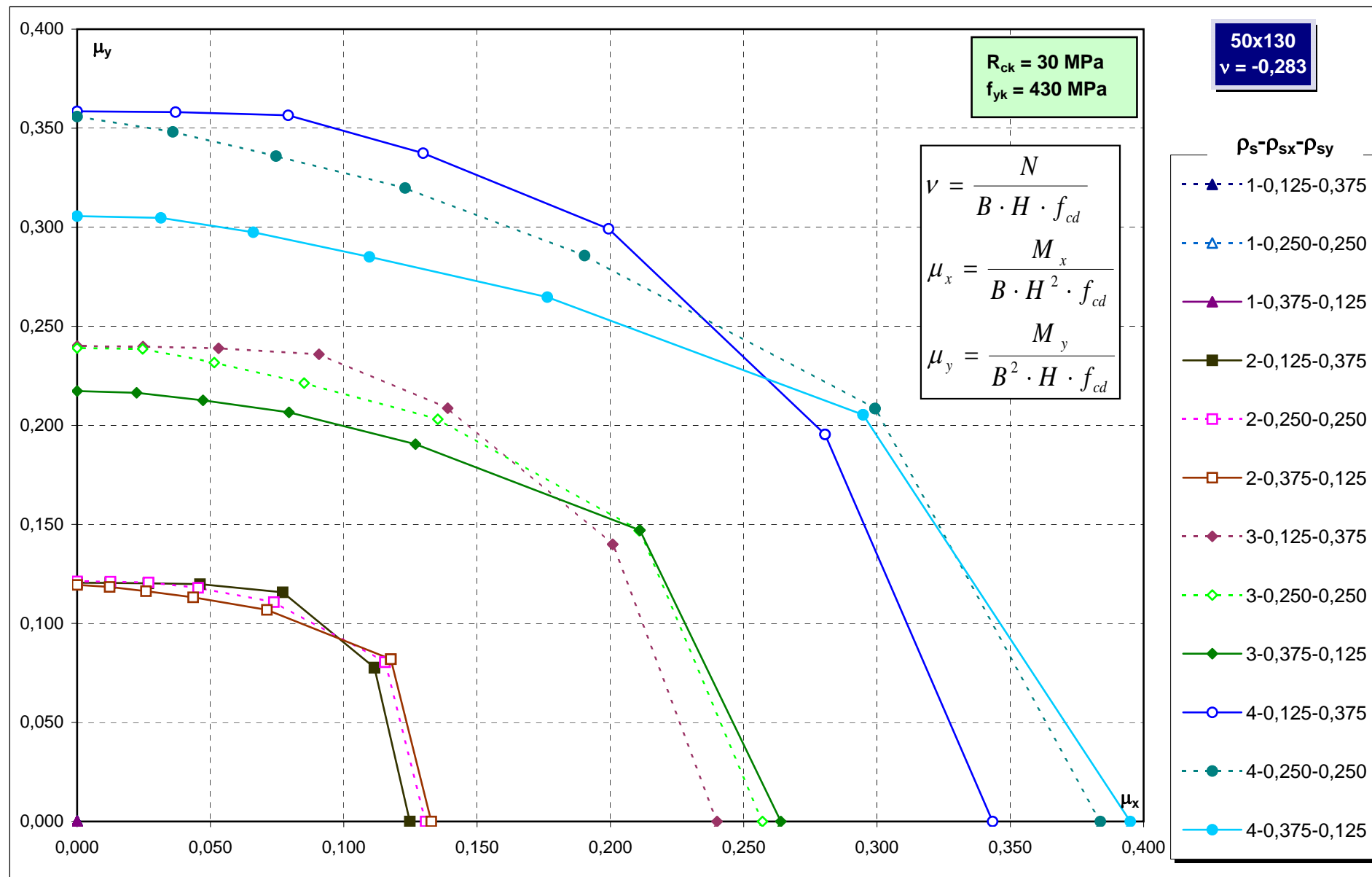


Abachi di progetto



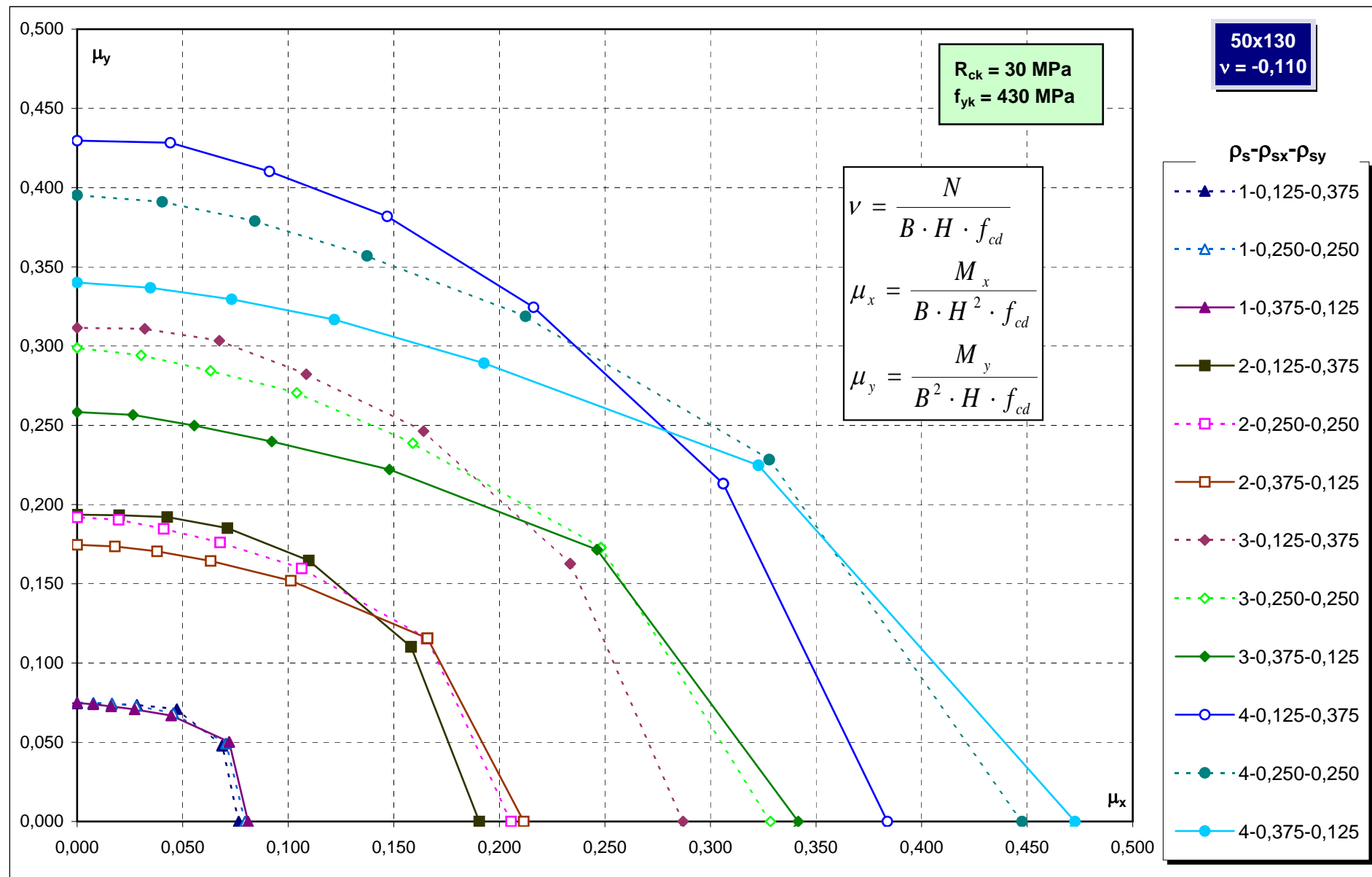
Abachi di progetto

422



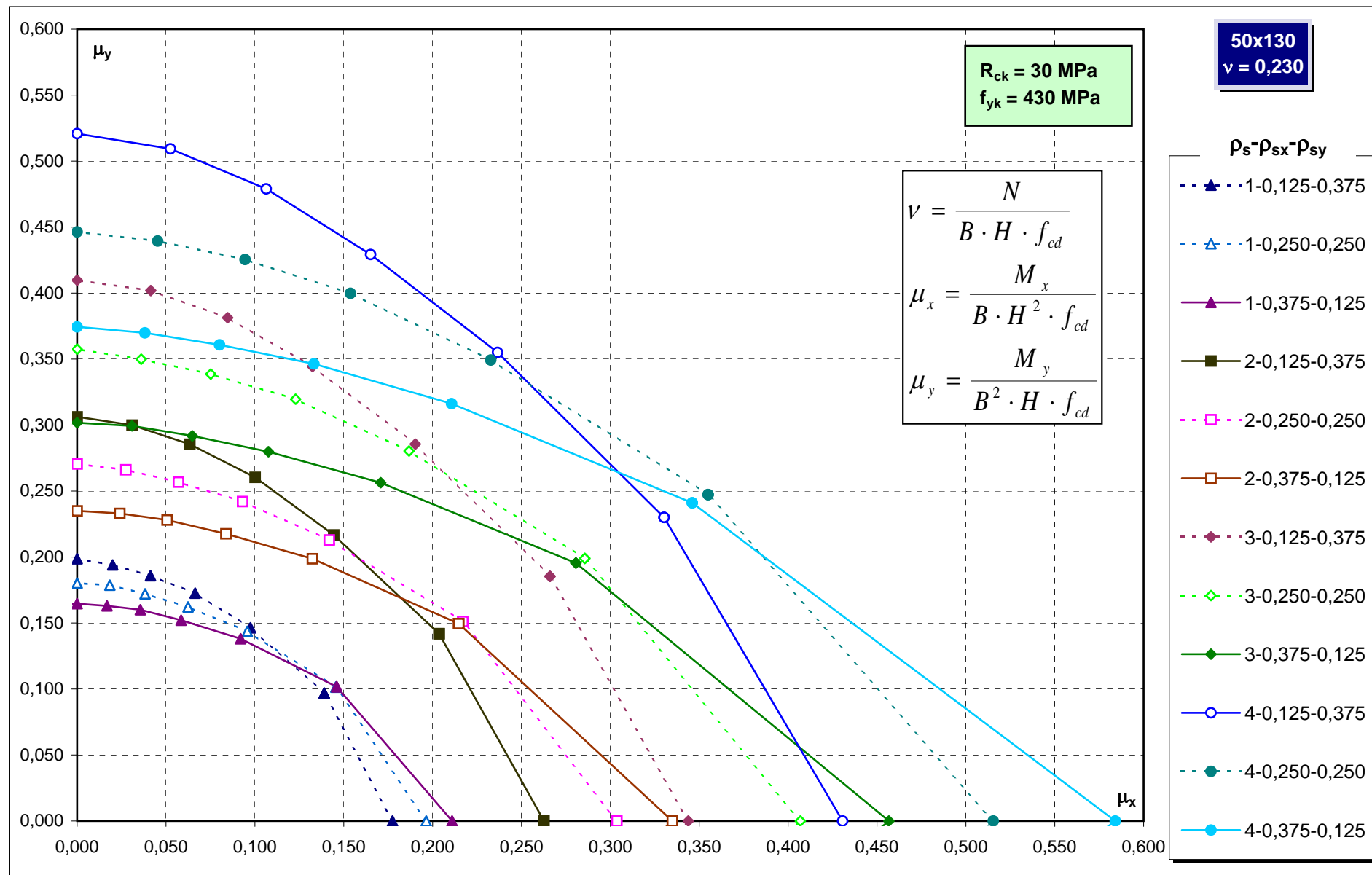
Abachi di progetto

423

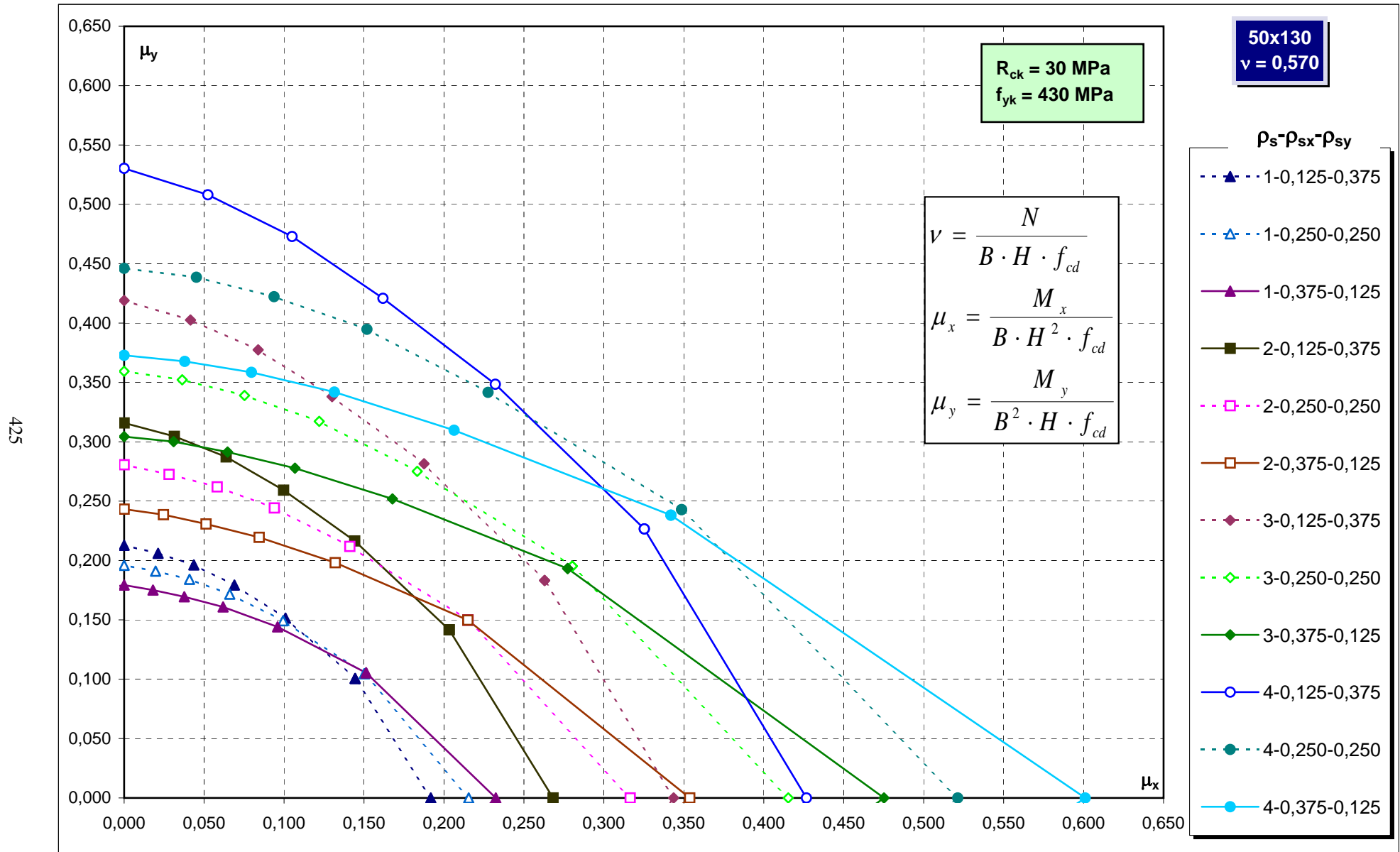


Abachi di progetto

424

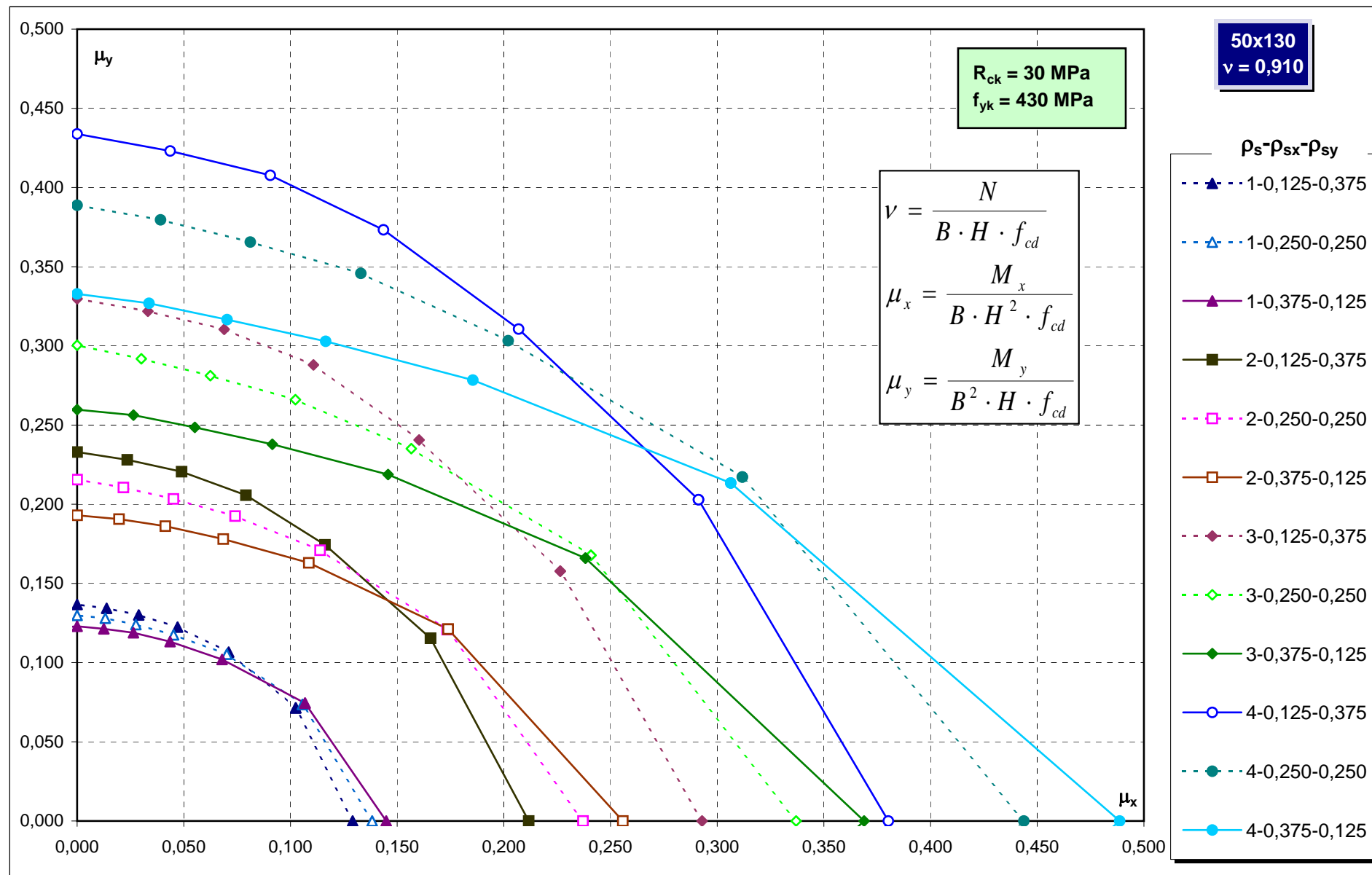


Abachi di progetto



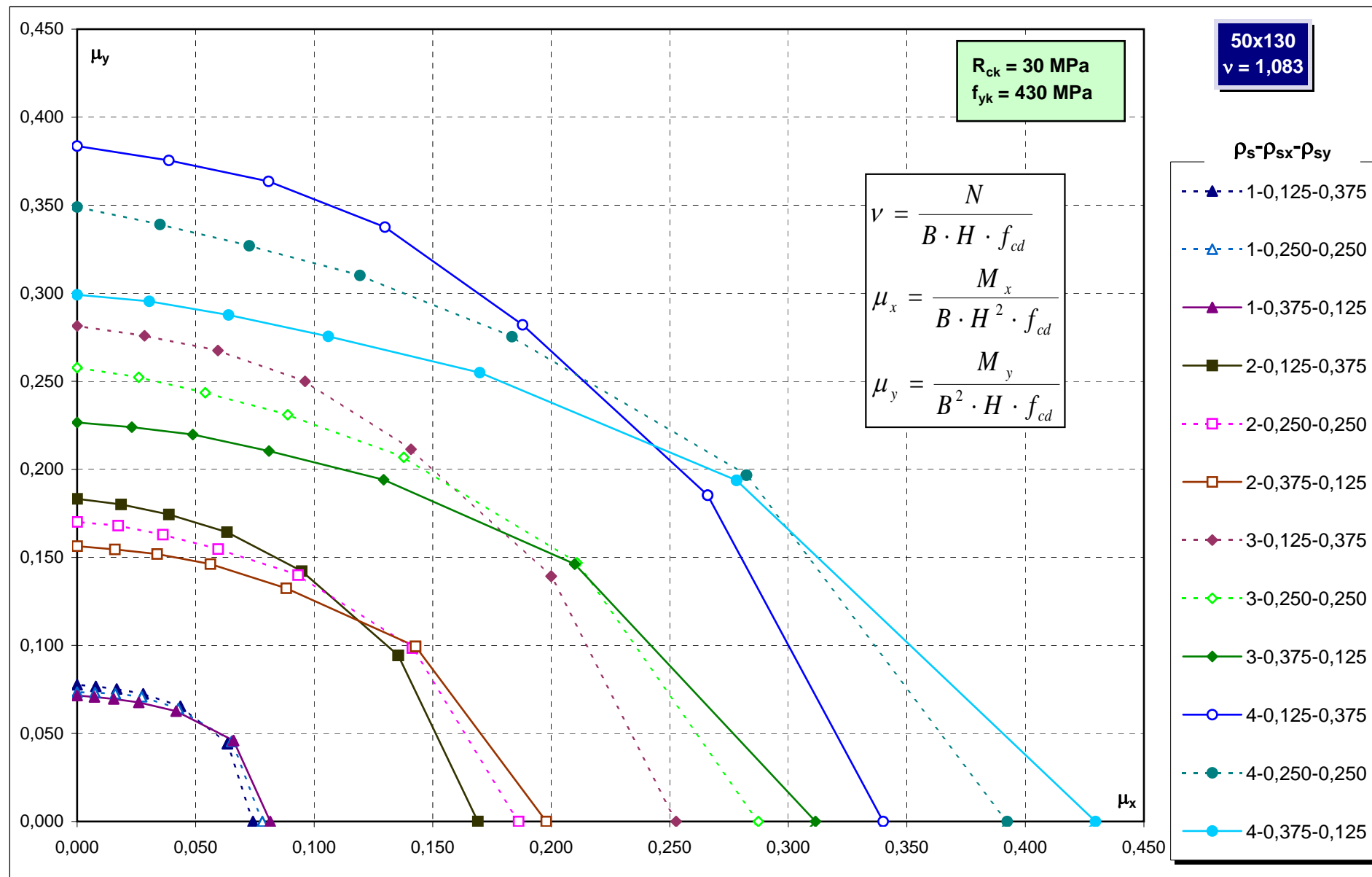
Abachi di progetto

426



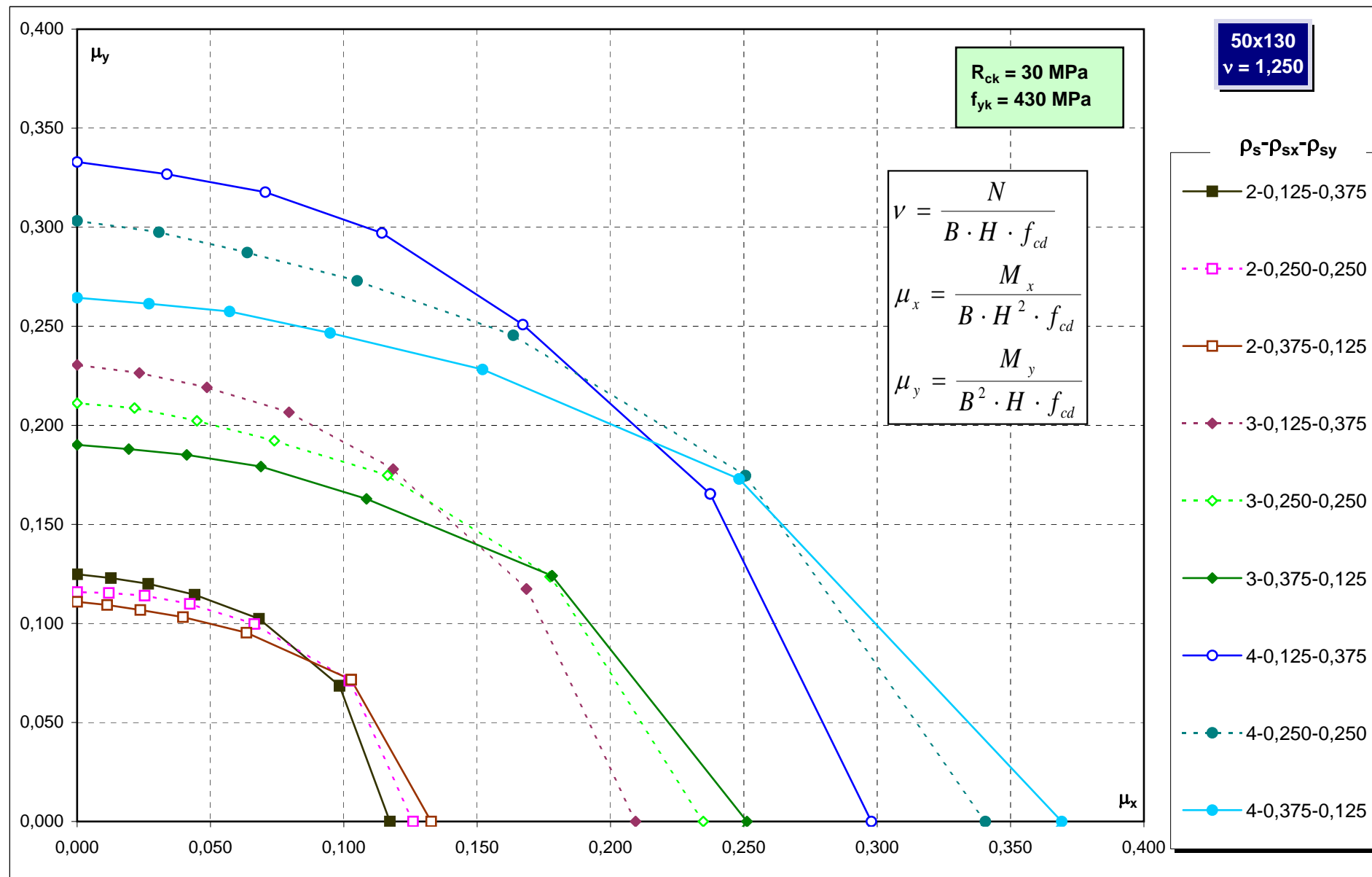
Abachi di progetto

427

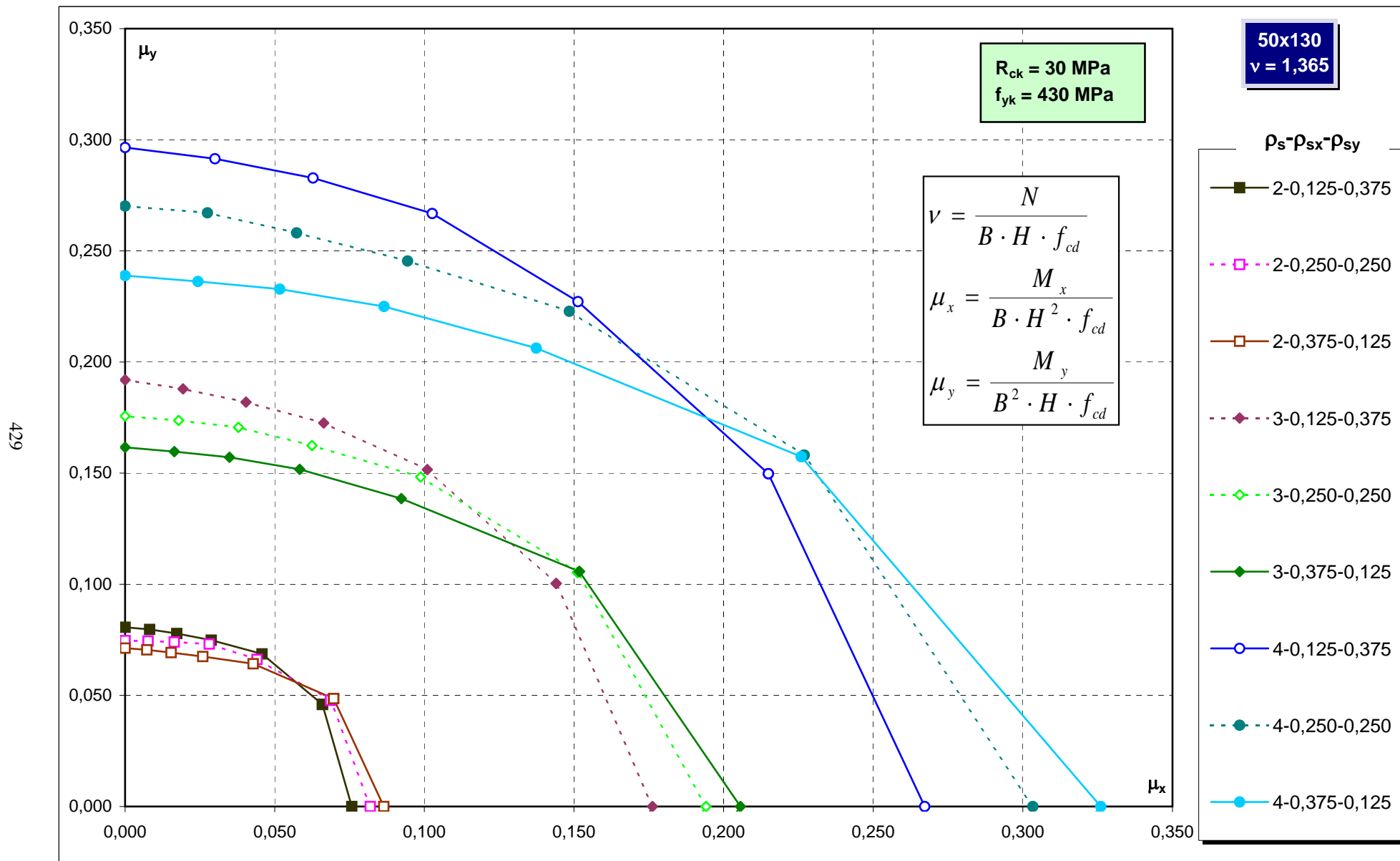


Abachi di progetto

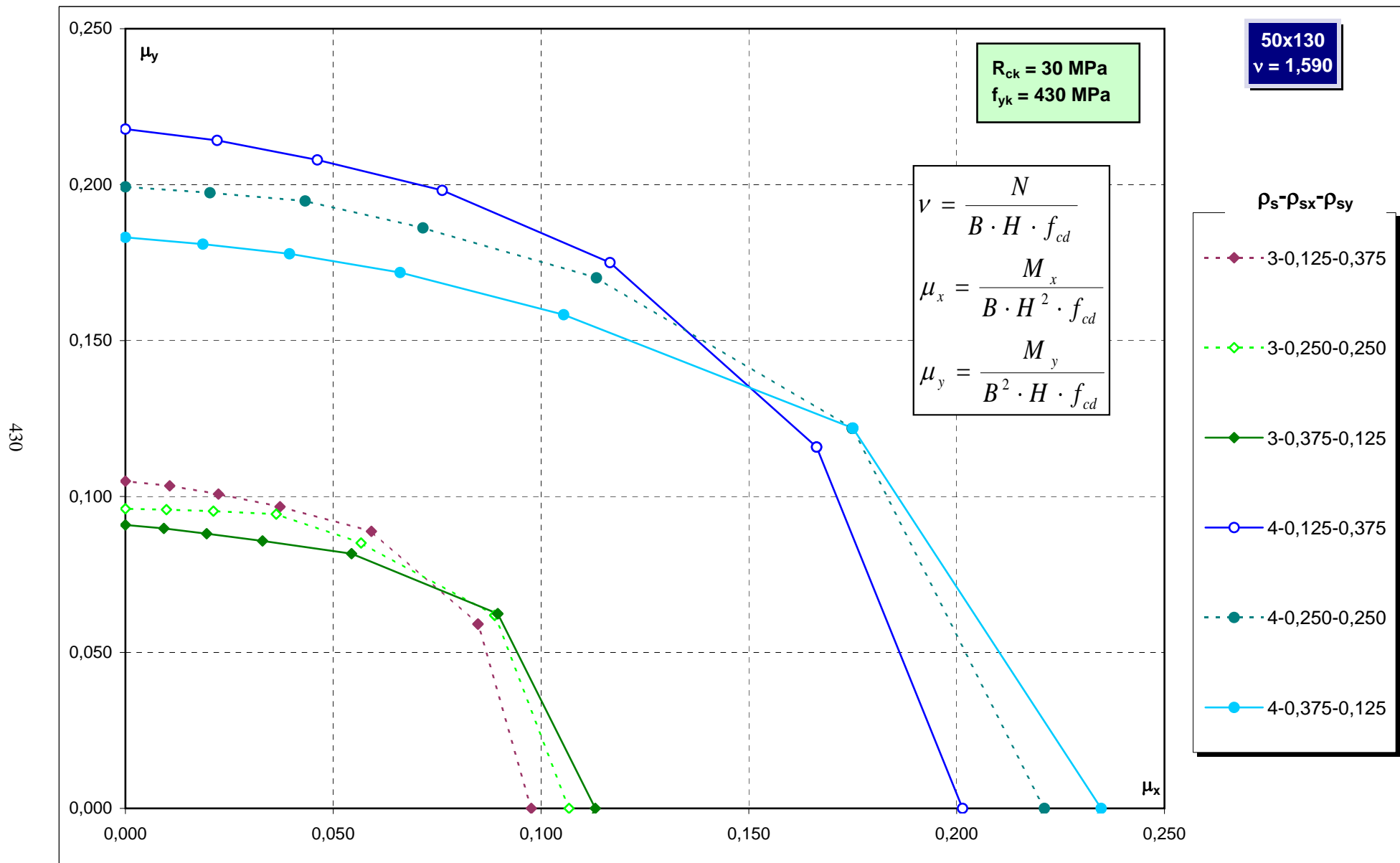
428



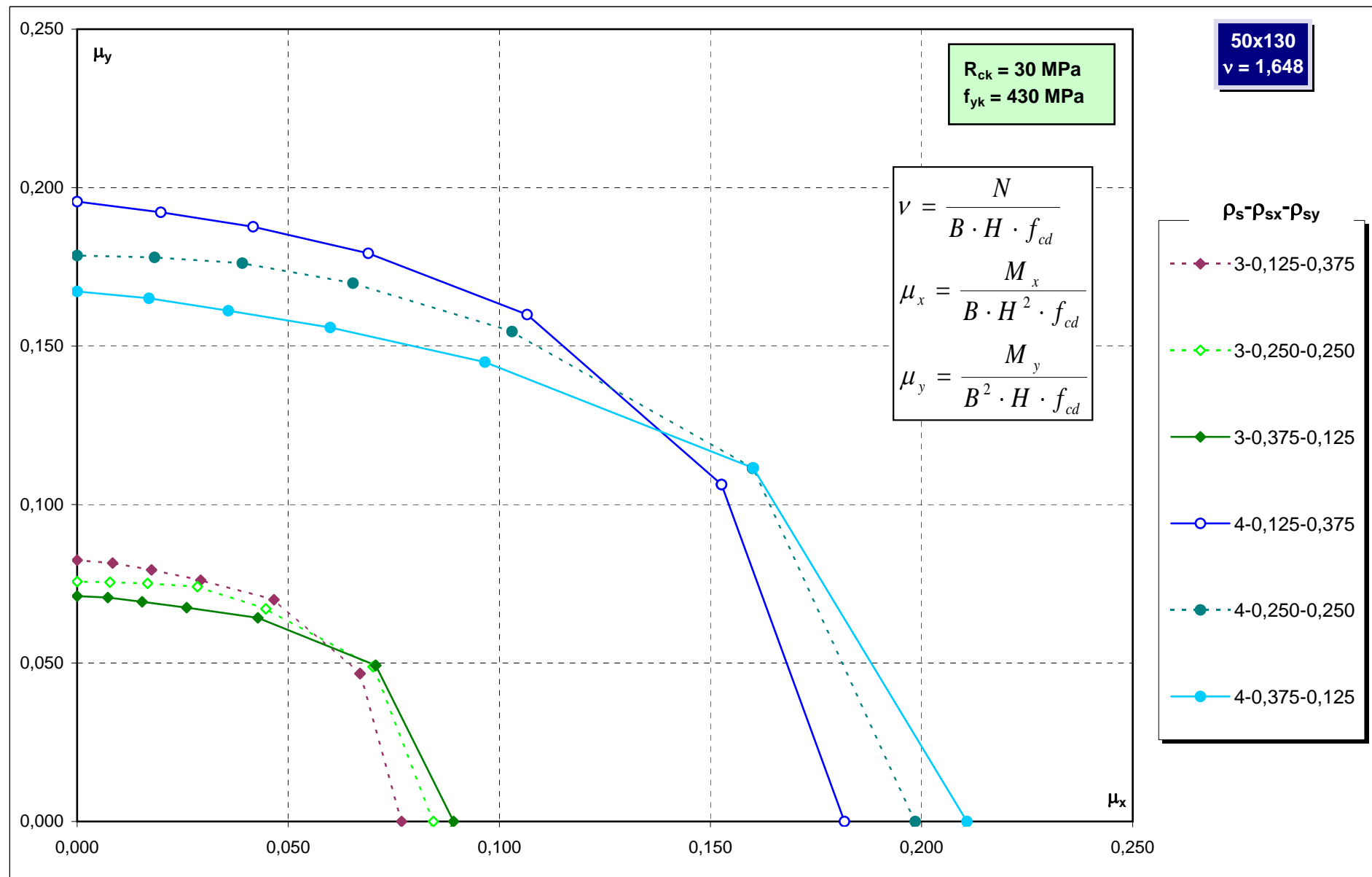
Abachi di progetto



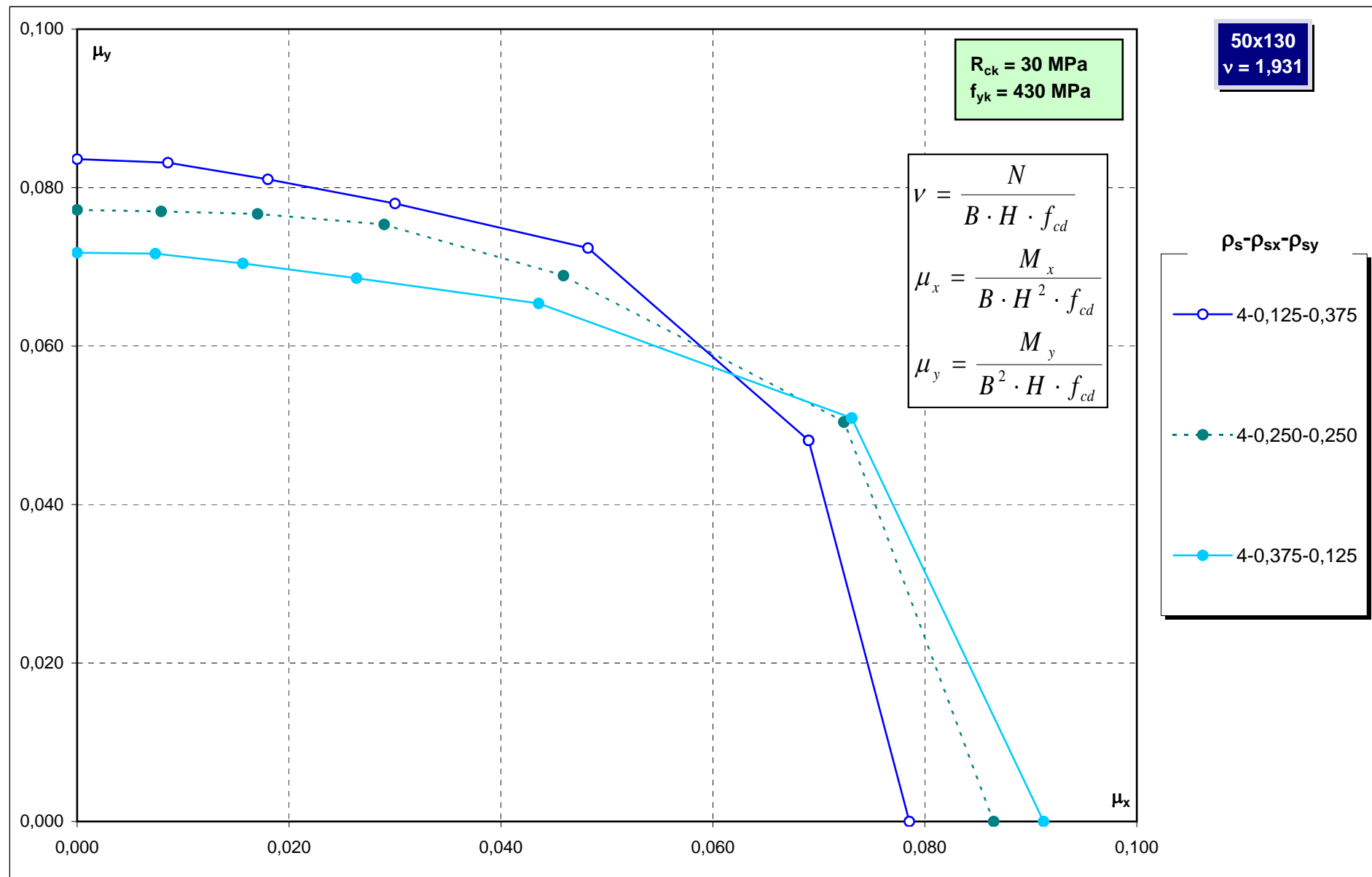
Abachi di progetto



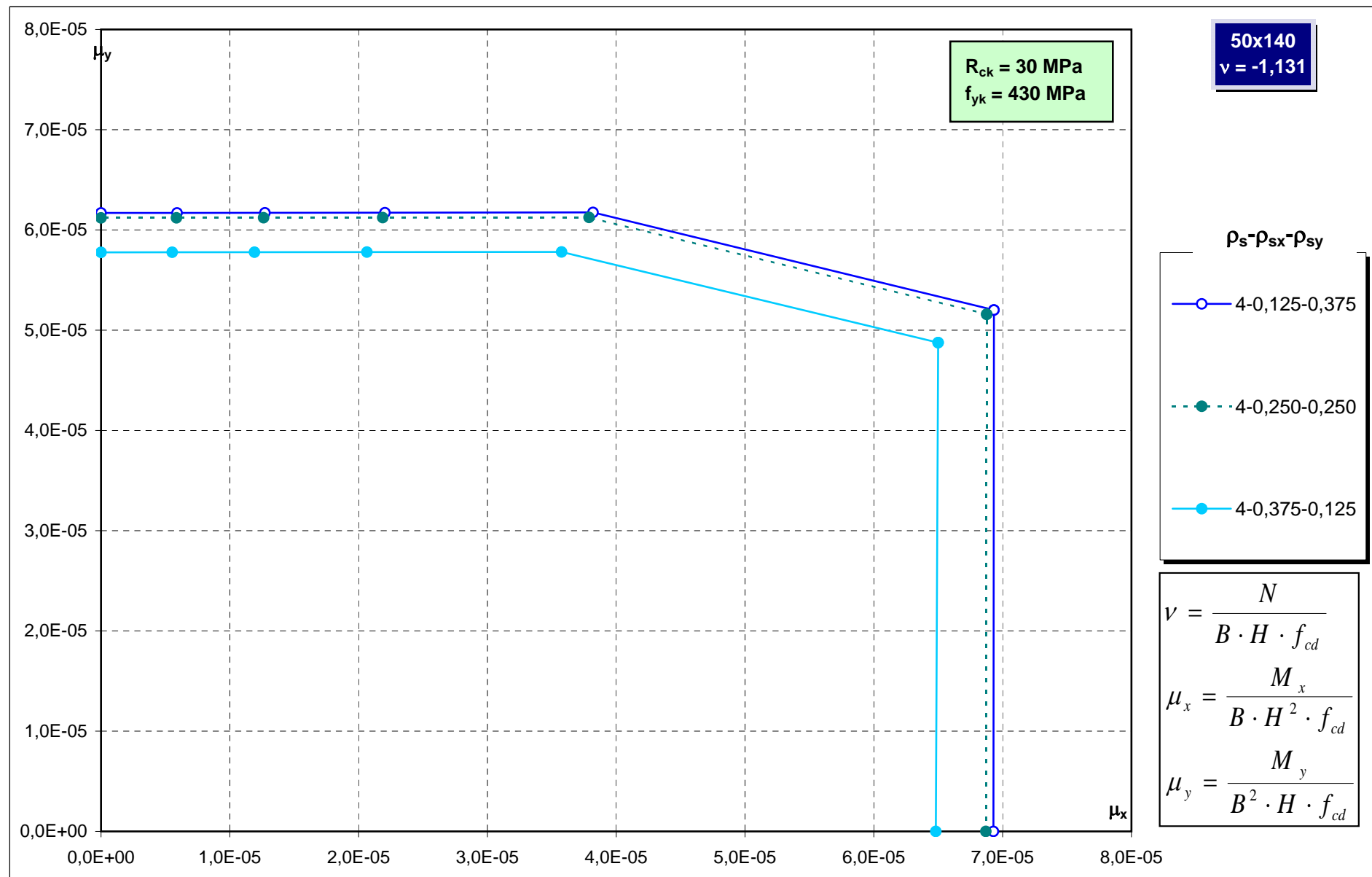
Abachi di progetto



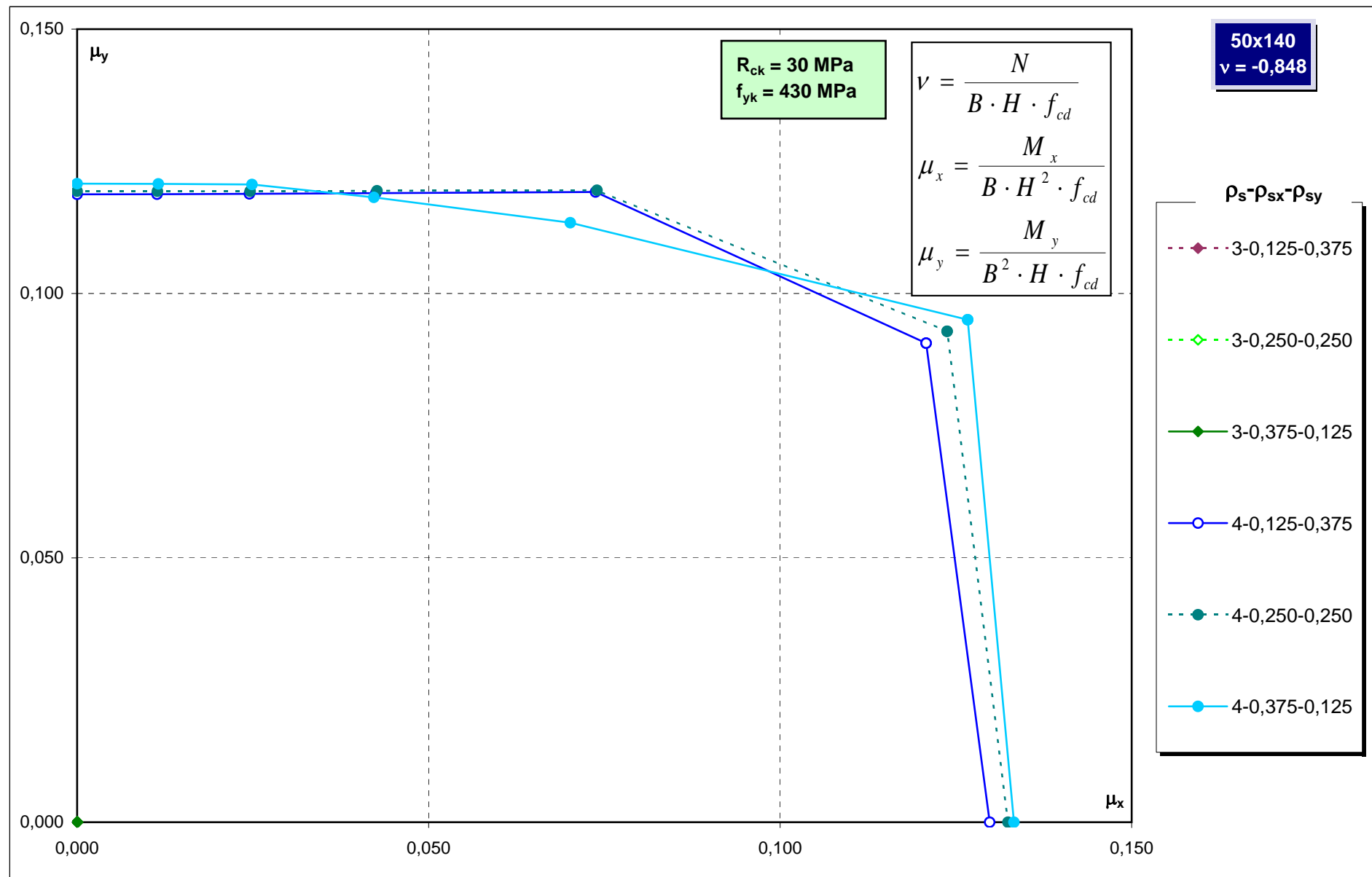
Abachi di progetto



Abachi di progetto

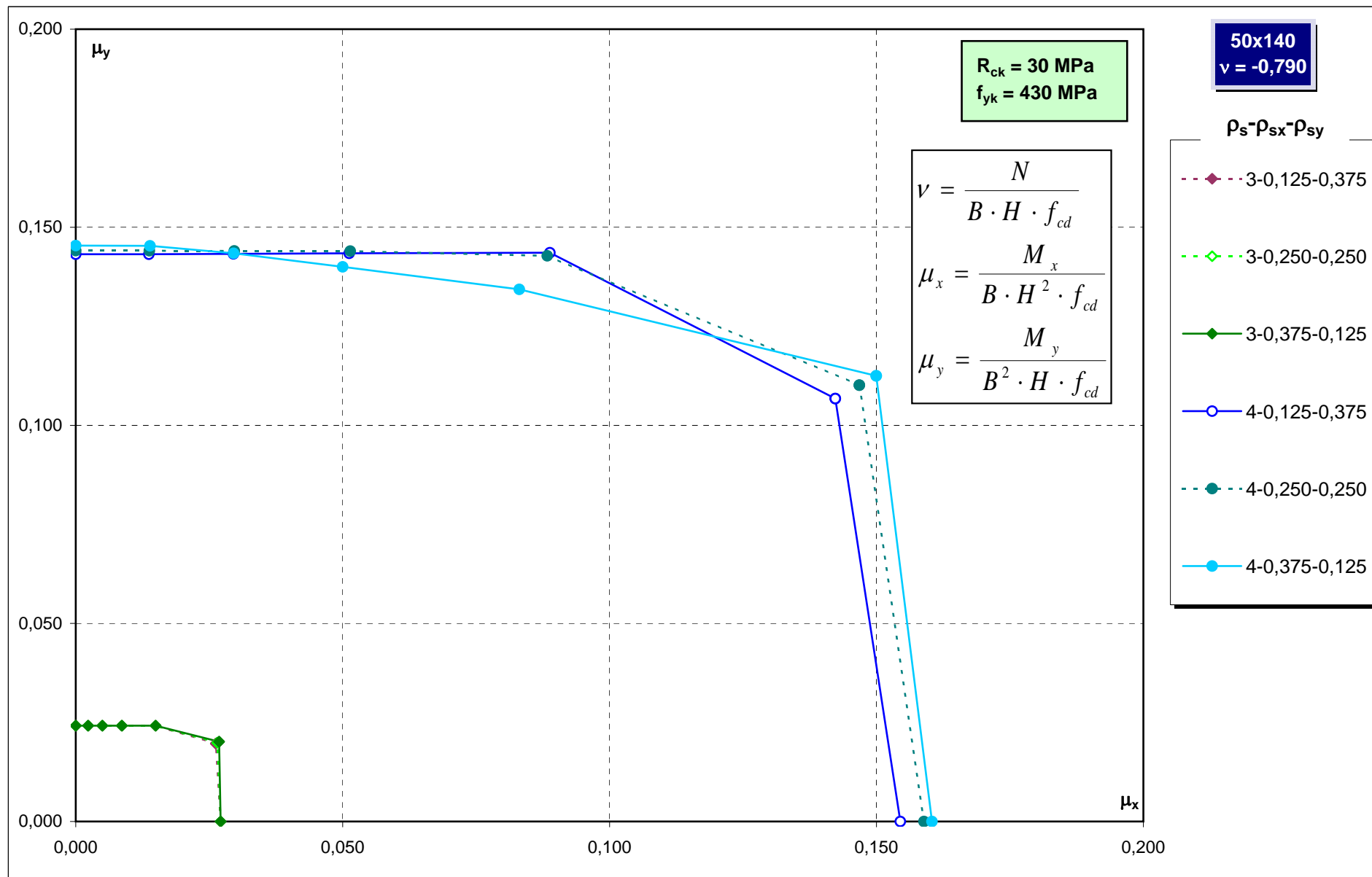


Abachi di progetto



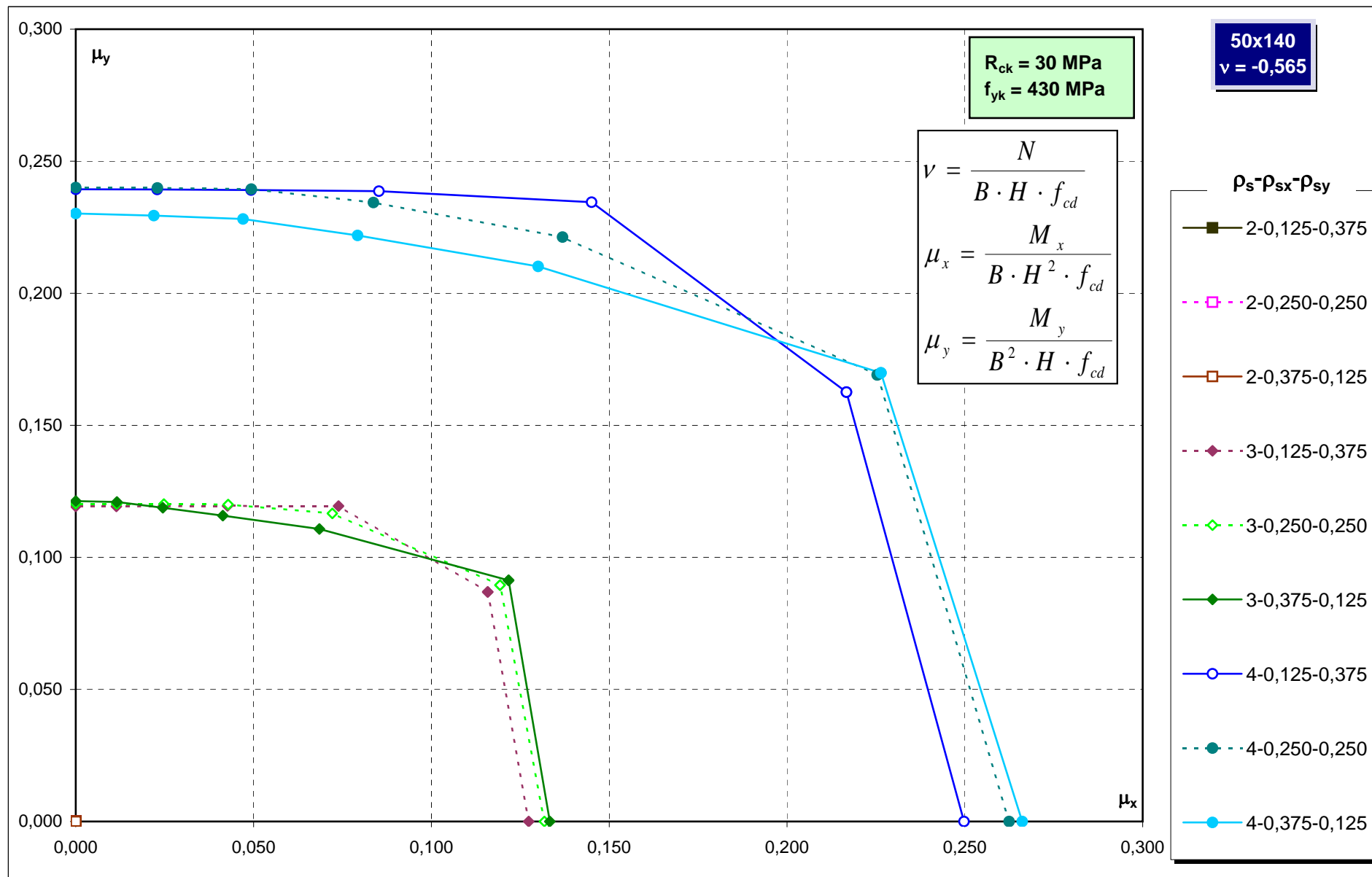
Abachi di progetto

435

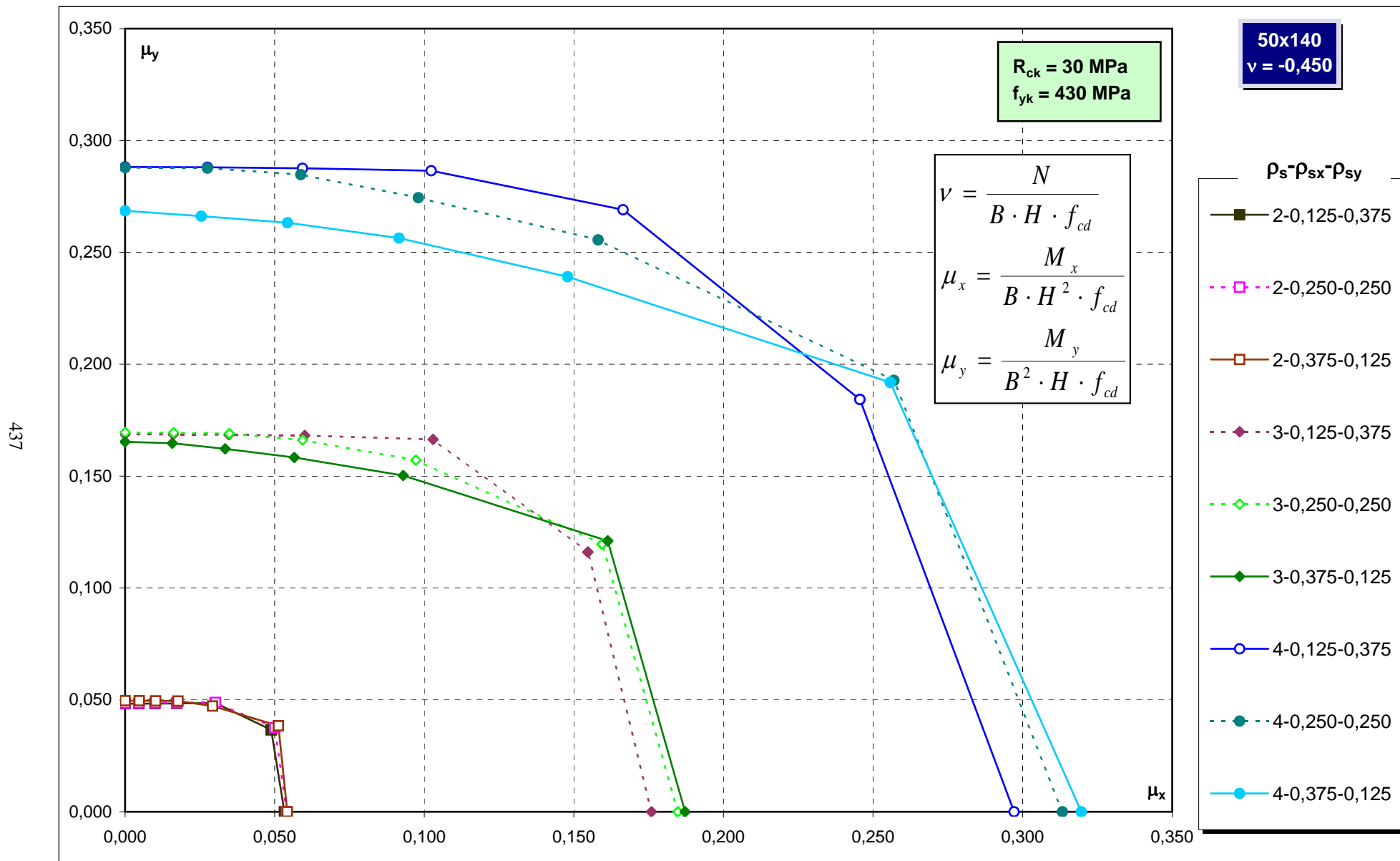


Abachi di progetto

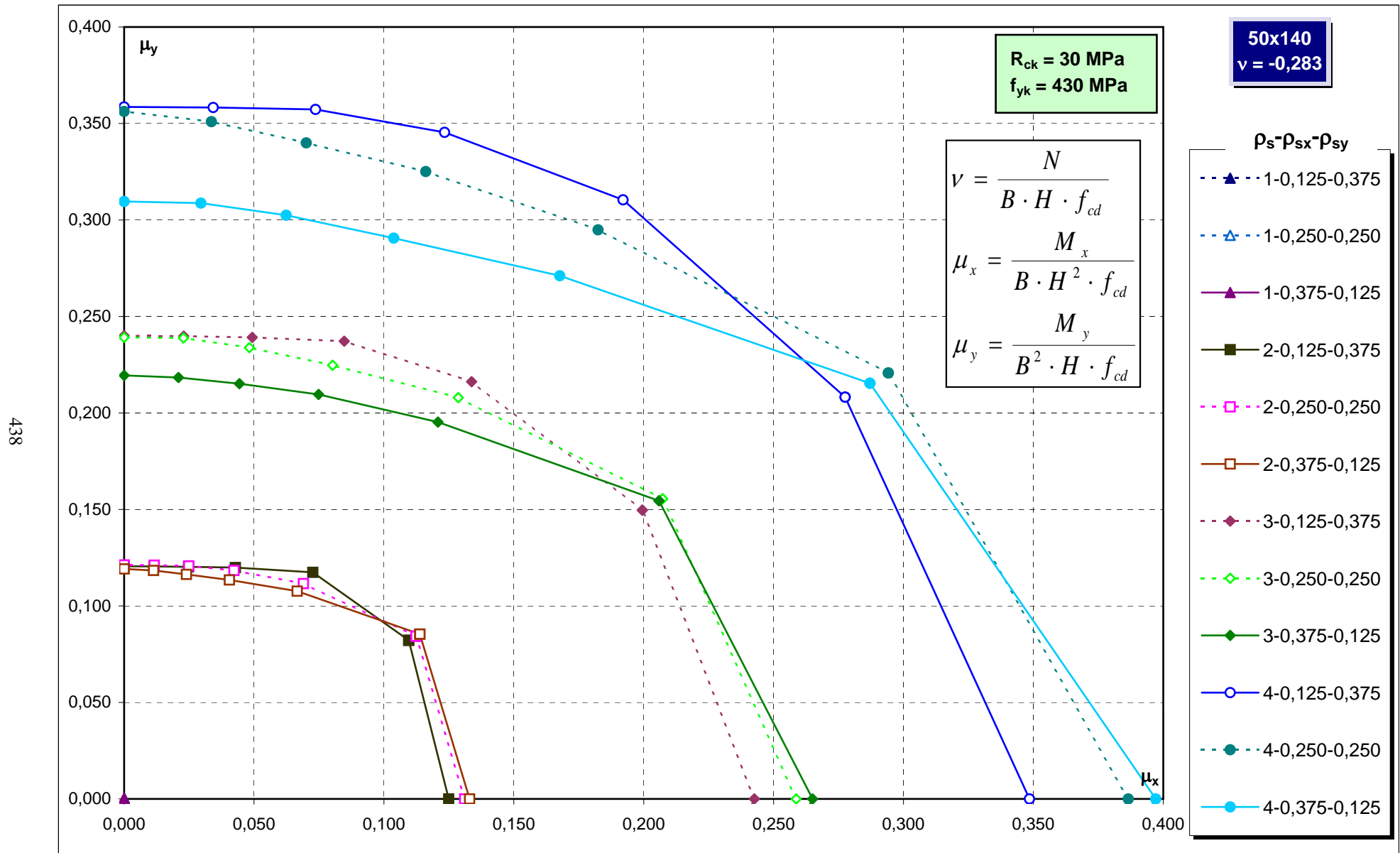
436



Abachi di progetto

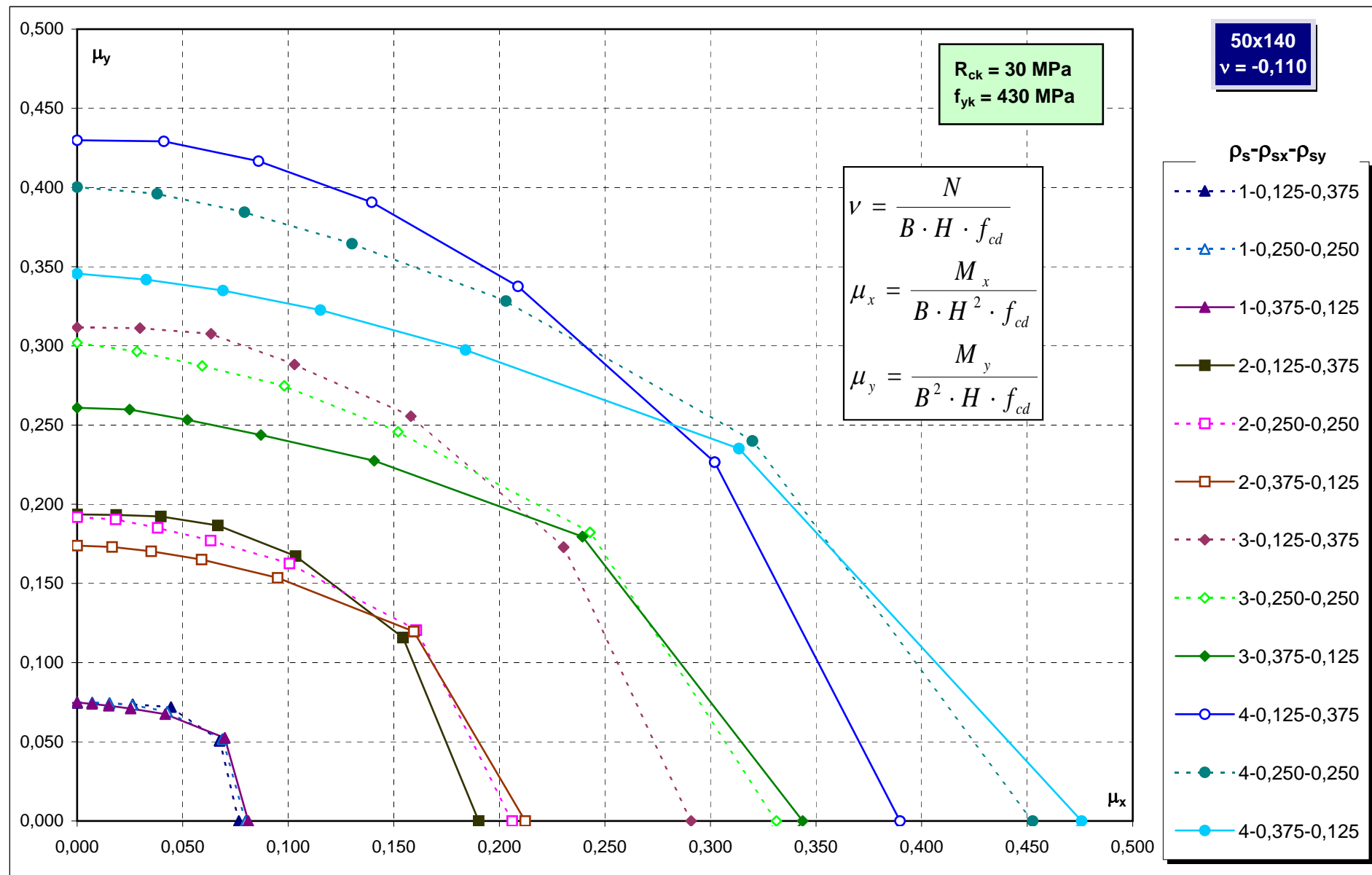


Abachi di progetto

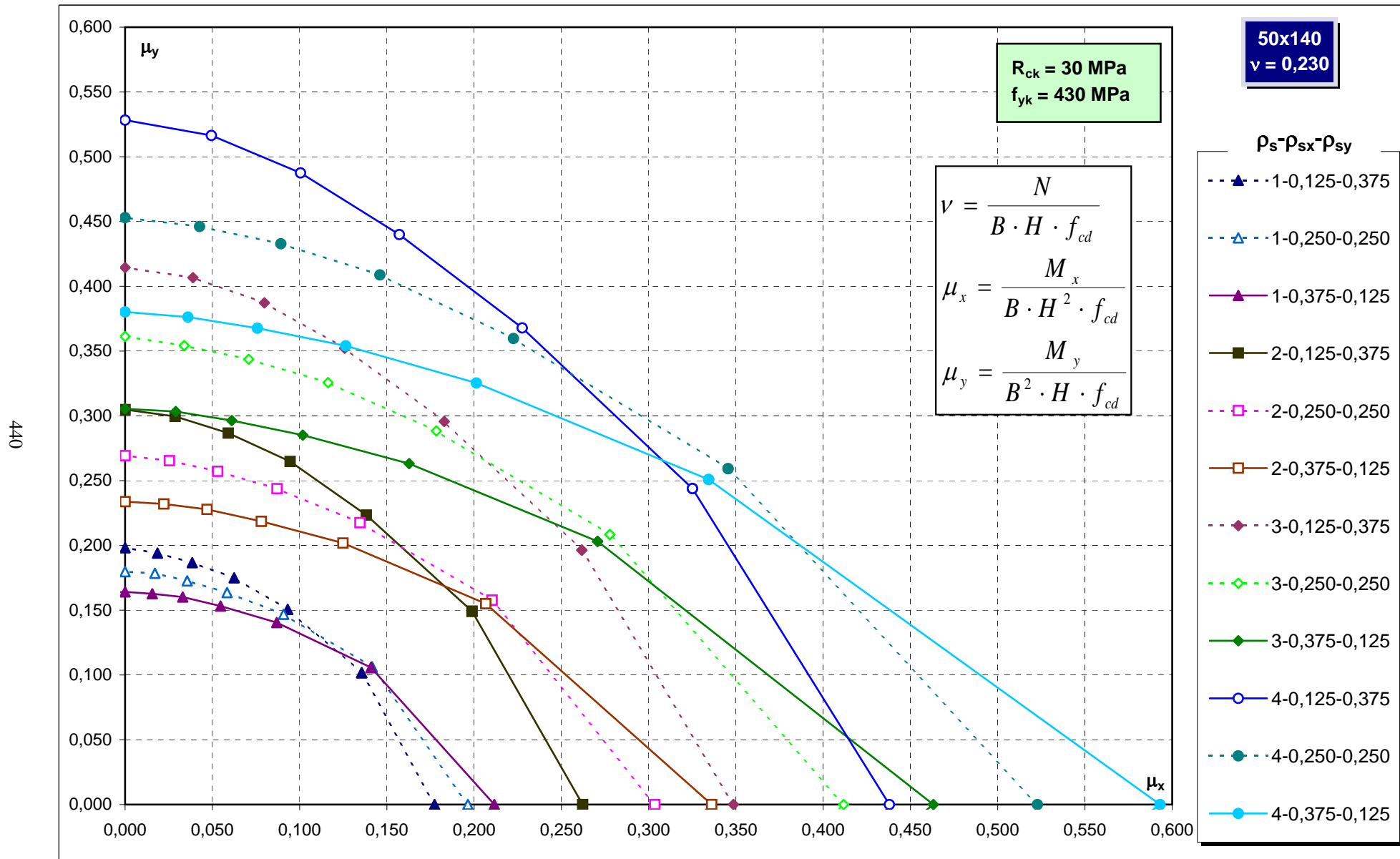


Abachi di progetto

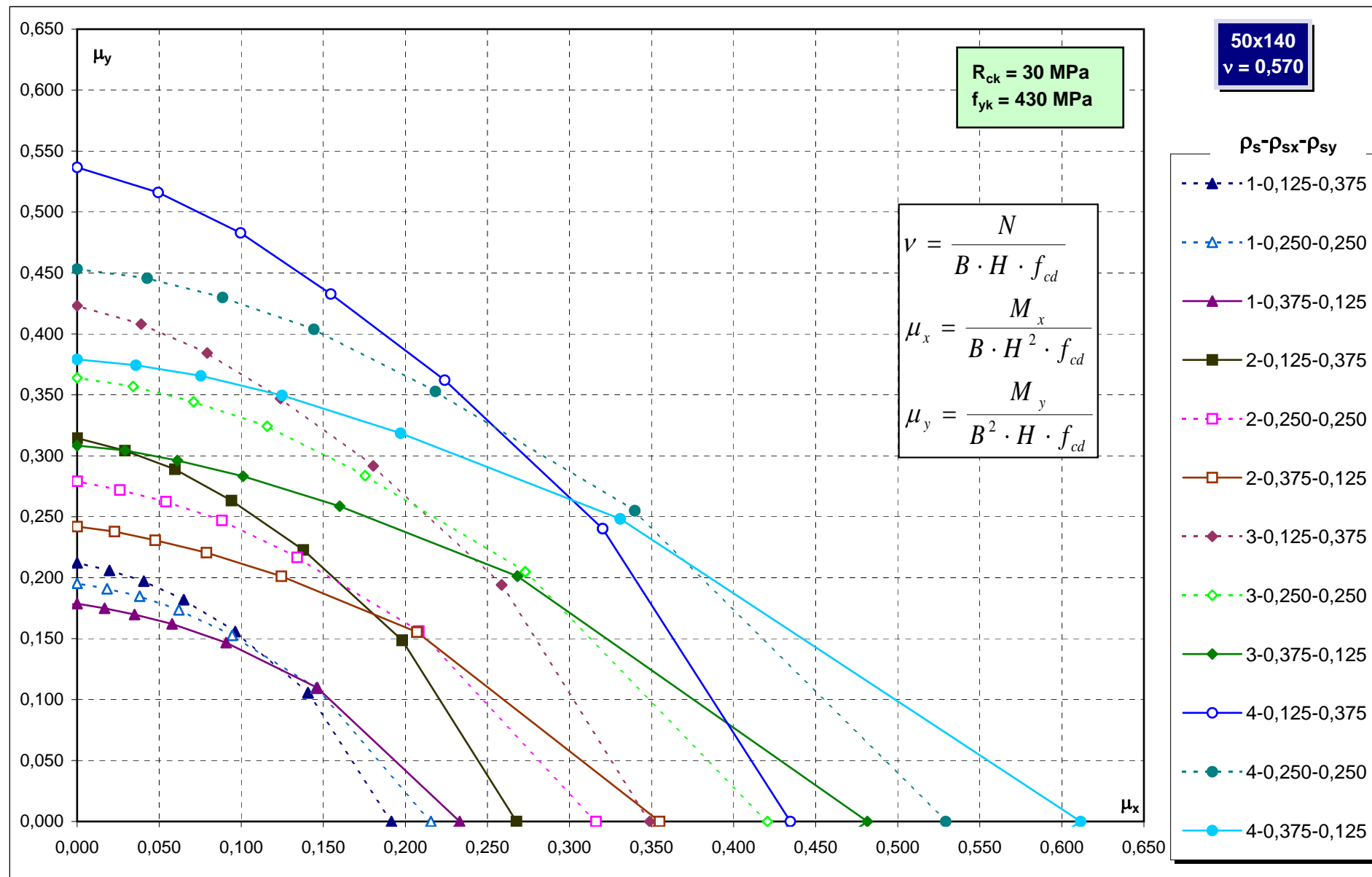
439



Abachi di progetto

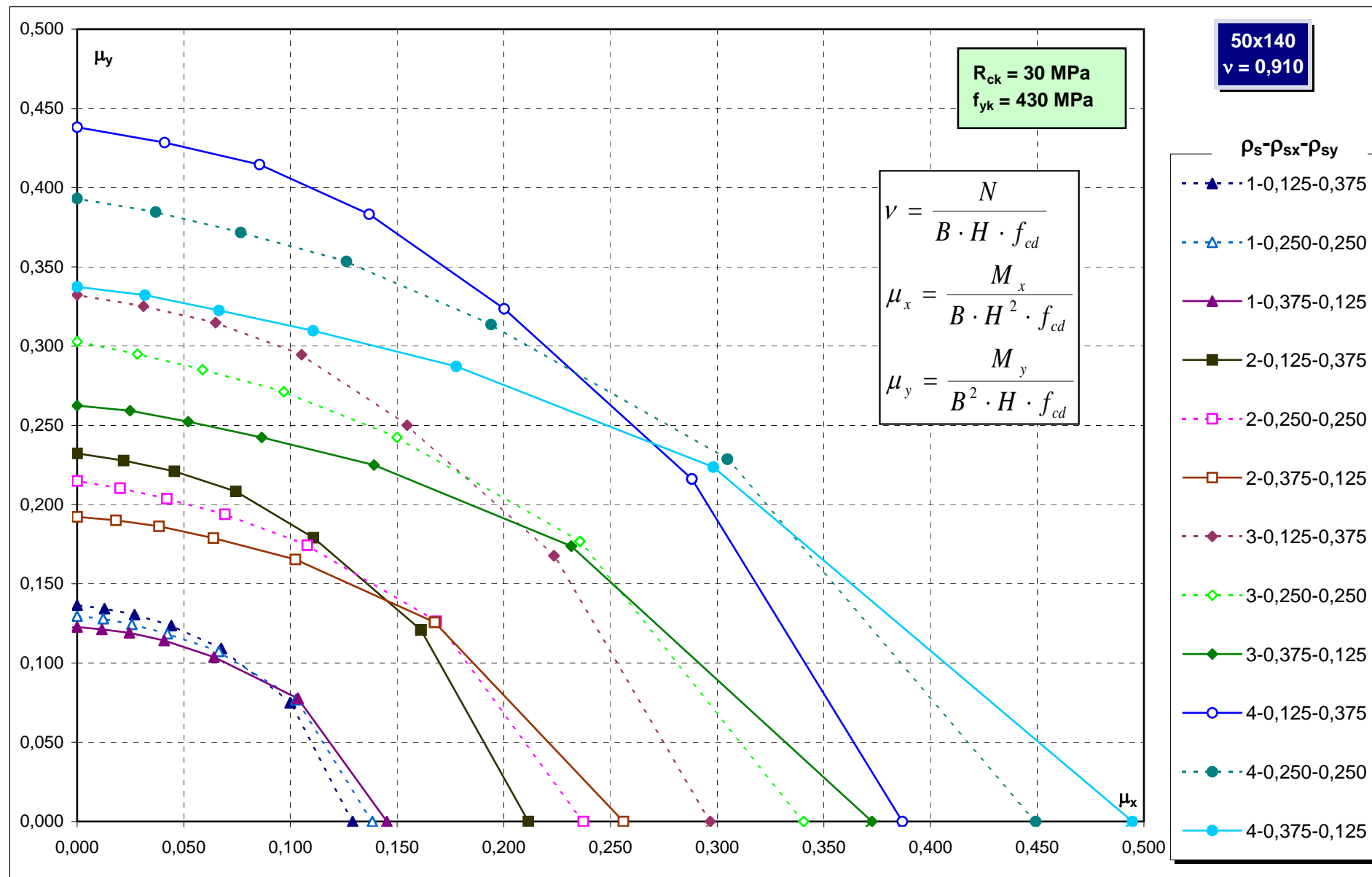


Abachi di progetto



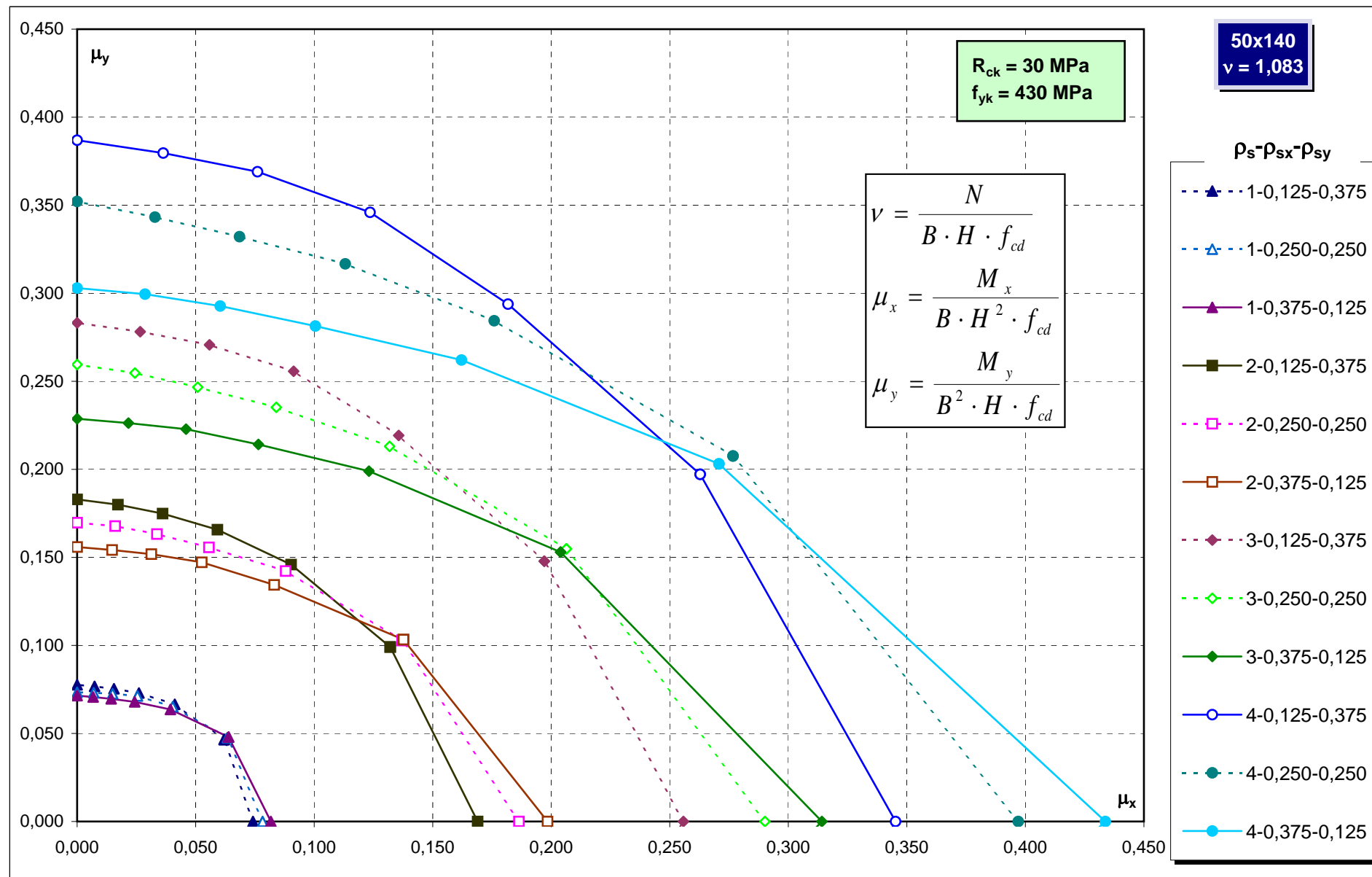
Abachi di progetto

442



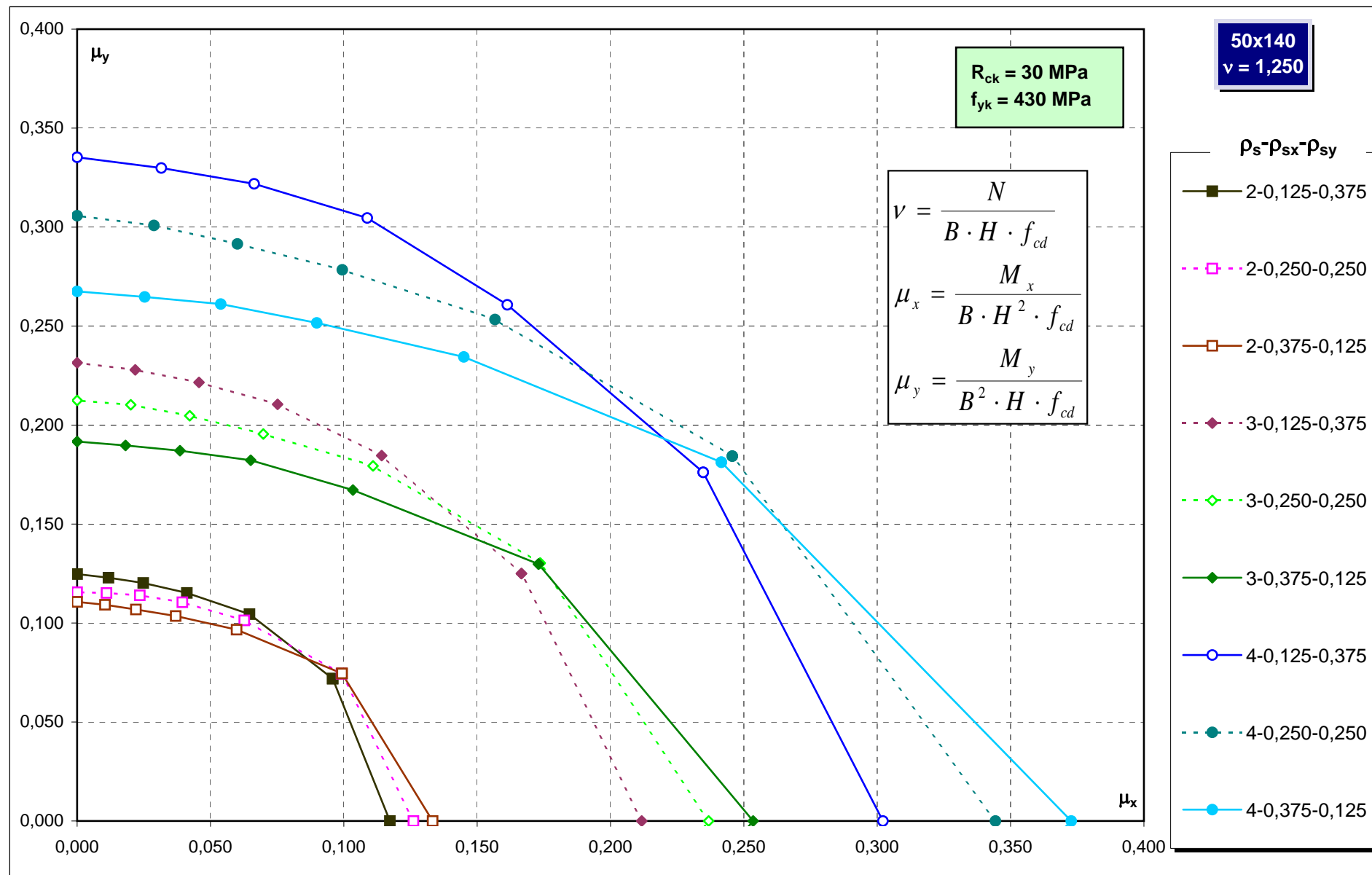
Abachi di progetto

443



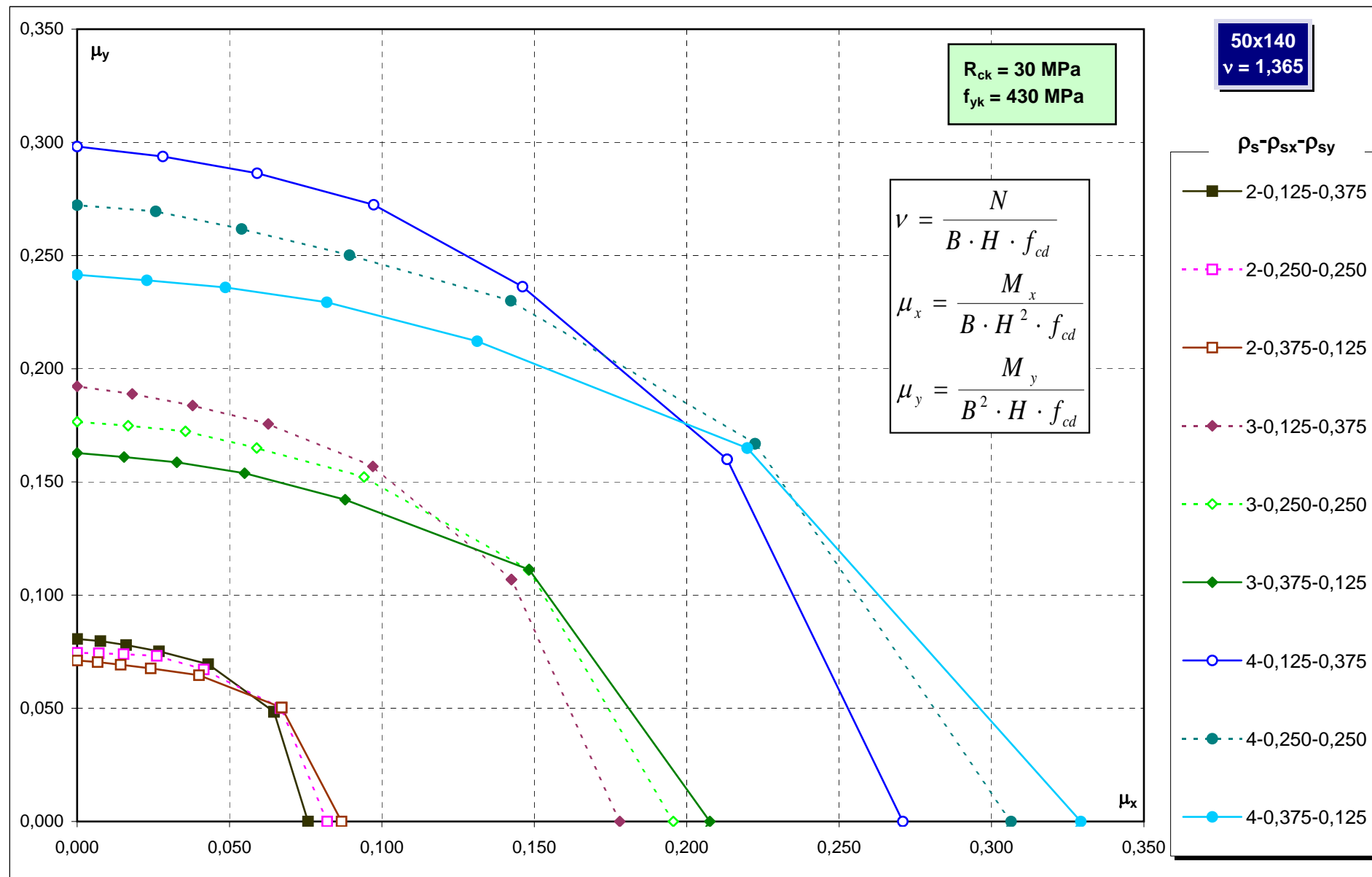
Abachi di progetto

444

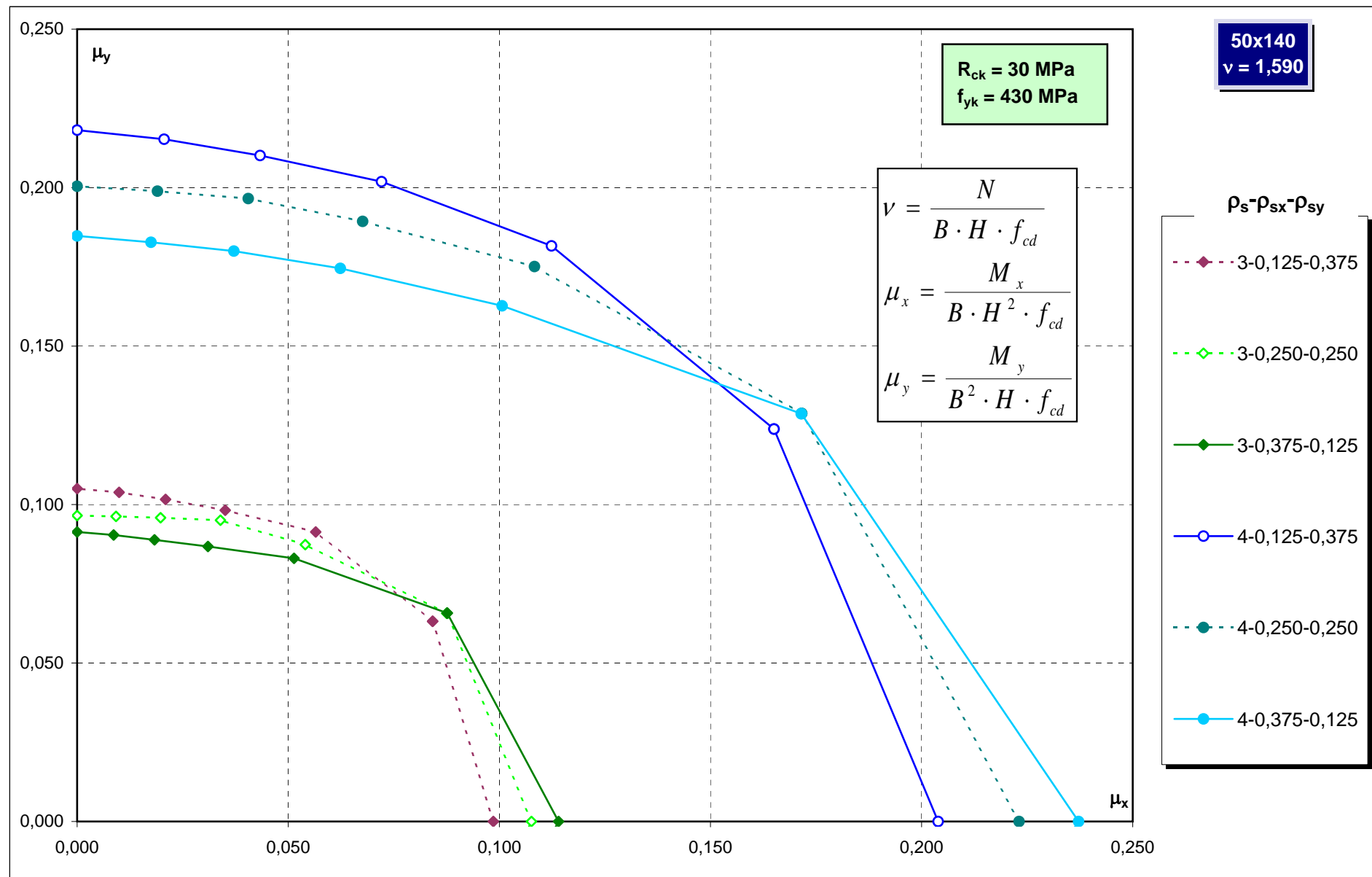


Abachi di progetto

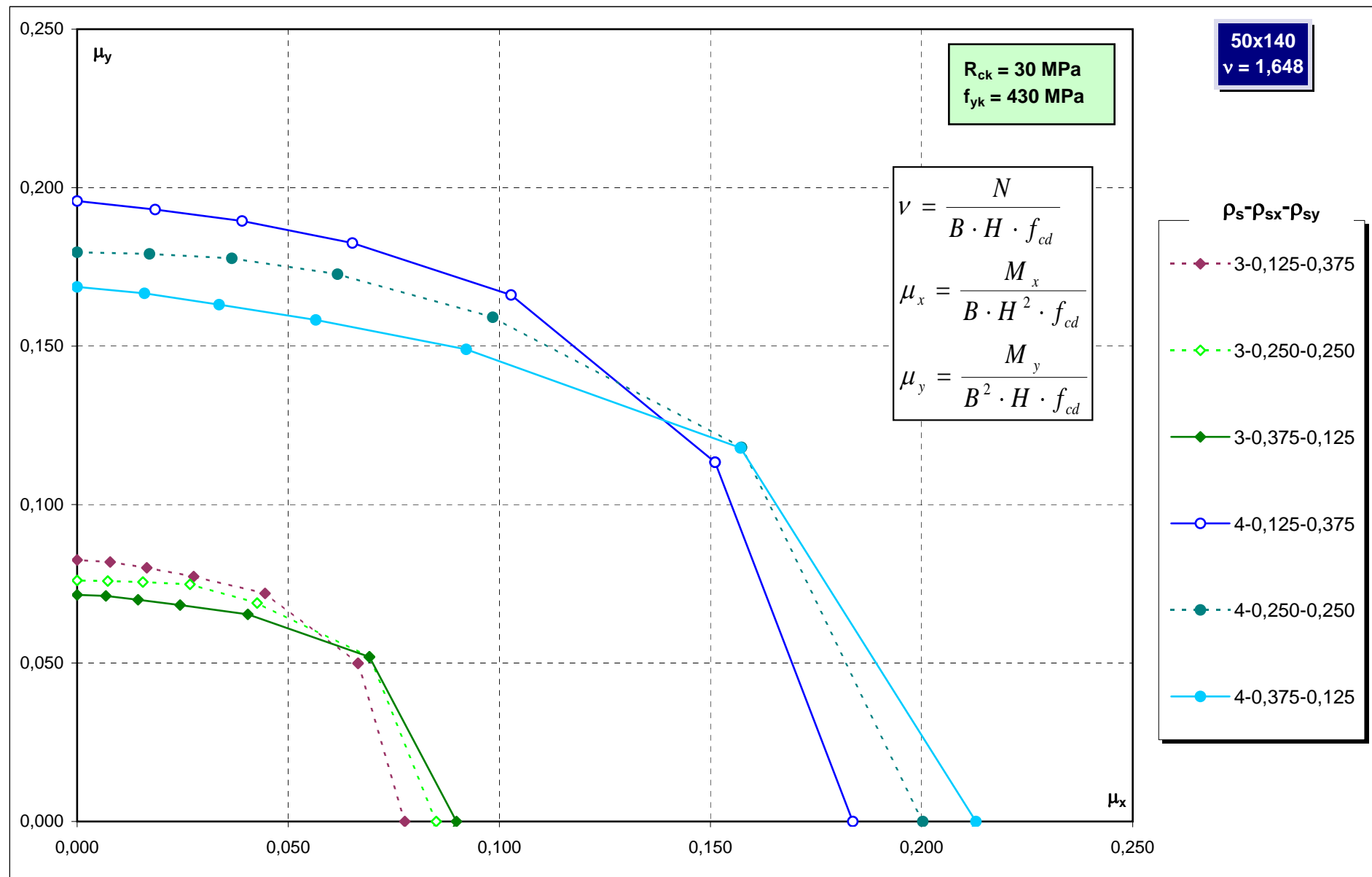
445



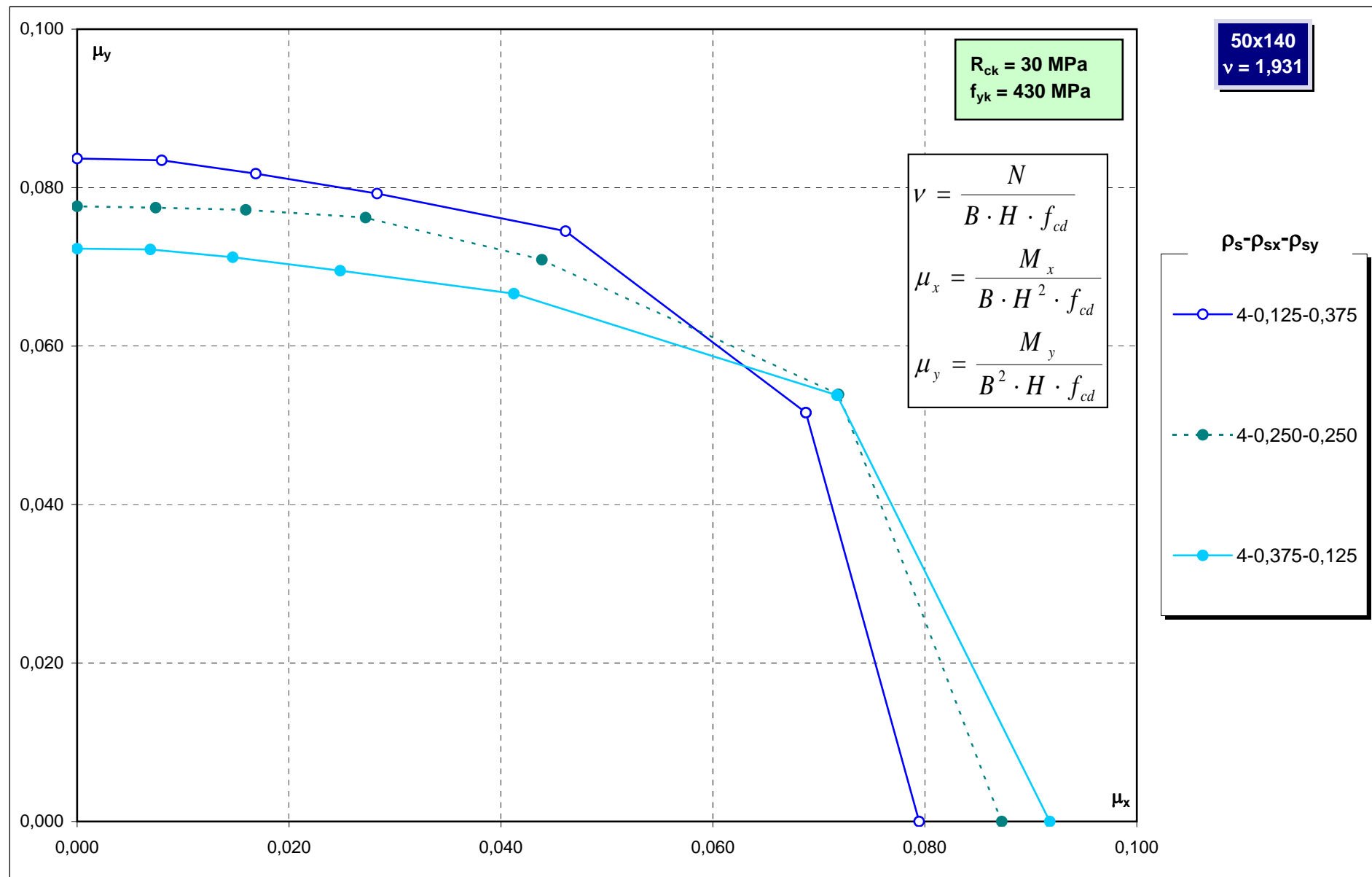
Abachi di progetto



Abachi di progetto



Abachi di progetto



Abachi di progetto

50x150
v = -1,131

R_{ck} = 30 MPa
f_{yk} = 430 MPa

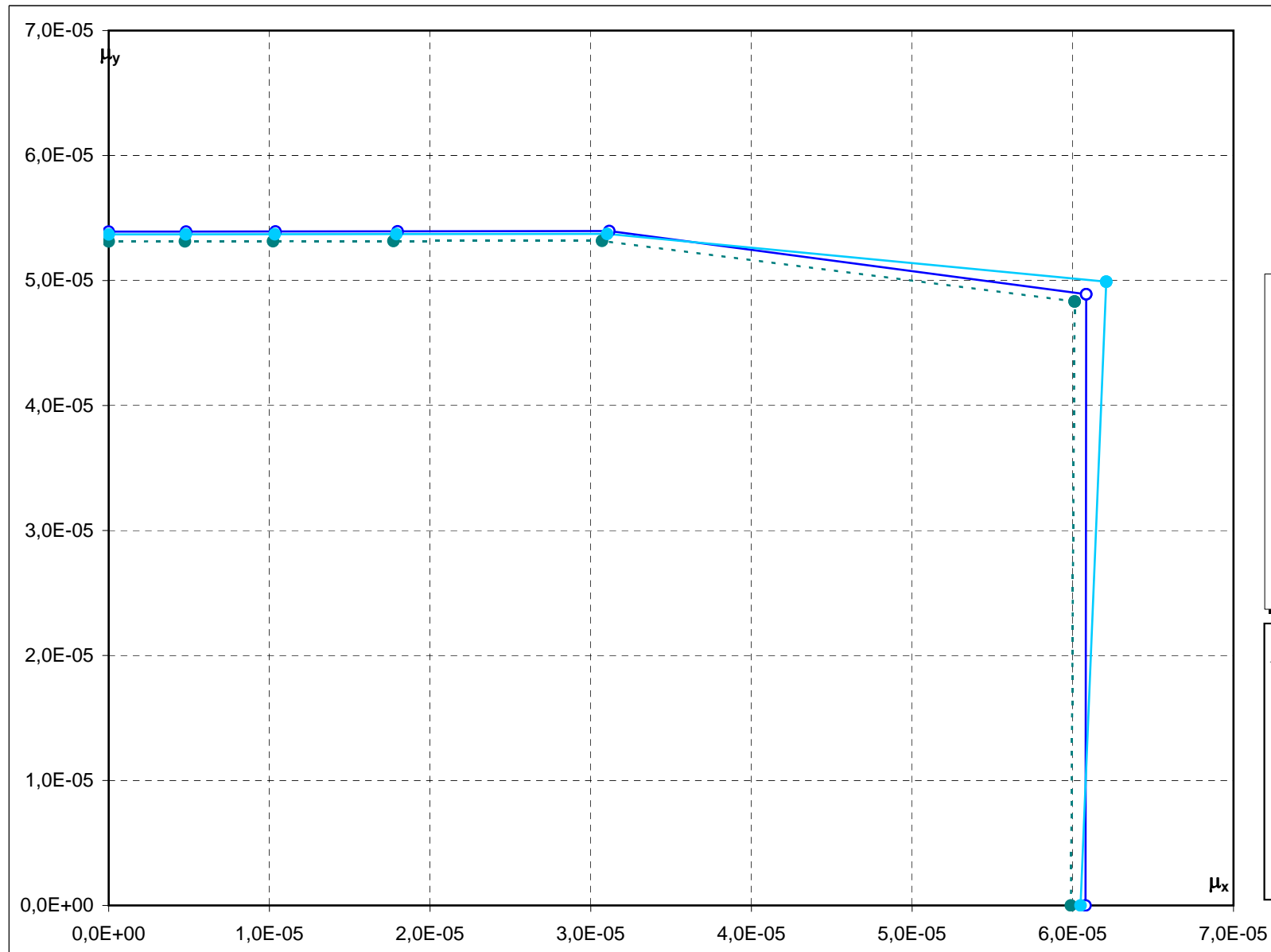
ρ_s-ρ_{sx}-ρ_{sy}

- 4-0,125-0,375
- 4-0,250-0,250
- 4-0,375-0,125

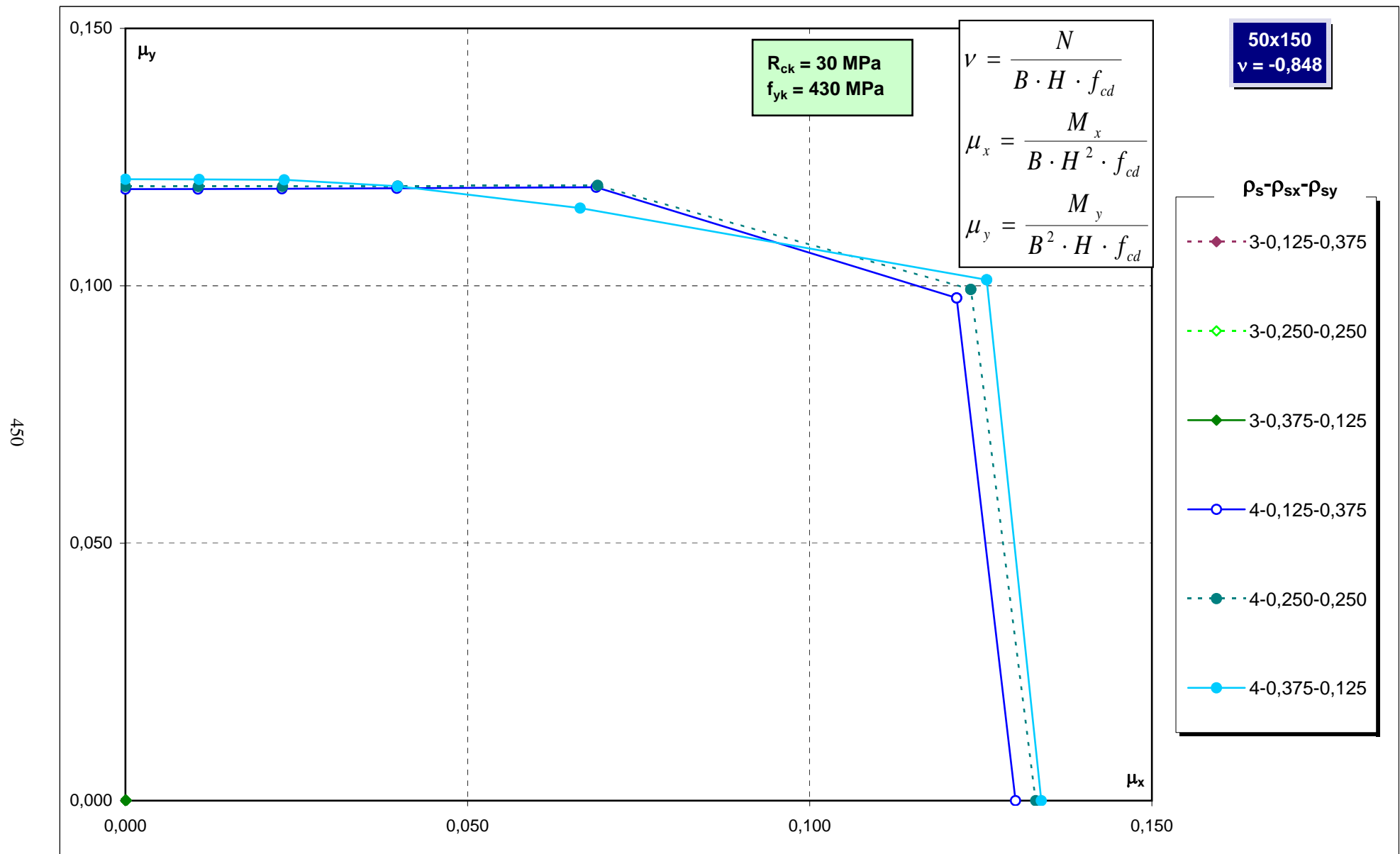
$$\nu = \frac{N}{B \cdot H \cdot f_{cd}}$$

$$\mu_x = \frac{M_x}{B \cdot H^2 \cdot f_{cd}}$$

$$\mu_y = \frac{M_y}{B^2 \cdot H \cdot f_{cd}}$$

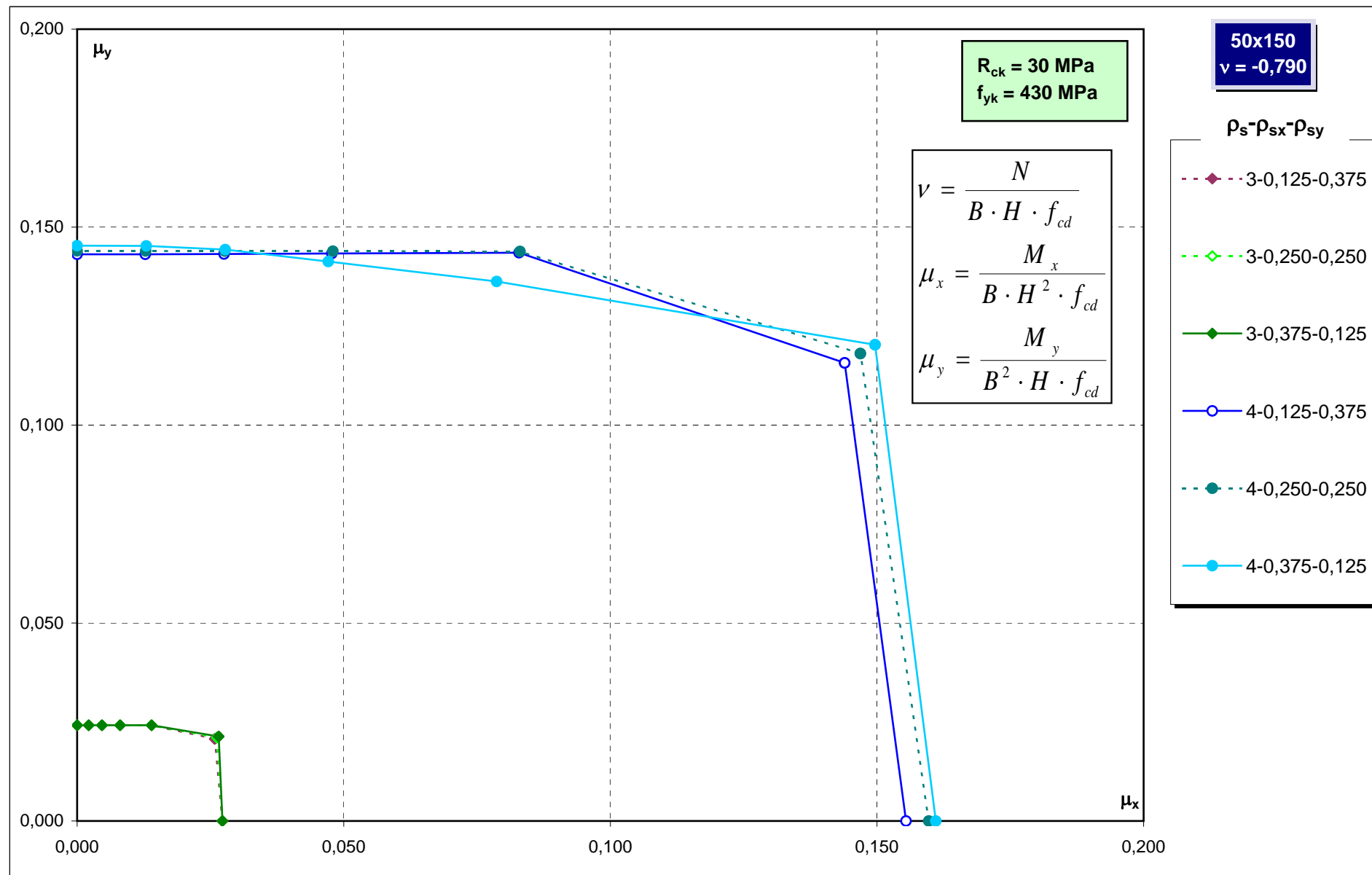


Abachi di progetto



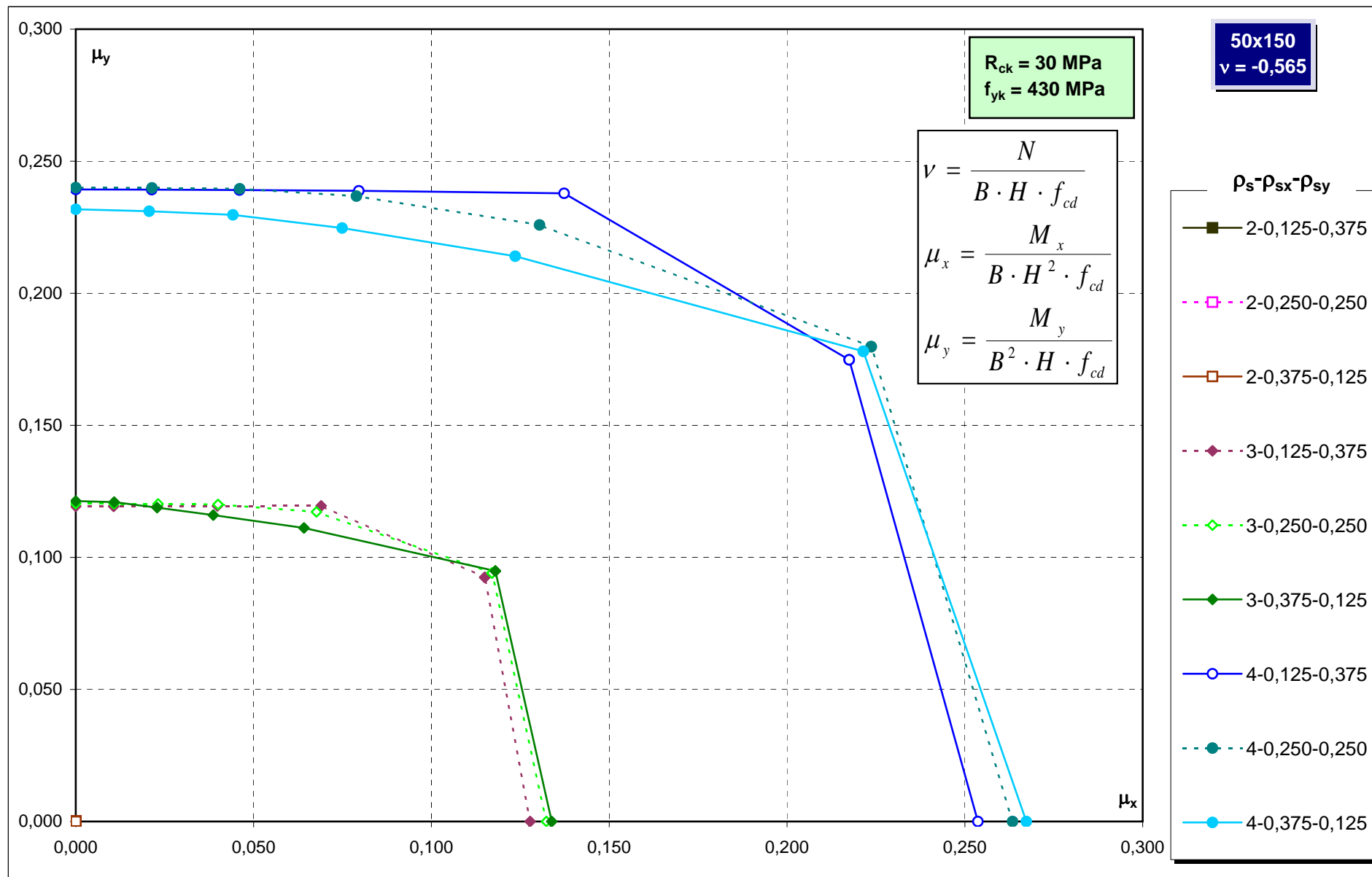
Abachi di progetto

451

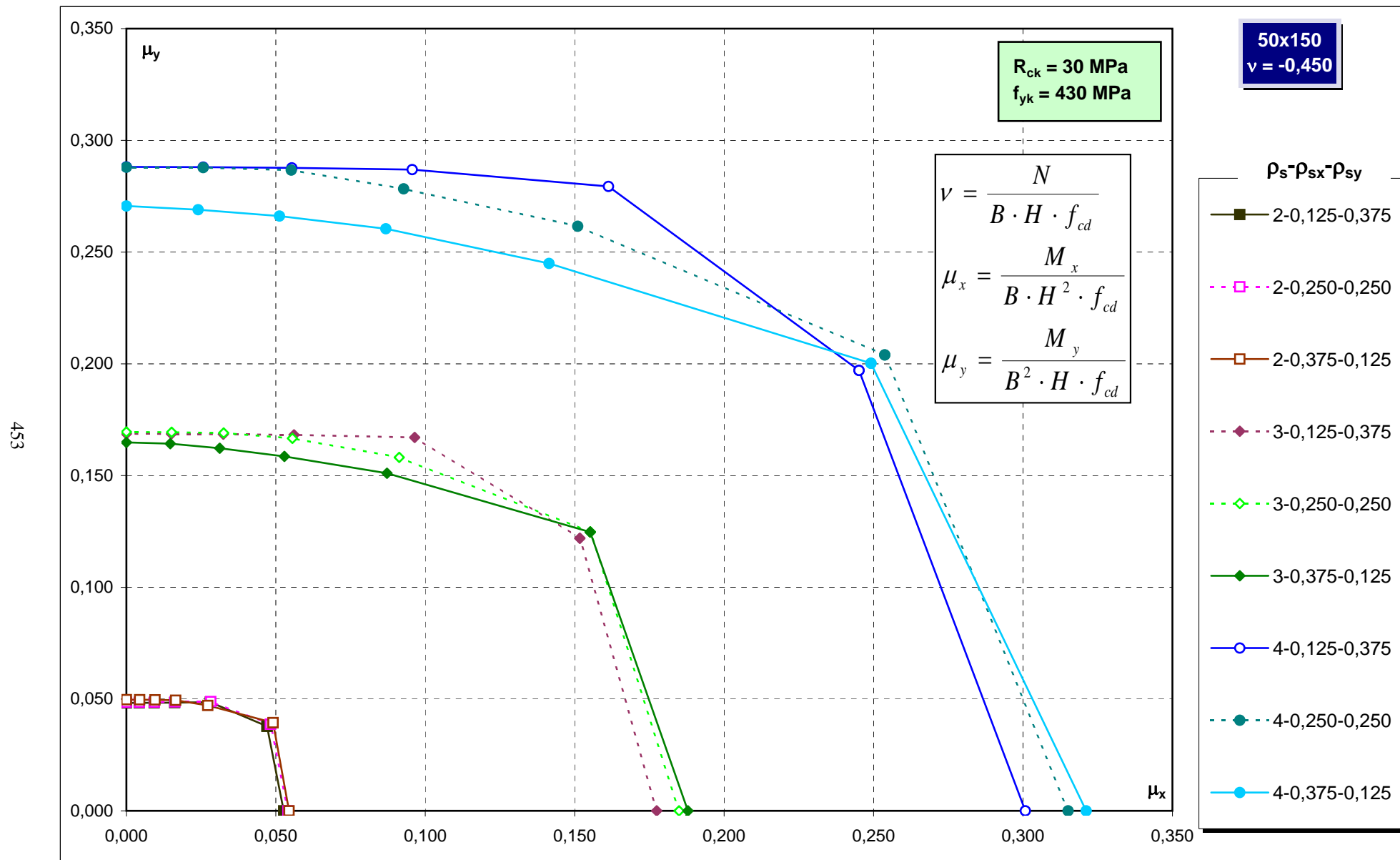


Abachi di progetto

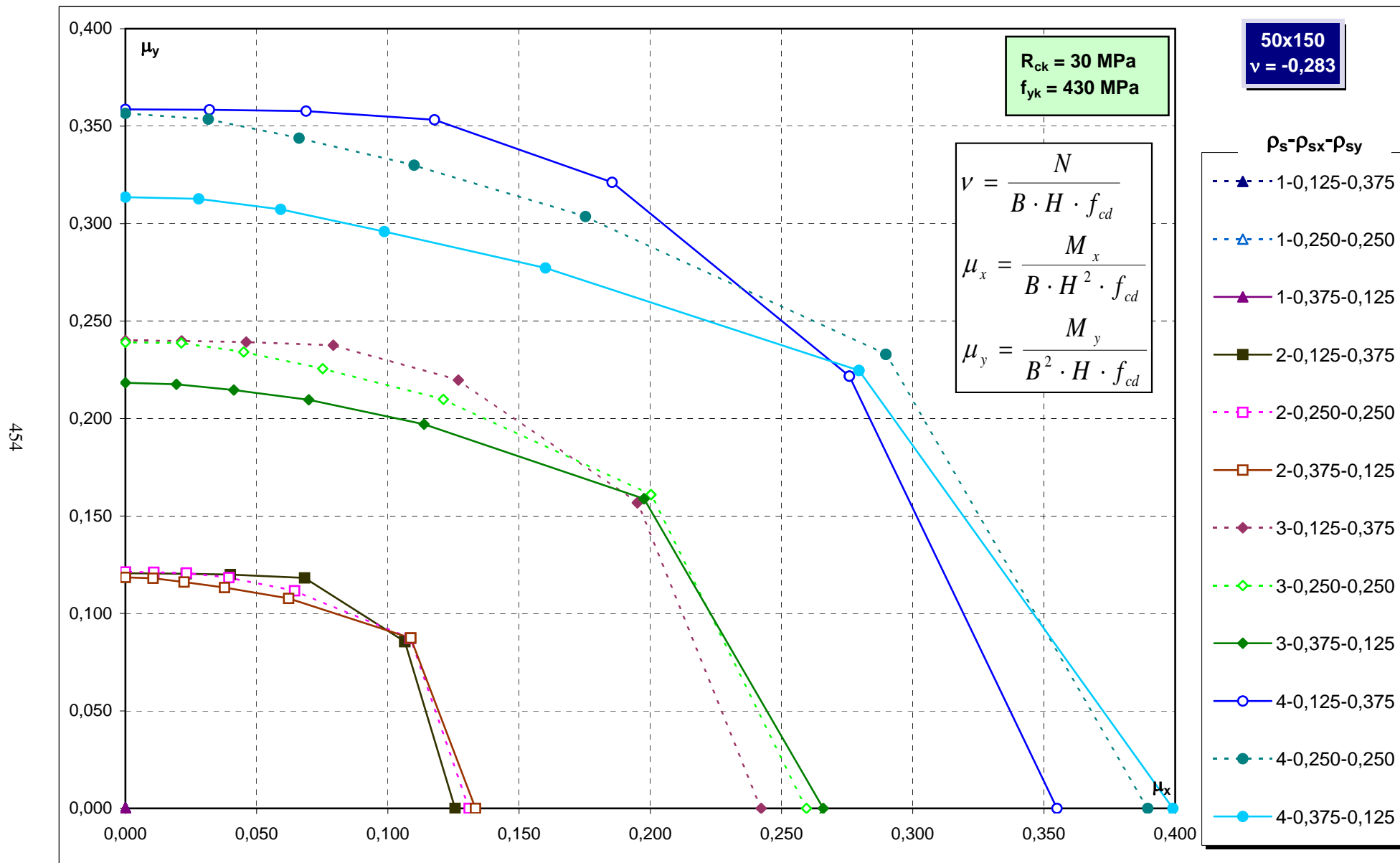
452



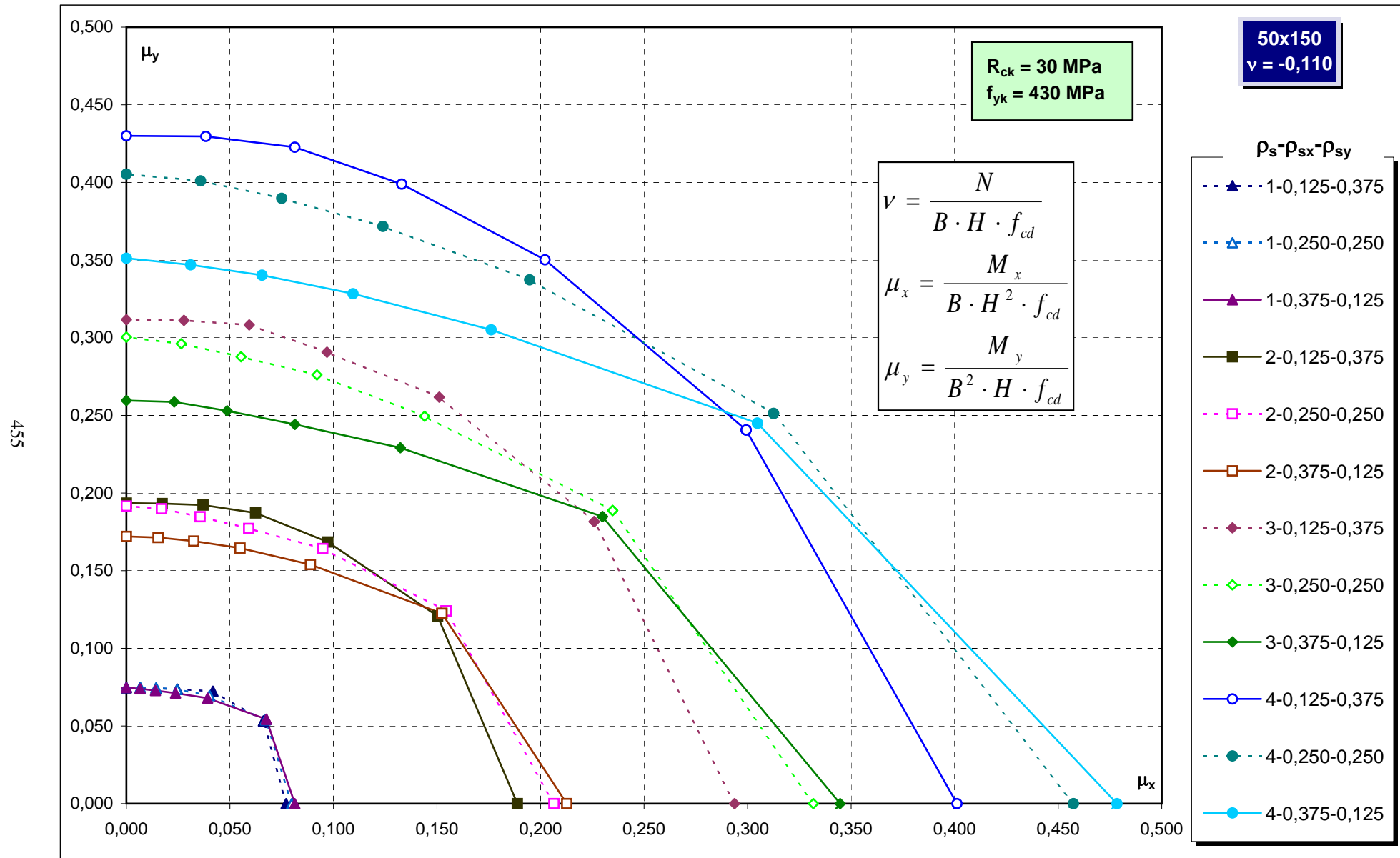
Abachi di progetto



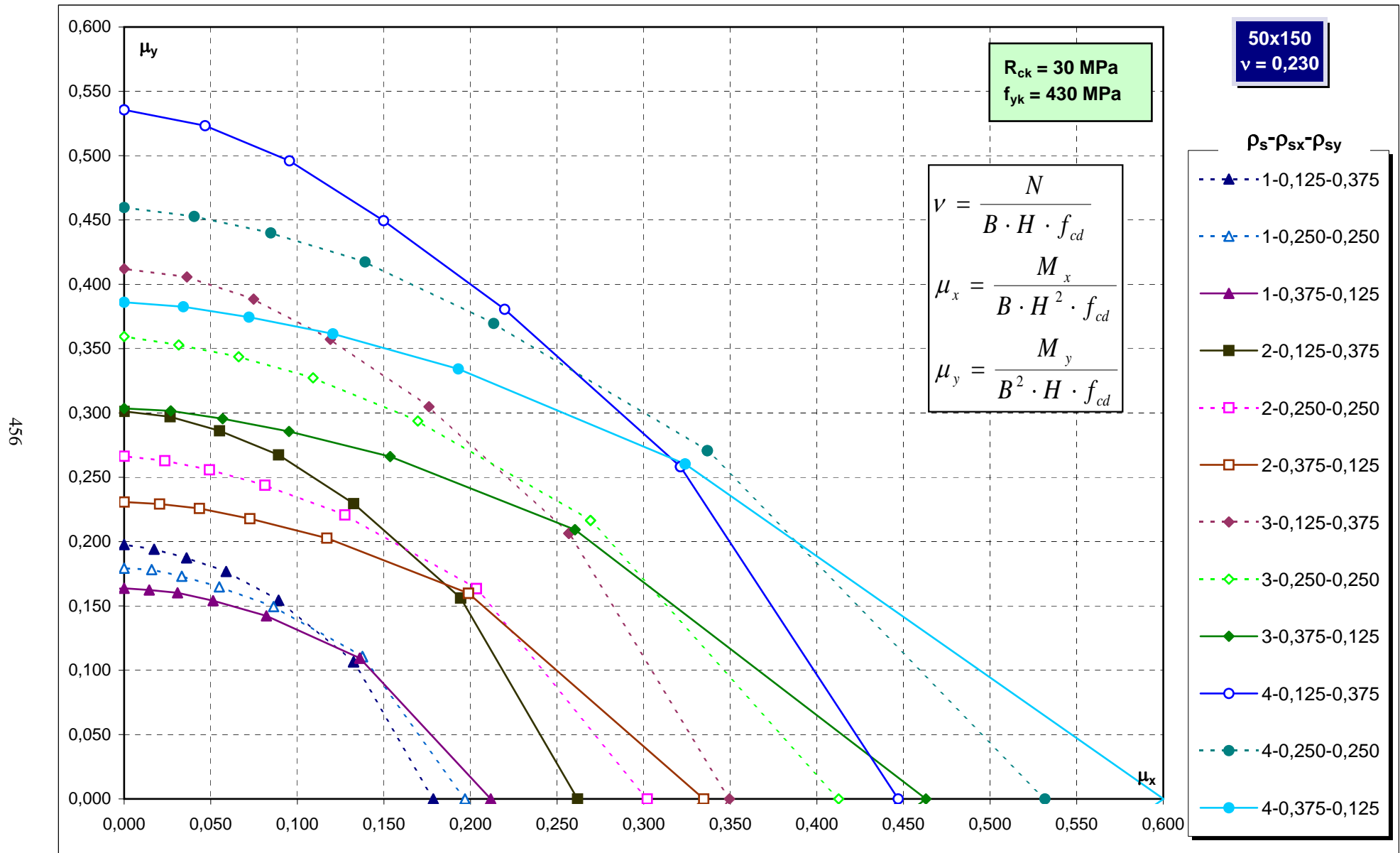
Abachi di progetto



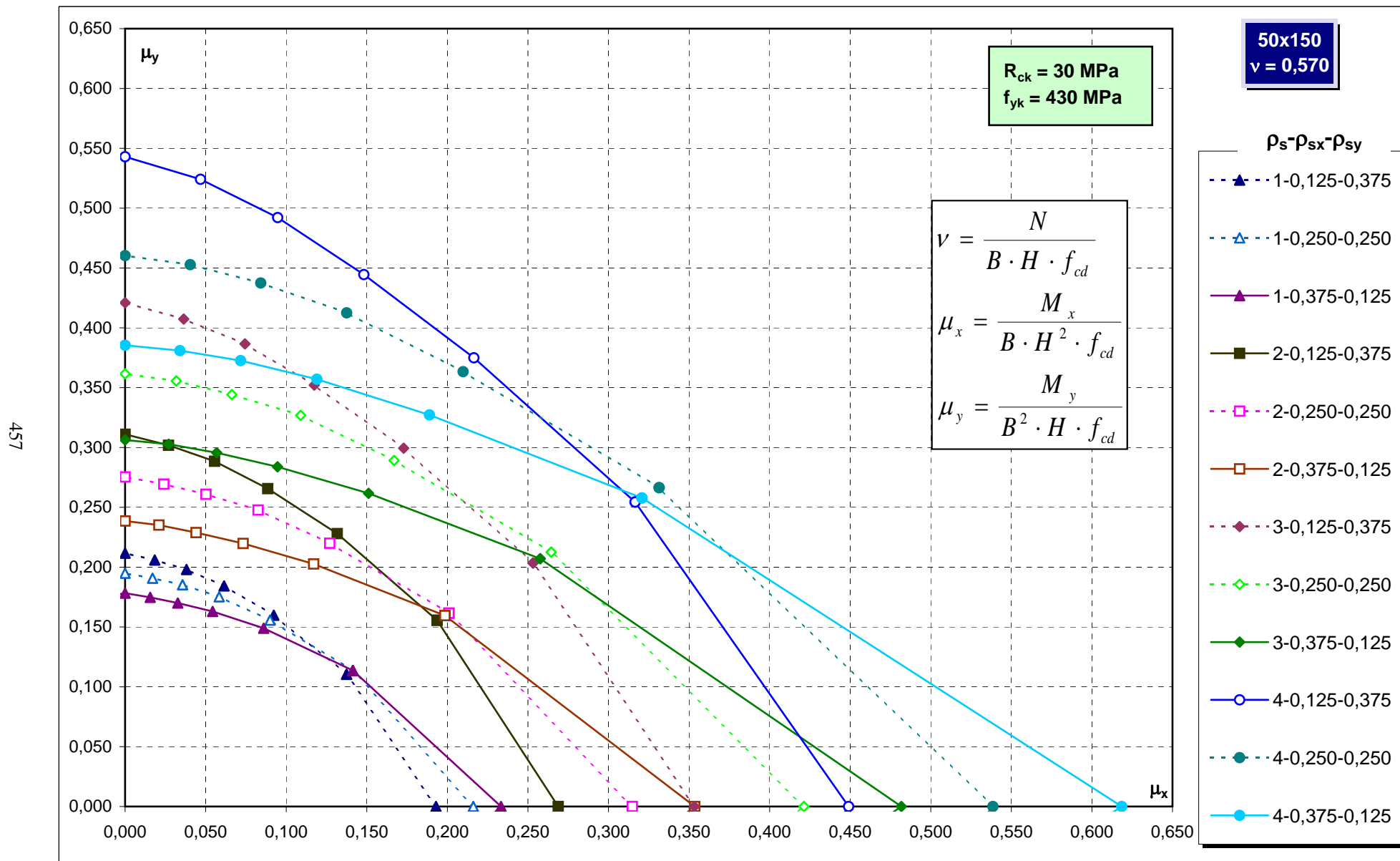
Abachi di progetto



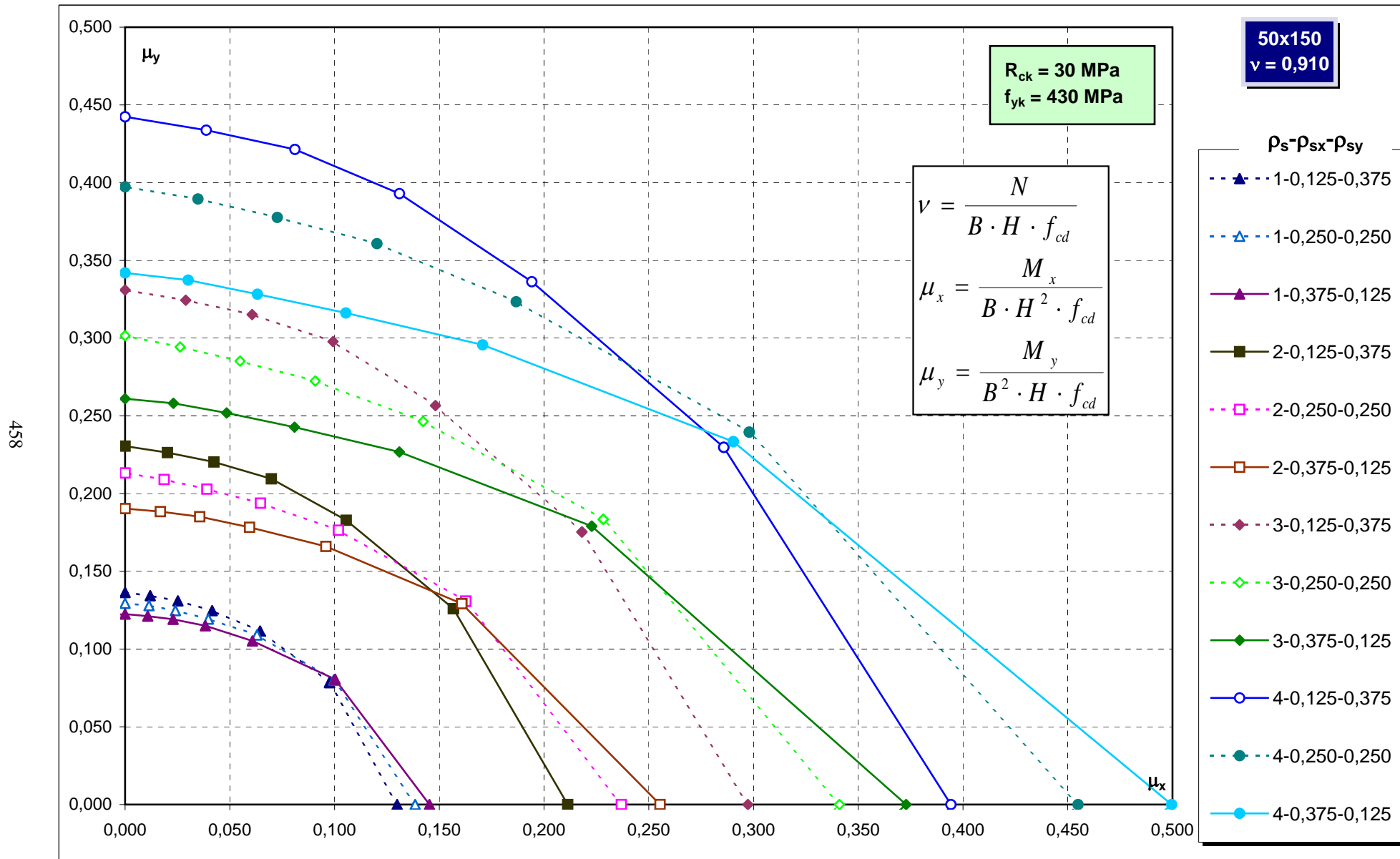
Abachi di progetto



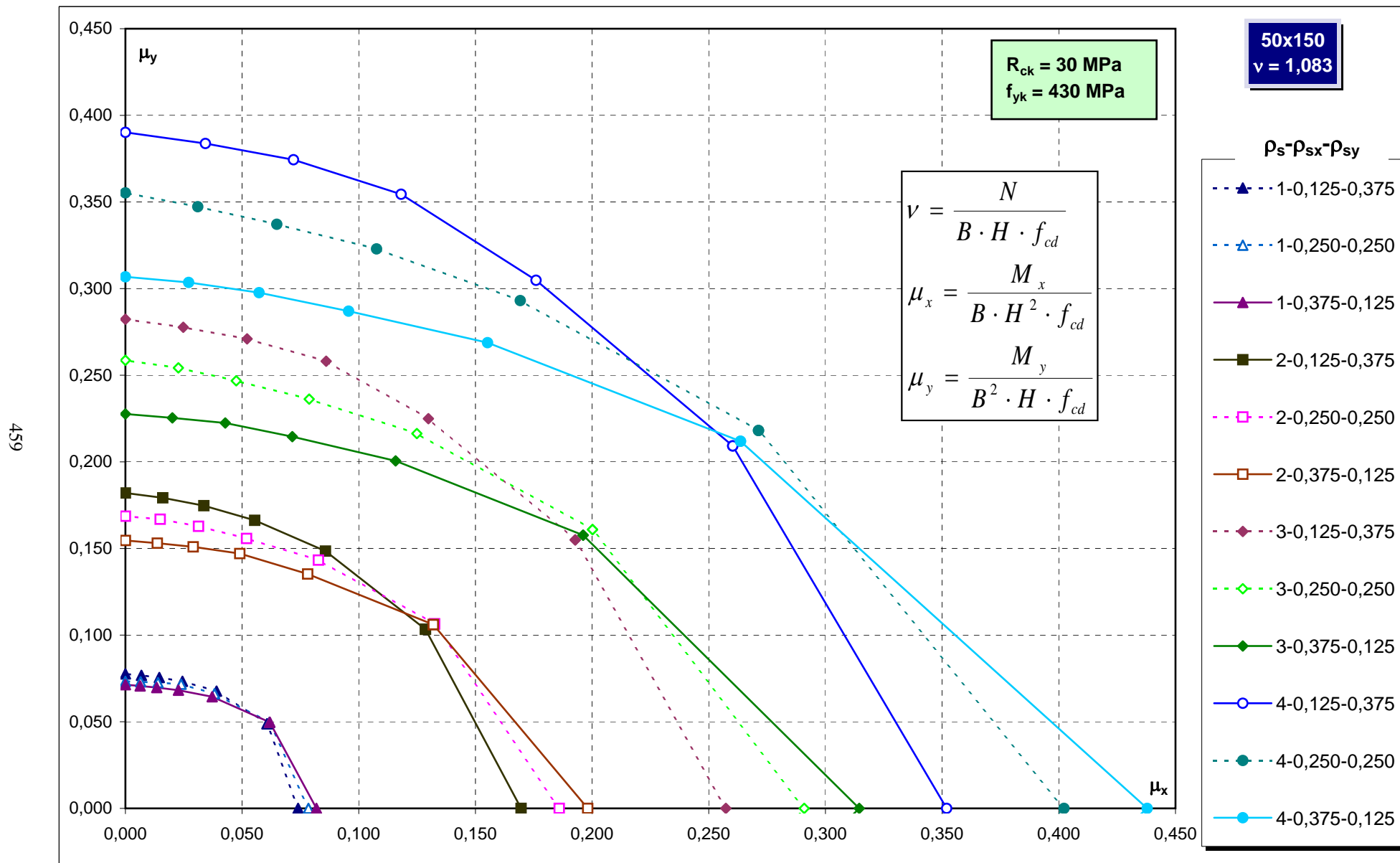
Abachi di progetto



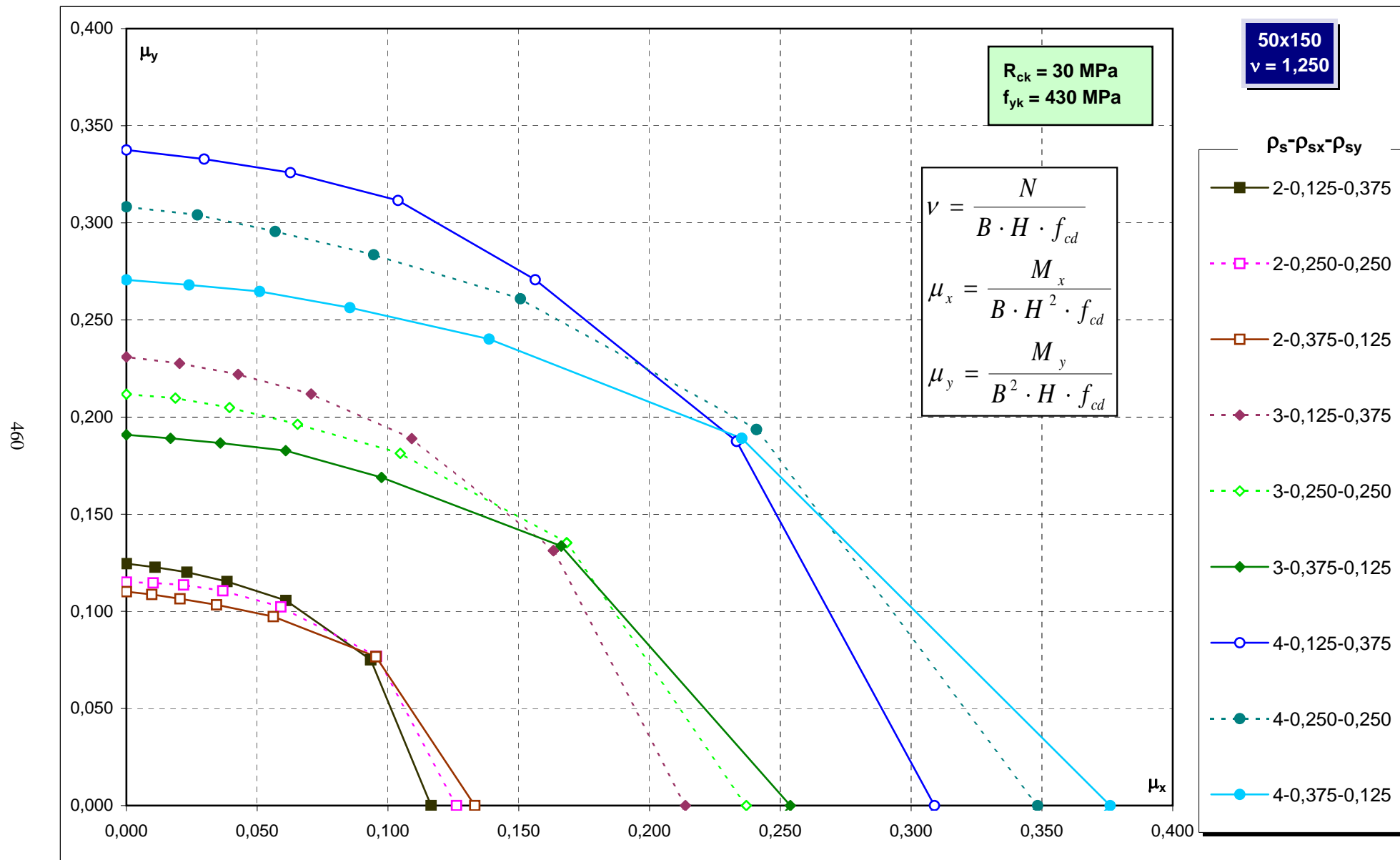
Abachi di progetto



Abachi di progetto

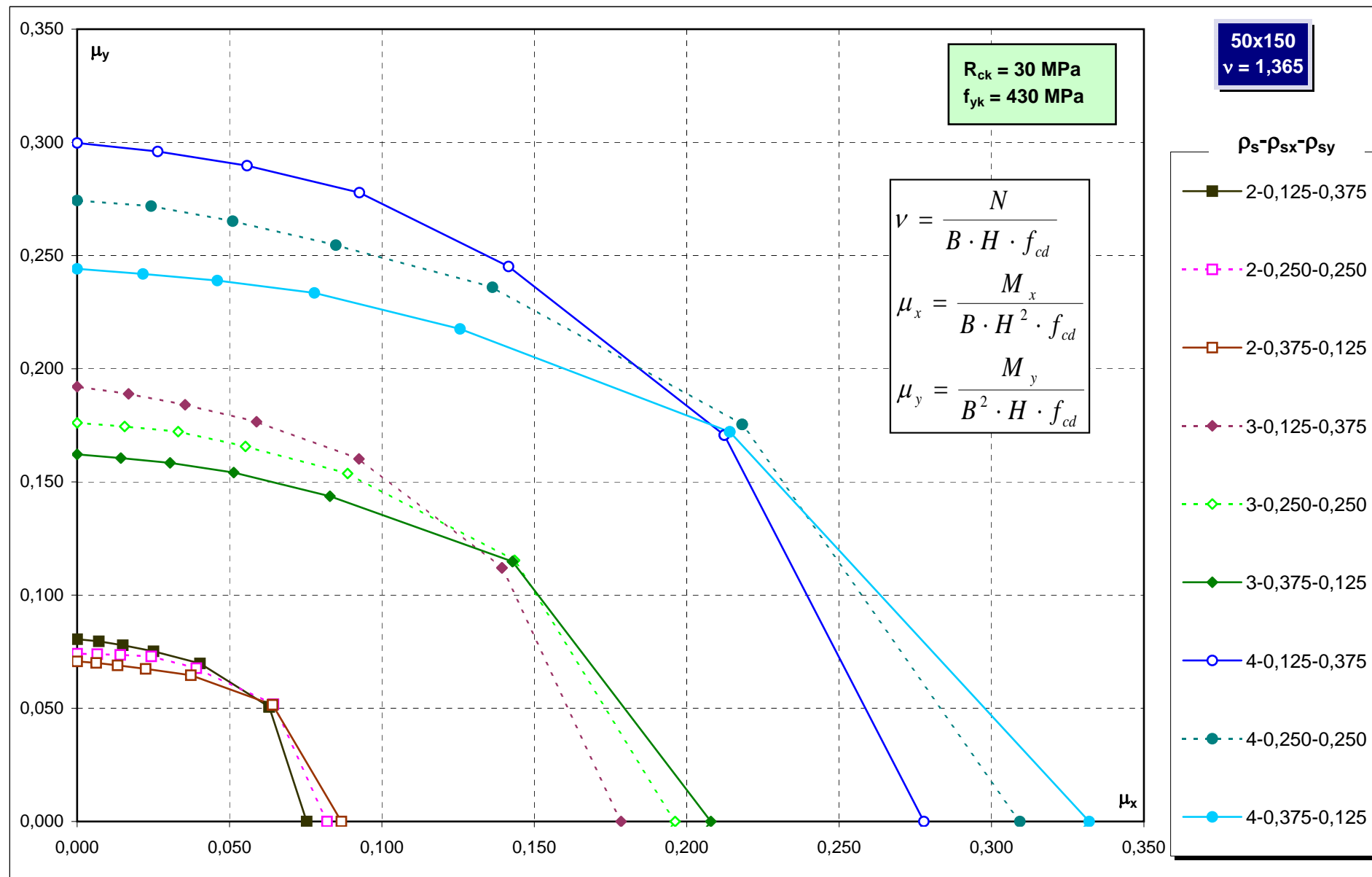


Abachi di progetto

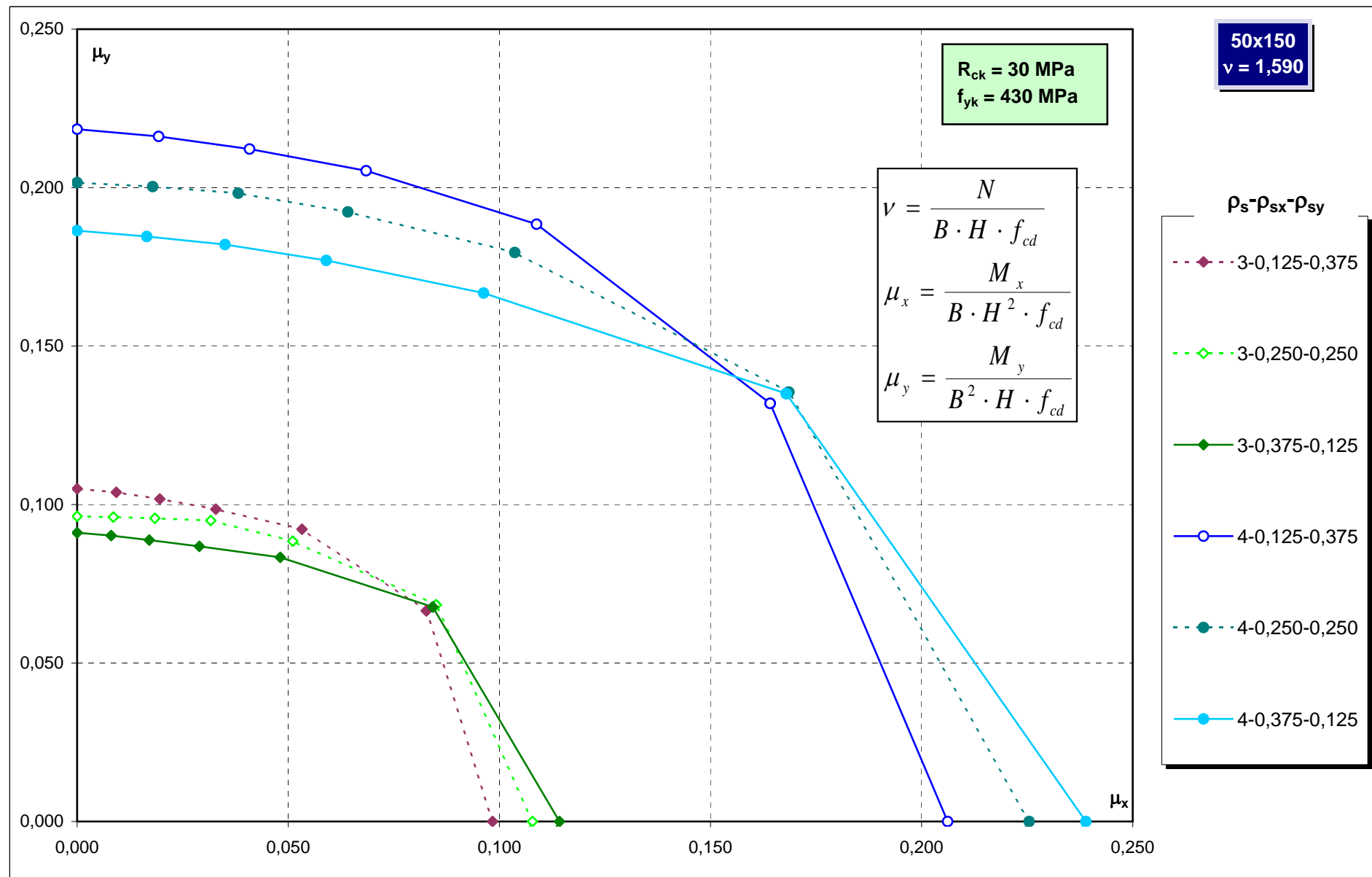


Abachi di progetto

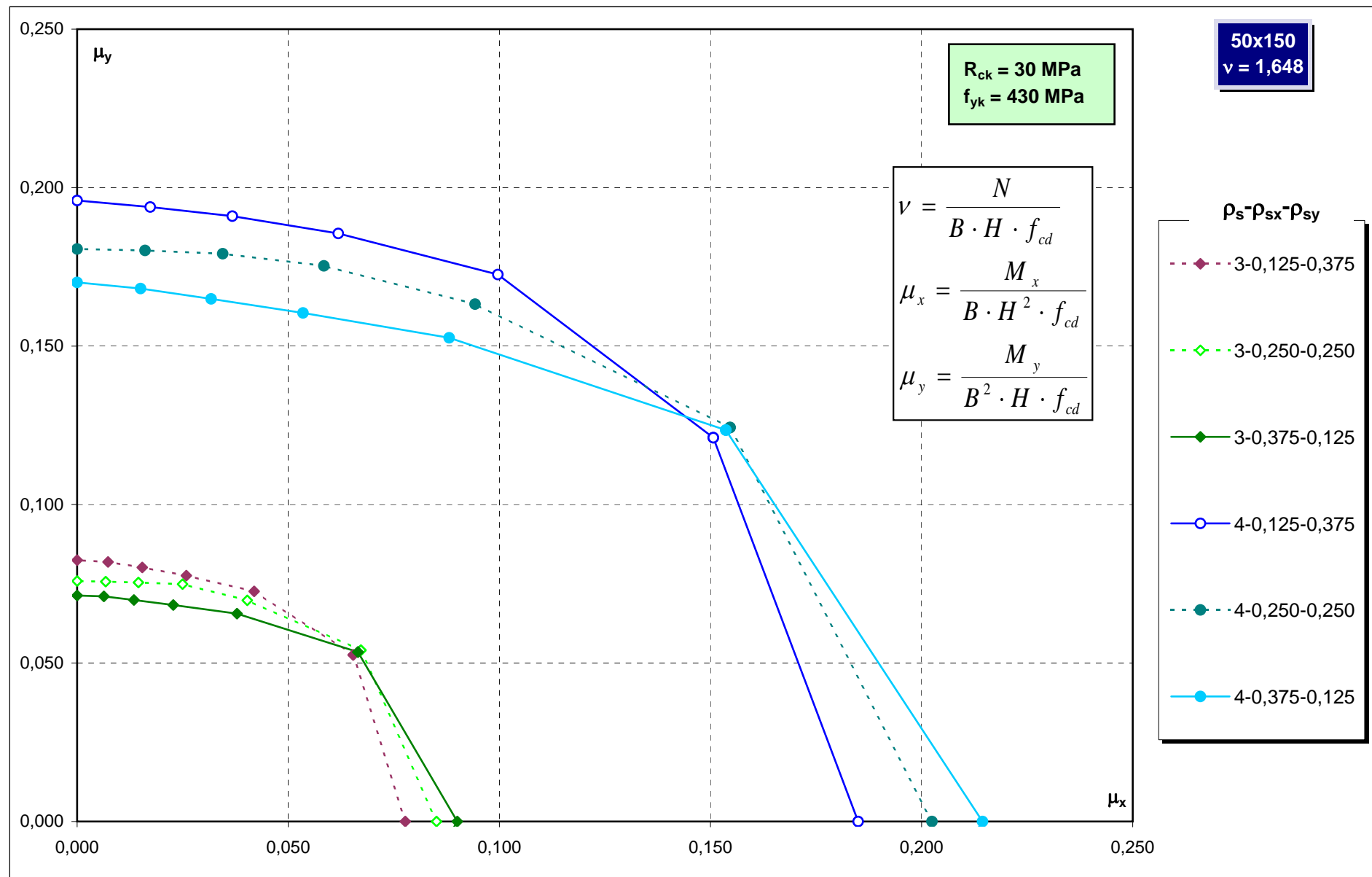
461



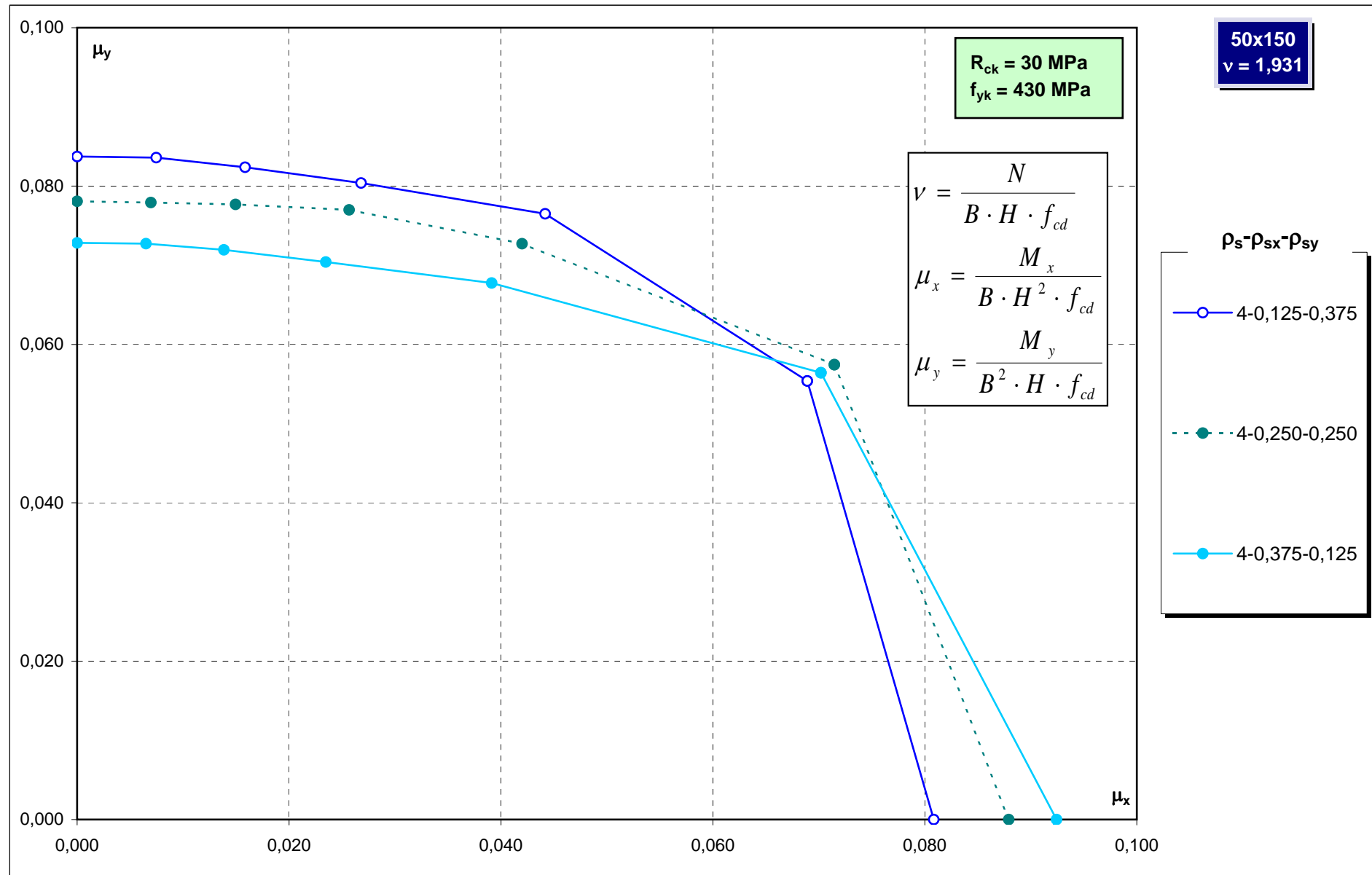
Abachi di progetto



Abachi di progetto

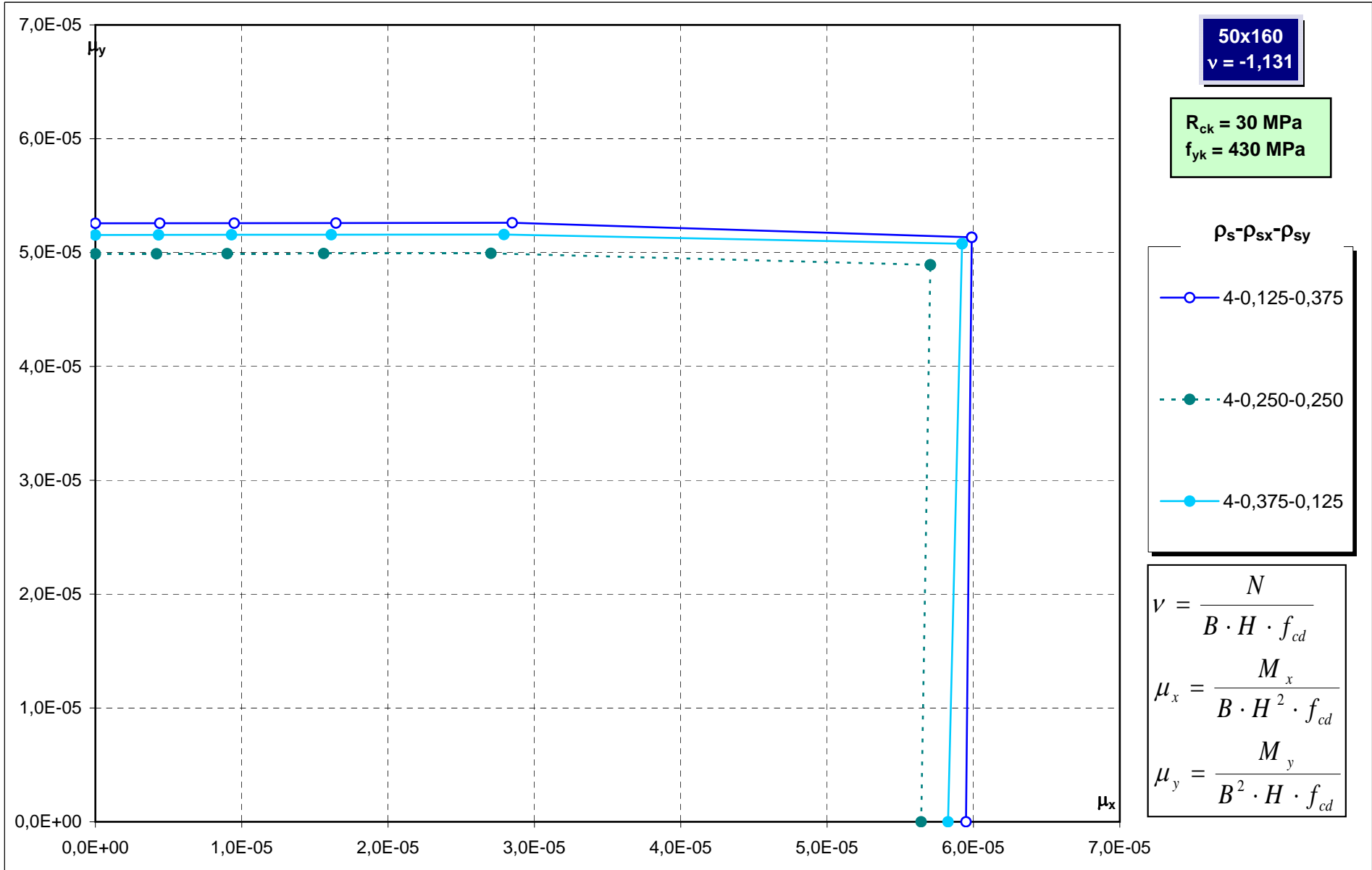


Abachi di progetto



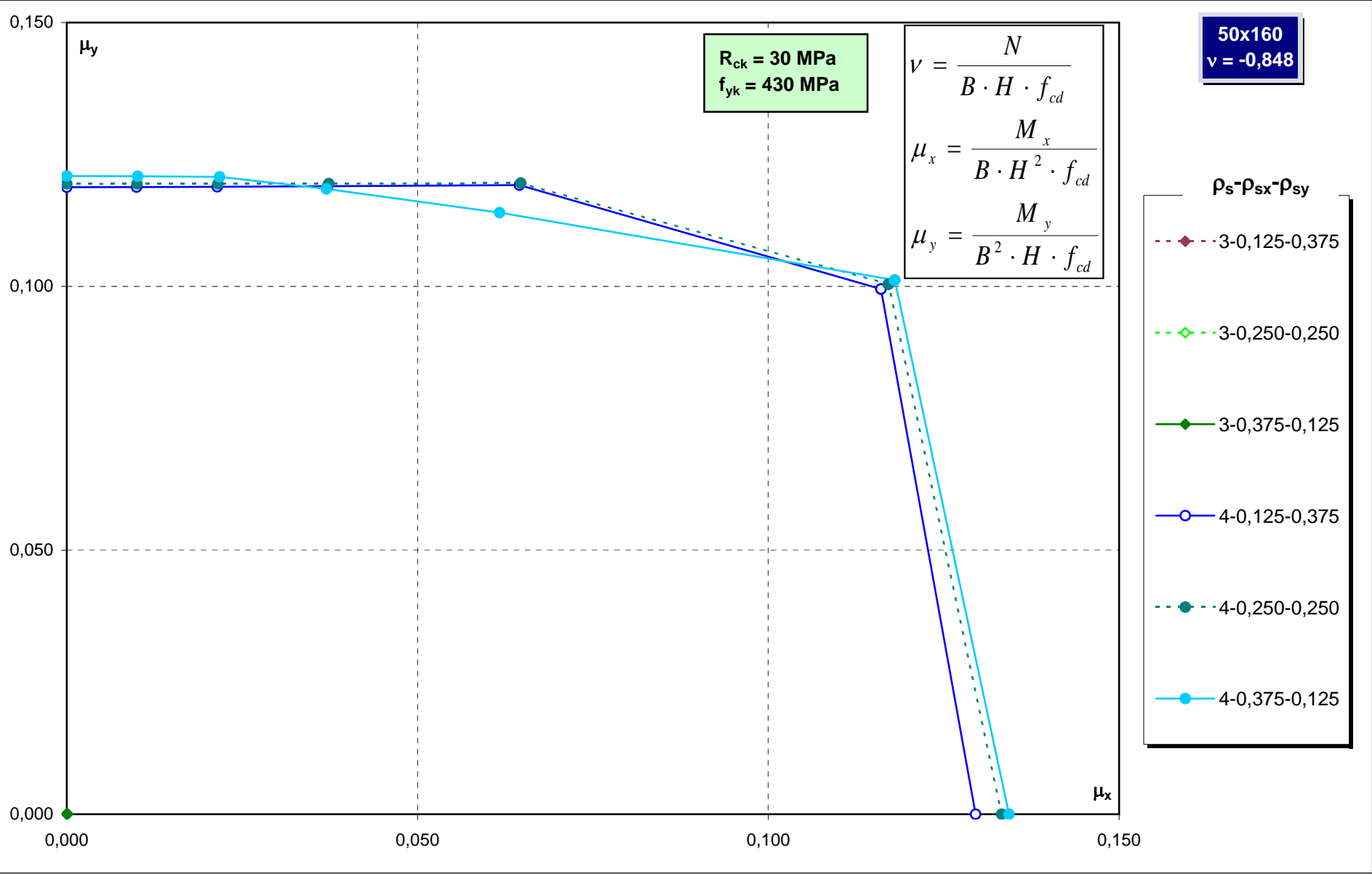
Abachi di progetto

465

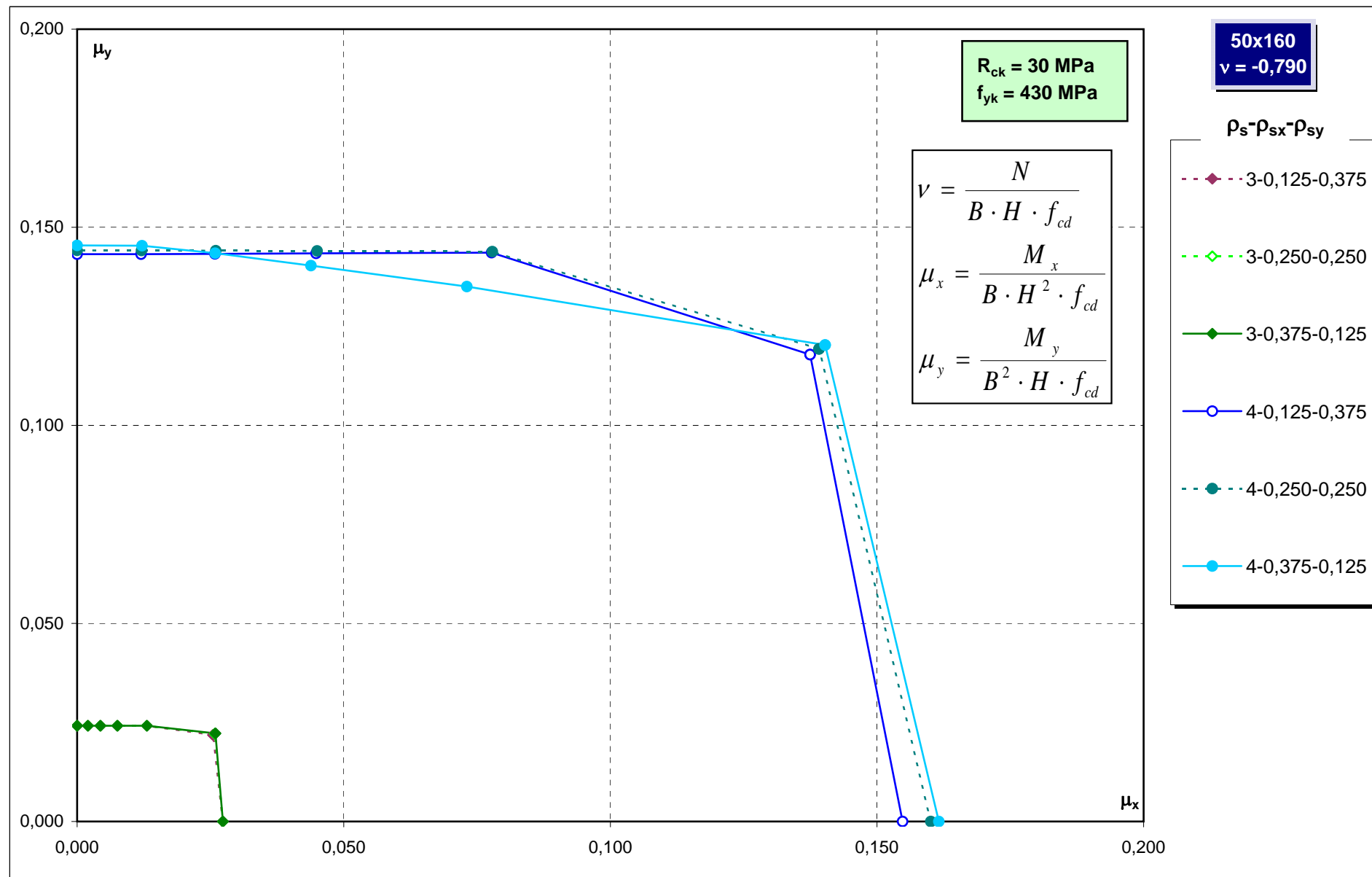


Abachi di progetto

466

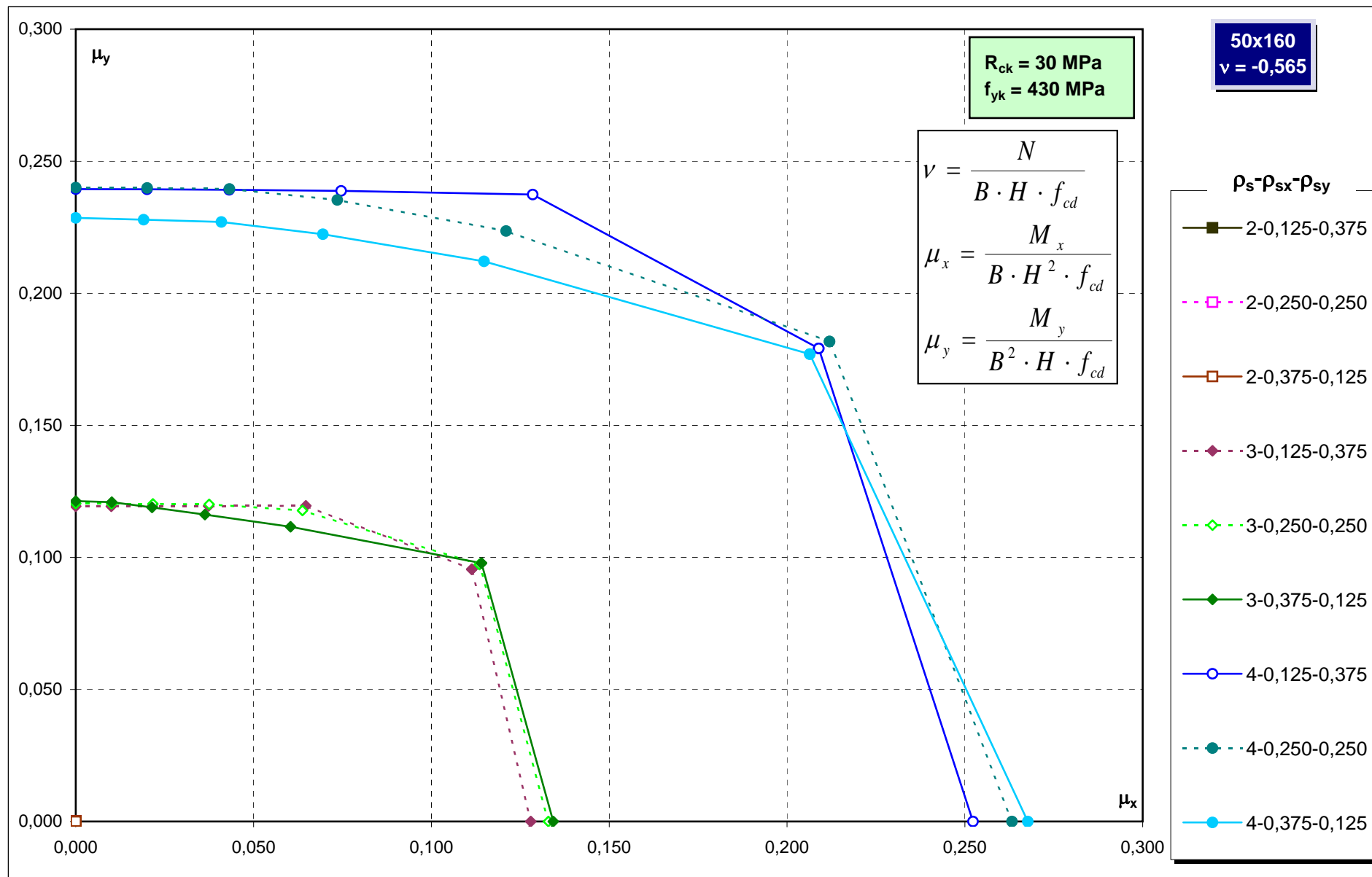


Abachi di progetto

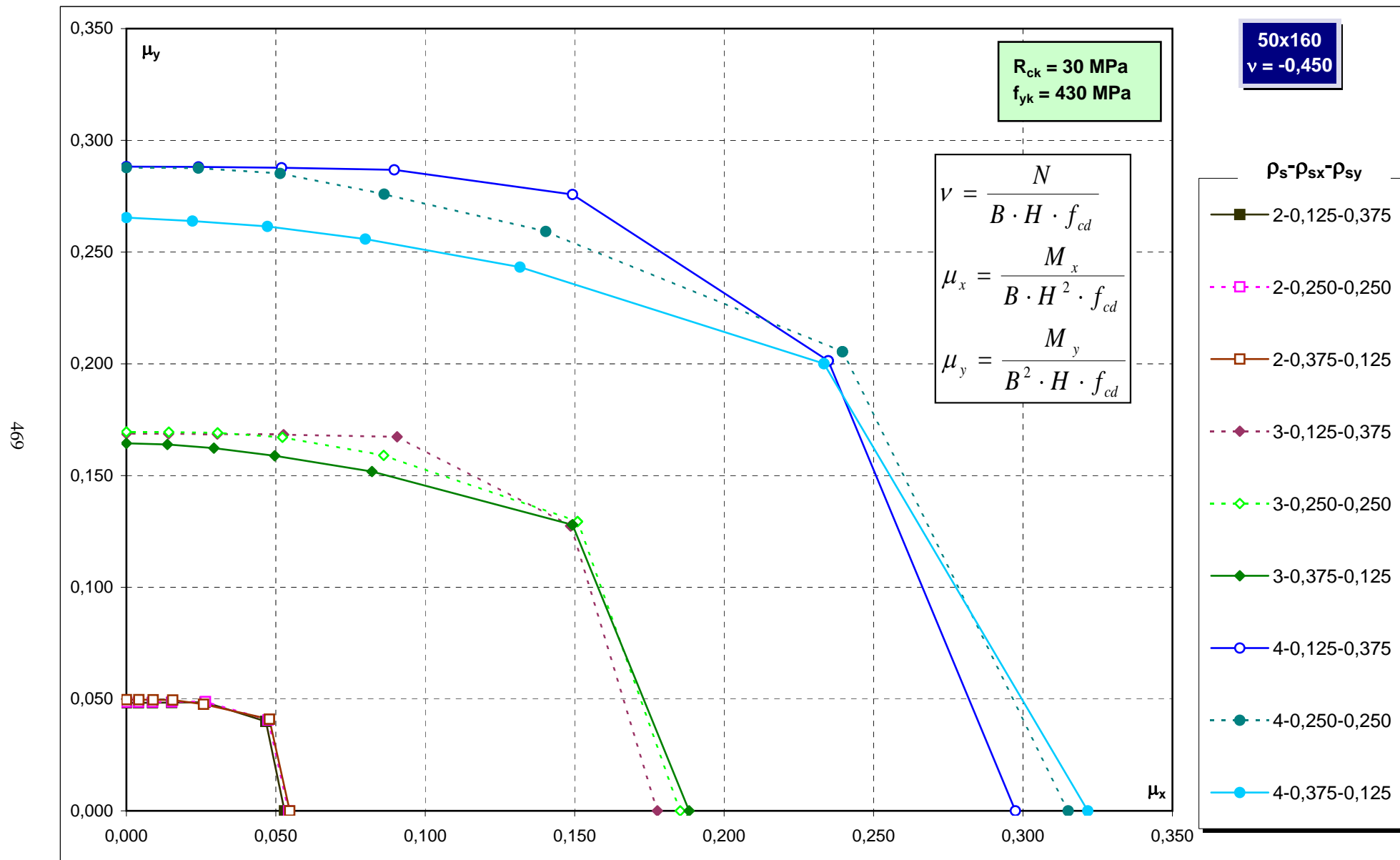


Abachi di progetto

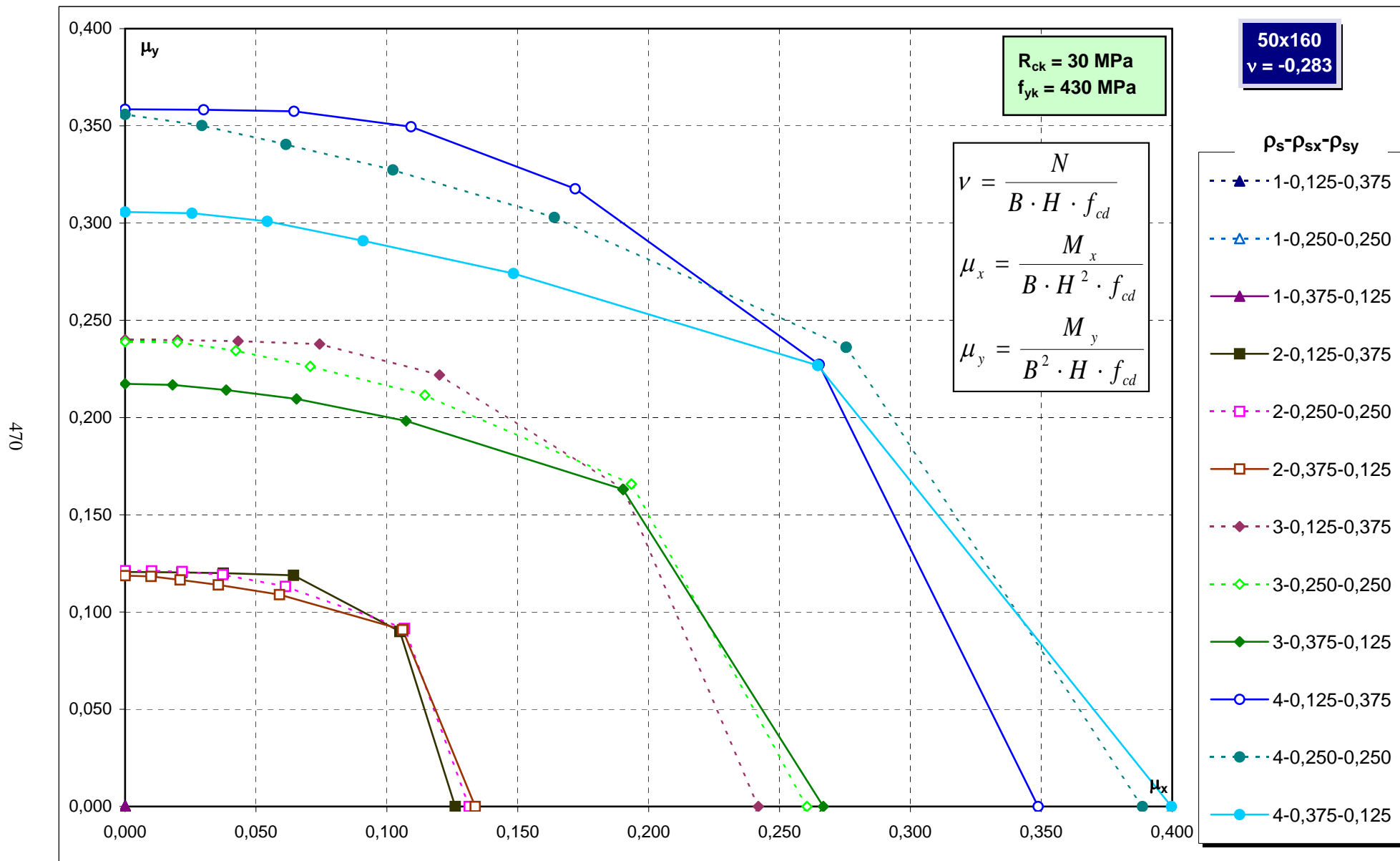
468



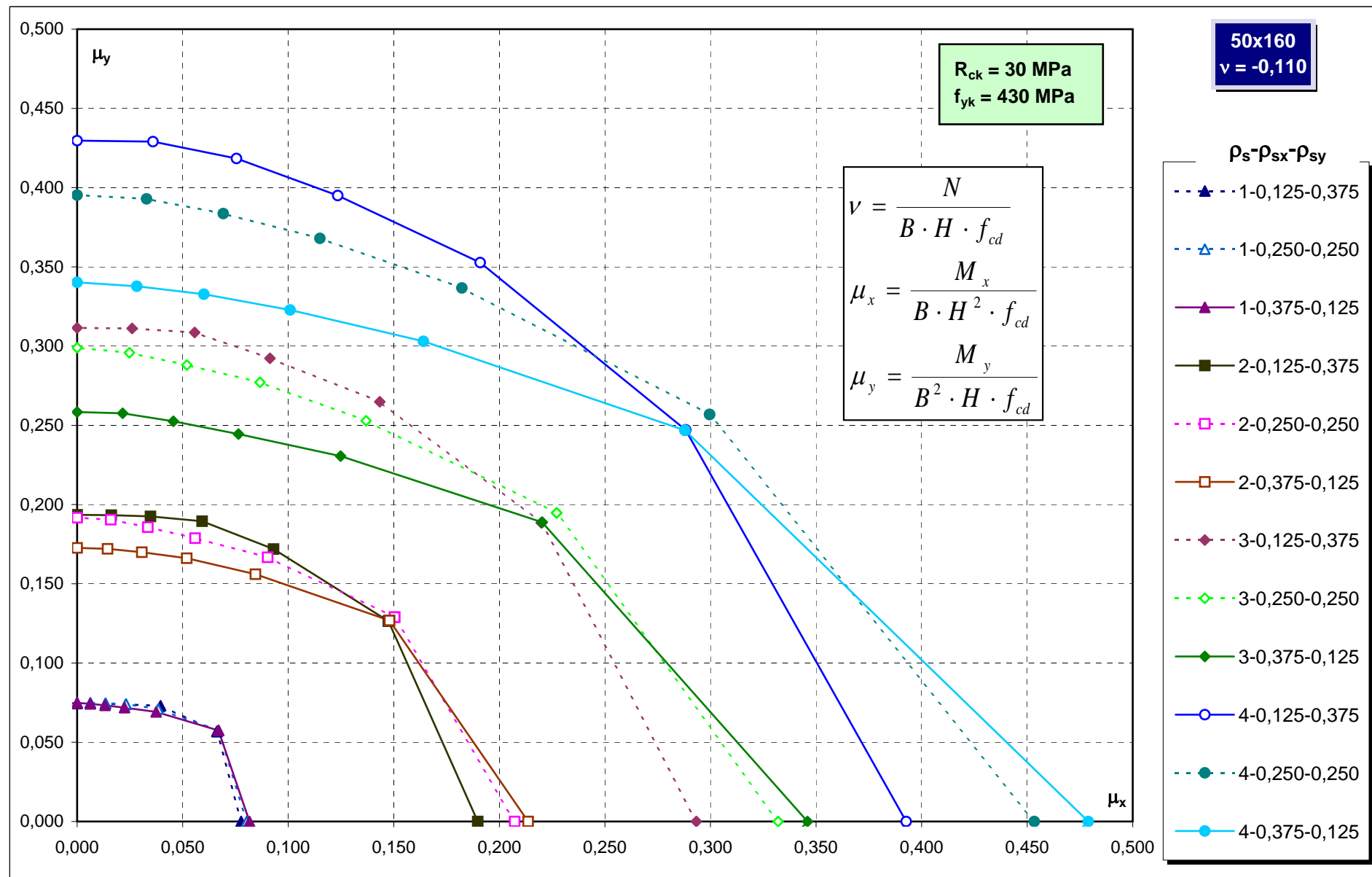
Abachi di progetto



Abachi di progetto

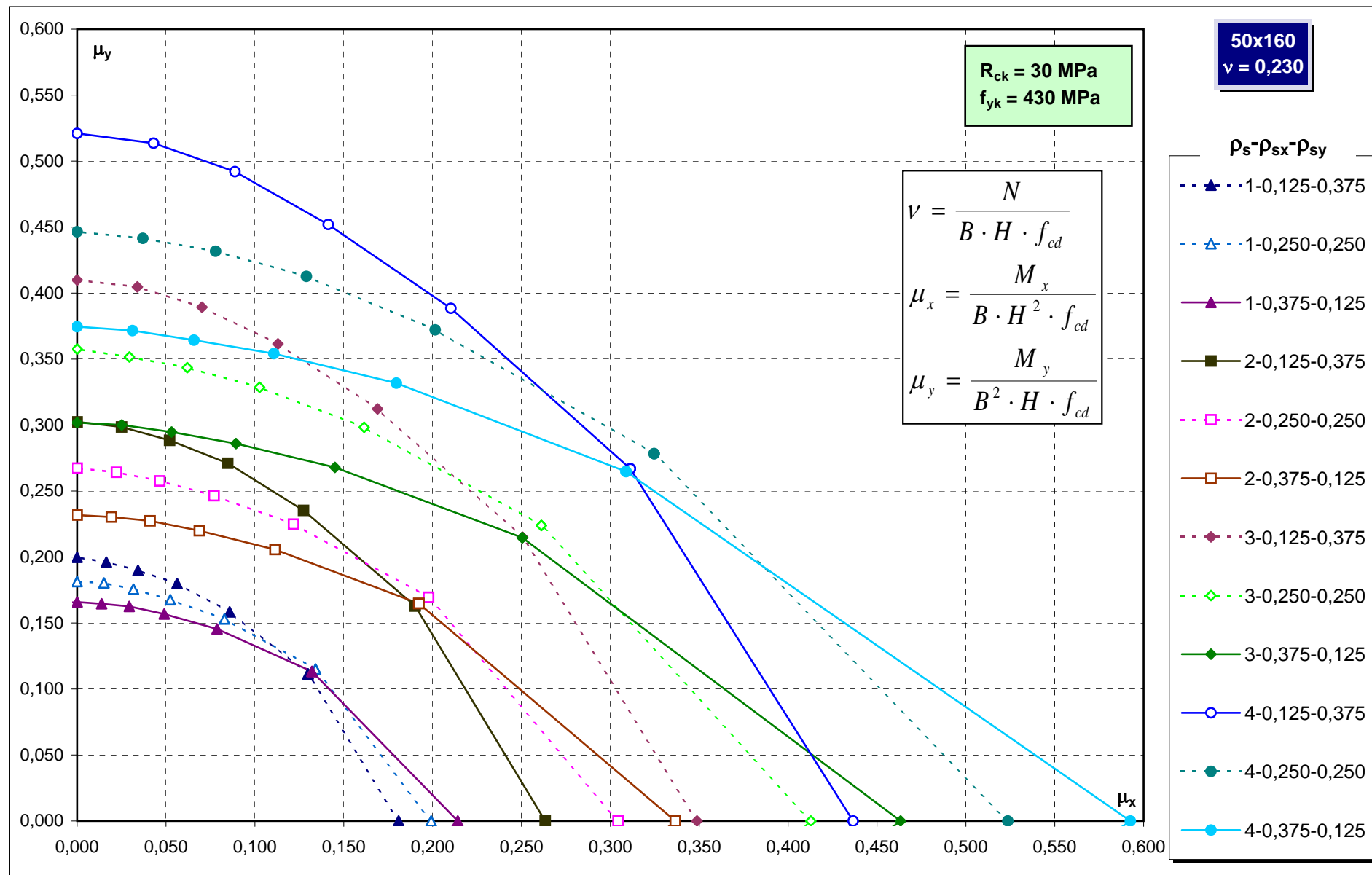


Abachi di progetto



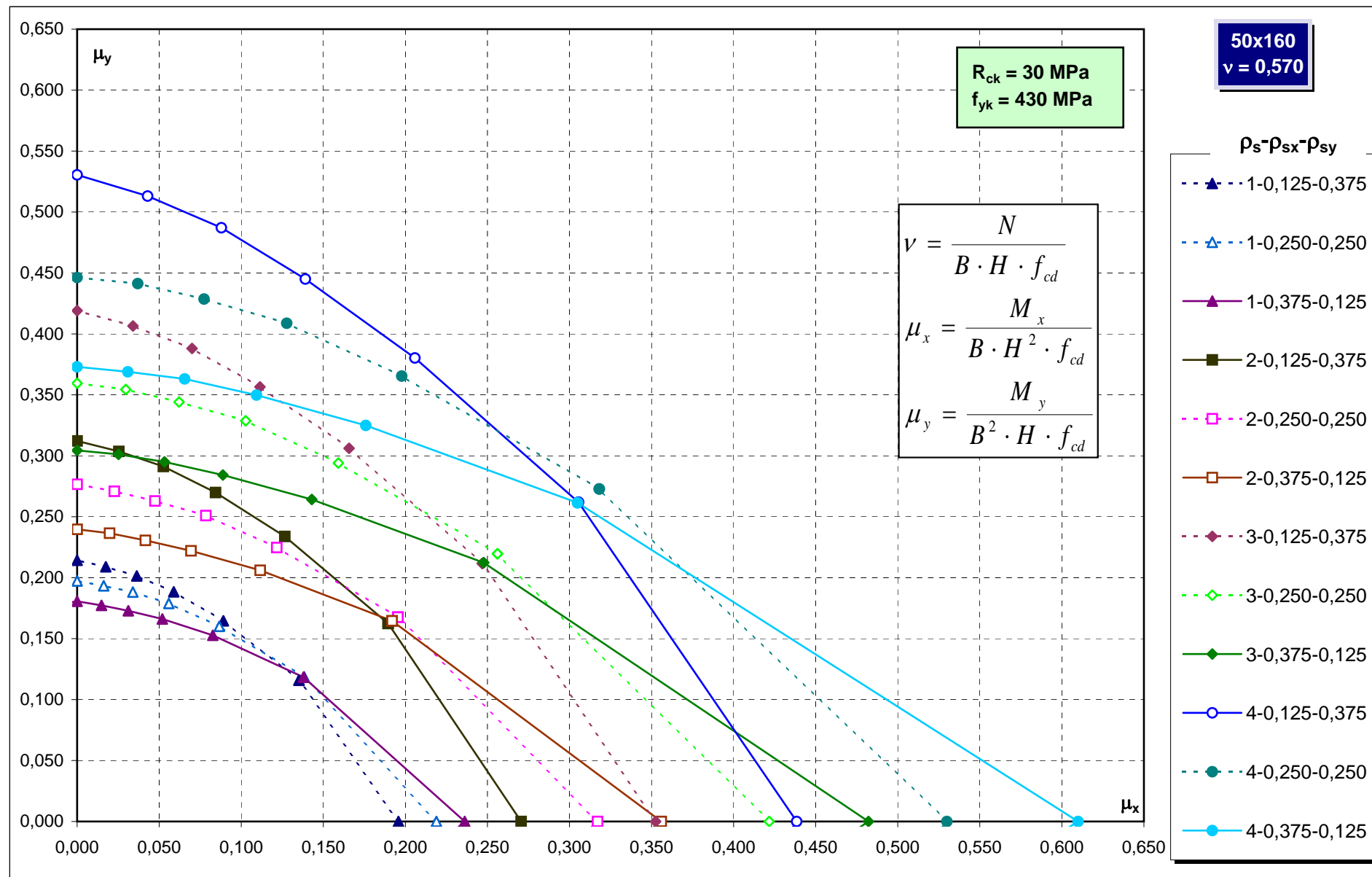
Abachi di progetto

472



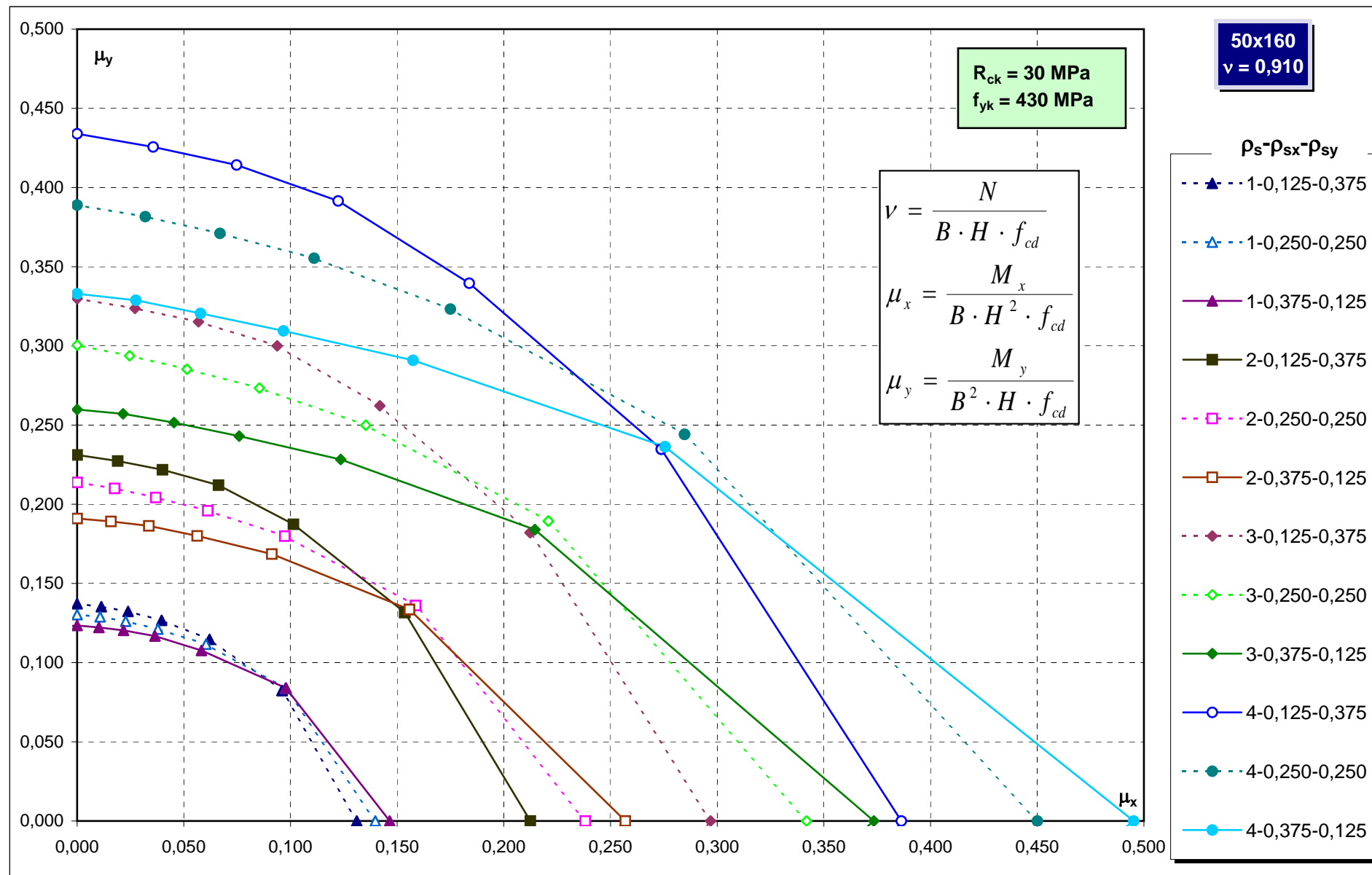
Abachi di progetto

473

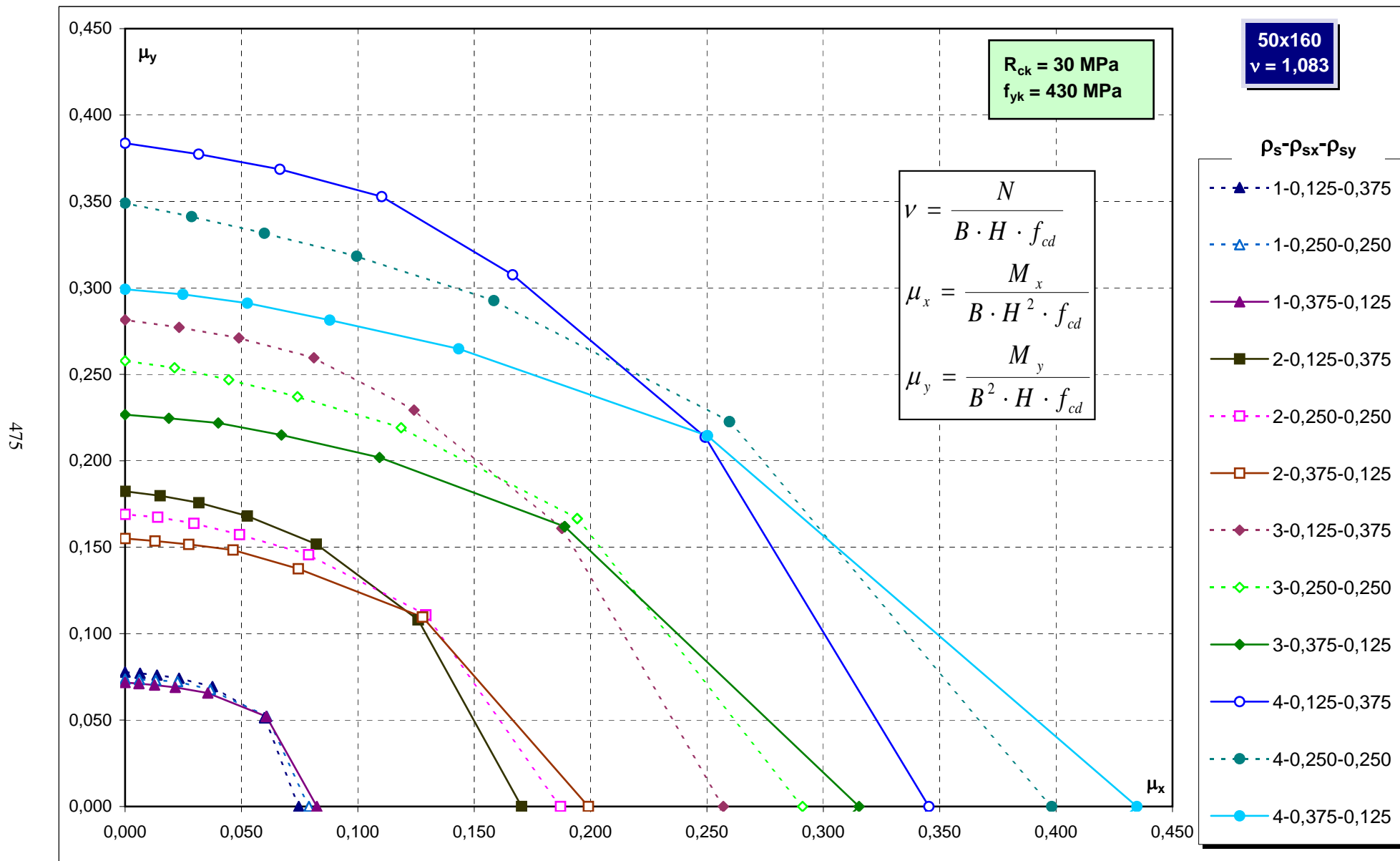


Abachi di progetto

474

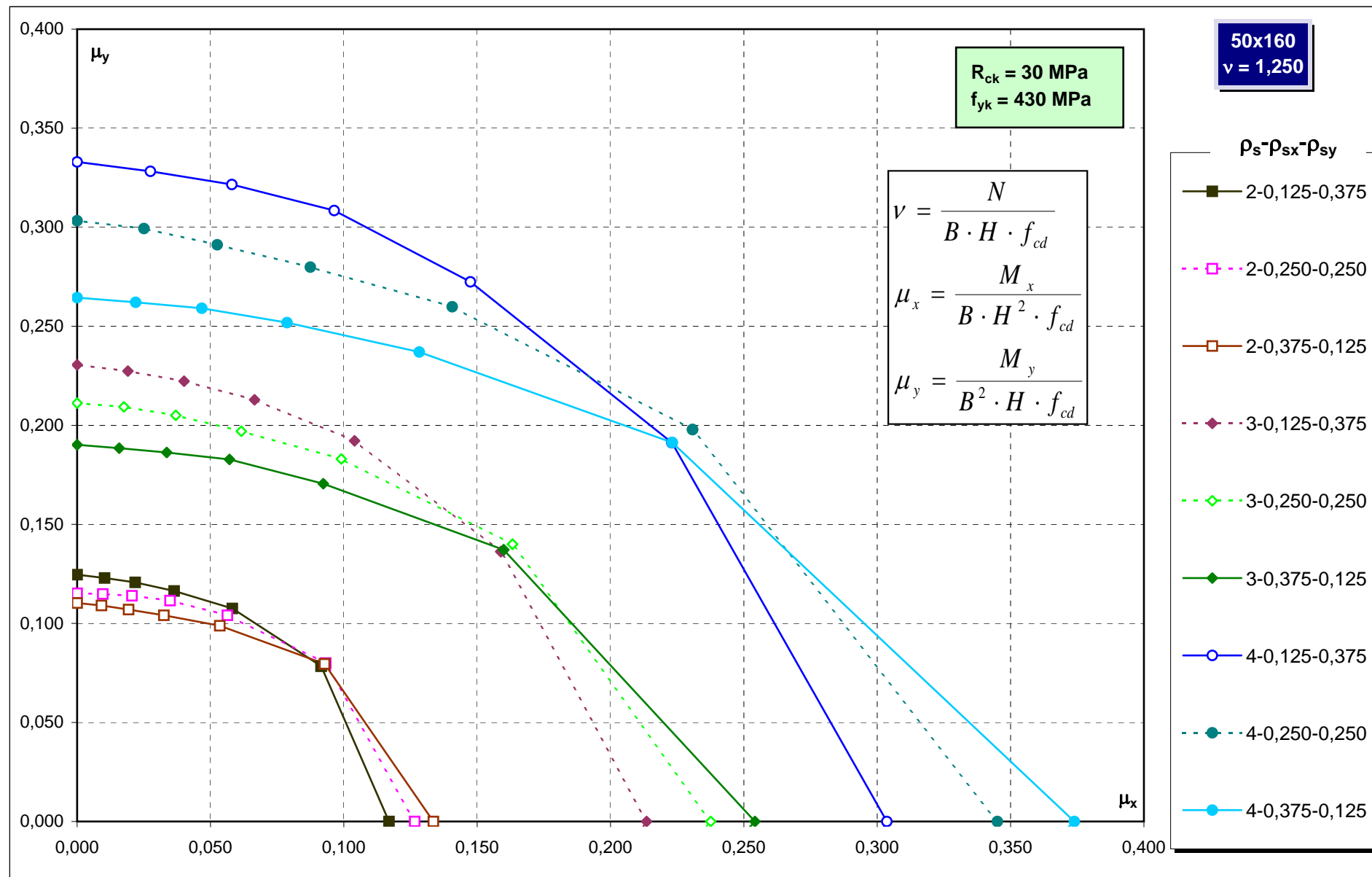


Abachi di progetto

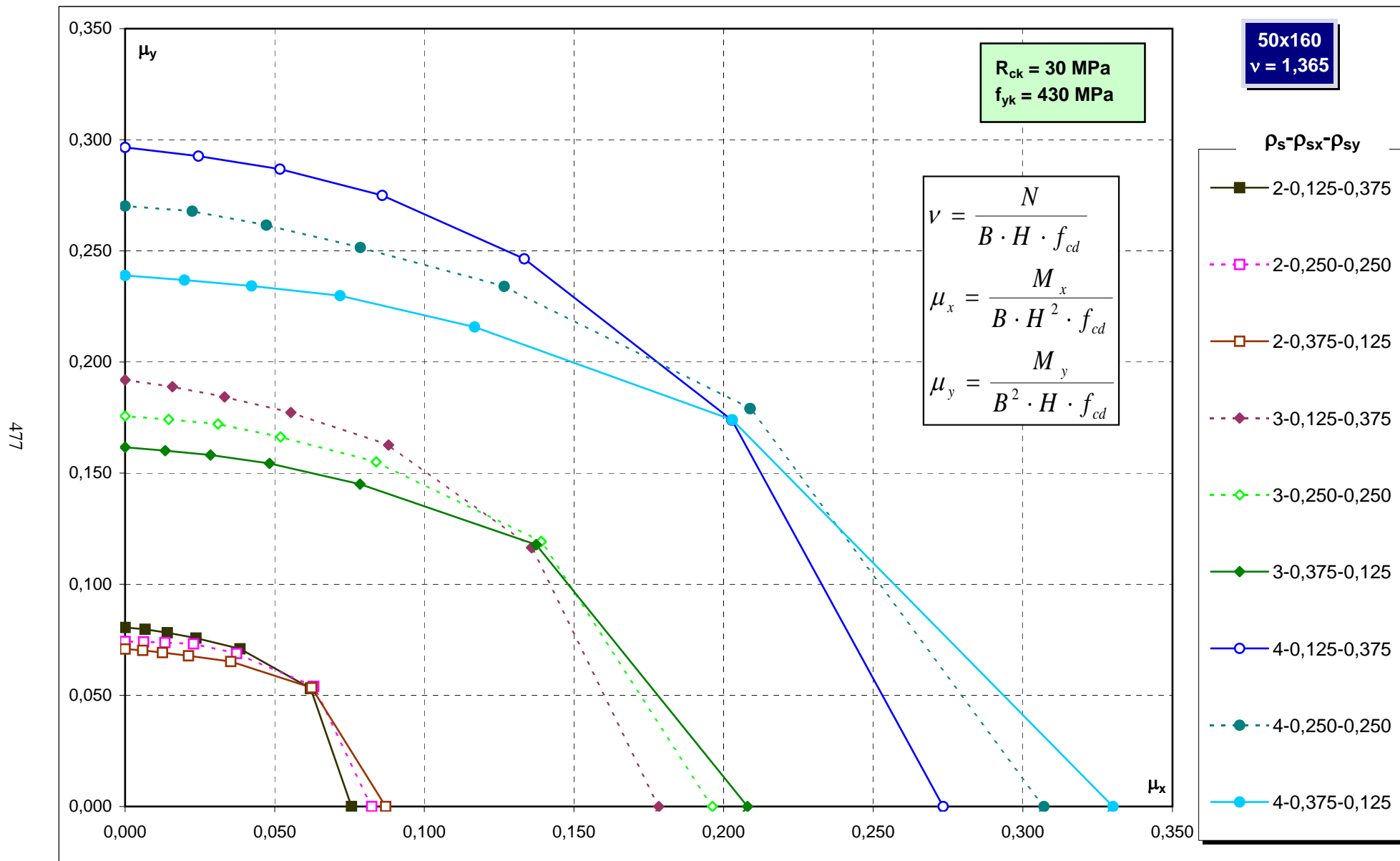


Abachi di progetto

476

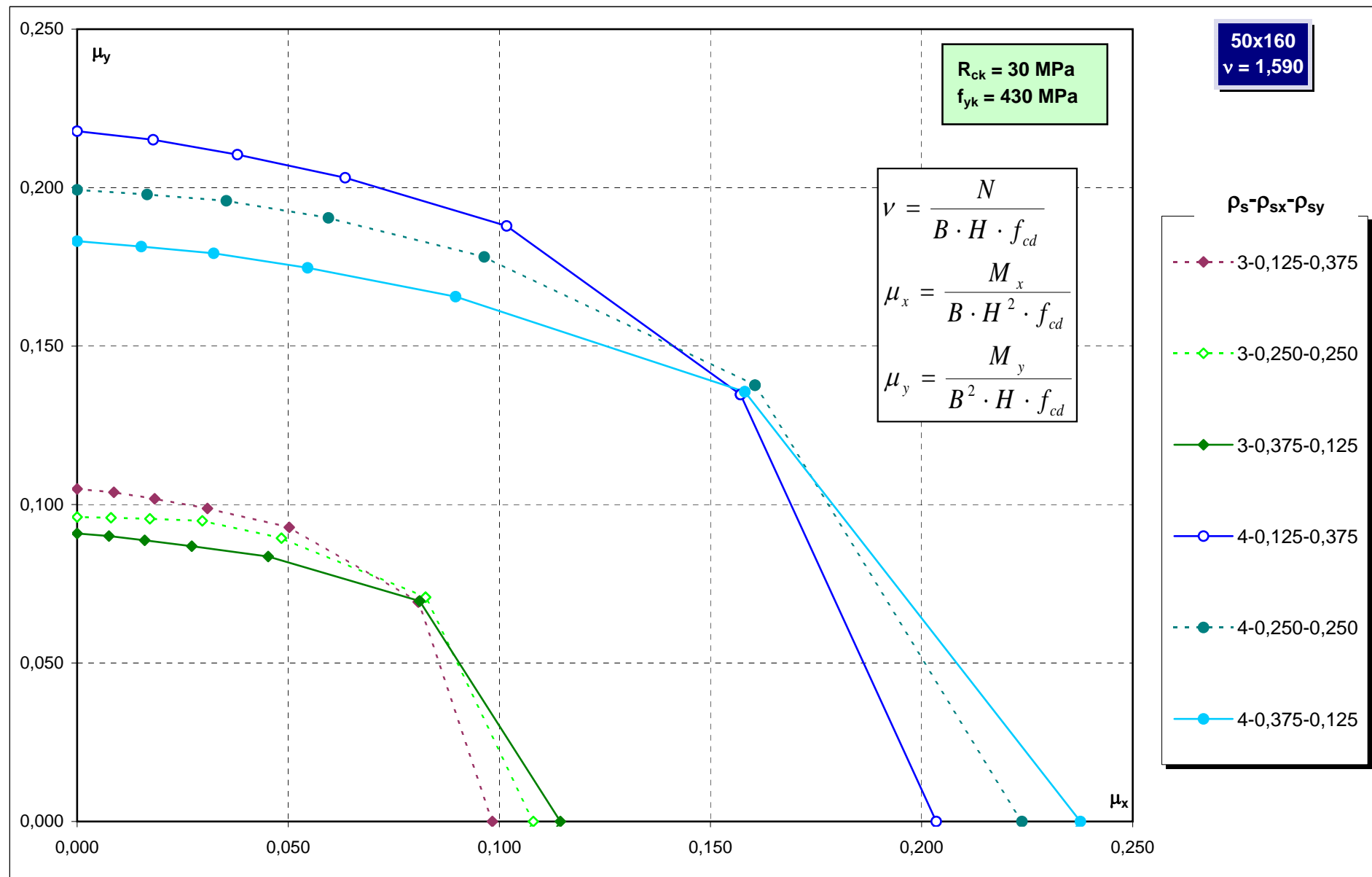


Abachi di progetto

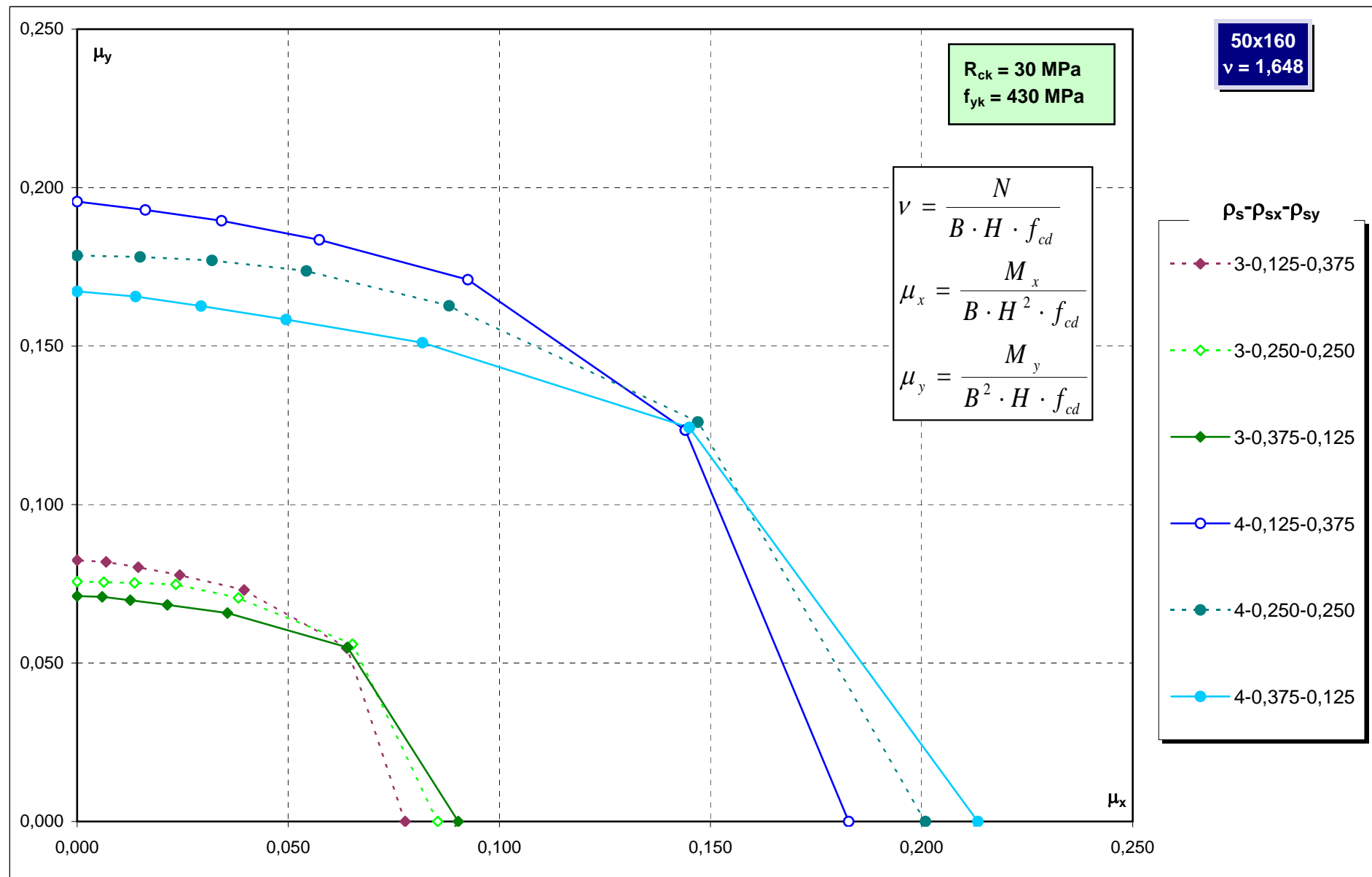


Abachi di progetto

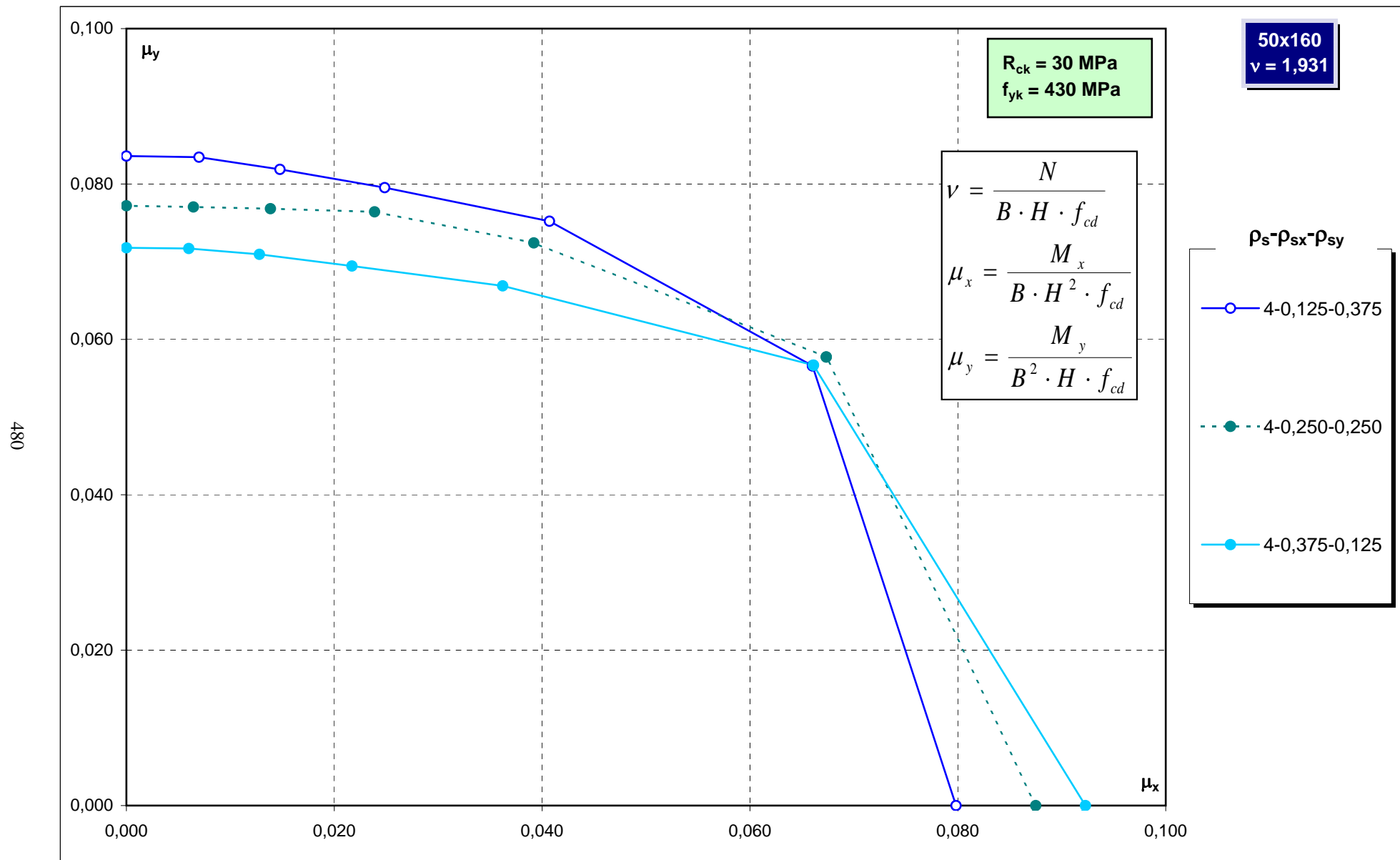
478



Abachi di progetto

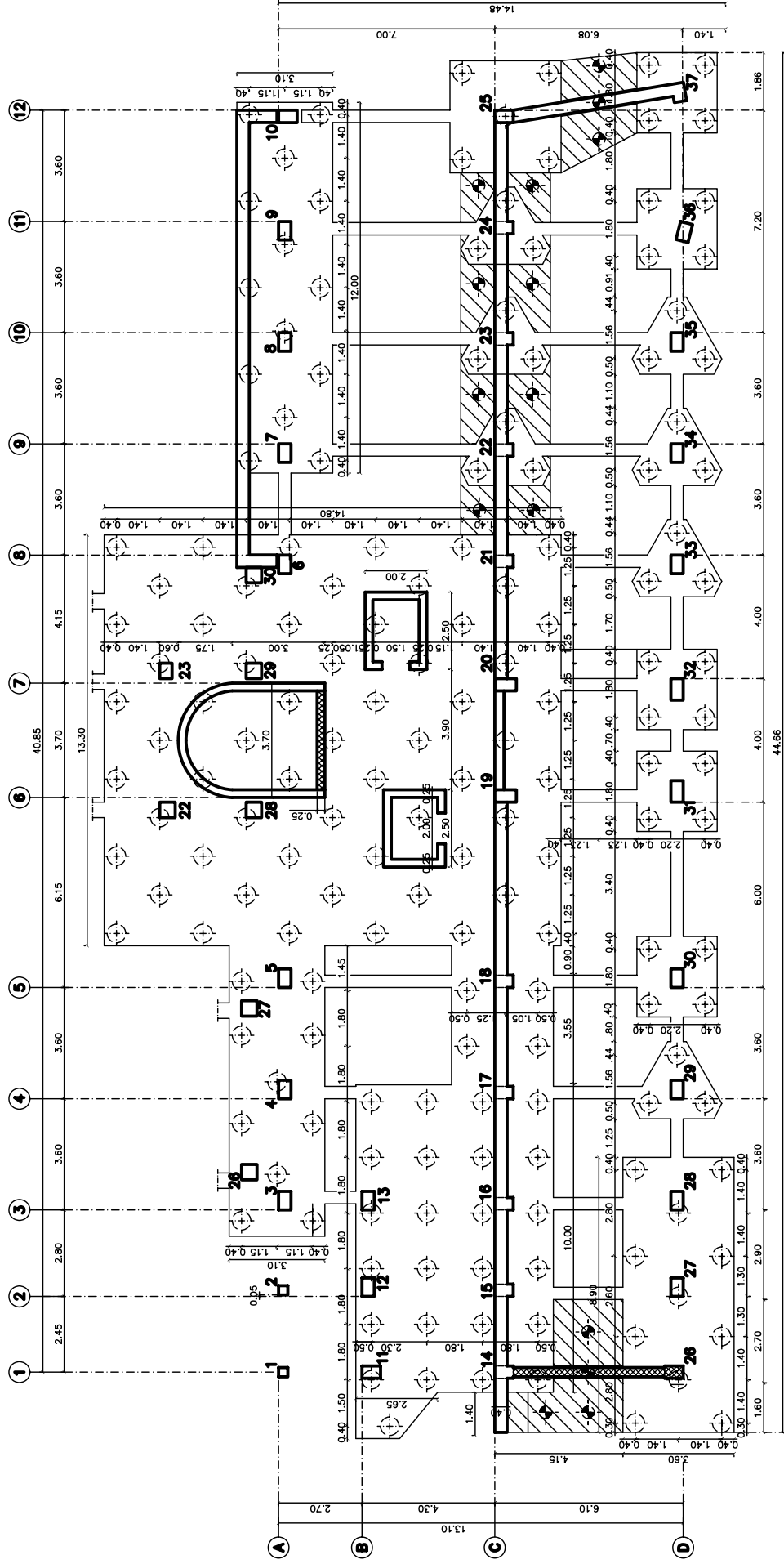


Abachi di progetto



PIANTA DELLE FONDAZIONI

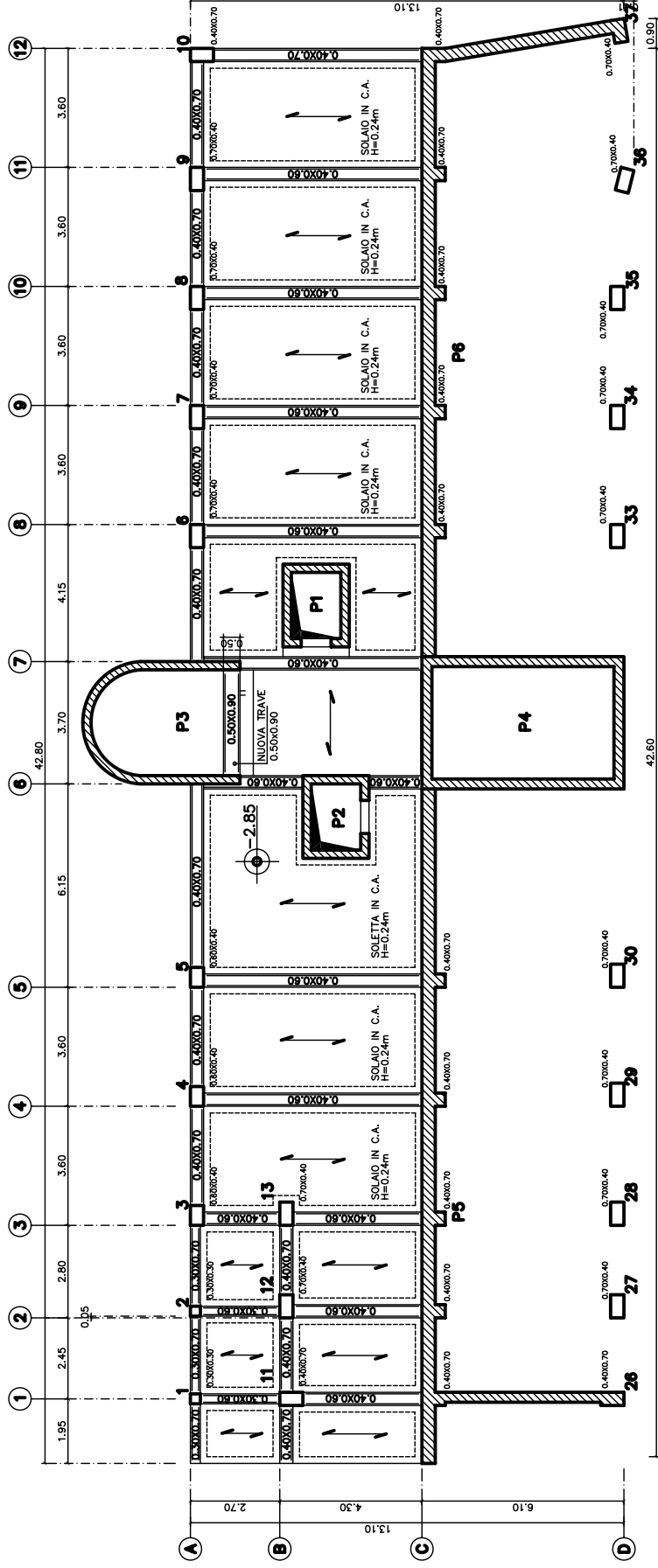
SCALA 1:200



SCALA 1:200



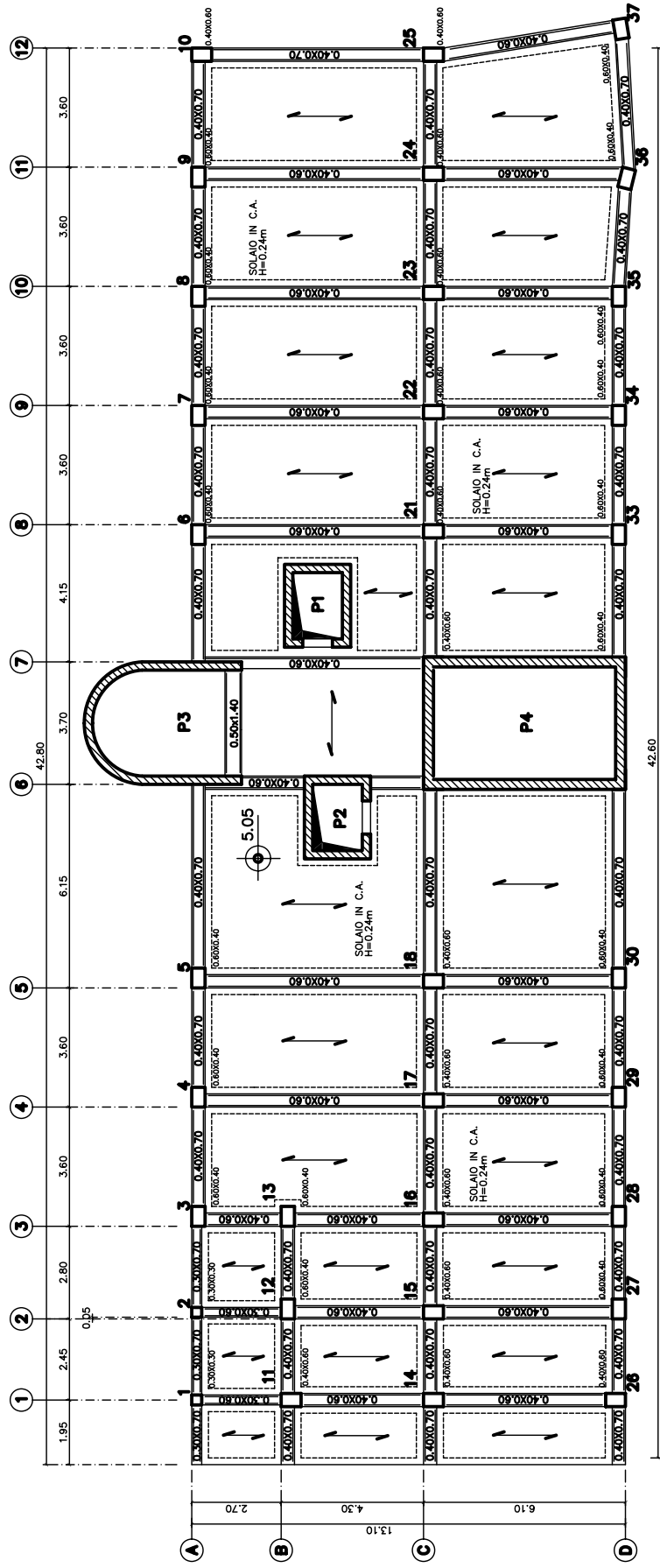
CARPENTERIA A QUOTA -2.85m **SCALA 1:200**



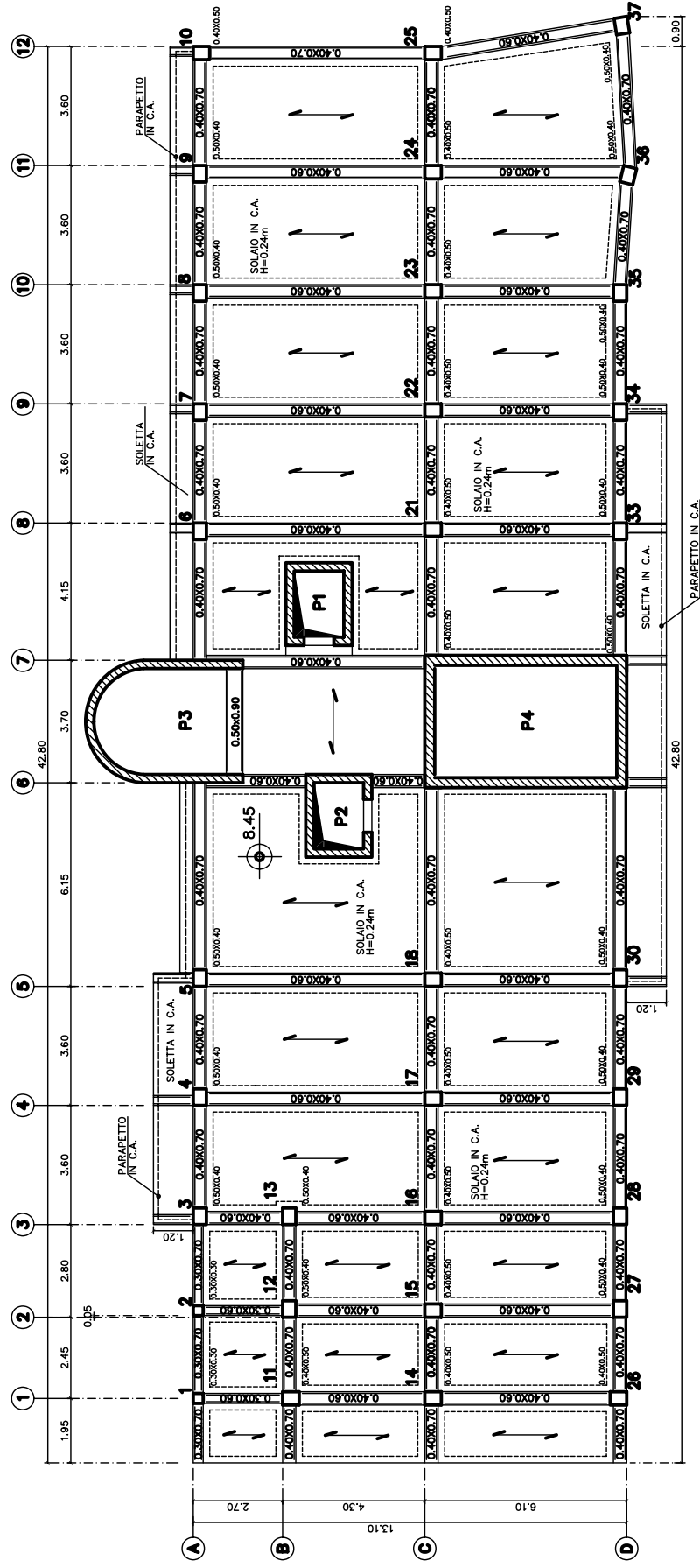
SCALA 1:200



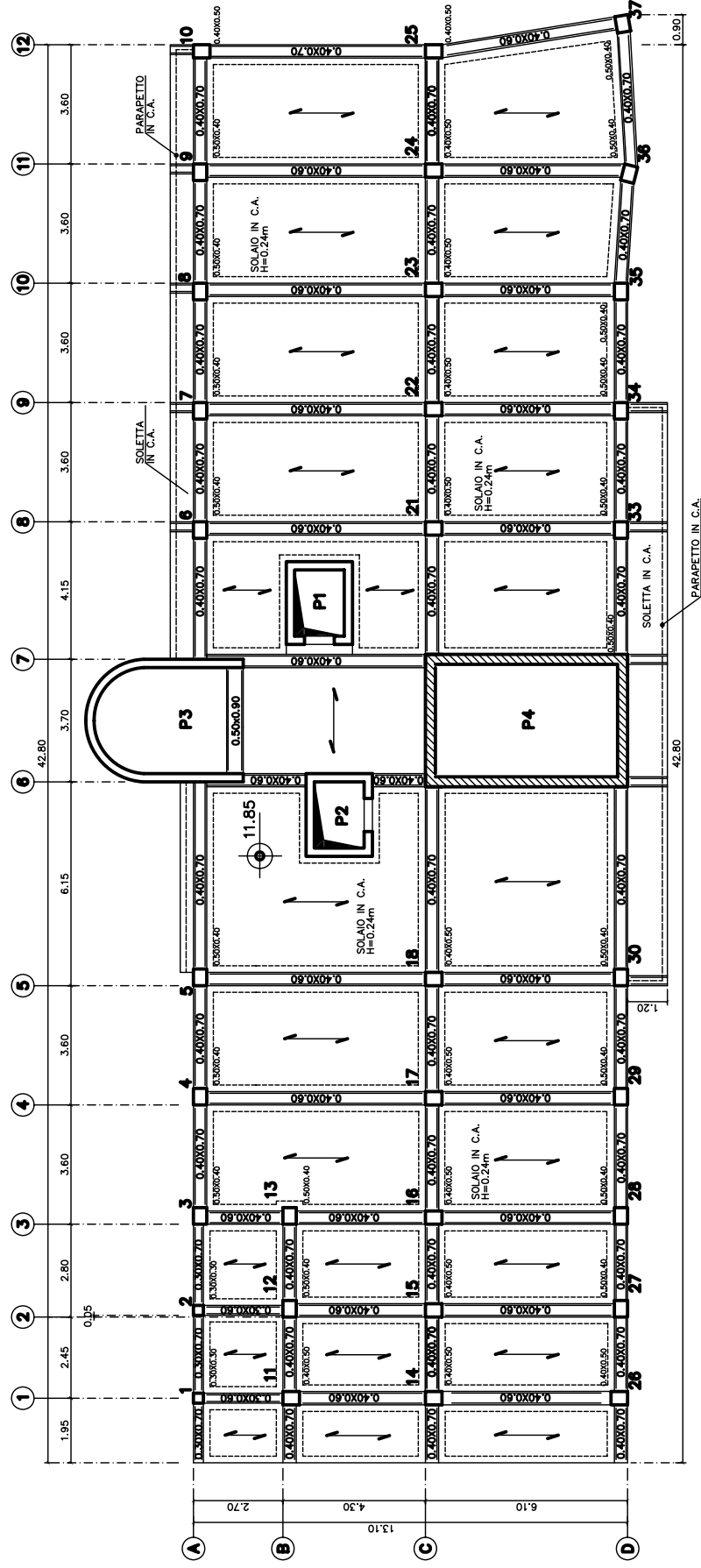
CARPENTERIA A QUOTA 5.05m **SCALA 1:200**



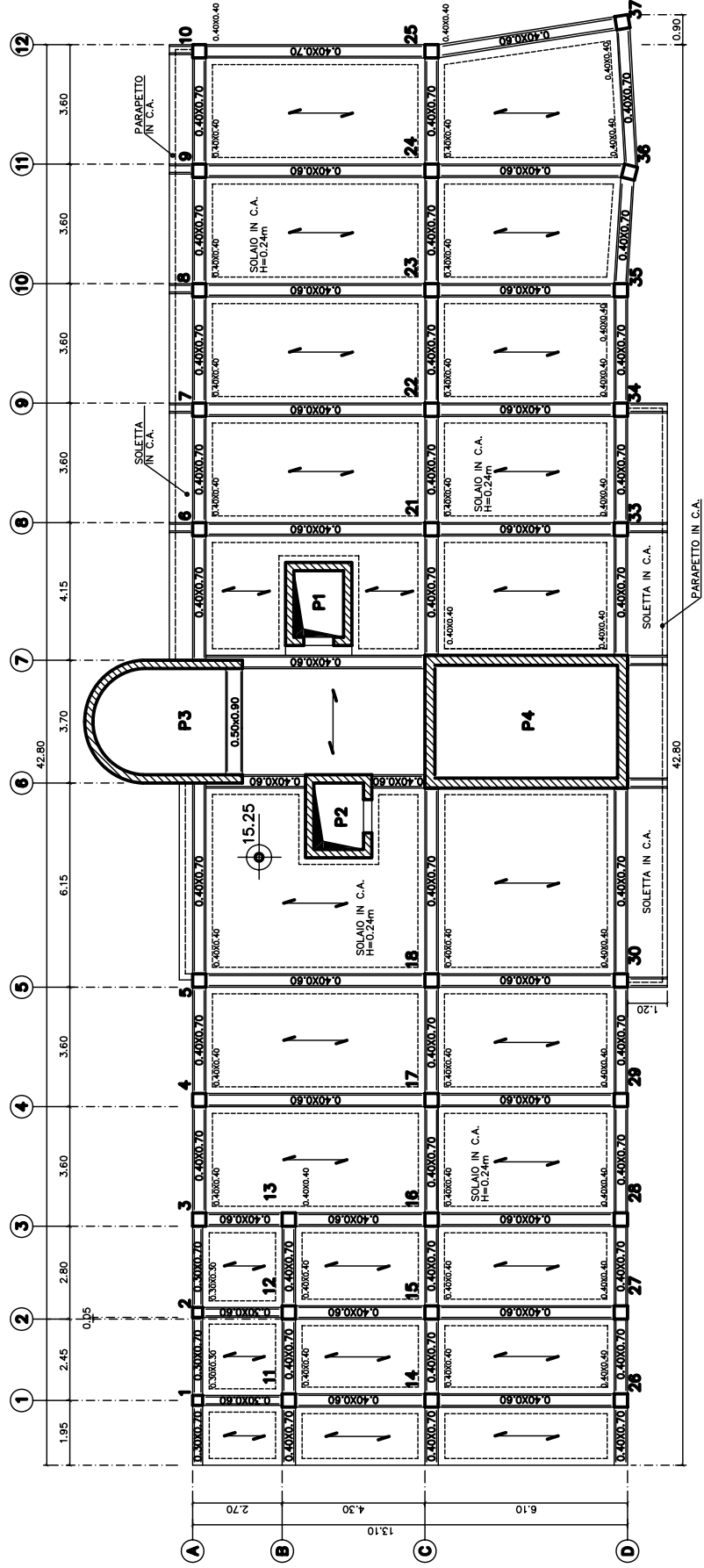
CARPENTERIA A QUOTA 8.45m **SCALA 1:200**



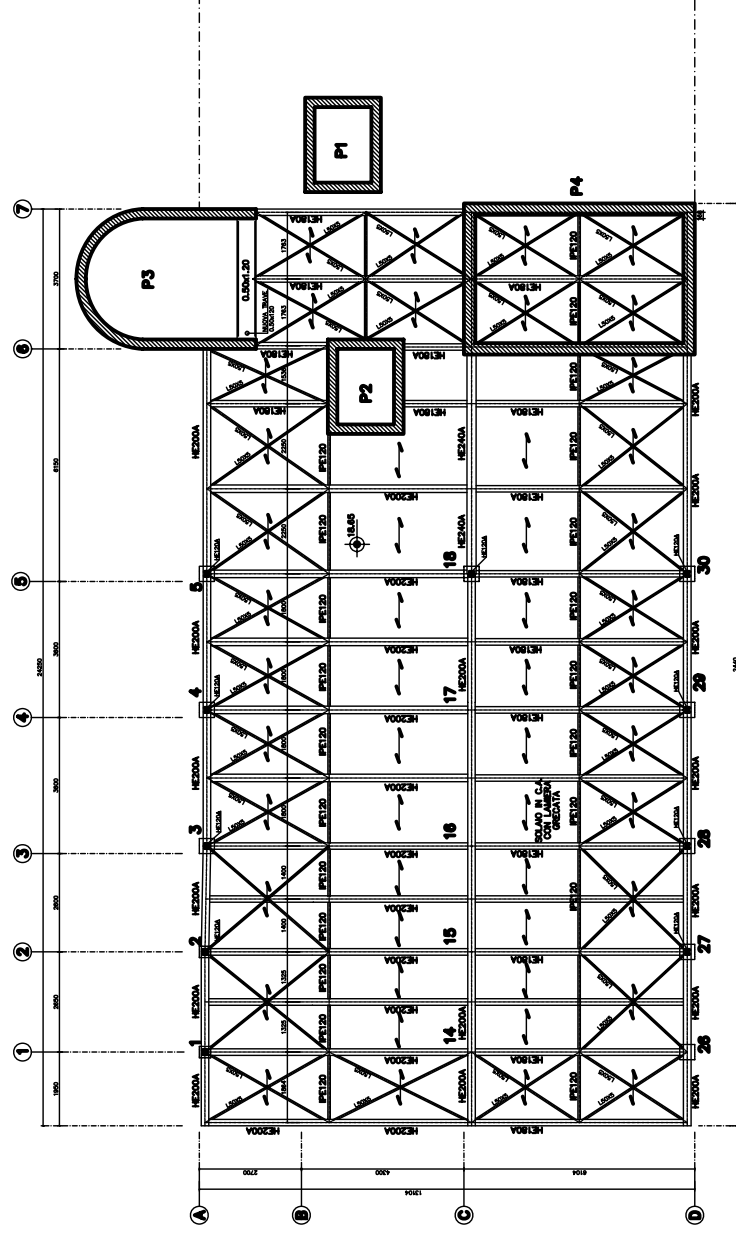
SCALA 1:200

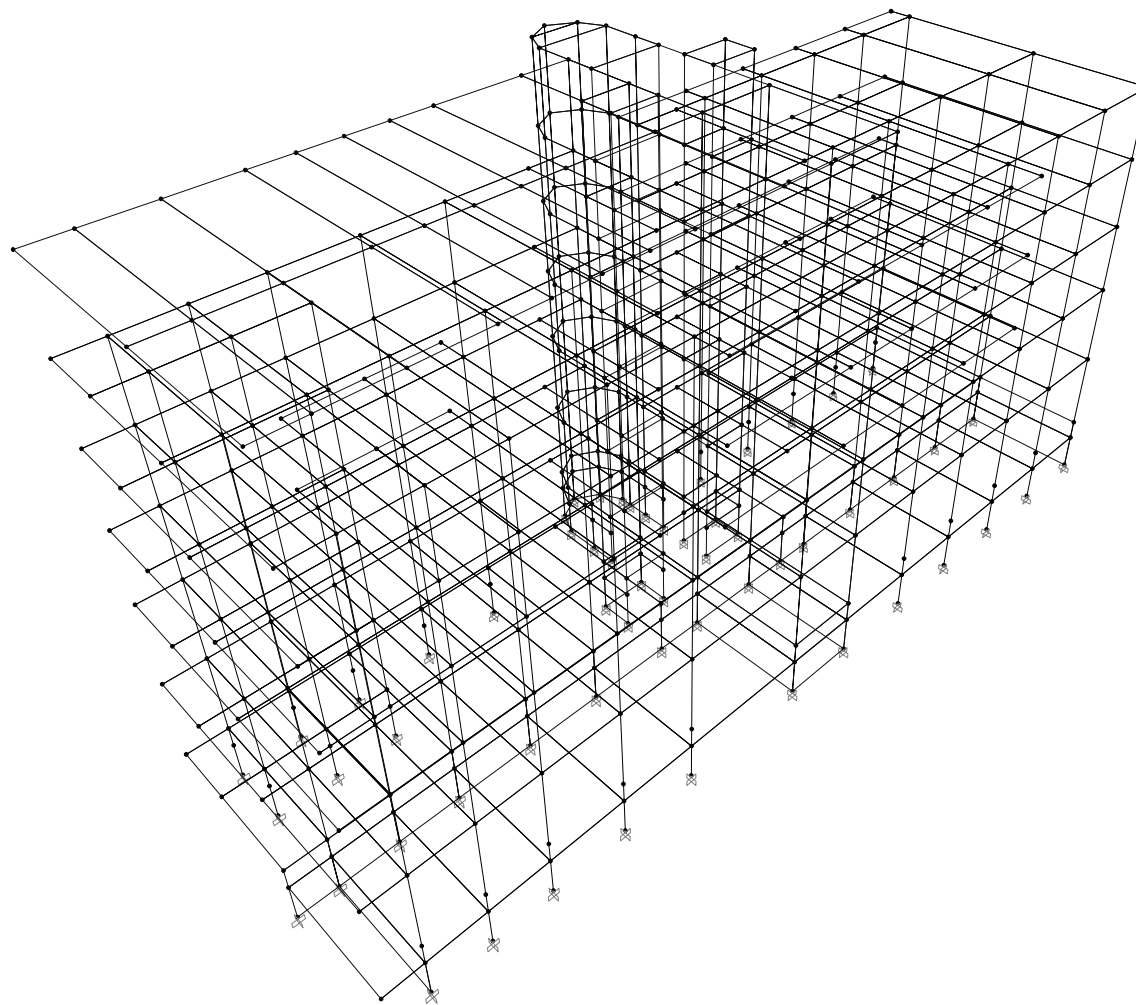


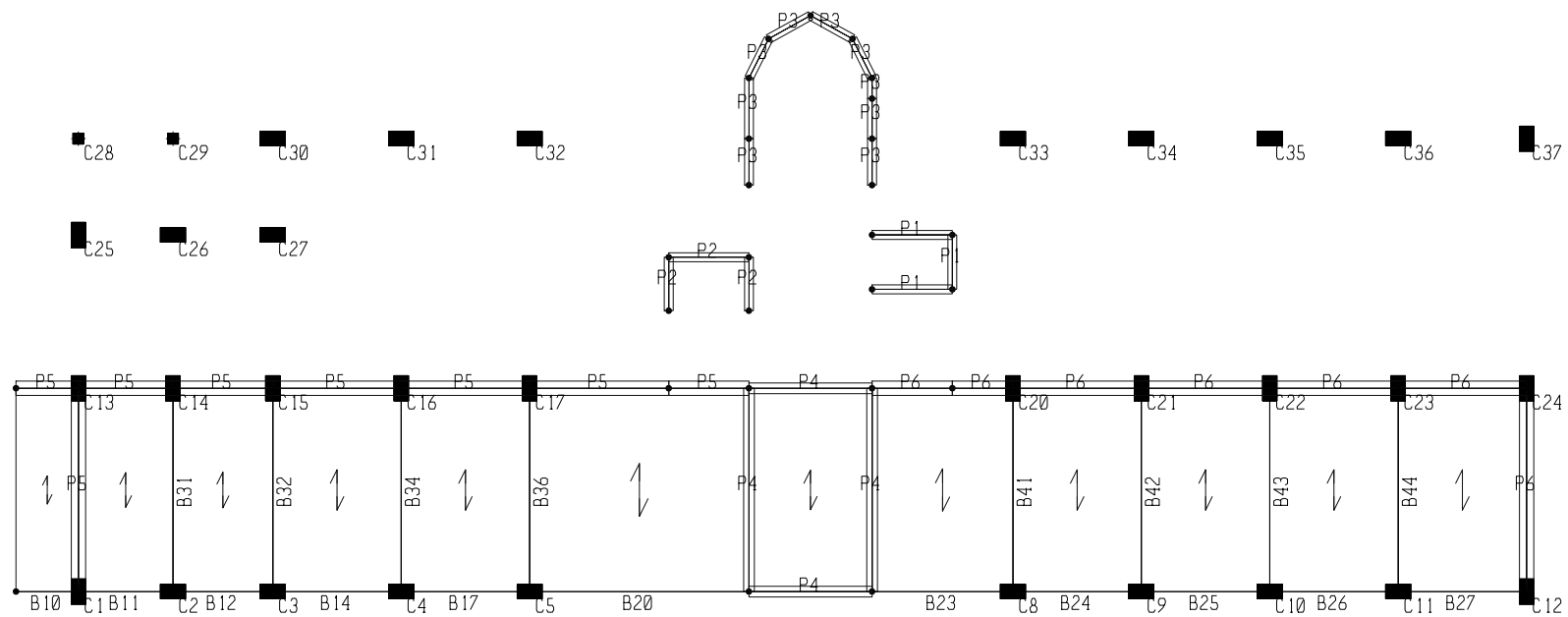
CARPENTERIA A QUOTA 15.25m **SCALA 1:200**

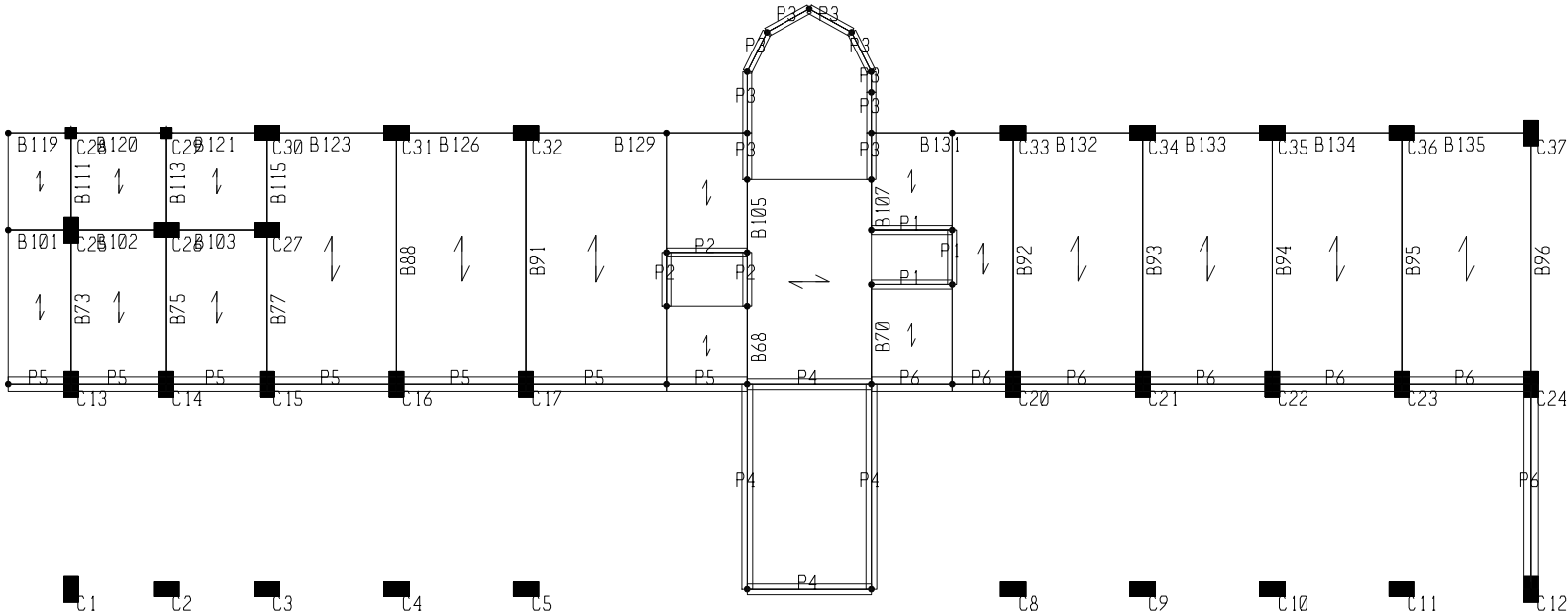


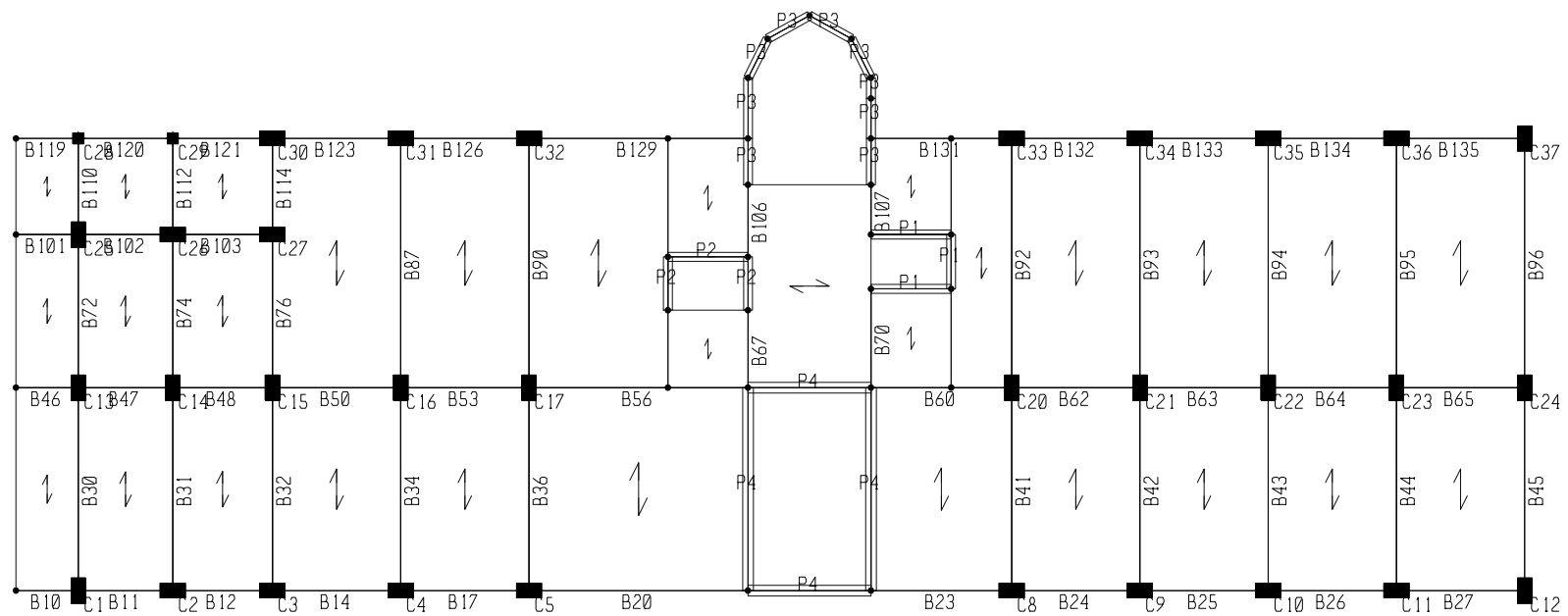
CARPENTERIA DI COPERTURA
SCALA 1:200

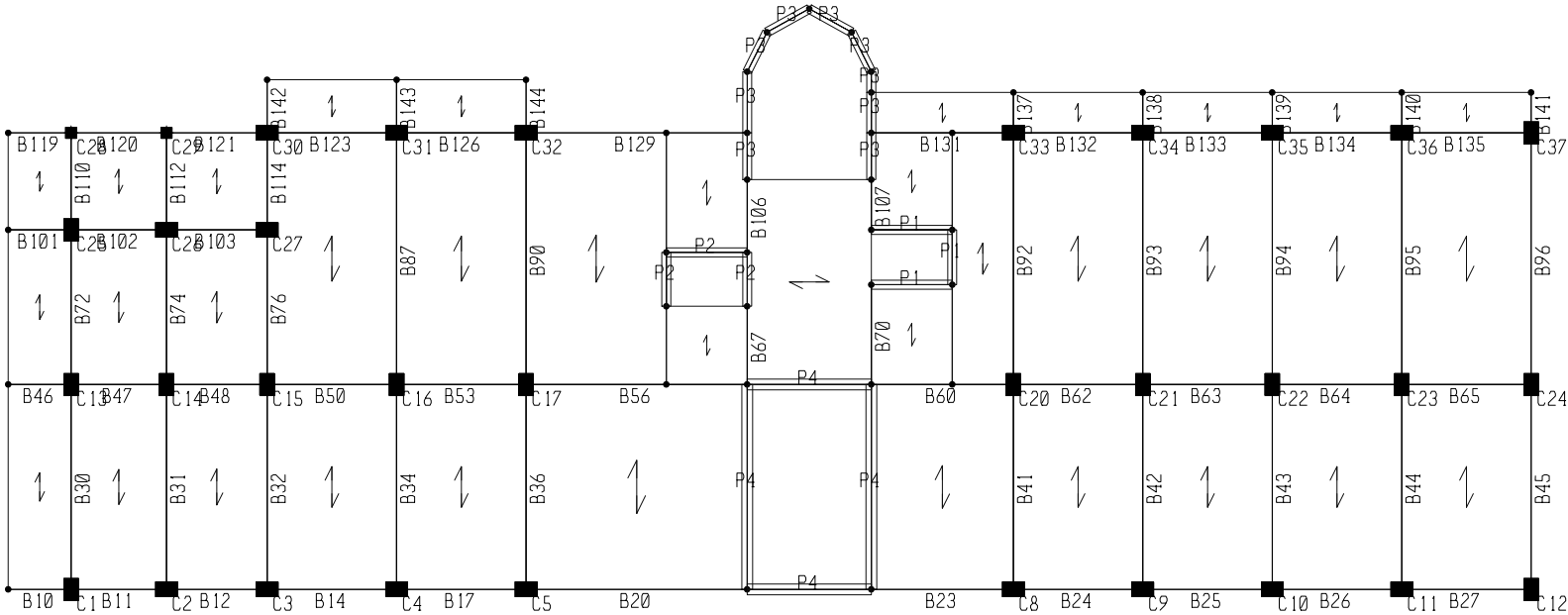


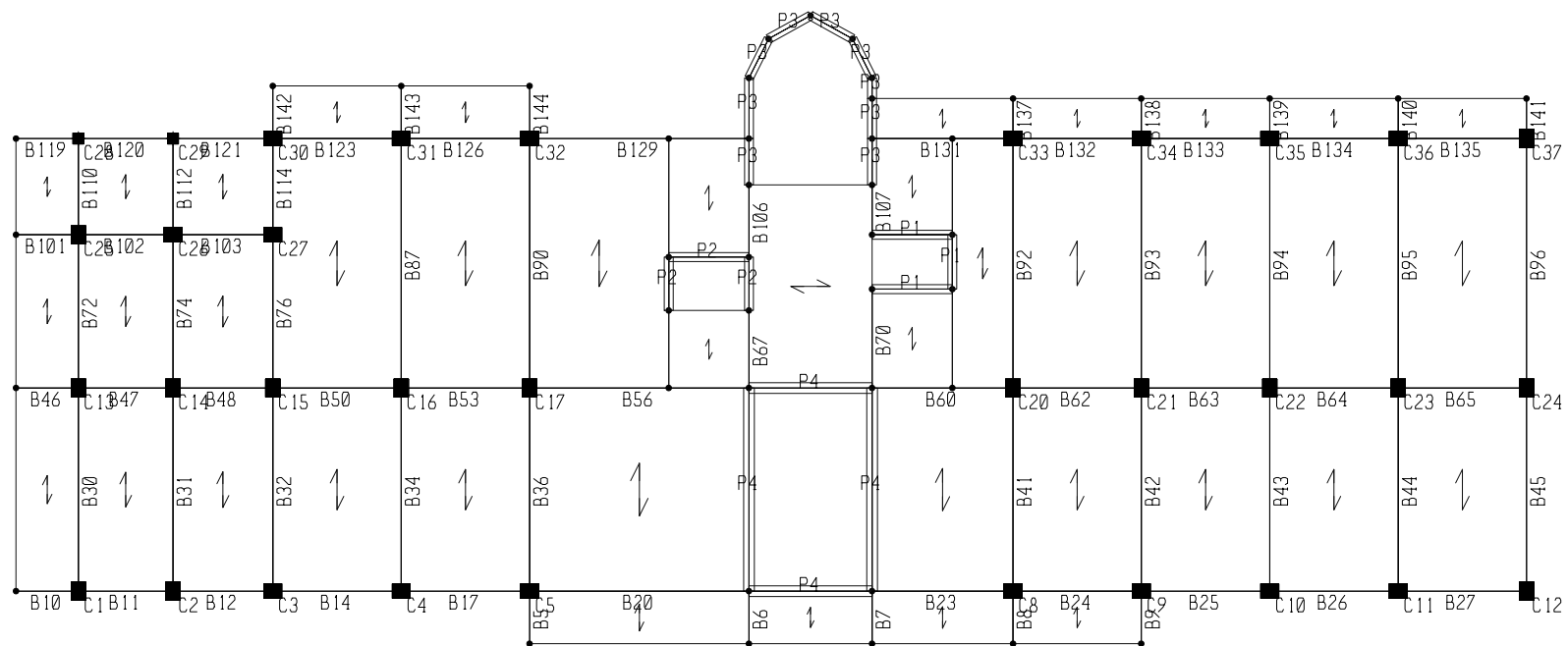


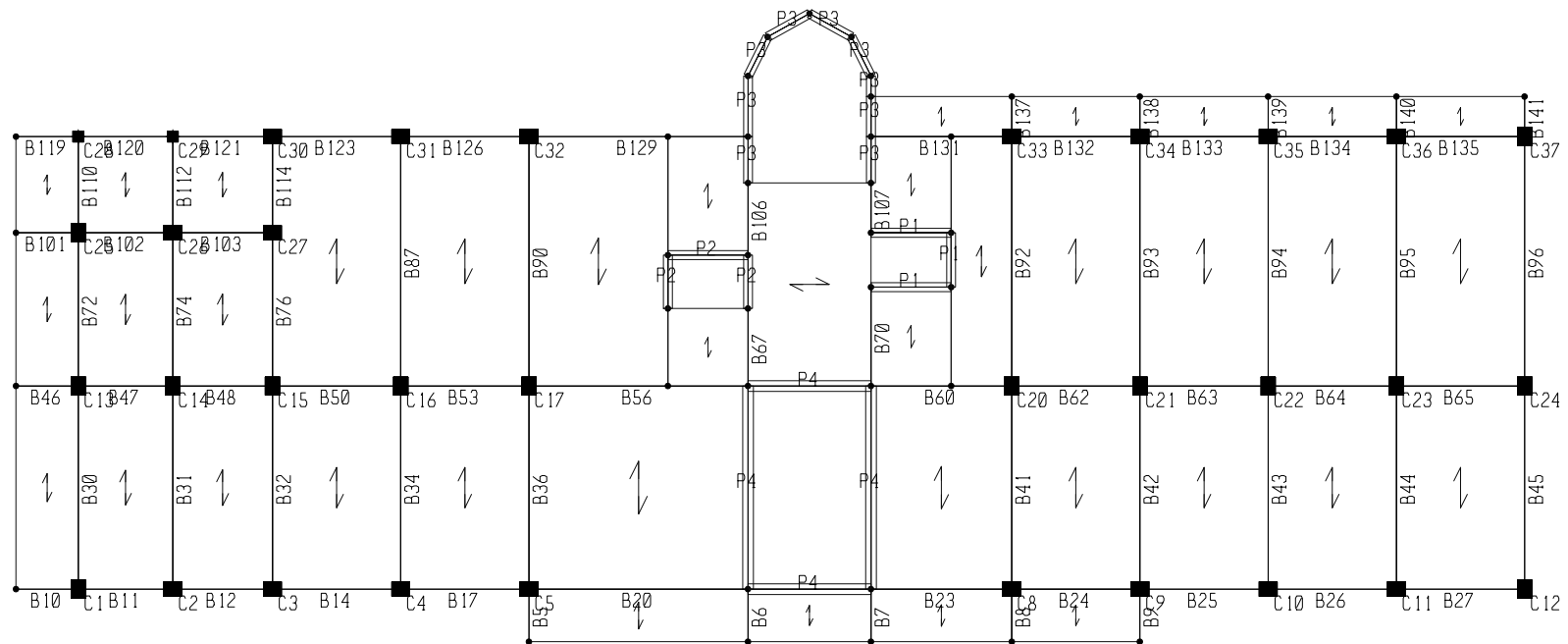


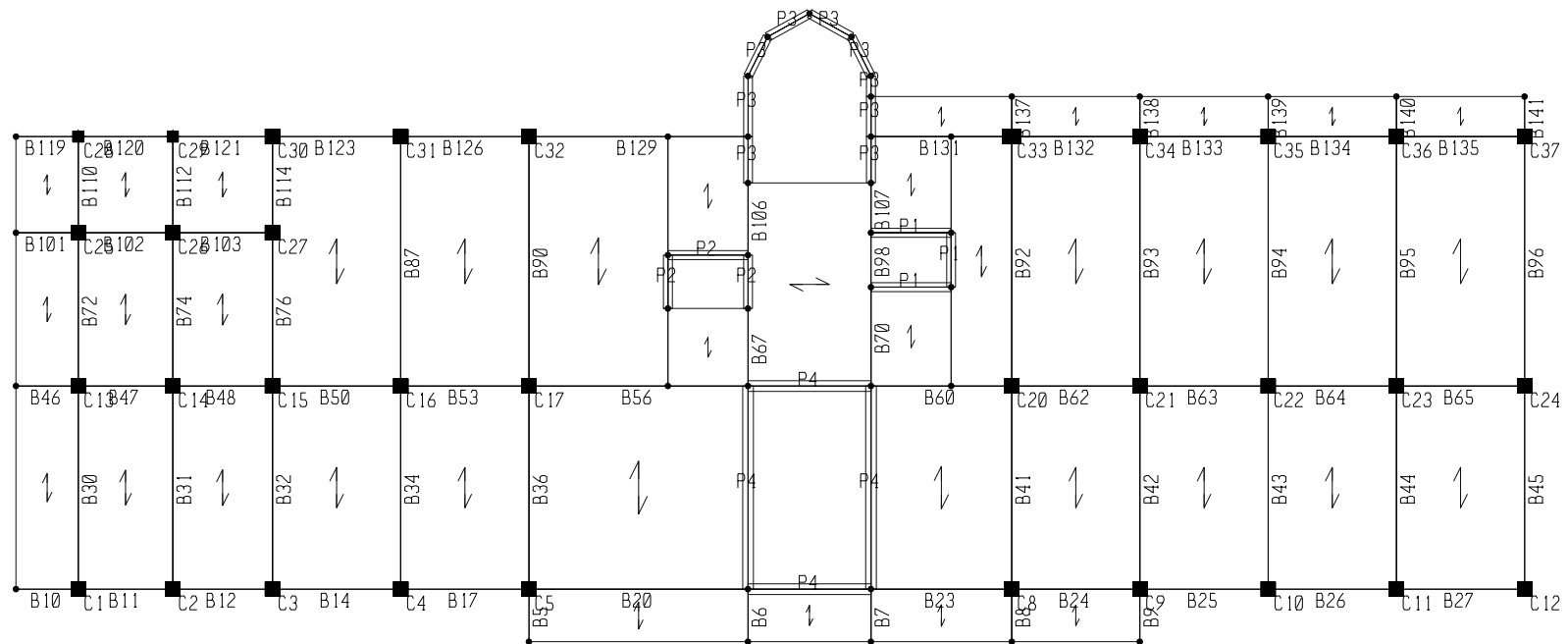


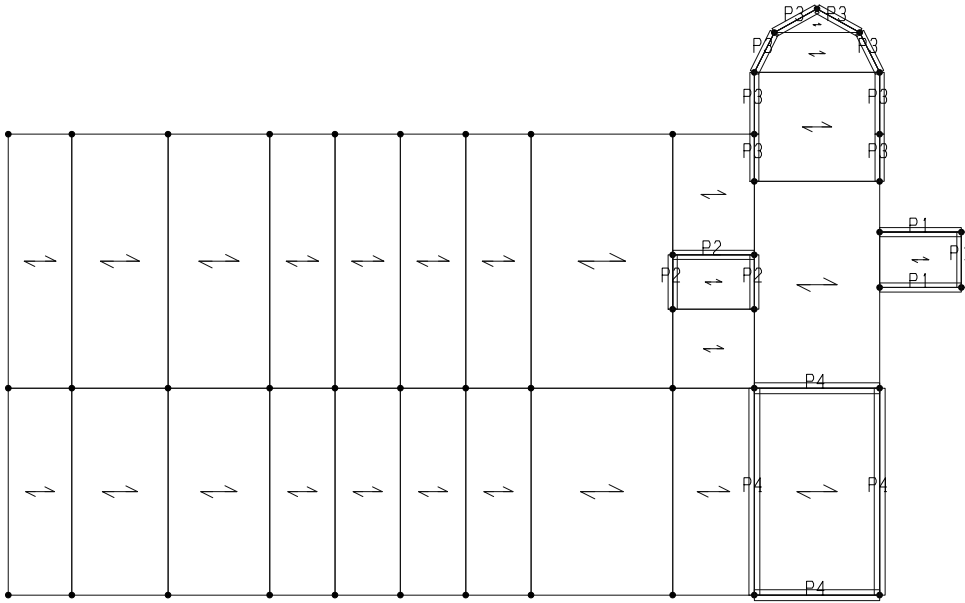


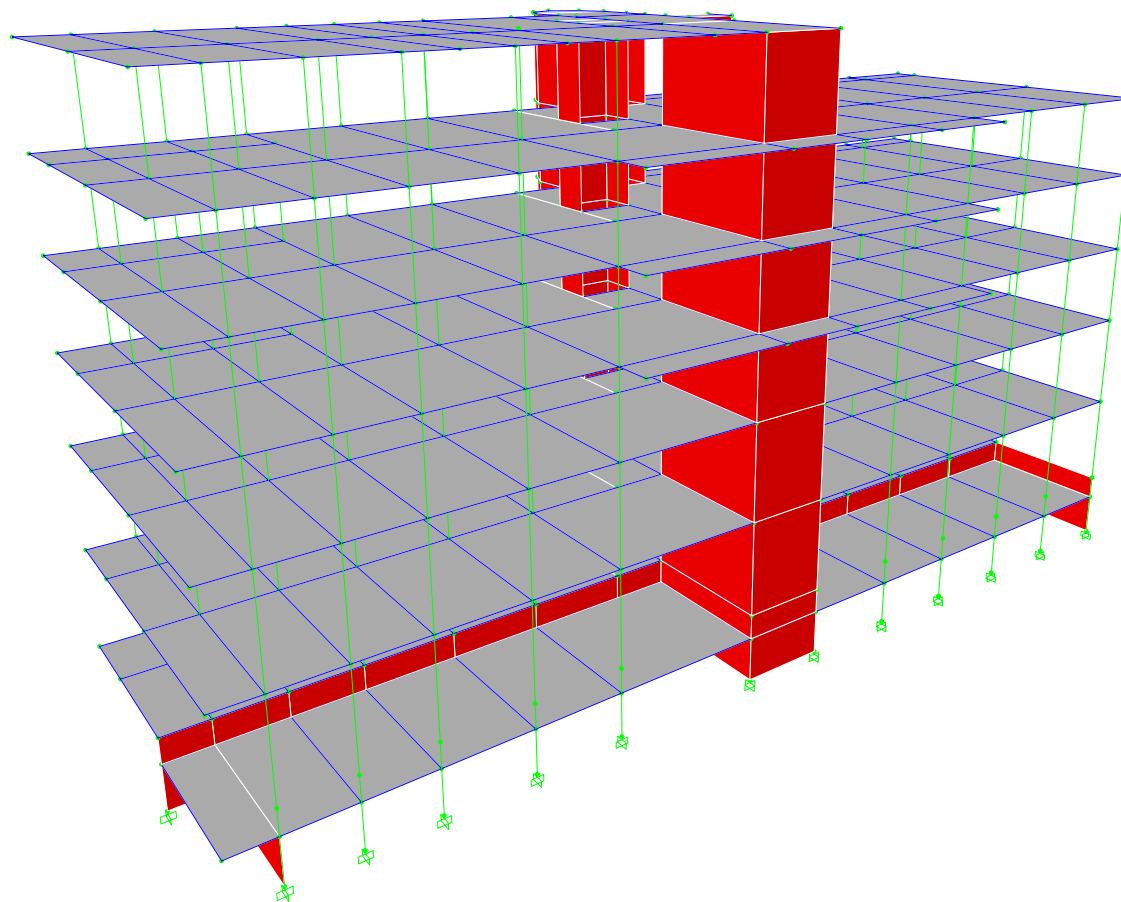


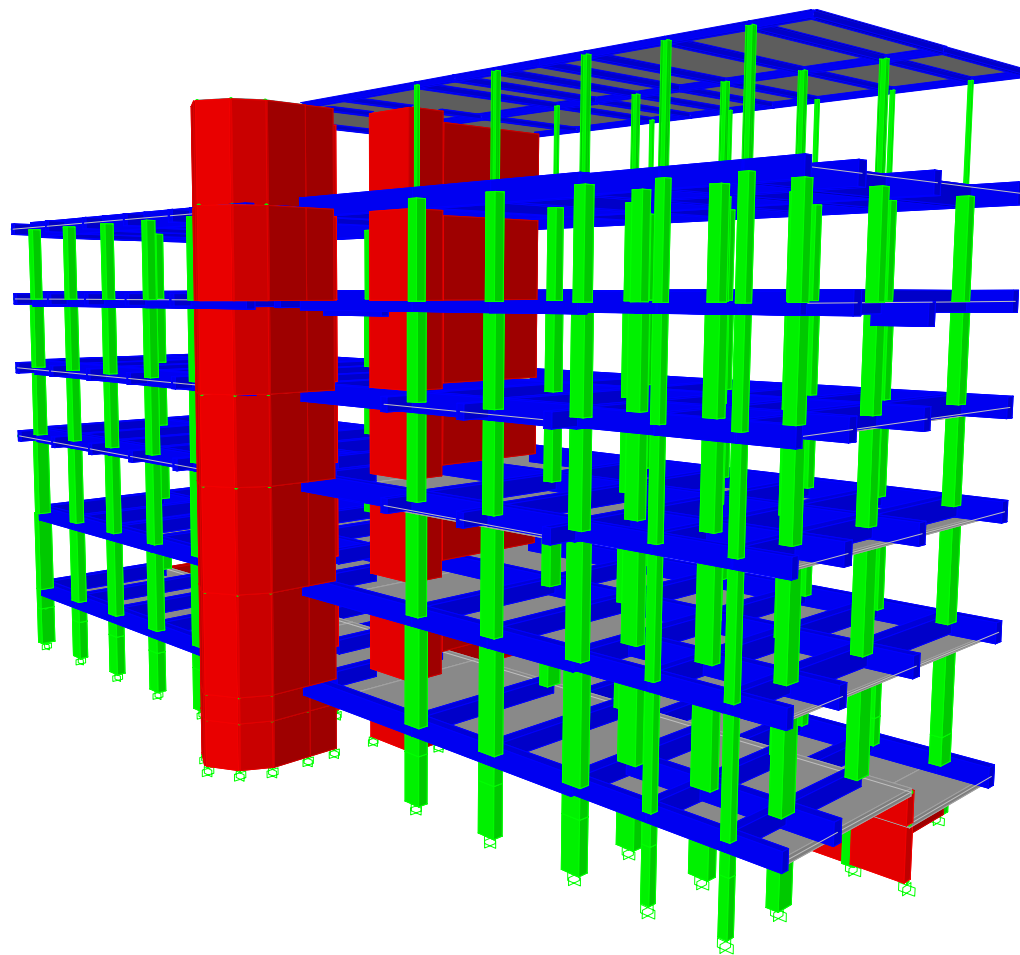




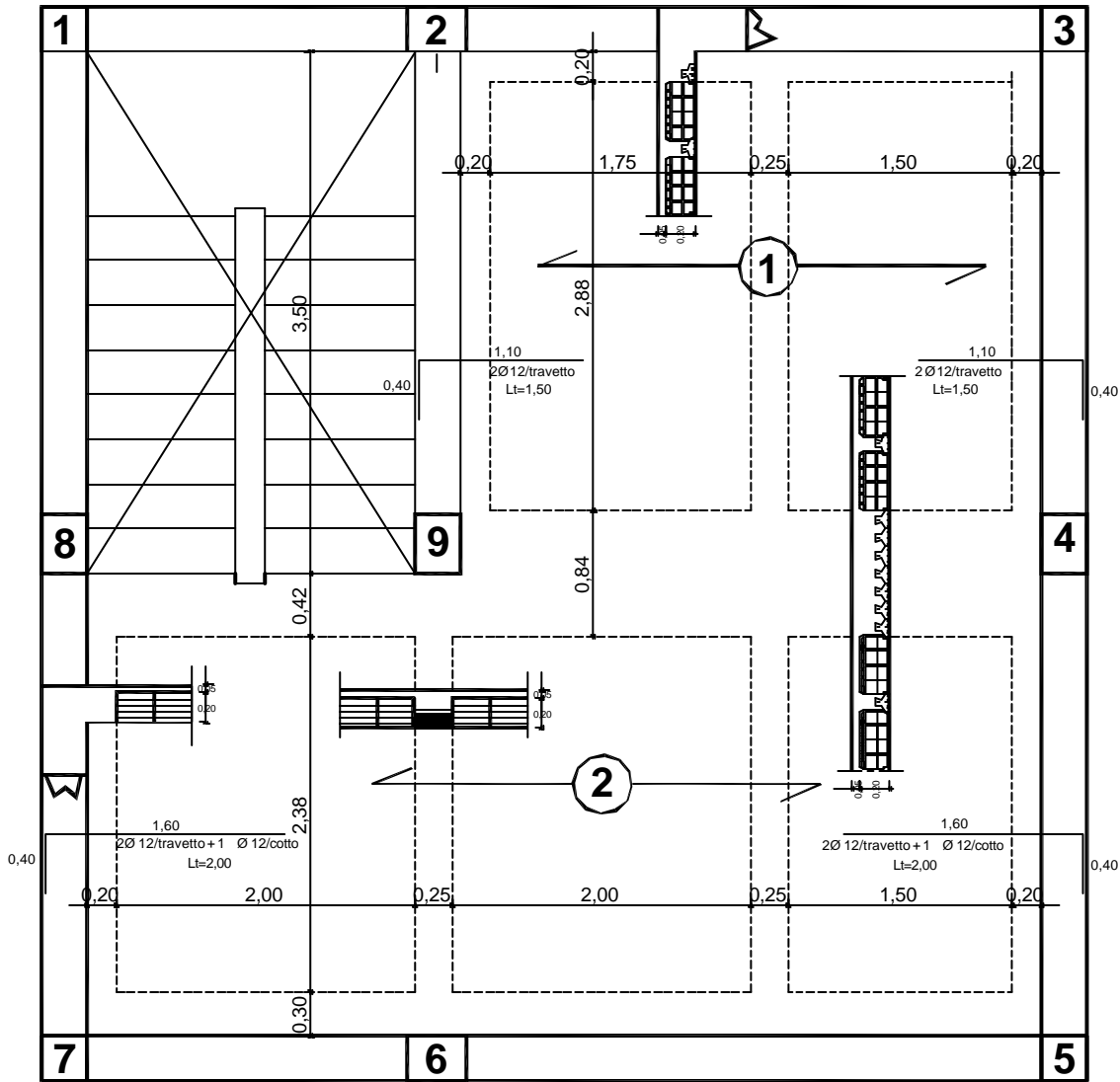




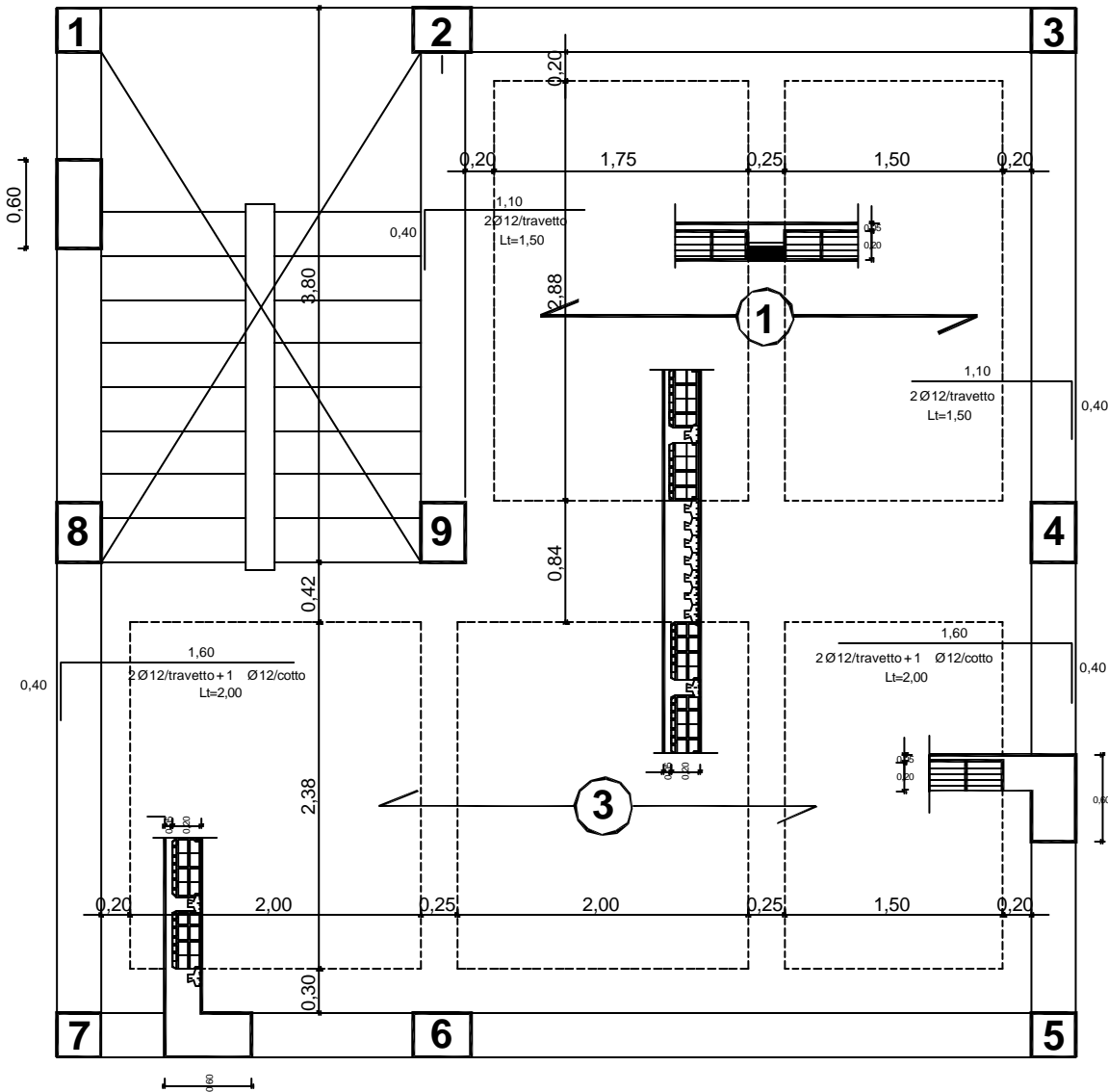




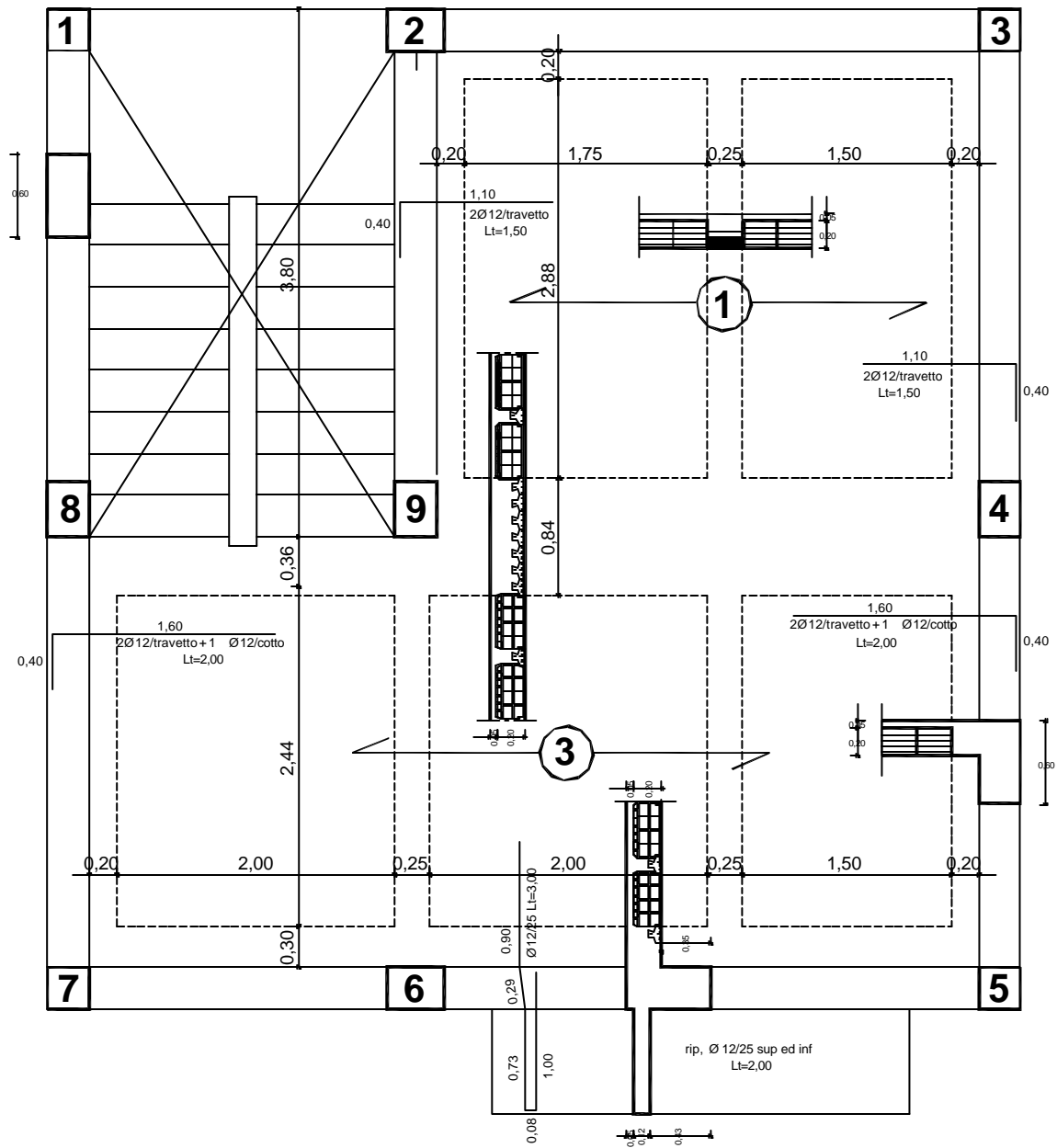
Carpenteria 1° impalcato
Scala 1:50



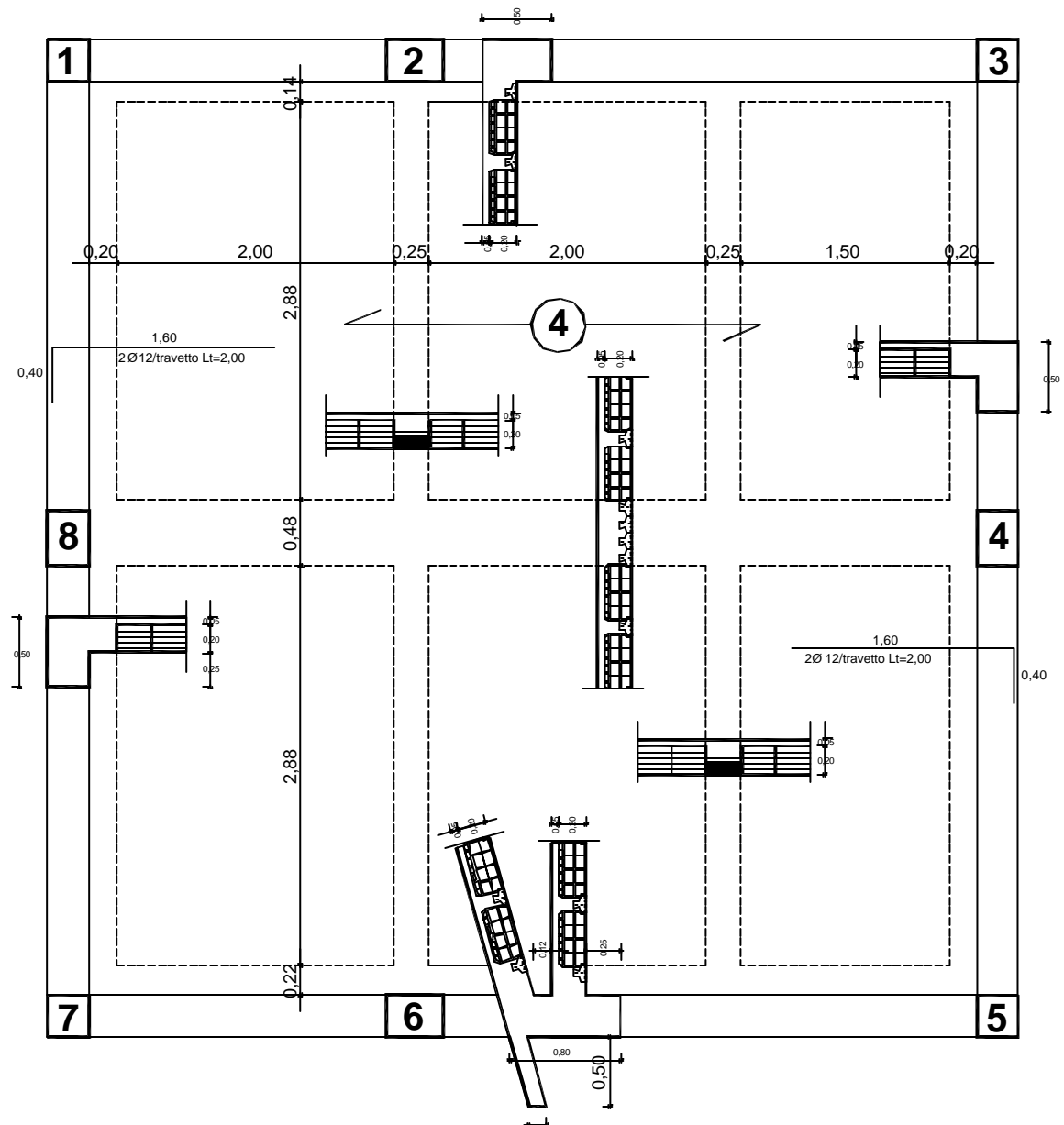
Carpenteria 2° impalcato
Scala 1:50



Carpenteria 3° impalcato
Scala 1:50

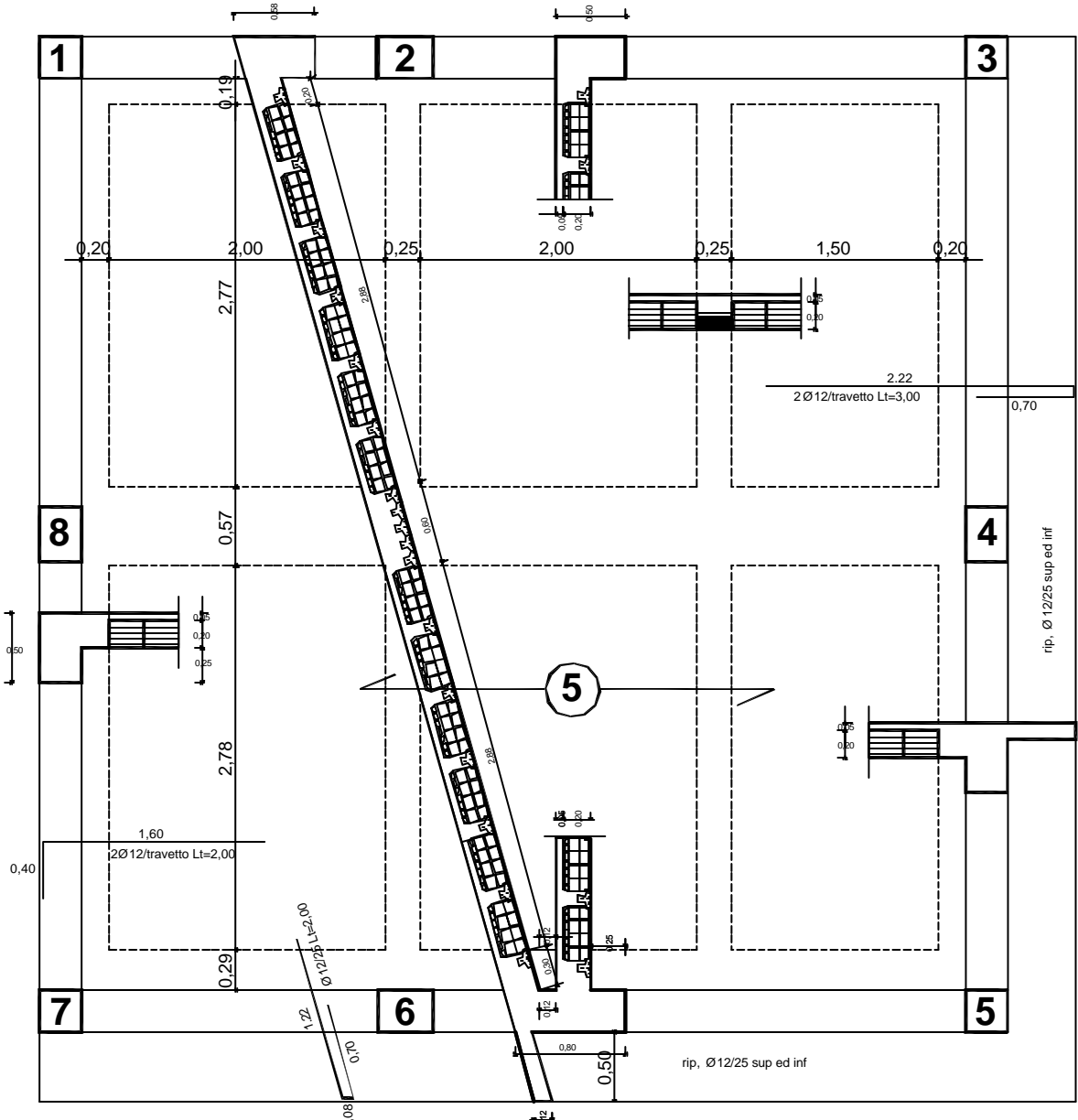


Carpenteria 4° impalcato
Scala 1:50



Carpenteria 5° impalcato

Scala 1:50



Sezione

Scala 1:100

